МРНТИ 27.01.45
УДК 372.851

https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.02

С.Е. Ералиев[1], И. Бердiахмет[1]

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКАДАН ҚИЫНДЫҒЫ ЖОҒАРЫ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

Аңдатпа

Бұл жұмыста мектеп математика курсында қарастырылмайтын стандартты емес күрделі есептерді бірнеше жолмен шешу тәсілдері қарастырылған. Есеп шығару математиканы игерудің ең жоғары продуктивтік формасы және де бұл процесс математикадан өткізілетін барлық кластан тыс жұмыстардың қажетті компоненті болуы керек. Математикалық олимпиадалық есептер әдетте біршама зеректікке, біліктілікке есеп шешудің өзіндік стандарт емес әдістерін табуға көмектеседі. Басты мақсат қиындығы жоғары есептерді шешу оқушылардың дамуында ерекше рөл атқарады. Оларға материалды саналы меңгеруге әрі терең түсінуге көмектеседі. Берілген жағдайды талдай білу, мәліметтерді салыстыра білу және мәліметтерді іздеу, осы жағдайдың жасырын қасиеттерін анықтау, есептерді шешу үшін пайдалы ақпаратты синтездеу, есептерді шешу үшін ғана емес,олардың оқушыларға қажетті дағдыларды қалыптастыруы үшін керек.

Орта мектеп бағдарламасында терең қарастырылмаған натурал сандардың бөлінгіштік белгілеріне,санның қарапайым жіктелуіне, пропорцияға, анықталмаған теңдеулер түсінігіне және Эвклид алгоритміне байланысты тақырыптарға күрделі есептер қарастырылды.

Түйін сөздер: қиындығы жоғары есептер, олимпиадалық есептер, математикалық сауаттылық, продуктивтік, стандартты емес.

Аннотация

С.Е. Ералиев[1], И. Бердiахмет[1]
[1]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

В работе рассматриваются несколько способов решения сложных нестандартных задач школьного курса математики. Решение задач является наиболее продуктивной формой усвоения математики, и этот процесс должен быть необходимым компонентом всех внеклассных работ, проводимых по математике. Математические олимпийские задачи, как правило, помогут в значительной степени научиться, найти самостоятельные нестандартные методы решения задач. Главная цель решения задач высокой сложности играет особую роль в развитии учащихся. Помогает им усвоить материал глубоко и осознанно. Умение анализировать заданную ситуацию, сопоставлять данные и искать данные, определять скрытые свойства этого случая, синтезировать полезную информацию для решения задач, формировать необходимые навыки не только для решения задач.

В программе средней школы глубоко не рассматривались следующие темы: признаки делимости натуральных чисел, разложение натуральных чисел на простые числа,понятия неопределенных уравнений и алгоритм Эвклида.

Ключевые слова: задачи высокой сложности, математическая грамотность, олимпийские задачи, продуктивность, нестандартные.

Abstract

METHODS FOR SOLVING PROBLEMS OF ELEMENTARY MATHEMATICS OF HIGHER DIFFICULTY SOLVING HIGH-COMPLEXITY PROBLEMS

Yeraliyev S. E.[1], Berdiakhmet I.[1]
Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

In this paper, we consider several ways to solve problems of high complexity that occur in the school course of mathematics, test tasks of mathematical literacy, and Olympic problems. Problem solving is the most productive form of learning mathematics, and this process should be a necessary component of all extracurricular activities conducted in mathematics. Mathematical Olympic problems, as a rule,will help to a large extent to learn, to find independent non-standard methods of solving problems. The main goal of solving problems of high complexity plays a special role in the development of students. Helps them learn the material more strongly and consciously. The ability to analyze a given situation, compare data and search for data, determine the hidden properties of this case, synthesize useful information for solving problems, and form the necessary skills not only for solving problems. The high school program considered

solving equations that are not defined using Euclid's rules for catching ordinary multipliers,classifying complex expressions by the properties of Prime numbers, and solving economic problems.

