МРНТИ 41.29.15; 41.29.17; 41.29.25; 41.29.33
УДК 524.4; 524.82; 524.83; 524.85

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.27

М.П. Иманқұл[1]*, Ш.Р. Мырзақұл*[1]

[1]*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан*

f (R) ХОРАВА-ЛИФЩИЦ КОСМОЛОГИЯСЫН НЕТЕР СИММЕТРИЯСЫ АРҚЫЛЫ АНЫҚТАУ

Аңдатпа

Біз бұл жұмыста Хорава-Лифщиц гравитациясының нақты космологиялық шешімдерін, Нетер теориемасы арқылы зерттеудеміз. Бұл тәсілдің ерекшелігі, тиімді Лагранжианның эффективті түріне қажетті симметрияның шексіз шағын өзгерістері үшінпайдалану, ол үшін мұндай симметриялар бар форманы айқын анықтау қажет. Мұндағы динамика коэффициенті уақыттың экспоненциалды функициясына немесе қуат заңына сәйкес өзгереді.*f*-эссенция фермиондық өрістерінің жалпыланған түрі болып табылады. Осы жұмыста біз Фридман-Робертсон-Уолкер жазық ғаламдағы тұтқыр сұйықтықты *f*-эссенция динамикасын зерттейміз. Сондай-ақ, бұл жұмыста тұтқыр сұйықтықтардың түрлерін және әлемнің ағымдағы үдемелі ұлғаю мүмкіндігін қарастырамыз. Сонымен қатар жұмыста қарастырылып отырған модельдің ғарыштық параметрлері анықталды.Үдемелі ұлғаю, әлемнің үдемелі ұлғаюының көптеген қазіргі заманғы модельдерінде қарастырылатын идеалды сұйықтықтың әсер етпейтін жағдай сияқты фермиондық өрістің тұтқыр сұйықтығымен де алынуы мүмкін.

Түйін сөздер: Хорава-Лифщиц гравитациясы,*f (R)* гравитация, Нетер симметриясы,*f*-эссенция, әлемнің ұлғаюы.

Аннотация

М.П.Иманкул[1]*, Ш.Р. Мырзакул*[1]
[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан*

_f (R)_ ХОРАВА-ЛИФЩИЦА КОСМОЛОГИИ ЧЕРЕЗ СИММЕТРИИ НЕТЕР

Мы исследуем общий подход к нахождению точных космологических решений в гравитации Хорава-Лифшица, основанный на теореме Нётера. Особенностью этого подхода является то, что он использует поведение эффективного Лагранжиана при бесконечно малых преобразованиях искомой симметрии, явно определяя форму, для которой существуют такие симметрии. Показано, что динамика масштабного коэффициента изменяется в соответствии с экспоненциальной функцией времени или степенным законом.*f* - эссенция представляет собой обобщенную форму фермионных полей. В настоящей работе мы изучаем динамику *f* - эссенции с вязкой жидкостью в плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уолкера. А также в данной работе проанализированы различные типы вязких жидкостей и исследована возможность воспроизведения текущего ускоряющегося расширения Вселенной. Определены космологические параметры этой модели. Показано, что ускоренное расширение также может быть получено с вязкой жидкостью фермионного поля, как и в случае невзаимодействующей идеальной жидкости, рассматриваемой в большинстве современных моделей ускоренного расширения Вселенной.

Ключевые слова: гравитация Хорава-Лифшица, *f (R)* гравитация, Нетер симметрии, *f*-эссенция, расширение Вселенной.

Abstract

_f (R)_ HO'RAVA-LIFSHITZ COSMOLOGIES VIA NOETER'S SYMMETRIES

M.P. Imankul[1]*, Sh.R. Myrzakul*[1]
[1]*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

We investigate the general approach to inding exact cosmological solutions in *f (R)* Ho'rava-Lifshitz gravity, based on Noethers theorem. A feature of this approach is that it uses the behavior of an effective Lagrangian under ininitesimal transformations of the desired symmetry, explicitly determining the form *f (R)* for which such symmetries exist. It is shown that the dynamics of the scale factor changes according to either a exponential function of time or to a power law. *f*-essence is one of generalized fermion fields. In this work, the dynamics of *f*-essence with a viscous fluid in the flat Friedmann-Robertson-Walker universe are studied. In addition, we analyzed various types of viscous fluids and investigated the possibility of reproducing the current accelerating expansion of the Universe. The cosmological parameters of this model are obtained. It shows that accelerated expansion can also be determined with a viscous fluid of the fermion field, as in the case of non-interacting perfect fluid considered in most modern models of accelerated expansion of the Universe.

