МРНТИ 27.37.17
УДК 51.77

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.20

Н.К. Шаждекеева[1], А.О. Чанпалова[1]

[1]Атырауский государственный университет им. Х. Досмухамедова, г. Атырау, Казахстан

РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ БАРАНКИНА-ДОРФМАНА ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Аннотация

В статье уделено внимание рассмотрению эконометрических моделей котировок акций крупных отечественных компаний, базирующихся на моделировании портфеля ценных бумаг и прогнозирования его поведения с помощью математического моделирования с использованием элементов теории вероятности и математической статистики. Также показано, как проблема выбора оптимального портфеля может быть сведена к задаче выпуклого квадратичного программирования.

В данной статье на основе модели Марковица разработана модель оптимального инвестиционного портфеля с двусторонними ограничениями на переменные, связанными с требованиями законодательства. Рассмотрен пример, в котором отобраны 10 видов акций и облигаций крупных казахстанских компаний, который формирует оптимальный набор активов и вычисляет риск оптимального портфеля для заданного уровня ожидаемой доходности. На основе полученных результатов, компании и предприниматели могут выстроить стратегию по вложению и покупке акций, зная вероятный доход от портфеля определенных видов ценных бумаг.

Ключевые слова: математическое моделирование, ценные бумаги, формирование портфеля акций.

Аңдатпа

Н.К. Шаждекеева[1], А.О. Чанпалова[1]

[1]Х. Досмұхамедов атындағы Атырау мемлекеттік университеті, Атырау қ., Қазақстан

ИНВЕСТИЦИЯЛЫҚ ПОРТФЕЛЬДІ ҚАЛЫПТАСТЫРУ КЕЗІНДЕ БАРАНКИН-ДОРФМАН ӘДІСІМЕН ҚОСАРЛЫ МІНДЕТТІ ШЕШУ

Мақалада бағалы қағаздар портфелін моделдеуге және ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика элементтерін пайдалана отырып, математикалық үлгілеу көмегімен оның мінез-құлқын болжауға негізделген ірі отандық компаниялардың акцияларын бағамдаудың эконометриялық модельдерін қарауға назар аударылған. Сондай-ақ, оңтайлы қоржынды таңдау мәселесі дөңес квадраттық бағдарламалау міндетіне қосылуы мүмкін.

Бұл мақалада Марковица моделі негізінде заңнама талаптарына байланысты өзгермелі екі жақты шектеулермен оңтайлы инвестициялық портфель моделі әзірленді. Активтердің оңтайлы жиынтығын қалыптастыратын және күтілетін кірістіліктің берілген деңгейі үшін оңтайлы портфель тәуекелін есептейтін ірі қазақстандық компаниялардың акциялары мен облигацияларының 10 түрі іріктелген мысал қарастырылды. Алынған нәтижелер негізінде компаниялар мен кәсіпкерлер бағалы қағаздардың белгілі бір түрлерінің портфелінен түсетін ықтимал кірісті біле отырып, акцияларды салу және сатып алу стратегиясын құра алады.

Түйін сөздер: математикалық модельдеу, бағалы қағаздар, акциялар портфелін қалыптастыру.

Abstract

SOLUTION OF THE DUAL PROBLEM BY THE BARANKIN-DORFMAN METHOD FOR THE FORMATION OF THE INVESTMENT PORTFOLIO

Shazhdekeeva N.K.[1], Chanpalova A.O.[1]

[1]Atyrau State University named after Kh. Dosmukhamedov, Atyrau, Kazakhstan

The article focuses on the consideration of econometric models of stock quotes of large domestic companies based on modeling the securities portfolio and predicting its behavior using mathematical modeling using elements of probability theory and mathematical statistics. It is also shown how the problem of choosing the optimal portfolio can be reduced to the problem of convex quadratic programming.

In this article, based on the Markowitz model, a model of an optimal investment portfolio with bilateral restrictions on variables associated with the requirements of the law is developed. An example is considered in which 10 types of stocks and bonds of large Kazakhstani companies are selected, which generates an optimal set of assets and calculates the risk of an optimal portfolio for a given level of expected return. Based on the results obtained, companies and entrepreneurs can build a strategy for investing and buying shares, knowing the probable income from a portfolio of certain types of securities.

Keywords: Mathematical modeling, securities, stock portfolio formation.