Keywords: Tasks of high complexity, mathematical literacy, Olympic tasks, productivity.

Стандартты емес есептер санатына олимпиадалық, түрлі конкурстық есептерді енгізуге болады. Стандартты емес есептер ұғымының нақты анықтамасы жоқ. Оның анықтамасы ретінде келесідей тұжырымды қабылдауға болады: стандартты емес есептер -бұл шешу үшін мектеп математикасы курсында нақты ережелер мен алгоритімдер қарастырылмаған тапсырма. Олардың кейбіреулері әдеттегідей көрінеді бірақ стандартты әдістермен шешілмейді. Стандартты емес есептерді шешу әдістері олардың мазмұнына байланысты анықталады.

Мәселен төмендегідей:

1) Шешім жолын таңдау мәселесі;

2) Логикалық құрылымдарды құру мәселелері;

3) Қателерді анықтау міндеттері ;

4) Тапсырманың әр түрлі шешімдерін табу және олардың ең тиімдісін таңдау.

Жоғары сыныптарда, математиканы оқыту барысында, ұстаздар оқушылардың қандай теориялық тұжырымдарды пайдаланылып жатқандарына аса көңіл аударулары қажет, өйткені тапсырмаларды шешу кезінде көптеген оқушылар теорияны қалай, қай жерде қолдану керектігін білмейді. Мұндай кемшіліктерден арылу үшін мектеп бағдарламасында көрсетілген әдістермен шешілетін типтік қарапайым тапсырмаларды орындаумен шектелмей күрделі стандартты емес есептерді де қарастыру қажет. Қиындығы жоғары есептер оқушылардың дамуында ерекше рөл атқарады. Олардың материалды терең әрі саналы меңгеруіне көмектеседі. Берілген жағдайды талдай білу, мәліметтерді салыстыра білу және мәліметтерді іздеу, осы жағдайдың жасырын қасиеттерін анықтау, есептерді шешу үшін пайдалы ақпаратты синтездеу, есептерді шешу үшін ғана емес, қажетті дағдыларды қалыптастыру болып табылады.Мұндай оқушылардың стандартты емес күрделі есептерді толық көлемде шеше алары анық.

Оқу үрдісінде стандартты емес тапсырмаларды пайдалану проблемасымен көптеген ғалымдар біздің елде де, шетелде де айналысады. Мұндай ғалымдардың бірі- Д.Пойя. Өзінің "Как решать задачи" кітабында ол кез келген математикалық, соның ішінде стандартты емес есептерді шешу проблемаларына психологиялық-педагогикалық талдау жасайды. Оның кітабының соңында кесте бар, оның көмегімен мұғалім тапсырманы өз бетінше орындауға кірісуге немесе одан әрі жалғастыру үшін оқушыға жібере алады. Шын мәнінде, осы кестелер өз бетімен жұмыс істеуге мүмкіндік беретін құрал болып табылады. Кестелер нұсқаулар мен жетекші сұрақтар түрінде көрсетілетін стереотиптік басшылық принциптердің күрделі жүйесін білдіреді [1].

Математиканы оқытуда есептерді шеше білу дағдысын қалыптастыру және оны дамыту аса маңызды мәселелердің бірі болып табылады. Есептер шешу туралы жалпы-білік дағдылар әдетте көптеген есептерді шешіп жаттығу арқылы қалыптасады. Шешу жолы беймәлім, әр түрлі тероиялық фактілерді байланыстыруды қажет ететін, барлық оқушы шығара алмайтын есептер жиі кездеседі. Сондықтан оқушыларды да кез келген матиматикалық есепті шешудің жалпы тәсілдерімен қаруландыру керек. Практикадан байқалатыны көбінесе геометриялық, пропорцияға байланысты экономикалық, Дирхиле приципіне байланыты логикалық, математикадағы төрт шаманың бір трапецияда табылуы, геометриялық теңсіздіктер, сандардың бөлінгіштік белгілері тақырыптарына арналған есептер қызықты әрі әртүрлі тәсілдермен логикалық тұрғыда көбірек ойлануды қажет етеді.

