МРНТИ 27.39.15
УДК 517.98

А.Ж. Адиева[1], А.О. Байарыстанов[1]

[1]Евразийский национальный университет им. Л. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

ЗАМЫКАНИЕ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМ ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА СОБОЛЕВА

Аннотация

Описание замыкания финитных или гладких финитных функций в функциональных пространствах являются классическими задачами теории функциональных пространств. Эта задача имеет важное место в гладких функциональных пространствах, таких как пространства Соболева, Никольского, Бесова и в их различных обобщениях. Обычно, в невесовом пространстве гладких функций множество финитных функций, вообще говоря, неплотно. Но в весовом пространстве гладких функций, например, в весовом пространстве Соболева, при сильном вырождении веса множество финитных функций может оказаться плотным.

Поэтому важным вопросом является задача о характеризации замыкания финитных функций в рассматриваемом весовом пространстве. Здесь рассматривается весовое пространство типа Соболева второго порядка с тремя весами и в нем описывается замыкание множества функции с компактными носителями.

Ключевые слова: финитная функция, пространство Соболева, замыкание, плотность, носитель функции, функционал.

Аңдатпа

А.Ж. Адиева[1], А.О. Байарыстанов[1]

[1]Л.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

СОБОЛЕВ ТИПТЕС САЛМАҚТЫ КЕҢІСТІКТЕГІ ФИНИТТІ ФУНКЦИЯНЫҢ ТҰЙЫҚТАМАСЫ

Функционалдық кеңістіктердегі финитті немесе тегіс финитті функциялардың тұйықтамасының сипаттамасы функционалдық кеңістіктер теориясының классикалық есептері болып табылады. Бұл есеп Соболев, Никольский, Бесов кеңістіктері секілді тегіс функционалдық кеңістіктерде және олардың әртүрлі жалпыламаларында маңызды орын алады. Әдетте, тегіс функциялардың салмақсыз кеңістігінде финитті функциялар жиыны, жалпы алғанда, тығыз емес. Бірақ, тегіс функциялардың салмақты кеңістігінде, мысалы, Соболев салмақты кеңістігінде салмақтың қатты өзгешеленуіне байланысты финитті функциялар жиыны тығыз болуы мүмкін.

Сондықтан, қарастырылып отырған салмақты кеңістікте финитті функциялардың тұйықтамасының сипаттамасы туралы есеп маңызды мәселе болып табылады. Мұнда екінші ретті үш салмақты Соболев типті кеңістік қарастырылады және бұл кеңістікте компакт тұрағы бар функциялар жиынының тұйықтамасы сипатталады.

Түйін сөздер: финитті функция, Соболев кеңістігі, тұйықтама, тығыздық, функция тұрағы, функционал.

Abstract

CLOSURE OF FINITE FUNCTIONS IN ONE WEIGHT SOBOLEV TYPE SPACE

Adiyeva A.[1], Baiarystanov A.[1]

[1] L. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

The description of the closure of finite or smooth finite functions in functional spaces are classical tasks of functional space theory. This task is important in smooth functional spaces such as those of Sobolev, Nikolski, Besov and in their various generalizations. Usually, in a weightless space of smooth functions, the set of compactly finite functions, generally speaking, is not dense. But in the weighted space of smooth functions, for example, in the Sobolev weighted space, with strong degeneracy of the weight, many compactly finite functions can be dense.

Therefore, an important issue is the problem of characterizing the closure of compactly finite functions in the weight space under consideration. Here we consider a weighted space of Sobolev type of the second order with three weights and it describes the closure of the set of functions with compact supports.

Keywords: finite function, Sobolev space, closure, density, support of a function, functional.

