

Н.М. Қасымбек^{1*}, Д.В. Лебедев²

¹Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²Astana IT University, г. Нур-Султан, Казахстан

*e-mail: nuryslam.qassymbek@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НЬЮТОНА

Аннотация

Моделирование гидродинамических процессов в нефтяных пластах является актуальной задачей в отрасли нефтедобычи. С помощью моделей можно прогнозировать поведение пласта в реальных условиях. Метод Ньютона лежит в основе многих алгоритмов, используемых для решения задач моделирования. В данной работе рассматривается модель движения двухфазной жидкости. Уравнения, описывающие движение жидкости являются нелинейной системой, которая линеаризуется методом Ньютона. Получаемая система линейных уравнений решается методом обобщенных минимальных невязок. Для ускорения времени вычислений используется алгоритм метода обобщенных минимальных невязок с рестартами. Разработанные алгоритмы были протестированы и полученные результаты были проанализированы. Численные результаты показали, что для задачи закачки воды в нефтяной пласт алгоритм метода обобщенных минимальных невязок с рестартами работает быстрее алгоритма без модификаций, но требует практического определения оптимального значения шагов итераций для рестарта.

Ключевые слова: численные методы, нелинейные уравнения, метод Ньютона, SLAU, GMRES, GMRES(m).

Аңдатпа

Н.М. Қасымбек¹, Д.В. Лебедев²

¹Ал-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Astana IT университеті, Нур-Султан қ., Қазақстан

ЕКІ ФАЗАЛЫ СҰЙЫҚТЫҚТЫҢ ЖЫЛЖУЫН НЬЮТОН ӘДІСІНІҢ КӨМЕГІМЕН МОДЕЛЬДЕУ

Мұнай қабаттарындағы гидродинамикалық процестерді модельдеу мұнай өндіру саласындағы маңызды есеп болып табылады. Модельдердің көмегімен нақты жағдайда резервуардың әрекетін болжауға болады. Ньютон әдісі модельдеу есептерін шешуде қолданылатын көптеген алгоритмдердің негізінде жатыр. Бұл жұмыста екі фазалы сұйықтықтың қозғалыс моделі қарастырылады. Сұйықтықтың қозғалысын сипаттайтын теңдеулер сызықты емес жүйе болып табылады және Ньютон әдісімен сызықтық түрге келтіріледі. Алынған сызықтық теңдеулер жүйесі жалпыланған минималды сәйкессіздіктер әдісімен шешіледі. Есептеу уақытын тездету үшін қайта бастаулармен жалпыланған минималды сәйкессіздіктер әдісінің алгоритмі қолданылады. Өзірленген алгоритмдер сыналды және алынған нәтижелер талданды. Сандық нәтижелер көрсеткендей, мұнай қабатына су айдау есебі үшін жалпыланған минималды сәйкессіздіктер әдісінің қайта бастаулармен алгоритмі модификациясыз алгоритмге қарағанда тезірек жұмыс істейді, бірақ қайта бастаудың итерация қадамдарының оңтайлы мәнін практикалық анықтауды қажет етеді.

Түйін сөздер: сандық әдістер, сызықсыз теңдеулер, Ньютон әдісі, CATJ, GMRES, GMRES(m).

Abstract

MODELING THE MOTION OF A TWO-PHASE FLUID USING THE NEWTON METHOD

Kassymbek N.M.¹, Lebedev D.V.²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Astana IT University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Modeling of hydrodynamic processes in oil reservoirs is an urgent task in the oil production industry. With the help of models, it is possible to predict the behavior of the reservoir in real conditions. Newton's method is the basis of many algorithms used to solve modeling problems. In this paper, a model of the motion of a two-phase fluid is considered. The equations describing fluid motion are a nonlinear system that is linearized by Newton's method. The resulting system of linear equations is solved by the method of generalized minimal residuals. To speed up the calculation time, the algorithm of the method of generalized minimal residuals with restarts is used. The developed algorithms were tested and the results were analyzed. Numerical results have shown that for the problem of pumping water into an oil

reservoir, the algorithm of the generalized minimal residual method with restarts works faster than the algorithm without modifications, but requires practical determination of the optimal value of iteration steps for restart.