Keywords: Ho'rava-Lifshitz gravity, *f (R)* gravity, Noether symmetry,*f*-essence, Universeexpansion.

Кіріспе. Өткен мыңжылдықтың соңында жоғары үлгідегі Ia және ғарыштық микротолқынды фонның бақылауларынан біздің Әлемнің үдемелі кеңейіп жатқандығы белгілі болды [1,2]. Жалпы салыстырмалылық теориясы шеңберінде бұл құбылысты түсіндіру көптеген модельдердің қалыптасуына әкелді, олардың бірі жұмбақ субстанцияны енгізуге негізделген, ол қара энергия деп аталады (мысалы, [3] сілтемесін және кейбір әдеби шолуларға арналған сілтемелерді қараңыз). Қараңғы энергияның табиғаты әлі де анық емес, бірақ математикалық тұрғыдан ол ΛCDM моделімен алынған кең спектрлі деректерімен жақсы үйлеседі [4].Дегенмен, бұл модельдің елеулі теориялық кемшіліктері бар болғандықтан [5], балама модельдерді іздестіруді қажет етеді [6,7].Баламалардың бірі Эйнштейн-Гильберт терминінің модификациясы болып табылады, онда R Риччи скалярын кейбір жалпы функциялар үшін $f(R)$ Риччи скалярымен алмастырылады (мысалы, [8] сілтемесін және кейбір әдеби шолуларға арналған сілтемелерді қараңыз).

Сонымен қатар кванттық гравитацияның кейбір модельдері әзірленді.2009 жылы Хорава [9] Лифщитц ұсынған идеяға сүйеніп, кванттық гравитация теориясы үшін модель жасады, ол кеңістік пен уақыт арасындағы анизотропты масштабтау салдарынан ультракүлгін модасының Лоренц-инварианттылығы бұзылатын қайта нормалауын ескерді. Алайда, теорияның инфрақызыл шегі параметрін $\lambda=1$ таңдау кезінде салыстырмалылықтың жалпы теориясы шығады. Салыстырмалылықтың жалпы теориясының бұл модификациясы Эйнштейн-Гильберттің әрекетіне жоғары ретті мүшелерді енгізуден тұрады, олар әр түрлі масштабқа әкеледі және координаттарды кеңістік пен уақытқа бөледі. Елестер теориясында жоқ, себебі тек уақыт бойынша екінші реттік туындылар ғана бар, бірақ жалпы ковариацияның айқын бұзылуы патология пайда болатын еркіндіктің жаңа скалярлық дәрежесін енгізеді [10,11].Бұл модель әрі қарай дамыды және Хорав-Лифшиц теориясы ретінде танымал (мысалы, сілтеме [12] қараңыз). Жоғарыда айтылған пайымдаулардан Хорав-Лифшицтің кванттық теориясы $f(R)$ балама теориямен үйлескен ультракүлгін диапазонда жалпы салыстырмалылық теориясын толықтыру үшін көп үміт күттіретін кандидат болып табылатыны анық [13].