Стандартты емес есептердің кейбір қарапайым түрлері

Стандартты емес арифметикалық есептер-бұл әртүрлі арифметикалық амалдардың көмегімен кейбір шамлардың мәндерін анықтауды талап ететін және мектеп математика курсында шешімдерін анықтайтын жалпы ережелері жоқ мәтіндік есептер. Е.Е. Останина өзінің "Обучение младших школников решению нестандартных задач" атты кітабында осындай есептерді шешуге көмектесетін тәсілдерді қарастырған. Ол әртүрлі тәсілдер бойынша осындай есептерді шешудің жолдарын көрсеткен: суретті немесе сызбаны құру, қосалқы элемент (бөлік) енгізу, таңдау тәсілін пайдалану, түсінікті болу үшін есептерді қайта қалыптастыру, есептің шартына байланысты бірнеше бөлікке бөліп шешу, керісінше "соңынан" бастап шешу [2].

Комбинаторка-математиканың тарауларының бірі. Мұнда шекті жиын элементтерінің түрлі қосылыстары қарастырылып, олардың сандары саналады [3]. Санауды жеңілдету мақсатында теру, орналастыру, алмастыру, қайталамалы теру, қайталамалы алмастыру т.с.с. түсініктемелер енгізіліп олардың формулалары анықталған. Осы формулалардың көмегімен кейбір күрделі есептердің шешімін оңай анықтауға болады [4]. Мектепте комбинаторика ұғымдарын терең түсінген оқушылар ықтималдық теориясында оңай игереді. Яғни математикалық статистика пәнін игеруге жол ашылады.

Олимпиадалық есептер

Сөзіміздің дәлелі ретінде жалпы мектеп бағдарламасында қарастырылмайтын мына бірнеше есептің шешу әдістерін қарастыруды жөн көрдік:

1. 1728000001 сынын жай көбейткіштерге жіктеңіз [5].

Шешеуі:

$$1728000001 = 1728000000 + 1 = 1200^3 + 1 = (1200+1)(1200^2 - 1200 \bullet 1 + 1) =$$
$$1201 \bullet (1200^2 + 2 \bullet 1200 + 1 - 3600) = 1201 \bullet ((1200+1)^2 - 3600) = 1201 \bullet (1201^2 - 60^2) =$$
$$1201 \bullet (1201 - 60) \bullet (1201 + 60) = 1201 \bullet 1241 \bullet 1261$$

2. $K^4 + 64$ саны К нақты сандар жиынында жай сан бола ма? [6]

Шешуі: берілген өрнектің жай немесе құрама сан екенін білу үшін өрнекті жай көбейткішке жіктеп көреміз. Егер жай көбейткішке жіктелсе онда ол құрама сан.

$$K^4 + 64 = (k^2)^2 + 8^2 = (k^2+8)^2 - 2k^2 \bullet 8 = (k^2+8)^2 - 16k^2 = (k^2 + 8 - 4k) \bullet (k^2 + 8 + 4k)$$

Берілген өрнек көбейткішке жіктелді ендеше жай сан бола алмайды.

3. Жайлымдық алқаптың шөбі біркелкі және бірдей жылдамдықпен өседі.

Алқаптың шөбін 70 жылқы 24 күнде , 30 жылқы 60 күнде жеп тауысады. Осы алқаптың шөбін неше жылқы 96 күнде жеп тауысады?

Шешуі:

- Жайлымдық алқаптың шөбін $-x$ деп белгілейік;
- Күн сайын өсу жылдамдығы – y шөп/күн;
- 70 жылқы 24 күнде – $x + 24y$ шөп;
- 30 жылқы 60 күнде – $x + 60y$ шөп;

$\frac{70 \bullet 24}{30 \bullet 60} = \frac{x + 24y}{x + 60y}$ қысқартуды орындасақ $\frac{14}{15} = \frac{x + 24y}{x + 60y}$ өрнегін аламыз.