Неотъемлемой частью финансовой системы любого государства является фондовый рынок, или рынок ценных бумаг. Здесь формируются необходимые для экономического роста страны финансовые источники. Национальный рынок ценных бумаг РК развивается в соответствии с законом РК от 2 июля 2003 года № 461-II «О рынке ценных бумаг».

В связи с быстроменяющимися условиями современного рынка появляется большой риск допустить ошибку, например, в момент заработка или траты денежных средств, из-за постоянных изменений цен на ценные бумаги. И перед экономистами и математиками стоит задача изучения динамики рынка, анализа и прогнозирования дальнейших изменений цен на инструменты, обращающиеся на финансовом рынке. Еще одной причиной, которая заставляет обратить внимание на преждевременную оценку прогноза изменений цен, является возможность составления плана работы компании, позволяющего наиболее выгодно вложить денежные средства.

Наиболее выгодное вложение денежных средств представляется возможным при формировании инвестиционного портфеля. Каждый инвестор может формировать один или несколько портфелей, хранить их в различных депозитариях, торговаться на различных фондовых биржах. Постоянно меняющиеся курсы ценных бумаг влекут за собой изменение доходности портфеля и следственно общий доход инвестора. Для управления риском инвестиционного портфеля и сбережения вложенных средств возникает необходимость в анализе динамики курсов ценных бумаг, где используется приемы так называемого технического анализа. Портфели могут различаться по структуре, доходности и риску. Инвестор в любой момент может изменить структуру портфеля, чтобы привести соотношение «доходность – риск» к выгодной ему величине.

Любой финансовый портфель характеризуется параметрами – ожидаемой эффективностью и риском, в качестве меры которого можно рассмотреть дисперсию (или стандартное отклонение). В формировании инвестиционного пакета финансовых активов важно соблюдать минимальный риск по сравнению с другими портфелями, составленными из этих же активов, чего позволяет достичь теория оптимального портфеля.

Модель оптимальной структуры портфеля предстает в следующем виде:

$$minV_p = \sum_i \quad \sum_j \quad V_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

При ограничениях:

$$\{\sum_j \quad x_jm_j = m_p \ \sum_j \quad x_j = 1 \ x_j \geq 0 \ x_j \leq \delta_j \tag{2}$$

где V_p - вариация эффективности портфеля;

V_{ij} - ковариации эффективностей ценных бумаг i-го и j-го вида;

m_j – математическое ожидание эффективности ценной бумаги j-го вида;

m_p – заданная эффективность портфеля;

x_j – доля капитала, вложенного в ценные бумаги j-го вида.

Необходимым условием данной постановки задачи является неотрицательность переменных. $x_j > 0$ показывает, что лучше вложить долю x_jналичного капитала в ценные бумаги вида j, а $x_j < 0$ указывает на взятие в долг ценных бумаг данного вида в количестве $-x_j$.

Условие $x_j \leq \delta_j$ - это условие законодательства, которое гласит, что оценочная стоимость ценных бумаг одного предприятия могут составлять не более δ_j процентов стоимости активов [1].

Для решения данной задачи квадартичного программирования были разработаны специальные численные методы.

Прямая задача квадратичного программирования:

$$min\, f(x) = \sum_i \quad \sum_j \quad d_{ij}x_ix_j \tag{3}$$

при ограничениях

$$\{\varphi_j = \sum_{j=1}^{n} \quad a_{ij}x_j + b_i \leq 0, (i = \underline{1,m}) \ x_j \geq 0, (j = \underline{1,n}) \tag{4}$$

Двойственная задача квадратичного программирования

$$max\ g(x) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}{}^{-1} v_i v_j + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j \quad (5)$$

при ограничениях

$$\{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}{}^T + v_i \geq 0, (i = \underline{1,n})\ u_j \geq 0, (j = \underline{1,m}) \quad (6)$$

где

$$v_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i},\ u_j - \text{множители Лагранжа.}$$

Алгоритм составления двойственной задачи можно представить в следующем виде:

1. Функция Лагранжа является целевой функцией данной задачи:

$$f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j \varphi_j(x)$$

Число переменных вычисляют по $m + n$ формуле, что является сумме количеству переменных и ограничений задачи.

2. Максимизацией заменяется минимизация целевой функции двойственной задачи.
3. Каждому ограничению $\varphi_j(x) \leq 0$ соответствует новая неотрицательная переменная u_j.

При этом выполняется условие дополняющей нежесткости (обобщение второй теоремы двойственности):

$$\varphi_j(x^*) u_j = 0, (j = 1, \dots, m),$$

и экстремальные значения целевых функций совпадают.