Бұл мақалада $f(R)$ гравитацияның метрикалық формализмі шеңберінде Фридман-Лемэтр-Робертсон-Уокердің (ФЛРУ) жазық кеңістік-уақытты қарастырамыз. Сонымен қатар, диффеоморфизмдерге қатысты инвариантты және қабатталуды сақтайтын модификацияланған гравитацияны құрастырудың жалпы тәсілі қарастырылады. Бұл тәсіл [14] жұмысында ұсынылған мұнда модификацияланған $f(R)$ - Лифшиц гравасы мен оның Гамильтон құрылымын тұжырымдауға ерекше назар аударылды. [15] кейін біз тиімді Лагранжианды есептейміз, онда Риччи бойынша a және скаляр R тәуелсіз динамикалық айнымалы рөлін атқарады. Бұл Лагранжианның a және R қатысты өзгерісі Хорав-Лифшиц теориясының қозғалыс теңдеуін береді. Модификациялау нәтижесінде пайда болатын $f(R)$ функцияның түрі содан кейін Лагранжианға қатысты Нетер симметриясының орындалуы шартымен анықталады. Осы космологиялық модельдің Нетер симметриясы деп конфигурациялық кеңістіктің жанама кеңістігіндегі шексіз кіші симметрия генераторы болып табылатын X векторлық өрісі бар екенін түсінеміз, сондықтан Лагранжианның туындысы осы векторлық өрістің бойымен нөлге айналады.Біз Лагранжианның қасиеттерінің бірі – Нетер симметриясын шартқа ала отырып, $f(R)$ функцияның айқын түрін ала аламыз. Симметрияның болуы бірқалыпты қозғалысқа әкелетін болғандықтан, біз өріс теңдеулерін интегралдай аламыз, содан кейін әлем үшін экспоненциалды кеңеюге келеміз.

Модификацияланған Хорава-Лифшиц гравитациясы.Бұл жұмыста біз Хорава-Лифшиц гравитациясының жалпы моделін қарастырамыз. Модельдің математикалық өрнегі:

$$S_{f(R_{GHL})}=\int d^4x\sqrt{g^{(3)}}N\,f(R_{GHL}). \tag{1}$$

Мұндағы $g^{(3)}$ - үш өлшемді метрикалық тензордың анықтауышы, $g_{ij}^{(3)}$ - ADM метрикасы үшін мына түрде беріледі:

$$ds^2=-N^2dt^2+g_{ij}^{(3)}(dx^i+N^idt)(dx^j+N^jdt), \tag{2}$$

мұндағы $i,j=1,2,3,N$ - үзілістік тұрақтысы, ал N^i - 3-ығысу векторы.

$f(R_{GHL})$ функциясын қолданамыз, ол Хорава-Лифщиц гравитациясының жалпылама қисығын R_{GHL} береді және (3) өрнекке сәйкес анықталады:

$$R_{GHL} = K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2 + 2\mu\nabla_\mu(n^\mu\nabla_\nu n^\nu - n^\nu\nabla_\nu n^\mu) - E^{ij}G_{ijkl}E^{kl}, \tag{3}$$

мұндағы K_{ij} - сыртқы қисық:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\dot g^{(3)}_{ij} - \nabla^{(3)}_i N_j - \nabla^{(3)}_j N_i), \quad K = K^i_i, \tag{4}$$

n^μ - $t = const$ кезіндегі $\sum_t$ перпендикулярлы үшөлшемді беттің бірлік векторы, $\nabla^{(3)}_i$ і $\sum_t$ гипербеттегі ковариантты туындыны өрнектейді. (3) теңдеудегі G_{ijkl} де Витттің жалпыланған метрикасына кері болып табылады:

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2}(g^{(3)ik}g^{(3)jl} + g^{(3)il}g^{(3)jk}) - \lambda g^{(3)ij}g^{(3)kl}. \tag{5}$$

Бұл жерде атап өту маңызды, G^{ijkl} - $\lambda = 1/3$ сингулярлы болып табылады және G^{ijkl} $\lambda \neq 1/3$ болғанда пайда болады. «Толық баланс принципін» қанағаттандыру үшін жасалған өрнек E_{ij} былай анықталады:

$$\sqrt{g^{(3)}}E^{ij} = \frac{\delta W[g^{(3)}_{kl}]}{\delta g^{(3)}_{ij}}, \tag{6}$$