Пусть $u-$ непрерывная и неотрицательная функция на интервале $I=(0,\infty)$. Положительные функции v, r достаточно раз непрерывно дифференцируемы на интервале I и функции $v^{1-p'}, r^{-1}=\frac{1}{r}$ интегрируемы на интервале $(0,a)$ для любого для любого $a>0$, где $1<p'<\infty$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$

Пусть $T\geq 0, 1<p<\infty, I_T=(T,\infty)$ и $W^2_{p,v}(r)\equiv W^2_{p,v}(r;I_T)$ пространство функции $f:I_T\to R$ локально абсолютно непрерывных на I_T вместе с функцией $D^1_r f(t)\equiv r(t)\frac{df(t)}{dt}$ и для которых конечно норма

$$\|f\|_{W^2_{p,v}(r)}=\left\|D^2_r f\right\|_{p,v}+\left|D^1_r f(T)\right|+|f(T)|, \tag{1}$$

где $D^2_r f(t)\equiv\frac{d}{dt}r(t)\frac{df(t)}{dt},\quad \|g\|_{p,v}=\left(\int\limits_T^\infty v(t)|g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ - норма весового пространства $L_{p,v}(I)\equiv L_{p,v}.$

Из полноты пространства $L_{p,v}(I_T)$ легко следует полнота пространства $W^2_{p,v}(r;I_T).$

Пусть $\overset{\circ}{M}_p(I_T)=\left\{f\in W^2_{p,v}(r):\operatorname{supp} f\subset I_T, \operatorname{supp} f \text{ is compact}\right\}.$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)=\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r,I_T)$ замыкание множества $\overset{\circ}{M}_p$ по норме (1). Имеются достаточно много работ (при $r=1$), посвященные вопросам плотности множества финитных функций в весовых пространствах типа Соболева (см., например, [1-7] и приведенные там ссылки).

В данной работе в зависимости от поведения весовых функций в окрестности бесконечности, подпространство $\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$ описывается в терминах элементов пространства $W^2_{p,v}(r).$

Описание пространства $\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)\equiv\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r,I_T)$.

Лемма 1. Пусть $T\geq 0, 1<p<\infty.$ Тогда $f(T)=0, D^1_r f(T)=0$ для любого $f\in\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$.

Доказательство леммы 1. Пусть $f\in\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$. Тогда существует последовательность финитных функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset\overset{\circ}{M}_p(I_T)\subset W^2_{p,v}(r)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{W^2_{p,v}(r)}=0. \tag{2}$$

Очевидно, что $f_n(T)=0,\quad D^1_r f_n(T)=0,\quad \forall n\geq 1.$ Тогда из (2) следует $f(T)=0$, $D^1_r f(T)=0.$
Лемма 1 доказана.
Теперь, рассмотрим поведение функции $f\in W^2_{p,v}(r)$ в окрестности бесконечности.

Лемма 2. Пусть $T\geq 0, 1<p<\infty$ и выполнено

$$S_T^{p'}\equiv\int\limits_T^\infty v^{1-p'}(t)dt<\infty,\quad E_T^{p'}\equiv\int\limits_T^\infty v^{1-p'}(t)\left(\int\limits_T^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'}dt<\infty. \tag{3}$$

Тогда для любого $f\in W^2_{p,v}(r)$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{t\to\infty}D^1_r f(t)\equiv D^1_r f(\infty)$ и

$$\lim_{t\to\infty}\left[f(t)-\int\limits_T^t r^{-1}(x)dxD^1_r f(\infty)\right]\equiv d(f). \tag{4}$$

Доказательство леммы 2. Пусть $f\in W^2_{p,v}(r)$. Из условия $S_T<\infty$ и из (3), в силу неравенства Гельдера, имеем

$$\int_T^\infty \left|D_r^2 f(t)\right| dt \le S_T \left(\int_T^\infty v(t)\left|D_r^2 f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{5}$$

Следовательно, существует $D_r^1 f(\infty)$ и

$$D_r^1 f(\infty) = D_r^1 f(T) + \int_T^\infty D_r^2 f(t)dt. \tag{6}$$

На основании неравенства Гельдера и из $E_T < \infty$ (см.(3)), получим

$$\int_T^\infty r^{-1}(x)\int_x^\infty \left|D_r^2 f(t)\right| dtdx = \int_T^\infty \left|D_r^2 f(t)\right| \int_T^t r^{-1}(x)dxdt \le E_T \left(\int_T^\infty v(t)\left|D_r^2 f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{7}$$

Из (6) при $T = x > 0$ имеем

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) - \int_T^x r^{-1}(s)dsD_r^1 f(\infty)\right] = -r^{-1}(x)\int_x^\infty D_r^2 f(t)dt.$$

Интегрируя обе части этого неравенства от $z, z \ge T$ до ∞ имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - \int_T^x r^{-1}(s)dsD_r^1 f(\infty)\right] - \left[f(z) - \int_T^z r^{-1}(s)dsD_r^1 f(\infty)\right] = -\int_z^\infty r^{-1}(x)\int_x^\infty D_r^2 f(t)dtdx. \tag{8}$$

Откуда, в силу (7), имеем (4).