Здесь двойственные переменные u_j являются оценками ограничений прямой задачи, т.е. при отличии от нуля какой-либо переменной допустимого решения одной задачи это решение обращает соответствующее ограничение двойственной задачи в строгое равенство; а если допустимое решение одной задачи обращает в строгое неравенство некоторое ограничение данной задачи, то переменная, соответствующая этому ограничению, равна нулю[2].

Получить решения пары двойственных задач можно, решив обобщенную задачу Лагранжа, выступающую критерием оптимальности решения.

В данной статье рассматривается один из методов решения данной задачи, а именно метод Баранкина-Дофмана. Первое, составляется задача квадратичного программирования:

$$min\left\{\underline{p}^T \underline{x} + \underline{x}^T C \underline{x} | A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\right\} \quad (7)$$

где C – положительно полуопределенная матрица размерности $n \times n$, A - матрица размерности $m \times n$. Составляются условия Куна-Таккера для задачи (7):

$$\{A\underline{x} + \underline{Y} = \underline{b}\ 2C\underline{x} - \underline{V} + A^T \underline{\lambda} = -\underline{p}\ \underline{x} \geq \underline{0}, \underline{V} \geq \underline{0}, \underline{Y} \geq \underline{0}, \underline{\lambda} \geq \underline{0}\ , \quad (8)$$

$$x^T \underline{V} + \underline{Y}^T \underline{\lambda} = 0,$$

где

$$\underline{V} = \nabla_x F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = \underline{p} + 2C\underline{x} + A^T \underline{\lambda},$$

$$\underline{Y} = -\nabla_\lambda F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = -A\underline{x} + \underline{b}.$$

Данная задача записывается следующим образом: найти такое решение среди допустимых базисных решений системы (8), которое обращает в нуль величину $x^T \underline{V} + \underline{Y}^T \underline{\lambda}$.

Для решения поставленной задачи был разработан метод, получивший свое название метод Баранкина-Дорфмана, идея которого заключается в поиске базисного решения системы (8), которое необязательно удовлетворяет условию (9).

Впоследствии равенство $x^T \underline{V} + \underline{Y}^T \underline{\lambda} = 0$ добивается с использованием симплекс-метода. Для выбора разрешающего элемента на каждом этапе симплексного преобразования предлагается воспользоваться алгоритмом Гамильтона, или алгоритмом перебора с возвратом [2].

Для практических вычислений были отобраны 10 видов ценных бумаг, из которых можно сформировать инвестиционный портфель:

Для начала по заданному вариационному ряду доходностей ценных бумаг были вычислены статистические характеристики инвестиционного портфеля такие, как математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, корреляционная матрица доходности ценных бумаг (табл. 1, 2, 3). Данные были получены с помощью специально разработанной программы [1].

Таблица 1. Среднее значение доходности и стандартное отклонение доходности ценных бумаг

	HSBK	**KCEL**	**KZTO**	**TSBN**	**CCBN**	**KEGC**	**KZTKp**	**KZTK**	**AKZM**
m_j	17.6481	28.2373	43.8558	17.4630	52.8128	15.4283	36.5886	7.9184	10.1513
σ_j	16.4355	19.633	34.9188	9.6784	41.3767	18.1862	47.5143	1.2436	0.6832

Таблица 2. Корреляционная матрица доходностей ценных бумаг

	HSBK	**KCEL**	**KZTO**	**TSBN**	**CCBN**	**KEGC**	**KZTKp**	**KZTK**	**AKZM**
HSBK	1.0000	0.9385	0.9619	0.6714	0.9506	0.9497	0.9533	0.0121	-0.7096
KCEL	0.9385	1.0000	0.9484	0.7087	0.9457	0.9477	0.9274	-0.0457	-0.7125
KZTO	0.9619	0.9484	1.0000	0.6999	0.9546	0.9569	0.9538	-0.0180	-0.8037
TSBN	0.6714	0.7087	0.6999	1.0000	0.6502	0.7191	0.5842	-0.2086	-0.7242
CCBN	0.9506	0.9457	0.9546	0.6502	1.0000	0.9129	0.9514	-0.0658	-0.7253
KEGC	0.9497	0.9477	0.9569	0.7191	0.9129	1.0000	0.9476	0.1123	-0.7176
KZTKp	0.9533	0.9274	0.9538	0.5842	0.9514	0.9476	1.0000	0.1259	-0.6967
KZTK	0.0121	-0.0457	-0.0180	-0.2086	-0.0658	0.1123	0.1259	1.0000	0.1204
AKZM	-0.7096	-0.7125	-0.8037	-0.7242	-0.7253	-0.7176	-0.6967	0.1204	1.0000