Keywords: numerical methods, nonlinear equations, Newton's method, SLAE, GMRES, GMRES(m).

Введение

Моделирование процессов протекающих в пластах нефти является важной задачей для экономики Казахстана. Для адекватного моделирования сложных потоковых процессов, происходящих в нефтяных пластах, необходимо учитывать компонентный состав фаз [1,2]. Учет конвекции, диффузии, фазовых переходов и химических реакций затрудняет моделирование таких задач [3,4]. Типичная задача в этой области, моделирование вытеснения нефти водой.

В [5,6] использовались различные методы и схемы (IMPES, SS и др.) для моделирования течения. Другие методы и схемы можно найти в [7-10]. Часто в исследовательских работах в этой области можно увидеть метод Ньютона. Для решения задачи моделирование движения двухфазной жидкости в этой статье был выбран метод Ньютона-Рафсона, или просто Ньютона. Метод Ньютона лежит в основе многих алгоритмов, используемых для решения задач моделирования. Метод Ньютона линеаризует нелинейные системы уравнений, и в дальнейшем задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

СЛАУ можно решить разными методами [11-13]. В данной работе был выбран метод обобщенных минимальных невязок - GMRES (Generalized minimum residuals method).

Алгоритм GMRES [14,15] - один из популярных методов подпространств Крылова, который используется для решения асимметричных линейных уравнений. У GMRES очень маленькая невязка, но по мере увеличения количества итераций объем вычислений и хранения увеличивается линейно, что неэффективно. Поэтому обычно используют GMRES с перезапусками, обозначаемый GMRES(m), выполняет m итераций GMRES, а затем полученное приближенное решение используется в качестве начального предположения для запуска следующих m итераций. Этот процесс повторяется до тех пор, пока остаточная норма не станет достаточно малой.

Математическая модель

Рассматривается модель с двумя фазами, вода и нефть. Запишем уравнение сохранения масс для водной и нефтяной фазы [5]:

$$m \frac{\partial S_w}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}_w) = q_1 \quad (1)$$

$$m \frac{\partial S_o}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}_o) = q_2 \quad (2)$$

$$S_w + S_o = 1$$

где m – пористость пласта, S_w, S_o - насыщенности воды и нефти, q_1, q_2 - источник или сток, \vec{v}_w, \vec{v}_o – скорости фильтрации, которые выражаются законом Дарси:

$$\vec{v}_i = -K_0 \frac{f_i(s)}{\mu_i} \nabla P, \quad i = w, o \quad (3)$$

где $f_i(s), \mu_i$ – относительные фазовые проницаемости и вязкости водной и нефтяной фазы соответственно, K_0 – абсолютная проницаемость. Начальные (8) – (9):

$$s|_{t=0} = s_0(x) \quad (4)$$

и граничные условия:

$$\frac{\partial s}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (5)$$

где $\partial \Omega$ - граница области. Требуется найти функций $\{P, s_i\}$, соответственно давление, насыщенность воды для каждого компонента.

Метод Ньютона-Рафсона для линеаризации системы нелинейных уравнений

Описанные в предыдущей главе уравнения (1)-(3) являются нелинейной системой и данная система может быть линеаризована методом Ньютона-Рафсона. Рассмотрим общую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\mathcal{E}_m\{F_m[p(x)]\} = f_m(x), m = 1, 2, \dots, M, x \in \Omega, \tag{6}$$

где через \mathcal{E}_m обозначен линейный дифференциальный оператор, $F_m(\cdot)$ – нелинейная функция, $p=(p_1, p_2, \dots, p_M)^T$ – вектор зависимых переменных, $f=(f_1, f_2, \dots, f_M)^T$ – данный вектор, M общее количество уравнений, а верхний индекс T обозначает транспонирование. Итерация Ньютона-Рафсона для решения (6) строит итерационную систему уравнений. Разложение в ряд Тейлора для $F_m(p + \delta p)$ имеет вид (7):

$$F_m(p + \delta p) = F_m(p) + \nabla F_m(p) * \delta p + \mathcal{O}(|\delta p|^2), \tag{7}$$