$14(x+60) = 15(x+24) \Rightarrow 480y = x$ ал енді өзімізге қажетті жылқыны табу үшін:

- 70 жылқы 24 күнде – x + 24y шөп;
- М жылқы 96 күнде – x + 96y шөп алып x-тің орына 480y қоятын болсақ,

$$\frac{70 \bullet 24}{M \bullet 96} = \frac{480y + 24y}{480y + 60y} \Rightarrow \frac{70 \bullet 24}{M \bullet 96} = \frac{504y}{576y} \Rightarrow 35 \bullet 576 = 2M \bullet 126 \Rightarrow M = 20$$

Жауабы: 20 жылқы.

4. $a + b = c + d$, $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ екені белгілі болса, $a^{2009} + b^{2009} = c^{2009} + d^{2009}$ болатындығын дәлелдеңіз[2].

Дәлелдеу : $a + b = c + d$, $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ болса, қысқаша көбейту формулалары бойынша

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad c^3 + d^3 = (c+d)(c^2 - cd + d^2)$$

$a + b = c + d$ осыдан $(a^2 - ab + b^2) = (c^2 - cd + d^2)$ теңдігін аламыз.

$$(a^2 - ab + b^2) = (c^2 - cd + d^2) \Rightarrow (a+b)^2 - 3ab = (c+d)^2 - 3cd$$
$$cd = ab; (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) = (c^3 + d^3)(c^2 + d^{2)})$$
$$(a^5 + b^5 + a^2b^2(a+b)) = (c^5 + d^5 + c^2d^2(c+d))$$
$$a^2b^2(a+b) = c^2d^2(c+d)$$

себебі $a+b=c+d$ және $cd=ab$ осыдан $a^5+b^5=c^5+d^5$ теңдігінің орындалатынын байқауға болады. Дәл осылай $a^{2009}+b^{2009}=c^{2009}+d^{2009}$ теңдігі орындалады.

5. Қабырғалары $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6$ болатын дөңес алты бұрыштың диагоналдары болса

$d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6$, $\frac{1}{2}\prec\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6}\prec 1$ екенін дәлелдеңіз [3]

Дәлелдеуі: оң жақ теңсіздіктің ақиқат екені белгілі. Сондықтан теңдіктің сол жағын дәлелдесек жеткілікті. Бір диогнал екі қабырғадан тұратын үшбұрыштар үшін үшбұрыштар теңсіздігін жазып, өзара қоссақ,

$$d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6=m_1+m_2+m_2+m_3+m_3+m_4+m_4+m_5+m_5+m_6+m_1+m_6$$

шығады. Осыдан $\frac{1}{2}\prec\frac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6}\prec 1$ екендігі дәлелденді.

6. 21^n+4^{n+2} өрнегі n - натурал саны үшін 17- ге бөлінетінін дәлелдеңіз.

1 - тәсіл:

$$21^n+4^{n+2}=21^n+4^n\bullet 16=(17+4)^n+16\bullet 4^n$$

Ньютон биномы бойынша $(17+4)^n=17^n+C_n^1 17^{n-1}\bullet 4+...+4^n$ болып жіктеледі [3].

$$21^n+4^{n+2}=21^n+4^n\bullet 16=(17+4)^n+16\bullet 4^n=(17+4)^n=17^n+C_n^1 17^{n-1}\bullet 4+...+4^n$$
$$+16\bullet 4^n=\frac{17^n+C_n^1 17^{n-1}\bullet 4+...}{17}+\frac{4^n+16\bullet 4^n}{17}$$

қосылғыштар әр қайсысы 17 бөлінсе қосындыныда 17-ге бөлінеді деп айтуға болады.

2 - тәсіл:

$$21^n+4^{n+2}=21^n-4^n+4^{n+2}+4^4=(21^n-4^n)+(4^{n+2}+4^n)=17(...)+4^n\bullet 17.$$

Топқа бөліп көбейткішке жіктесем 17 санынна бөлінетінін көруге болады.

7. $x^2=y^2+2y+13$ теңдеудің бүтін шешімін табыңыз [2].