Таблица 3. Результаты решения задачи оптимального портфеля

Доходность %	**риск**	**Двойств.ф-я**	**HSBK**	**KCEL**	**KZTO**	**TSBN**	**CCBN**	**KEGC**	**KZTKp**	**KZTK**	**AKZM**
16	46.389	46.389	0.000	0.100	0.009	0.100	0.100	0.000	0.000	0.100	0.100
	L=	12.552	91.467	0.000	42.889	8.833	30.249	10.516	11.133	0.000	10.192
12	11.382	11.382	0.000	0.066	0.000	0.100	0.038	0.096	0.000	0.100	0.100
	L=	5.692	31.493	10.206	29.708	14.002	15.942	14.933	15.294	0.000	14.697
8	0.499	0.499	0.000	0.008	0.000	0.079	0.000	0.000	0.000	0.100	0.100
	L=	0.716	0.000	5.309	7.806	5.594	0.000	5.952	5.929	4.014	5.676
6	0.039	0.039	0.000	0.000	0.003	0.014	0.000	0.000	0.000	0.082	0.100
	L=	0.027	0.000	0.125	0.222	0.000	0.000	0.218	0.069	0.134	0.000

По данным таблицы 3 можно сформировать план действий относительно акций и облигаций, приносящих максимальную эффективность: внести (16%) следует вложить по 10% суммы капитала в акции «Kcell», «TSBN», «CCBN», «KZTK», «AKZM», т.к. акции обладают высокой доходностью и низким риском. При эффективности 12% максимально возможные доли капитала нужно вложить в акции «TSBN», «KZTK», «AKZM», 9.6% капитала нужно вложить в облигации «Kegoc». Доля акций «CCBN» в портфеле понижается (до 3.8%), т.к. риск этих ценных бумаг достаточно высокий. При эффективности 8% в портфель следует включить все облигации в максимальных долях (10%), т.к. риск облигаций существенно ниже риска акций, хотя и доходность облигаций ниже доходности акций. В портфель также войдут акции «KZTO» (7.9%). Эффективность 8% является уже достаточно низкой для данного портфеля, т.к. заданная эффективность достигается при вложении неполной суммы капитала (0.887), при этом риск минимален. Таким образом, наименее рискованное размещение капитала (риск равен 11.382) при условии вложения всей суммы капитала будет обеспечено при эффективности 12%.

Следует отметить, что некоторые ценные бумаги обладают либо низкой доходностью при довольно низком риске (ЮТК), либо довольно высокой доходностью при достаточно высоком уровне риска, но при этом положительно коррелируют с остальными ценными бумагами, поэтому оказывается невыгодным включать их в портфель. Облигации AKZM отрицательно коррелируют с акциями, поэтому включать их в портфель, как правило, выгодно. Решение, не использующее в полной мере всей суммы капитала, будет возникать только в том случае, когда требуемая эффективность настолько мала, что может быть достигнута за счет вложения неполной суммы капитала, при котором риск минимален. При этом в зависимости от того, строго больше нуля двойственные переменные или равны нулю, ограничения прямой задачи выходят на строгое равенство или неравенство соответственно.

Список использованной литературы:

1 *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. Минск: «Высшая школа». 1994*

2 *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.:Инфа-М.1994*

3 *Котировки ценных бумаг Казахстанского рынка [Электронный ресурс]: http://investfunds.kz/markets/stocks/#result_table*

References:

1 *Kuznecov A.V., Sakovich V.A., Holod N.I. (1994) Vysshaja matematika. Matematicheskoe programmirovanie [Higher mathematics. Mathematical programming]. Minsk: «Vysshaja shkola».* (In Russian)

2 *Pervozvanskij A.A., Pervozvanskaja T.N. (1994) Finansovyj rynok: raschet i risk [Financial market: calculation and risk]. M.:Infa-M. ».* (In Russian)

3 *Kotirovki cennyh bumag Kazahstanskogo rynka [Quotations of securities of the Kazakhstan market] [Jelektronnyj resurs]: http://investfunds.kz/markets/stocks/#result_table* (In Russian)