где $|\delta p|$ Евклидова норма δp . Если член высшего порядка $\mathcal{O}(|\delta p|^2)$ (относительно $|\delta p|$) усечен, $F_m(p + \delta p)$ можно аппроксимировать как:

$$F_m(p + \delta p) \approx F_m(p) + \nabla F_m(p) * \delta p \tag{8}$$

Если подставить (8) в (6), получим итерационные уравнения:

$$\mathcal{E}_m[F_m(p^l) + \nabla F_m(p^l) * \delta p^{l+1}] = f_m(x), m = 1, 2, \dots, M, x \in \Omega, \tag{9}$$

где p^l l -тое итерационное решение p и $F_m(p^l) - F_m(p)$ при $p = p^l$, с начальным решением p^0 . В итерационном системе уравнений (9), вектор поправок δp^{l+1} неизвестные. Данную систему можно переписать как:

$$\mathcal{E}_m[\nabla F_m(p^l) * \delta p^{l+1}] = g_m(x), m = 1, 2, \dots, M, x \in \Omega, \tag{10}$$

где $g_m(x) = f_m(x) - \mathcal{E}_m[F_m(p^l)]$, и $F_m(p^l)$ и $\nabla F_m(p^l)$ рассматриваются как фиксированные. Теперь (10) является линейной системой для δp^{l+1} . Заметим, что $\nabla F_m(p^l)$ – это матрица Якоби F_m , а g_m – невязка уравнения (6) в точке p^l .

Новый вектор решений p^{l+1} вычисляется прибавлением вектора поправок δp^{l+1} к вектору решений на предыдущей итерации p^l , то есть:

$$p^{l+1} = p^l + \delta p^{l+1}$$

Эти итерации повторяются пока Евклидова норма вектора δp^{l+1} не будет меньше выбранного значения.

Можно посмотреть применение метода Ньютона на примере уравнений (1)-(3). Подставим уравнение (3) к уравнениям (1), и введем дополнительное обозначение:

$$T_i = k \frac{f_i(s)}{\mu_i}, \quad i = w, o$$

Аппроксимация уравнений будет выглядеть в следующем виде:

$$\begin{aligned} m \frac{(S_w)_i^{n+1} - (S_w)_i^n}{\Delta t} &= T_{w_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta x^2} - T_{w_{i-\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ m \frac{(S_o)_i^{n+1} - (S_o)_i^n}{\Delta t} &= T_{o_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta x^2} - T_{o_{i-\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

В силу того, что $S_w + S_o = 1$, в неизвестных системы уравнений можно оставить только насыщенность воды S_w и переписать уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} m \frac{(S_w)_{i-1}^{n+1} - (S_w)_i^n}{\Delta t} &= T_{w_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta x^2} - T_{w_{i-\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ -m \frac{(S_w)_i^{n+1} - (S_w)_i^n}{\Delta t} &= T_{o_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta x^2} - T_{o_{i-\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (11)$$

где в T_o вместо S_o также будем использовать $1 - S_w$. Уравнения (11) являются нелинейными и линеаризуются методом Ньютона-Рафсона. На каждой точке сетки неизвестные $(P^{n+1}, S_w^{n+1})_i$, на каждой итерации Ньютона-Рафсона обновляются следующим образом:

$$P^{n+1,l+1} = P^{n+1,l} + \delta P^{n+1,l+1}, S_w^{n+1,l+1} = S_w^{n+1,l} + \delta S_w^{n+1,l+1}$$

Дальше мы пропускаем верхний индекс $n + 1$.