мұндағы $W[g^{(3)}_{kl}]$ формасы $z = 2$ және $z = 3$ үшін жазылған. ФЛРУ кеңістіктік жазық ғаламды қарастырайық:

$$ds^2 = -N^2dt^2 + a(t)^2\sum_{i=1,2,3}(dx^i)^2, \tag{7}$$

мұнда N уақыт өте келе тәуелсіз деп санауға болады және біз оны $N = 1$ ретінде аламыз. Скалярлық қисық (3) ретінде жазылуы мүмкін:

$$R_{GHL} = 3(1 - 3\lambda + 4\mu)\frac{\dot a^2}{a^2} + 6\mu\frac{\ddot a}{a}. \tag{8}$$

Нетер симметриясын зерттеу үшін a масштабты факторы мен R_{GHL} скалярлық қисық тәуелсіз динамикалық айнымалы рөл атқаратын шағын кеңістіктің (1) өрнегі үшін тиімді Лагранжианды анықтау қажет:

$$S = \int dt\,L(a,\dot a,R_{GHL},\dot R_{GHL}) = \int dt[a^3 f(R_{GHL}) - \nu\{R_{GHL} - (3(1 - 3\lambda + 4\mu)\frac{\dot a^2}{a^2} + 6\mu\frac{\ddot a}{a})\}], \tag{9}$$

мұндағы $\nu = a^3 df(R_{GHL})/dR_{GHL}$ - Лагранж көбейткіші. Сонда тиімді Лагранжиан:

$$L(a,\dot a,R_{GHL},\dot R_{GHL}) = (9\lambda - 3)\dot a^2 a f' + 6\mu\dot a\dot R_{GHL}a^2 f'' + a^3(f'R_{GHL} - f). \tag{10}$$

Сонда қозғалыс теңдеулері келесі түрге ие болады:

$$3H^2 + 2\dot H = -\frac{2}{3\lambda - 1}\frac{1}{f'}[\mu f'''\dot R^2{}_{GHL} + \mu f''\ddot R_{GHL} + (3\lambda - 1)f''H\dot R_{GHL} + \frac{1}{2}(f - R_{GHL}f')]. \tag{11}$$

Сонымен қатар, біз жоғарыда аталған Лагранжианмен байланысты нөлдік энергия шартын аламыз:

$$H^2 = \frac{1}{3(3\lambda - 1)}\frac{1}{f'}[f'R_{GHL} - f - 6\mu\dot R_{GHL}Hf'']. \tag{12}$$

Жалпылама Хорава-Лифщиц гравитацияның Лагранжианын біле отырып, Нетер симметриясын анықтауға болады.

$f(R_{GHL})$ гравитация теориясындағы Нетер симметриясы. Мұнда біздің мақсатымыз тиісті Лагранжиан қажетті симметрияға ие болатындай $f(R_{GHL})$ функцияны табу.Біз (10) Лагранжиан конфигурациялық $Q=(a,R_{GHL})$ кеңістігінің жанама $TQ=(a,\dot{a},R,R_{GHL})$ кеңістігіндегі X векторлық өрісі моделіне индукцияланған Нетер симметриясын анықтаймыз:

$$X=\alpha\frac{\partial}{\partial a}+\beta\frac{\partial}{\partial R_{GHL}}+\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{a}}+\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{R}_{GHL}}, \tag{13}$$

және осы векторлық өріс бойынша Ли Лагранжианының туындысы нөлге айналатындай болуы керек:

$$L\times l=0. \tag{14}$$

(13) теңдеуінде α және βa және R_{GHL} функциялары болып табылады және $\frac{d}{dt}$ динамикалық векторлық өріс бойымен туынды болып табылады, яғни

$$\frac{d}{dt}=\dot{a}\frac{\partial}{\partial a}+\dot{R}_{GHL}\frac{\partial}{R_{GHL}}. \tag{15}$$

Мұнда біз тиімді Лагранжиан (10) үшін өрнектерді қоямыз және $\dot{a}^2,\dot{R}^2_{GHL},\dot{a}\dot{R}_{GHL}$ коэффициенттерді біріктіреміз. Сосын алынған өрнек нөлге теңесіп, келесі теңдеулерді аламыз:

$$3(3\lambda-1)(\alpha+2a\alpha_a)f'+[3(3\lambda-1)\beta a+6\mu a^2\beta_a]f''=0, \tag{16}$$

$$6\mu a^2\alpha_{R_{GHL}}f''=0, \tag{17}$$

$$6\mu(2a\alpha+a^2\alpha_a)f''+6(3\lambda-1)a\alpha_{R_{GHL}}f'+6\mu a^2(\beta f'''+\beta_{R_{GHL}}f'')=0, \tag{18}$$

