МРНТИ 29.05.41; 29.05.41; 41.17.41
УДК 530.12:531.51

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.23

М.Е. Әбішев[1], С. Тоқтарбай[1], А.З. Талхат[1], Ә.Ж. Абылаева[1]

[1] Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ОРТАЛЫҚ ДЕНЕГЕ ЖАҚЫН КВАЗИДӨҢГЕЛЕК ОРБИТАЛАРДЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Аңдатпа

Релятивті шектелген үш дене есебінде, орталық денеге жақын квазидөңгелек орбиталарының орнықтылығы зерттелді. Релятивті емес жағдайда, сынақ денесінің орбиталарын Хилла беттері арқылы сипаттауға болады. Орталық дененің орналасуы координаттар басына сәйкес келеді, екінші дене орталық (бірінші) дененің айналасындағы дөңгелек орбитамен қозғалады.Шектелген, релятивті үш дене есебінің қозғалыс теңдеулері дөңгелек орбиталар үшін зерттелген. Осы релятивті қозғалыс теңдеулерін пайдаланып, орталық денеге жақын аймақтардағы сынақ денесінің релятивті квазидөңгелек орбиталарының орнықтылық мәселесі зерттелді.

Түйін сөздер: ЖСТ, квазидөңгелек орбита, үш дене есебі, қозғалыстың орнықтылығы, сынақ денесі, Хилла беті.

Аннотация

М.Е. Әбішев[1], С. Тоқтарбай[1], А.З. Талхат[1], Ә.Ж. Абылаева[1]
[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИ КРУГОВЫХ ОРБИТ ВБЛИЗИ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕЛА

В задачи релятивных ограниченных трех тел, была исследована устойчивость квазикруглых орбит, ближних к центральному телу. В случае, когда не релятивное, орбиты пробного тела можно описать через поверхности Хилла. Расположение центрального тела соответсвует на начало координат, второе тело двигается по круглой орбите, которая находится вокруг центрального (первого) тела.Уравнения движении задачи ограниченных, релятивных трех тел были исследованы для круглых орбит. Используя эти уравнения релятивного движения, была исследована проблема устойчивости релятивных квазикруглых орбит пробного тела в областях, ближних к центральному телу.

Ключевые слова: ОТО, квазикруглая орбита, задача трех тел, устойчивость движения, пробное тело, поверхность Хилла.

Abstract

THE STABILITY OF QUASI-CIRCULAR ORBITS NEAR THE CENTRAL BODY

Abishev M.E. [1], Toktarbay C. [1], Talkhat A.Z. [1], Abylayeva A.Zh. [1]
[1]al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

In the problem of relational bounded three bodies, the stability of quasicircular orbits close to the central body was investigated. In the case when it is not relational, the orbits of the test body can be described through the Hill surfaces. The location of the central body corresponds to the origin, the second body moves in a circular orbit that is around the central (first) body. The equations of motion of the problem of bounded, relational three bodies were investigated for circular orbits. Using these equations of relational motion, the stability problem of the relational quasicircular orbits of the test body in regions close to the central body was investigated.

Keywords: GRT, quasi-circular orbit, three-body problem, motion stability, test body, Hilla surface.

Кіріспе

Жалпы салыстырмалылық теориясында (ЖСТ) денелердің қозғалысын зерттеуді екі топқа жіктеуге болады. Атап айтқанда, нүктелік массаның қозғалыс мәселесі және ауқымды массалардың қозғалыс мәселесі. Өрістің теңдеулерінен қозғалыс теңдеулерін алудың бірнеше әдістері бар, мысалы Эйнштейн-Инфельд-Хоффман (ЭИХ) [1, 2], Фоктің бірінші жуықтау әдісі, Фоктің екінші жуық әдісі және т.б. [3-5]. ЭИХ және Инфельд әдістері нүктелік массаларының қозғалыс теңдеулерін табуға мүмкіндік береді. Ньютон алғаш рет күн жүйесінің динамикалық моделін жасағанда, жүйенің орнықтылығы туралы мәселеге бірден тап болды. Оны сол кездегі ғылымның жағдайында шешудің мүмкіндігі болмады. Гравитациялық өрістегі денелер қозғалысының орнықтылық мәселесін зерттеу ұзақ тарихқа ие. Алғаш рет планетарлық қозғалыстың орнықтылығы туралы мәселені екі көрнекті ғалым Лаплас [5] және Лагранж [6] қойды.