Невязка на каждой итерации Ньютона-Рафсона равна следующему:

$$\begin{aligned} R_{w,i}^l &= m \frac{(S_w)_i^{n+1} - (S_w)_i^n}{\Delta t} - T_{w_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta x^2} + T_{w_{i-\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ R_{o,i}^l &= -m \frac{(S_w)_i^{n+1} - (S_w)_i^n}{\Delta t} - T_{o_{i+\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta x^2} + T_{o_{i-\frac{1}{2}}}^{n+1} \frac{P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Теперь мы определим вектора неизвестных и невязок как:

$$y = (P, S_w)^T, R_i^l = (R_{w,i}^l, R_{o,i}^l)^T \quad (12)$$

где верхний индекс T означает транспонирование. Используя описанный метод Ньютона-Рафсона к уравнению (11), получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial R_i^l}{\partial y_{i-1}} \delta y_{i-1}^{l+1} + \frac{\partial R_i^l}{\partial y_i} \delta y_i^{l+1} + \frac{\partial R_i^l}{\partial y_{i+1}} \delta y_{i+1}^{l+1} = -R_i^l \quad (13)$$

Подставив неизвестные (12) к системе (13), и записывая уравнения для каждой точки сетки получаем СЛАУ вида $Ax = b$. С граничными условиями (5) для сетки из 4 точек матрица коэффициентов будет выглядеть следующим образом:

$\frac{\partial R_{w,1}^l}{\partial P_1}$	$\frac{\partial R_{w,1}^l}{\partial S_{w,1}}$	$\frac{\partial R_{w,1}^l}{\partial P_2}$	$\frac{\partial R_{w,1}^l}{\partial S_{w,2}}$				
$\frac{\partial R_{o,1}^l}{\partial P_1}$	$\frac{\partial R_{o,1}^l}{\partial S_{w,1}}$	$\frac{\partial R_{o,1}^l}{\partial P_2}$	$\frac{\partial R_{o,1}^l}{\partial S_{w,2}}$				
$\frac{\partial R_{w,2}^l}{\partial P_1}$	$\frac{\partial R_{w,2}^l}{\partial S_{w,1}}$	$\frac{\partial R_{w,2}^l}{\partial P_2}$	$\frac{\partial R_{w,2}^l}{\partial S_{w,2}}$	$\frac{\partial R_{w,2}^l}{\partial P_3}$	$\frac{\partial R_{w,2}^l}{\partial S_{w,3}}$		
$\frac{\partial R_{o,2}^l}{\partial P_1}$	$\frac{\partial R_{o,2}^l}{\partial S_{w,1}}$	$\frac{\partial R_{o,2}^l}{\partial P_2}$	$\frac{\partial R_{o,2}^l}{\partial S_{w,2}}$	$\frac{\partial R_{o,2}^l}{\partial P_3}$	$\frac{\partial R_{o,2}^l}{\partial S_{w,3}}$		
$\frac{\partial R_{w,3}^l}{\partial P_1}$	$\frac{\partial R_{w,3}^l}{\partial S_{w,1}}$	$\frac{\partial R_{w,3}^l}{\partial P_2}$	$\frac{\partial R_{w,3}^l}{\partial S_{w,2}}$	$\frac{\partial R_{w,3}^l}{\partial P_3}$	$\frac{\partial R_{w,3}^l}{\partial S_{w,3}}$	$\frac{\partial R_{w,3}^l}{\partial P_4}$	$\frac{\partial R_{w,3}^l}{\partial S_{w,4}}$
		$\frac{\partial R_{o,3}^l}{\partial P_2}$	$\frac{\partial R_{o,3}^l}{\partial S_{w,2}}$	$\frac{\partial R_{o,3}^l}{\partial P_3}$	$\frac{\partial R_{o,3}^l}{\partial S_{w,3}}$	$\frac{\partial R_{o,3}^l}{\partial P_4}$	$\frac{\partial R_{o,3}^l}{\partial S_{w,4}}$
				$\frac{\partial R_{w,4}^l}{\partial P_3}$	$\frac{\partial R_{w,4}^l}{\partial S_{w,3}}$	$\frac{\partial R_{w,4}^l}{\partial P_4}$	$\frac{\partial R_{w,4}^l}{\partial S_{w,4}}$
				$\frac{\partial R_{o,4}^l}{\partial P_3}$	$\frac{\partial R_{o,4}^l}{\partial S_{w,3}}$	$\frac{\partial R_{o,4}^l}{\partial P_4}$	$\frac{\partial R_{o,4}^l}{\partial S_{w,4}}$