Лемма 2 доказана.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (3). Тогда, $D_r^1 f(\infty) = 0,\ \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = 0$ для любого $f \in \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$.

Доказательство следствия 1. Пусть $f \in \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$ и $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ - последовательность финитных функций из $\overset{\circ}{M}_p(I_T) \subset W^2_{p,v}(r)$ такая, что выполнено

$$\lim_{n\to\infty}\| f - f_n\|_{W^2_{p,v}(r)} = 0. \tag{9}$$

Из (5) и (6) для $f - f_n$ имеем $\left|D_r^1 f(\infty) - D_r^1 f_n(\infty)\right| \le C_1 \| f - f_n\|_{W^2_{p,v}(r)}$.Откуда из (9) следует $D_r^1 f(\infty) = 0$. Тогда из (4) имеем $f(\infty) = d(f)$. И из (8) получим

$$\left| f(\infty)\right| \le \left| f(T)\right| + \int_T^\infty r^{-1}(x)\int_x^\infty D_r^2 f(t)dtdx. \tag{10}$$

Соотношение (10) и (7) для $f - f_n$ дает $\left| f(\infty) - f_n(\infty)\right| \le C_0 \| f - f_n\|_{W^2_{p,v}(r)}$. Следовательно, в силу (9), $f(\infty) = 0$.

Следствие 1 доказано.

Положим $LRW^2_{p,v}(r) = \left\{ f \in W^2_{p,v}(r) : f(T) = f(\infty) = 0, D_r^1 f(T) = D_r^1 f(\infty) = 0\right\}$. Из утверждения леммы 1 и следствия 1 имеем

Лемма 3. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (3). Тогда $\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r) \subseteq LRW^2_{p,v}(r)$.

Теперь, рассмотрим еще случай

$$S_T^{p'} \equiv \int_T^\infty v^{1-p'}(t)dt < \infty, \quad \int_T^\infty v^{1-p'}(t)\left(\int_T^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dt = \infty \tag{11}$$

и

$$\int_T^\infty v^{1-p'}(t)dt=\infty, \tag{12}$$

где $T>0$.

Из леммы 2 и следствия 1 следует существование $D_r^1 f(\infty)$ для $f\in W_{p,v}^2(r)$ и $D_r^1 f(\infty)=0$ для $f\in \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$. Следовательно, имеем

Лемма 4. Пусть $1<p<\infty$ и выполнено (11). Тогда для любого $f\in W_{p,v}^2(r)$ существует конечный $D_r^1 f(\infty)$ и $D_r^1 f(\infty)=0$ для любого $f\in \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$.

Положим

$$LR'W_{p,v}^2(r)=\left\{f\in W_{p,v}^2(r):\ f(T)=0,\ D_r^1 f(T)=D_r^1 f(\infty)=0\right\},$$

$$LW_{p,v}^2(r)=\left\{f\in W_{p,v}^2(r):\ f(T)=0,\ D_r^1 f(T)=0\right\}.$$

Теорема 1. Пусть $1<p<\infty$. Тогда если выполнено (12), то

$$\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)\equiv LW_{p,v}^2(r); \tag{13}$$

(i) если выполнено (11), то

$$\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)\equiv LR'W_{p,v}^2(r); \tag{14}$$

(ii) если выполнено (3), то

$$\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)\equiv LRW_{p,v}^2(r). \tag{15}$$

Доказательство теоремы 1. Из леммы 1, 3 и 4 следует, что $LR'W_{p,v}^2(r)\supset \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$, $LW_{p,v}^2(r)\supset \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$ и $LRW_{p,v}^2(r)\supset \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)$.