Аспан денелерінің қозғалысын орнықтылығын зерттеудің классикалық әдісі - қозғалыстың негізгі теңдеулерін ұйытқу әдісімен қатарға жіктеп, олардың бірнеше мүшесі арқылы шешімді жазуға негізделген. Алайда, Анри Пуанкаре, бұндай қатар түрінде берілген шешімдердің жинақталмайтындығын көрсетті. Сондықтан бұндай шешімдерді аспан жүйелерінде уақыттың жеткілікті интервалында пайдалануға болмайды. А.Н. Колмогоров пен В.И. Арнольд және американдық математик Дж.Мозер КАМ теориясын жасады [1,2]. Бұл теория бойынша, планеталардың резонансты орбиталарын және жақын орбиталарды ескермегенде, қозғалыс шартты түрде орнықты болады. Өкінішке орай, резонанстар нақты күн жүйесінде өте маңызды рөл атқарады. Сондықтан, КАМ теориясының тұжырымдарын күн жүйесіне толықтай қолдануға болмайтындығы шығады.

ЖСТ-да, шектелген үш дене мәселесін зерттеуге арналған бірнеше жұмыстар бар. Нүктелік үш масса үшін, үшбұрышты конфигурациялы шешімде,егер осы үшбұрыштың әр жақтарының ұзындығына қатысты релятивистік түзетулер бірдей болса ғана, Ньютоннан кейінгі жуықтауда шешімдер қозғалыс теңдеуін қанағаттандыратындығы көрсетілген [7]. Сонымен қатар, мына жұмыста [8] шектелген үш дене мәселесінің релятивистік эффектілері зерттелді және релятивистік эффект M/R параметрі өскенде маңызды болатындығы көрсетілді.

ЖСТ механикасындағы ауқымды дененің қозғалысын ең алғаш В. Фок тұжырымдалған, содан кейін Петрова, Брумберг және Абдилдин зерттеген [3-5]. Фоктың әдістері денелердің ішкі құрылымы мен формасын ескере отырып, ауқымды денелер қозғалысының теңдеулерін алуға мүмкіндік береді.

ЖСТ аясында, [9-10]- жұмыстарда, дөңгелек орбитамен қозғалған екінші денеден болатын ауытқулар, орталық дененің сынақ денесінің қозғалысына әсері релятивистік түзетулерге шамалас болатын жағдайда, сынақ дененің дөңгелек қозғалысты орбиталарының орнықтылық мәселесі зерттелді сондай-ақ, бұл жағдайда, сынақ дене орбитасының орнықты болатындығы көрсетілді.

Бұл жұмыста, релятивті, жазық, шектелген дөңгелек қозғалысты үш дене мәселесінде, сынақ денесінің квазидөңгелек орбитамен қозғалғандағы орбитаның орнықтылық мәселесі зерттеледі.

Жүйенің Лагранж және Гамильтон функциясы және қозғалыс теңдеулері

Шектелген үш дене мәселесінде, массалар қатынасы $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ шартымен берілсін. Орталық дене ретінде m_1 массаны таңдап алуға болады. m_2 масса дөңгелек орбитамен орталық денені айналып, бір жазықтықта қозғалсын. Бұндай жүйеде сынақ массасы m_3 басқа екі денеге болған әсерін ескермеуге болады. Бұл мәселе шектелген, жазық, дөңгелек қозғалысты үш дене есебі деп аталады. Классикалық Ньютон теориясы бойынша, егер сынақ денесі дөңгелек орбитамен қозғалыста, қозғалыстың орнықты болатындығы белгілі. ЖСТ да, осы жүйеніңрелятивті Лагранж функциясы[9] төмендегідей:

$$
\begin{aligned}
L = {} & \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} + \gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2|} + \gamma \frac{m_1 m_3}{|\vec{r}_3|} + \gamma \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{8c^2}\left(m_2 v_2^4 + m_3 v_3^4\right) \\
& + \frac{\gamma}{2c^2}\left[\frac{3m_1 m_2}{|\vec{r}_2|} v_2^2 + \frac{3m_1 m_3}{|\vec{r}_3|} v_3^2 + \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}\left(3v_2^2 + 3v_3^2 - 7(\vec{v}_2 \vec{v}_3) - \frac{\left(\vec{v}_2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right)\right)\left(\vec{v}_3\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right)\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2}\right)\right] \\
& - \frac{\gamma^2}{c^2} m_1 m_2 m_3 \left(\frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_2||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{|\vec{r}_3||\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}\right) \\
& - \frac{\gamma^2}{2c^2}\left(\frac{m_1 m_2\left(m_1 + m_2\right)}{|\vec{r}_2|^2} + \frac{m_1 m_3\left(m_1 + m_3\right)}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{m_2 m_3\left(m_2 + m_3\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Сәйкесінше,

$$
H = \vec{v}_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - L \tag{2}
$$

Өрнектерін ескеріп, Гамильтон функциясы

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{p_2{}^2}{2m_2}-\gamma\left(\frac{m_1m_2}{|\vec r_2|}+\frac{m_1m}{|\vec r|}+\frac{m_2m}{|\vec r_2-\vec r|}\right)-\frac{1}{8c^2}\left(\frac{p^4}{2m^3}+\frac{p_2{}^4}{2m_2{}^3}\right)$$
$$+\frac{\gamma}{2c^2|\vec r_2-\vec r|}\left(7\vec p\vec p_2+\frac{\left(\vec p\left(\vec r_2-\vec r\right)\right)\left(\vec p_2\left(\vec r_2-\vec r\right)\right)}{|\vec r_2-\vec r|^2}\right)-\frac{3\gamma}{2c^2}\left(\frac{m}{|\vec r_2-\vec r|}+\frac{m_1}{|\vec r_2|}\right)\frac{p_2{}^2}{m_2}$$
$$-\frac{3\gamma}{2c^2}\left(\frac{m_2}{|\vec r-\vec r_2|}+\frac{m_1}{|\vec r|}\right)\frac{p^2}{m}+\frac{\gamma^2}{c^2}m_1m_2m\left(\frac{1}{|\vec r_2||\vec r|}+\frac{1}{|\vec r_2||\vec r_2-\vec r|}+\frac{1}{|\vec r||\vec r_2-\vec r|}\right)$$
$$+\frac{\gamma^2}{2c^2}\left(\frac{m_1m_2\left(m_1+m_2\right)}{|\vec r_2|^2}+\frac{m_1m\left(m_1+m\right)}{|\vec r|^2}+\frac{m_2m\left(m_2+m\right)}{|\vec r_2-\vec r|^2}\right) \tag{3}$$

Бұл жүйе үшін, Гамильтонның канондық теңдеулерін пайдаланып

$$\dot{\vec r}_3=\frac{\partial H}{\partial\vec p_3};\ \dot{\vec p}_3=-\frac{\partial H}{\partial\vec r_3} \tag{4}$$

Қозғалыс теңдеулерін төмендегідей жазуға болады:

$$\dot{\vec r}_3=\frac{\vec p_3}{m_3}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{p_3{}^2}{m_3{}^2}+3\gamma\left(\frac{m_2}{|\vec r_2-\vec r_3|}+\frac{m_1}{|\vec r_3|}\right)\right)\right]+\frac{\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec r_2-\vec r_3|}\left(7\vec p_2+\frac{\left(\vec r_2-\vec r_3\right)\left(\vec p_2\left(\vec r_2-\vec r_3\right)\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^2}\right) \tag{5}$$