При увеличении количества точек сетки, для каждой новой точки размер матрицы коэффициентов увеличивается на 2 строки и 2 столбца. Общий вид для не граничных точек сетки можно увидеть в строках 3 и 4.

Получаемая система линейных уравнений решается методом обобщенных минимальных невязок, GMRES (Generalized minimum residuals method). Также в целях сокращения занимаемой памяти и времени выполнения существует модернизация метода GMRES называемая GMRES(m). Главное отличие данного метода, в алгоритме GMRES мы сами задаем количество итераций m , при достижении которого метод заново повторяет алгоритм с приближенным решением в прошлом шаге.

Результаты вычислительных экспериментов

Для нахождения δp^{l+1} из уравнения (10) использовались алгоритмы GMRES и алгоритм с перезапусками GMRES(m). Характеристики компьютера на котором проводились тесты: процессор с 6-ядерным процессором Intel Core i7-10750H и оперативная память объемом 16 Гб. Чтобы выполнить расчет, мы создали 5 матриц различных размеров, которые описаны в таблице 1. Мы получили сравнительный график времени для одного итерационного вычисления (Рисунок 1).

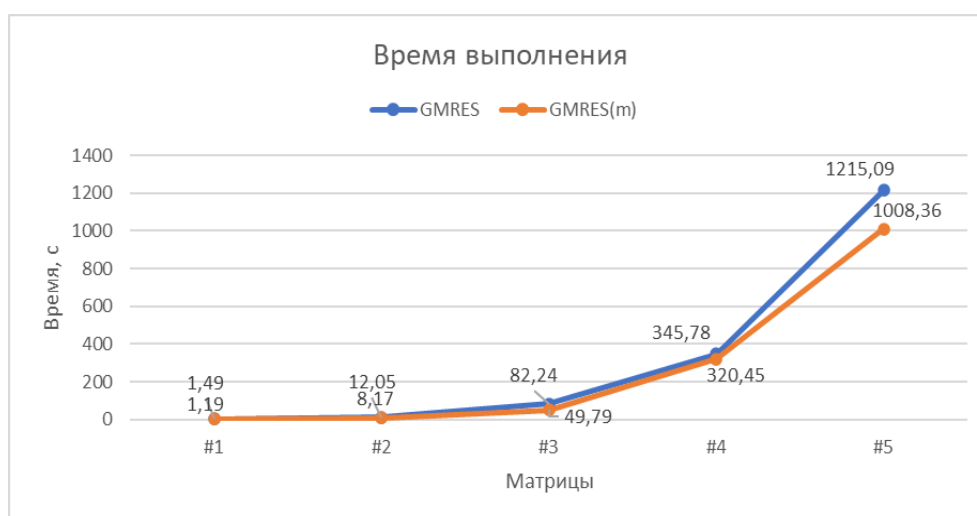


Рисунок 1. Сравнительное время выполнения алгоритмов GMRES и GMRES(m) для одной итерации Ньютона

Таблица 1. Описание матриц

Матрица	#1	#2	#3	#4	#5
Размер сетки	250	500	1000	2000	4000
Размер матрицы	500x500	1000x1000	2000x2000	4000x4000	8000x8000

Как видно из рисунка 1, алгоритм GMRES(m) имеет меньше времени, чем обычный алгоритм GMRES. Однако он был выбран экспериментально, многократно задавая значения m в диапазоне от 50 до 1000, чтобы получить соответствующее значение для 5 различных матриц.

В таблице 2 показаны время и количество полных итераций необходимых для достижения условия сходимости для матрицы #2. Аналогичные данные для матрицы #3 показаны в таблице 3.