Шешуі: алдымен теңдіктің оң жақ бөлігін толық квадрат түріне кенліріп алсақ

$x^2=(y+1)^2+12$ түріне келеді. $x^2-(y+1)^2=12\Rightarrow(x-y-1)\bullet(x+y+1)=12$

$$\begin{cases}x-y-1=2\\x+y+1=6\end{cases}\Rightarrow x=4, y=1$$

Жауабы: (4;1).

8. $1!+2!+3!+...+x!=y^2$ теңдеуінің бүтін шешімін табыңыз [3].

Шешуі: тізбектің жалпы қасиетін пайдаланатын болсақ

$1!=1\Longrightarrow 1=y^2$ демек теңдеудің шешімі: (1;1)

$1!+2!\neq y^2$ тағы осылай жалғастырсақ $1!+2!+3!=9=3^2$ демек келесі шешімі: (3;3)

$1!+2!+3!=9+4!=9+24\neq y^2...$ т.с.с . басқа бүтін шешімдері жоқ екенін байқауға болады.

9. $15x+37y=1$ теңдеуіні бүтін шешімін табыңдар.

Бұл теңдеу анықталмаған теңдеу. Теңдеудің нақты сандар жиынында шексіз шешімі болуы мүмкін. Ал бүтін сандар жиынында шешімі жоқ болуы, бір ғана шешімі болуы, сансыз көп шешімі болуы да мүмкін.

Евклид ережесіне сәйкес егер ЕҮОБ$(a,b)=1$ болса онда $ax+by=1$ теңдеуінің кем дегенде бір пар (x,y) бүтін шешімі бар [3].

Шешімі: $15x+37y=1$ Евклид алгоритмі бойынша

$$15=7\bullet 2+1$$
$$1=15-7\bullet 2$$
$$7=37-2\bullet 15$$

$$1=15-2\bullet(37-2\bullet 15)\Rightarrow 1=15-2\bullet 37+4\bullet 15\Rightarrow 1=5\bullet 15-2\bullet 37$$
$$15x-37y=1\Rightarrow 1=5\bullet 15-2\bullet 37\Rightarrow x=5, y=2$$

екенін көруге болады.

Жауабы: (5;7)

Қоғамымыздың қазіргі даму кезеңінде болып жатқан экономикалық, әлеуметтік, саяси және жаңа технологиялық өзгерістерге байланысты жас ұрпақты тәрбиелеуде білім мен тәрбие беру жүйелерінің ісін жаңа сатыға көтеру мәселесі туындап отыр. Осыған байланысты жас ұрпаққа жоғары деңгейде сапалы білім беру, жаңа технологиялармен, инновациялармен таныстыру, сонымен бірге тәрбиенің озық-өнегелі дәстүрлерімен тереңірек таныстыру, ал солардың негізінде жеке тұлғаны қалыптастыру, оның шығармашылық және рухани мүмкіндіктерін дамыту үшін барлық жағдайлар жасалынылуы қажет. Себебі, егеменді еліміздің болашағы, оның материалдық және рухани дамуы, экономикалық, әлеуметтік және саяси жағынан өркендеп өсуі жас ұрпақтың қолында, сонымен қатар олардың оқу орындарында алған білімі мен тәрбиесінің деңгейіне байланысты.

Оқушылардың қызметін педагогикалық басқару стандартты емес тапсырмаларды өз бетінше құрастыруы және тапсырмаларды бірнеше тәсілмен шешу барысында ақыл-ой әрекетінің эвристикалық тәсілдерін қалыптастырумен тығыз байланысты.