$$\dot{\vec p}_3=-\gamma\frac{m_1m_3}{|\vec r_3|^3}\vec r_3+\gamma\frac{m_2m_3}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}\left(\vec r_2-\vec r_3\right)-\frac{7\gamma}{2c^2}\frac{\left(\vec p_2\vec p_3\right)\left(\vec r_2-\vec r_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}$$
$$-\frac{\gamma}{2c^2}\left[\frac{3\left(\vec p_3\left(\vec r_2-\vec r_3\right)\right)\left(\vec p_2\left(\vec r_2-\vec r_3\right)\right)\left(\vec r_2-\vec r_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^5}-\frac{1}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}\left[\vec p_2\left(\vec p_3\left(\vec r_2-\vec r_3\right)\right)+\vec p_3\left(\vec p_2\left(\vec r_2-\vec r_3\right)\right)\right]\right]$$
$$+\frac{3\gamma}{2c^2}\left[\frac{\vec p_2{}^2}{m_2}\frac{m_3\left(\vec r_2-\vec r_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}+\frac{\vec p^2}{m_3}\left(\frac{m_2\left(\vec r_2-\vec r_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}-\frac{m_1\vec r_3}{|\vec r_3|^3}\right)\right]$$
$$-\frac{\gamma^2m_1m_2m_3}{c^2}\left[-\frac{\vec r_3}{|\vec r_2||\vec r_3|^3}-\frac{\vec r_2-\vec r_3}{|\vec r_2-\vec r_3|^3|\vec r_2|}-\frac{\vec r_3}{|\vec r_2-\vec r_3||\vec r_3|^3}+\frac{\vec r_2-\vec r_3}{|\vec r_2-\vec r_3|^3|\vec r_3|}\right]$$
$$+\frac{\gamma^2}{c^2}\left[\frac{m_1m_3\left(m_1+m_3\right)\vec r_3}{|\vec r_3|^4}-\frac{m_2m_3\left(m_2+m_3\right)\left(\vec r_2-\vec r_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^4}\right] \tag{6}$$

Теңдеулерден $1/c^2$ мүшелерінің релятивистік қозғалысқа жауап беретін қосымша мүшелер екендігін көреміз. Шектік жағдайда, яғни релятивті емес қозғалыс жағдайында, жоғарыдағы теңдеулер классикалық механикадағы қозғалыстың теңдеулеріне айналады. Жалпы жағдайда, жоғарыдағы теңдеулердің аналитикалық шешімі жоқ, ондағы себеп теңдеулердің сызықты еместігінде. Классикалық механикадағы теңдеулерден айырмашылығы- жоғарыдағы қозғалыс теңдеулерінің құраушыларының күрделі болып келетіндігінде.

Қозғалыстың орнықтылық мәселесінде, орбитаның векторлық элементтері жоғарыдағы сызықты емес қозғалыс теңдеулерін шешпей ақ, орбитаның орнықтылығын зерттеуге мүмкіндік береді.

Сынақ денесінің орбиталық импульс моментін мына түрде жазуға болады

$$\vec M=\left[\vec r_3,\vec p_3\right]; \tag{7}$$

Сәйкесінше, импульс моментінің уақыт бойынша өзгерісі

$$\dot{\vec M}=\left[\dot{\vec r}_3,\vec p_3\right]+\left[\vec r_3,\dot{\vec p}_3\right] \tag{8}$$

Бұл өрнектер, сынақ дене орбитасының уақыт бойынша қалай өзгеретіндігін анықтап береді. Классикалық жағдайда да және релятивсттік жағдайда да, сынақ денесінің дөңгелек орбитасы орнықты болатындығы сынақ денесінің импульс моменті барлық қозғалыс периоды кезінде тұрақты болып қалатындығынан шығады.

Орталық денеге жақын қозғалыстар

Классикалық шектелген үш дене есебінің бірнеше дербес шешімдері бар.