Таблица 2. Нахождение оптимального значения m для матрицы #2

m	50	100	200	300	400	500
Время выполнения, с	29,91	11,29	8,17	9,09	8,78	9,44
Количество итераций	9365	3174	2012	1954	1596	1353

Таблица 3. Нахождение оптимального значения m для матрицы #3

m	100	200	300	400	500	600
Время выполнения, с	216,37	60,57	49,79	67,1	83,91	85,73
Количество итераций	12210	3267	2916	3036	2825	2753

Аналогичные тесты были проведены для всех пяти матриц. В данных таблицах показаны диапазоны m , в которых находятся оптимальные случаи, которые выделены жирным шрифтом. Алгоритм GMRES(m) реализуется несложной модификацией исходного алгоритма, но самой трудоемкой работой является эмпирическое определение оптимальных значений m .

В таблицах 2 и 3 можно заметить, что в некоторых случаях, например в таблице 3 при $m = 500$ количество полных итераций меньше чем при $m = 200$, хотя второе является самым быстрым случаем. Это объясняется тем, что при маленьких значениях рестартов, матрицы ортогонализации и коэффициентов ортогонализации также имеют меньший объем памяти, что позволяет получать ускорения за счет быстрой кэш-памяти.

Заключение

Уравнения, описывающие закачку воды в нефтяной пласт, линеаризованы методом Ньютона. Полученная система линейных уравнений решалась с использованием алгоритма GMRES. Кроме того, для уменьшения занимаемой памяти и ускорения работы использовалась модификация метода с перезапусками (GMRES (m)). Проведен анализ и сравнение (время расчета, сходимость) методов GMRES и GMRES(m). Численные результаты показывают, что для одномерной задачи закачки воды в нефтяной пласт алгоритм GMRES с рестартами работает быстрее алгоритма без модификаций, но требует практического определения оптимального значения шагов итераций для рестарта.

Благодарность

Данная работа поддержана грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках проекта №AP09563516 «Моделирование процесса закачки геллана в нефтяной пласт с помощью численных методов и методов машинного обучения».

Список использованной литературы:

- 1 Pederson K.S., Christensen P.L., *Phase Behavior of Petroleum Reservoir Fluids*. CRC Press. 2006, p. 422.
- 2 Ahmed T., *Reservoir Engineering Handbook*. 3rd ed. Gulf Professional Publishing, 2006. p.1376.
- 3 N. Maurand, S. Mayoura, T. Parra, C. Araujo, C. Furtado, "Coupling Compositional Flow, Thermal Effects and Geochemistry Reactions when Injecting CO₂ in a Carbonated Oil Field," *Energy Procedia, Elsevier*, vol. 51, (2014), pp. 316-325. DOI: 10.1016/j.egypro.2014.07.038
- 4 V. E. Borisov, B. V. Kritskiy, N. A. Marchenko, D. A. Mitrushkin, E. B. Savenkov, "Nonisothermal compositional flow model with chemical reactions and active solid phase for reservoir simulation," *KIAM Preprint*, vol.91, Moscow, 2013.
- 5 Z.Chen, *Reservoir Simulation: mathematical techniques in oil recovery*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- 6 Z. Chen, G. Huan, Y. Ma, "Computational methods for multiphase flows in porous media," *Computational science and engineering*, vol.2, 2006.
- 7 Aceto, L., Pandolfi, R., & Trigiante, D., "One parameter family of linear difference equations and the stability problem for the numerical solution of ODEs," *Adv Differ Equ*, 019276 (2006). <https://doi.org/10.1155/ADE/2006/19276>
- 8 Rees, D. A.S. 2016. "Nonlinear Convection in a Partitioned Porous Layer" *Fluids 1*, no. 3: 24. <https://doi.org/10.3390/fluids1030024>
- 9 Pawar, Suraj, and Omer San. 2019. "CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics" *Fluids 4*, no. 3: 159. <https://doi.org/10.3390/fluids4030159>
- 10 El Ouafa, Mohamed, Stephane Vincent, and Vincent Le Chenadec. 2021. "Monolithic Solvers for Incompressible Two-Phase Flows at Large Density and Viscosity Ratios" *Fluids 6*, no. 1: 23. <https://doi.org/10.3390/fluids6010023>
- 11 Lacroix S., Vassilevski YU., Wheeler J., Wheeler M. *Iterative Solution Methods for Modeling Multiphase Flow in Porous Media Fully Implicitly // SIAM Journal on Scientific Computing*. –2003. –Vol. 25. –P. 905–926.
- 12 Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V., *Iterative methods for solving the pressure problem at multiphase filtration*. ArXiv 2011, arXiv:1107.5479