Қорыта айтқанда қай салада болмасын жас ұрпақты оқыту мен тәрбиелеудегі мемлекеттің, сонымен бірге білім беру мекемелерінің басты мәселелерінің бірі – Қазақстан халқының мүддесін өз мақсат-мүддесінен жоғары қоятын білімді, саналы, кәсіпқой мамандарды тәрбиелеу.Ал, оның ішінде бәсекеге қабілетті, құзіретті болашақ мамандарды даярлау – жоғарғы оқу орнындағы міндеттердің бірі. Ал бұл бағыттағы мәселе білім беру саласына тікелей қатысты, себебі білім – жеке тұлғаның саяси-әлеуметтік көзқарасын дамытатын, дүниетанымдық аясын кеңейтетін маңызды фактордың бірі болып саналады.Сондықтан еліміздің жоғарғы оқу орындарына, оның материалдық-техникалық базасына жаңаша талаптар қойылып, студенттерге білім беруде және тәрбиелеуде ерекше мән беріп, құзіретті тұрғыда білім беруді одан әрі жетілдіру қажет. Математиканы оқытуда стандартты емес есептерді шешу оқушыны логикалық тұрғыда дамытуға көмек беріп қана қоймай алған білімді практикада қолдана білу дағдыларын қалыптастырады. Сонымен қатар басқа физика , экономика т.с.с пәндермен байланыстыра отырып өмірде қолданылатын кейбір проблемалық мәселелерді шешуге жол табады. Математикадан өтілетін факультативтік сабақтарда оқушылардың қызығушулығын қалыптастыруға, еңбек дағдысын, ізденімпаздығын арттыруға, өзінің мектеп бағдарламасы бойынша алған білімін дамыта отырып, оның өмірге қажеттілігін айқындауға, қолдана білуге дағдылантуға баулу керек.

Мектеп курсындағы математиканың мәні оның көп қырлылығында, ягни негізгі объектілері нақты өмірге негізделгендігінде. Сондықтан бағдарламадан тыс стандарт емес есептерді шығару оқушылардың білім жүйесін және ойлау қабілетін кең түрде дамытады.

Математикалық олимпиадада берілетін есептер – стандартты емес есептер. Стандартты емес есептер, әдетте зеректікке, біліктілікке әрі есеп шешудің өзіндік стандартты емес әдістерін табуға көмектеседі.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Пойя Д. Как решать задачи.- М. Госучпедгис, 1954

2 Останина Е.Е.Обучение младших школьников решению нестандартных задач.-М: Начальная школа, № 7

3 Шыныбеков А.Н. Алгебра: жалпы білім беретін мектептің 10 сыныбына арналған оқулық – Алматы, Атамұра 2012.-301 б.

4 Ералиев С. Ықтималдықтар теориясы. – Алматы, Жебе-дизайн басп. 2016.– 73 б.

5 Шыныбеков А.Н. Алгебра: жалпы білім беретін мектептің 8 сыныбына арналған оқулық – Алматы, Атамұра 2004.-198 б.

6 Әлиасқаров Д., Бейсеков Ж. 8 сыныптағы оқушыларды математикалық олимпиадаға даярлау. Шымкент, 2013. -300с.

References:

1 Pojja D. (1954) Kak reshat' zadachi [How to solve problems]. M. Gosuchpedgis. (In Russian)

2 Ostanina E.E. Obuchenie mladshih shkolnikov resheniju nestandartnyh zadach [Teaching younger students to solve non-standard problems]. M.Nachalnaja shkola, № 7. (In Russian)

3 Shynybekov A.N. (2012) Algebra: zhalpy bilim beretin mekteptim 10 synybyna arnalgan okulik [Algebra: a textbook for the 10th grade of secondary school]. Almaty, Atamura, 301. (In Kazakh)

4 Eraliev S. (2016) Uktimaldyktar teorijasy [Probability theory]. Almaty, Zhebe-dizajn, 73. (In Kazakh)

5 Shynybekov A.N. (2004) Algebra: zhalpy bilim beretin mekteptin 8 synybyna arnalgan okulyk [Algebra: a textbook for 8th grade of secondary school]. Almaty, Atamura, 198. (In Kazakh)

6 Aliaskarov D., Bejsekov Zh. (2013) 8 synyptagy okushylardy matematikalyk olimpiadaga dajarlau [Preparing 8th grade students for the mathematical olympiad]. Shymkent, 300. (In Kazakh)