Жалпы жағдайда қозғалыстың теңдеулерінің шешімі жоқ. Алайда, Якоби интегралдары қозғалыстың мүмкін болмайтын аумақтарын көрсетеді. Бұндай аумақтарда нөлдік жылдамдықты беттер немесе Хилла беттері деп атайды. Сынақ дене орталық денеге немесе екінші денеге жақын орбиталарда қозғалса, онда, сынақ денесінің қозғалысы мына өрнектермен сипатталады:

$$\frac{1-m}{r_1} = C + e_2 - M_1 \text{ айналасындағы квазисфера,}$$

$$\frac{m}{r_2} = C + e_3 - M_2 \text{ айналасындағы квазисфера,}$$

$$x^2 + y^2 = C + e_1 - Z \text{ -ке жақын квазицилиндр,} \qquad (9)$$

мұндағы e_1, e_2, e_3 - тұрақтылар. C Якоби тұрақтысы және m салыстырмалы массалар параметрі.

Осыдан C-дің үлкен мәні үшін қозғалыстың мүмкін болатын аумақтарын(яғни массасы аз денелердің салыстырмалы энергиясының аз мәні үшін) оңай анықтауға болады, яғни,орталығы M_1 болатын сфера ішінен немесе орталығы M_2 болатын радиусы кішігірім($m < 1/2$) сфера ішінен немесе шексіз түзу шеңберлі цилиндрден тыс аумақта қозғалыстар болады .

Сынақ денесі орталық массаға жақын аумақта квазидөңгелек орбитамен қозғалады. Классикалық теория шеңберінде, жоғарыдағы шешімдердің С-ның үлкен мәндерінде орнықты болатындығы шығады.

Орбитаның орнықтылығы

ЖСТ да сынақ денесінің квазидөңгелек орбитасының орнықтылығын зерттеу үшін, импульс моментінің уақыт бойынша өзгерісін жүйенің периодты конфигурациясы қайталанатын уақыты бойынша интегралдау керек. Ол үшін сынақ денесінің радиус векторын мына түрде жазуға болады:

$$\vec{r}_3 = \rho\left(\vec{i}\cos\omega_3 t + \vec{j}\sin\omega_3 t\right) \qquad (10)$$

Екінші массаның орбитасы

$$\vec{r}_2 = r_2\left(\vec{i}\cos\omega_2 t + \vec{j}\sin\omega_2 t\right) \qquad (11)$$

Орталық денеге жақын аумағындағы қозғалыстың шешімді Хилла беттерін пайдаланып төмендегідей жазуға болады:

$$\rho = -\mu Cos\phi[t] - \sqrt{\frac{1-2\mu+\mu^2-C_0{}^2\mu^2+C_0{}^2\mu^2 Cos^2\phi[t]}{C_0{}^2}} \qquad (12)$$

Жоғарыдағы шешімді мына түрде жазуға болады:

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_{30} + \delta\vec{r} \qquad (13)$$

Бұндағы $\vec{r}_{30}$ дөңгелек орбитаның радиус векторы, $\delta\vec{r}$ орбитаның шеңберден мардымсыз ауытқуын білдіреді.

Сәйкесінше импульс моментінің уақыт бойынша өзгерісін

$$\dot{M} = \dot{M}^{(0)} + \delta\dot{M} \qquad (14)$$

Түрінде жазуға болады. [9, 10]- жұмыстарда, ЖСТ да дөңгелек орбитаның орнықты болатындығы көрсетілген, яғни $\dot{M}^{(0)}$ шамасының нөлге тең екендігі шығады. Өрнектегі екінші мүше $\delta\dot{M}$ шамасын табу үшін, жүйенің конфигурациясының қайталау периоды бойынша орташалау керек:

$$\overline{\delta\dot{\vec{M}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \delta\dot{M}dt \qquad (15)$$

Қозғалыс теңдеулерін δr шамасын ескеріп аналитикалық шешім алу қиын мәселе. Жуықтап интегралдау алғашқы нәтижелері сапалық жағынан қозғалыстың орнықтылығы алғашқы шарттарға байланысты екендігін көрсетті. Нәтижелерді сандық есептеу әдістерін пайдаланып, уақыт бойынша импульс моментінің өзгерісін сипаттау арқылы айқындай түсуге болад. Ол үшін жетілдірілген, сандық есептеу әдістерін пайдалануға тура келеді және ол мәселе біздің келесі зерттеулерімізде қарастырылады.