- 13 Wang B., Wu S., Li Q. *Applications of BILU0-GMRES in reservoir numerical simulation // Acta Petrolei Sinica.* – 2013. –Vol. 34. –P. 954-958.
- 14 Saad Y. *Iterative methods for sparse linear systems, 2nd ed. SIAM, 2003.*
- 15 Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods, 2nd ed. SIAM, 1994.*

References:

1. K.S. Pederson, P.L. Christensen, *Phase Behavior of Petroleum Reservoir Fluids.* CRC Press. 2006, p. 422.
2. T. Ahmed, *Reservoir Engineering Handbook.* 3rd ed. Gulf Professional Publishing, 2006. p.1376.
3. N. Maurand, S. Mayoura, T. Parra, C. Araujo, C. Furtado, “Coupling Compositional Flow, Thermal Effects and Geochemistry Reactions when Injecting CO₂ in a Carbonated Oil Field,” *Energy Procedia, Elsevier, vol. 51, (2014), pp. 316-325. DOI: 10.1016/j.egypro.2014.07.038*
4. V. E. Borisov, B. V. Kritskiy, N. A. Marchenko, D. A. Mitrushkin, E. B. Savenkov, “Nonisothermal compositional flow model with chemical reactions and active solid phase for reservoir simulation,” *KIAM Preprint, vol.91, Moscow, 2013.*
5. Z.Chen, *Reservoir Simulation: mathematical techniques in oil recovery. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.*
6. Z. Chen, G. Huan, Y. Ma, “Computational methods for multiphase flows in porous media,” *Computational science and engineering, vol.2, 2006.*
7. Aceto, L., Pandolfi, R., & Trigiante, D., “One parameter family of linear difference equations and the stability problem for the numerical solution of ODEs,” *Adv Differ Equ, 019276 (2006).* <https://doi.org/10.1155/ADE/2006/19276>
8. Rees, D. A.S. 2016. "Nonlinear Convection in a Partitioned Porous Layer" *Fluids 1, no. 3: 24.* <https://doi.org/10.3390/fluids1030024>
9. Pawar, Suraj, and Omer San. 2019. "CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics" *Fluids 4, no. 3: 159.* <https://doi.org/10.3390/fluids4030159>
10. El Ouafa, Mohamed, Stephane Vincent, and Vincent Le Chenadec. 2021. "Monolithic Solvers for Incompressible Two-Phase Flows at Large Density and Viscosity Ratios" *Fluids 6, no. 1: 23.* <https://doi.org/10.3390/fluids6010023>
11. Lacroix S., Vassilevski YU., Wheeler J., Wheeler M. *Iterative Solution Methods for Modeling Multiphase Flow in Porous Media Fully Implicitly // SIAM Journal on Scientific Computing.* –2003. –Vol. 25. –P. 905–926.
12. Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V., *Iterative methods for solving the pressure problem at multiphase filtration. ArXiv 2011, arXiv:1107.5479*
13. Wang B., Wu S., Li Q. *Applications of BILU0-GMRES in reservoir numerical simulation // Acta Petrolei Sinica.* – 2013. –Vol. 34. –P. 954-958.
14. Saad Y. *Iterative methods for sparse linear systems, 2nd ed. SIAM, 2003.*
15. Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods, 2nd ed. SIAM, 1994.*