содан кейін біз қалған бос мүшені жинаймыз:

$$3\alpha a^2(f'R-f)+\beta a^3Rf''=0. \tag{19}$$

Енді біздің міндетіміз (16)-(19) теңдеулер жүйесін шешу, $f(R_{GHL})$ Хорава-Лифшицтің гравитациясы аясында әлемнің динамикасын сипаттайтын космологиялық параметрлерді табу.(17) теңдеуден екі жағдайды қарастыру керек екені анық: $f''=0$ және $\frac{d\alpha}{dR_{GHL}}=0,$ бірақ $f''=0$ үшін шешімнің физикалық мағынасы жоқ; сондықтан біз тек $\frac{d\alpha}{dR_{GHL}}=0$ қарастырамыз, онда

$$\alpha(a)=\alpha_0a^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}+1},\beta(a,R)=\beta_0a^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}R, \tag{20}$$

және

$$f=f_0R^{-3\frac{\alpha_0}{\beta_0}}, \tag{21}$$

мұндағы $\alpha_0=\frac{2\mu}{3\lambda-6\mu-1}\beta_0,\ f_0,\beta_0$ - интегралдау тұрақтылары.

Космологиялық шешімдер.Бұл бөлімде әлемнің динамикасын сипаттау үшін біз (11) - (12) өріс теңдеуін аналитикалық шешеміз. Ол үшін біз масштабтықa коэффициентінің t уақытына анық тәуелділігін табуымыз керек. Олай болса (11) - (12) теңдеулерді келесі түрде қайта жазамыз:

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{4\mu(3\lambda - 3\mu - 1)}{(3\lambda - 6\mu - 1)^2}\frac{\dot{R}^2_{GHL}}{R^2_{GHL}} + \frac{2\mu}{3\lambda - 6\mu - 1}\frac{\ddot{R}_{GHL}}{R_{GHL}} + \frac{2(3\lambda - 1)}{3\lambda - 6\mu - 1}\frac{\dot{R}_{GHL}}{R_{GHL}}H + \frac{1}{6\mu}R_{GHL}, \quad (22)$$

$$H^2 = \frac{R_{GHL}}{18\mu} - \frac{2\mu}{1 - 3\lambda + 6\mu}\frac{\dot{R}_{GHL}}{R_{GHL}}H. \quad (23)$$

Бұл жүйені шешу үшін

$$H = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\tanh(\sqrt{C_1 C_2}\,t), \quad (24)$$

деп аламыз. Мұндағы $C_1 = \dfrac{Z}{3\mu + 3\lambda - 1}, C_2 = \dfrac{(3\lambda - 1)(3\mu - 3\lambda + 1)}{2\mu(3\mu + 3\lambda - 1)}$, немесе мынаған эквивалентті:

$$a = a_0\left(e^{\sqrt{C_1 C_2}t} + e^{-\sqrt{C_1 C_2}t}\right)^{\frac{1}{C_2}}. \quad (25)$$

Осылайша, біз $f(R)$ Хорав-Лифшиццтің гравитация теориясының модификацияланған жалпы шешімін таптық. Жалпы, бұл экспоненциалды өсуі бар масштабтық *a* коэффициенті бар кеңейтілген ғарыш моделі болып табылады.

Қорытынды. Бұл жұмыста біз кванттық гравитация үшін $f(R)$ Хорава-Лифитцтің бастапқы моделінің модификациясы болып табылатын Хораваның гравитациялық моделін талдадық. Сонымен қатар біз осы өзгертілген гравитацияда болатын ғарыш сценарийлерінің түрлерін анықтау үшін ФЛРУ кеңістіктік сызықтық элементін қарастырамыз.Әдетте өріс теңдеулері үшін аналитикалық шешімдерді табу өте қиын болғандықтан, біз мұнда баламалы әдісті қолданамыз, ол белгілі бір тиімді Лагранжиан Нетер симметрияларын талдауға негізделген. Бұл жұмыста біз кеңістіктік жазық, изотропты және біртекті сызықты элемент болған кезде Хорава-Лифщитц $f(R)$ теориясына арналған тиісті өрістік теңдеулерден тиімді Лагранжианды қорытып шығарамыз.