Қорытынды

Бұл жұмыста, релятивистік, жазық, шектелген үш дене мәселесі қарастырылды. Релятивистік Лагранж және Гамильтон функциялары қарастырылды және сынақ денесі үшін қозғалыстеңдеулері алынды.Сынақ денесі орталық денеге жақын аумақтарда қозғалғанда, Хилла беттері негізінде квазидөңгелек орбитаның шешімі алынды. Сынақ денесінің квазидөңгелек орбиталарының орнықтылығын зерттеу үшін орбитаның векторлық элементтерге негізделген теңдеулер алынды. Шектік жағдайда, яғни дөңгелек орбита жағдайында, қозғалыстың орнықты болатындығы көрсетілді. Орбита шеңберден мардымсыз ауытқығанда, қозғалыс теңдеулерінің күрделі болуына байланысты, дәл аналитикалық шешімдері жоқ. Алайда, теңдеулерді жуықтап шешудің алғашқы нәтижелері көрсеткендей, қозғалыс алғашқы шарттарға байланысты шартты орнықты болады, яғни ондай шарттардың бірі ретінде алғашқы орындарын айтуға болады.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1 *Инфельд Л., Плебанский Е. Движение и релятивизм. М., 1962, 204 с.*
2 *Эйнштейн А., Инфельд Л., Гоффман Б. Гравитационные уравнения и проблема движения // Эйнштейн А. Собр. научн. трудов. М., 1966. Т.2. с. 450-513.*
3 *Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961, 563 с.*
4 *Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата. 1988, 198 с.*
5 *BrumbergV.A., Relativistic Celestial Mechanics, Moscow, Nauka (1972).*
6 *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1973, 400 с.*
7 *Kei Yamada and Hideki Asada Phys. Rev. D 82 104019 (2010).*
8 *MaindlT. I.,DvorakR. J.Math. Phys. 7, 1137-1143(1966).*
9 *Abishev M.E., Toktarbay S., Zhami B. A., Gravit. Cosmol. 20 252-254(2014).*
10 *Abishev M.E., Toktarbay S., Abylayeva A.Zh., Talkhat A.Z., EPJ Web of Conferences,168 04001 (2018).*

References:

1. *Infel'd L., Plebanskij E. (1962) Dvizhenie i reljativizm [Motion and relativism]. M., 204 [In Russian]*
2. *Jejnshtejn A., Infel'd L., Goffman B. Gravitacionnye uravnenija i problema dvizhenija [Gravitational equations and the problem of motion] Jejnshtejn A. Sobr. nauchn. trudov. M., 1966. T.2. 450-513. [In Russian]*
3. *Fok V.A.(1961) Teorija prostranstva, vremeni i tjagotenija [The theory of space , time and gravitation]. M., 563 [In Russian]*
4. *Abdil'din M.M. (1988) Mehanika teorii gravitacii Jejnshtejna [Einstein's theory of gravity]. Alma-Ata., 198 [In Russian]*
5. *BrumbergV.A., (1972) Relativistic Celestial Mechanics, Moscow, Nauka*
6. *Landau L.D., Lifshic E.M. (1973) Teorija polja [Field theory]. M., 400. [In Russian]*
7. *Kei Yamada and Hideki Asada Phys (2010). Rev. D 82 104019*
8. *MaindlT. I.,DvorakR. J. (1966).Math. Phys. 7, 1137-1143*
9. *Abishev M.E., Toktarbay S., Zhami B. A., (2014) Gravit. Cosmol. 20 252-254*
10. *Abishev M.E., Toktarbay S., Abylayeva A.Zh., Talkhat A.Z., (2018) EPJ Web of Conferences,168 04001*