Өрістік теңдеулер екінші ретті екі қарапайым дифференциалдық теңдеулердің жиынтығы түрінде берілуі мүмкін, олар әртүрлі айнымалыларға арналған бір дифференциалдық теңдеу түрінде де берілуі мүмкін, оны айнымалы бөлудің стандартты әдісі арқылы шешуге болады. Мұндай қарапайым көрініс бізге масштабтау коэффициентін, сондай-ақ Риччи скалярын интегралдауға мүмкіндік береді. Онда екі шама да уақыттың айқын функциялары болады.

Бұл жұмыста ұсынылған нәтижелер, Нетер симметрия әдісі, сондай-ақ, космологиялық шешімдер алу үшін Хорава-Лифщицтің $f(R)$ модификацияланған гравитациялық моделі жағдайында да қолданылуы мүмкін екенін көрсетеді. Масштабтау коэффициенті үшін нәтижелік функциялар сәйкес әлем экспоненциалды кеңейтілгенін көрсетеді. Бұл сценарий релятивистік космологияда мүмкін, сондықтан негізінде біз нәтижелерімізді әлемнің эволюциясының әр түрлі дәуірлерінен алынған бақылау деректерімен салыстыра аламыз. Оны Хорава-Лифщиц әрекетіне кіретін параметрлерге шектеулер орнату шін қолдануға болады.

References:

1 Riess A.G., (1998) et. al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant Astron. J.. Vol. 116. 1009-1038.

2 Bennett C.L., (2003) .et. al. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters Astrophys. J. Suppl. Vol. 148, № 1.175-194.

3 Nojiri S. and Odintsov S.D. (2007) Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. Vol. 115, № 4. P. 115-146.

4 Seljak U., (2005) et.al. Cosmological parameter analysis including SDSS Lyα forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy Phys. Rev. D.Vol. 71. 103515.

5 Carroll S.M., Press W.H., Turner E.L. (1992). The Cosmological Constant: 2nd Order Quantum-Mechanical Correctin to the Newton Gravity Ann J. Rev. Astron. Astroph.. № 30. P. 499-452.

6 Peebles P.J.E., Rathra B. 2003 The Cosmological Constant and Dark Energy Rev. Mod. Phys. № 75. 559.

7 Copeland E.J., Sami M., Tsujikawa S.I. (2006) Dynamics of dark energynt J. Mod. Phys. D. Vol. 15. 1753-1936.

8 Calz M., Rinaldi M., Sebastiani L. A (2018) special class of solutions in F(R)-gravity Eur. Phys. Journal. Vol. 78. 178.

9 Horava P (2009). Quantum gravity at a Lifshitz point Phys. Rev.. Vol. 79. 084008.

10 Horava P. (2009) Membranes at quantum criticality//JHEP. Vol. 0903. 020.

11 Horava P (2010). Quantum criticality and Yang–Mills gauge theory//Phys. Lett. B. 694. 172-176.

12 Cai R.G., B. Hu and Zhang H.B. (2009) Dynamical Scalar Degree of Freedom in Horava-Lifshitz Gravity Phys. Rev. D. 80. 041501.

13 Volovik G.E. (2009) Spin superfluidity and magnon BEC JETP Lett. № 89. 525-528.

14 Chaichian M., Nojiri S., Odintsov S.D., Oksanen M. and Tureanu A (2010). Modified F(R) Horava-Lifshitz gravity: a way to accelerating FRW cosmology Class. Quant. Grav. № 27. 185021.

15 Myrzakul Sh.R., Murzakulov E.M., Imankul M., Turdahan K (2019). F-jessencija kosmologija s neodnorodnoj vjazkoj zhidkost'ju Vestnik KazNPU, Serija Fiz.-mat. Vol. 68, № 4. 160-165.