Чтобы показать (13), (14) и (15) достаточно доказать

$$\overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)\supset LW_{p,v}^2(r),\ \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)\supset LR'W_{p,v}^2(r),\ \overset{\circ}{W}{}^2_{p,v}(r)\supset LRW_{p,v}^2(r), \tag{16}$$

соответственно.

Рассмотрим пространство

$$L_{p,v}\times R^2=\left\{G=(g,\overline{\alpha}):g\in L_{p,v}(I),\ \overline{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1)\in R^2\right\}$$

с нормой

$$\|G\|_{L_{p,v}\times R^2}=\|g\|_{p,v}+|\alpha_0|+|\alpha_1|. \tag{17}$$

Каждому $f\in W_{p,v}^2(r),$ подставляя в соответствие

$$G=(g,\overline{\alpha}):g=D_r^2 f,\ \alpha_0=f(T),\ \alpha_1=D_r^1 f(T)$$

получим, что $G\in L_{p,v}\times R^2$. Обратно, для каждого $G\in L_{p,v}\times R^2,$ подставляя в соответствие функцию

$$f(t)=\int_T^t\left(\int_s^t r^{-1}(x)dx\right)g(s)ds+\alpha_0+\alpha_1\int_T^t r^{-1}(x)dx,\quad t\ge 0,$$

имеем $D_r^2 f(t)=g(t)\in L_{p,v}$, $f(T)=\alpha_0$, $D_r^1 f(T)=\alpha_1,$ т.е. $f\in W_{p,v}^2(r).$ Откуда из (1) и (17) следует, что вышеустановленное соответствие между пространствами $L_{p,v}\times R^2$ и $W_{p,v}^2(r)$ изометрично. Поэтому, с точностью до изометрии, пространство $W_{p,v}^2(r)$ можно рассмотреть как пространство $L_{p,v}\times R^2.$

При $1<p<\infty$ пространство $W_{p,v}^2(r)$ рефлексивно и для любого $F\in\left(W_{p,v}^2(r)\right)^*$ существует $h=h(F)\in L_{p',v^{1-p'}}$, $\overline{\alpha}(F)=\left(\alpha_0(F),\alpha_1(F)\right)\in R^2$ такие, что имеет место представление

$$F(f)=\int_T^\infty h(t)D_r^2 f(t)dt+\alpha_0 f(T)+\alpha_1 D_r^1 f(T),\quad \forall f\in W_{p,v}^2(r). \tag{18}$$

Положим $B=\left\{F\in\left(W_{p,v}^2(r)\right)^*: F(\varphi)=0,\ \forall\varphi\in \overset{\circ}{M}_p(I_T)\right\}.$

Тогда в силу рефлексивности $W_{p,v}^2(r)$ и плотности $\overset{\circ}{M}_p(I_T)$ в $\overset{\circ}{W}{}_{p,v}^2(r)$, имеем $\overset{\circ}{W}{}_{p,v}^2(r)=\left\{f\in W_{p,v}^2(r): F(f)=0,\ \forall F\in B\right\}$. Откуда, включение (16) равносильно условию $\left\{\forall F\in B,\ F(f)=0, \forall f\in LR'W_{p,v}^2(r)\right\}$, $\left\{\forall F\in B,\ F(f)=0, \forall f\in LW_{p,v}^2(r)\right\}$ и $\left\{\forall F\in B,\ F(f)=0, \forall f\in LRW_{p,v}^2(r)\right\}$, соответственно.

Рассмотрим множество $C_0^\infty(I_T)$ - функций бесконечно дифференцируемых и финитных на I_T. В силу наложенных условий на функции v и r, $C_0^\infty(I_T)\subset \overset{\circ}{W}{}_{p,v}^2(r)$. Поэтому, $F(\varphi)=0, \forall\varphi\in C_0^\infty(I_T), \forall F\in B.$ Тогда для $F\in B\subset\left(W_{p,v}^2(r)\right)^*$, в силу (18)

$$F(\varphi)=\int_T^\infty h(t)D_r^2\varphi(t)dt=0,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(I_T). \tag{19}$$

Следовательно, функция h является обобщенным решением уравнения

$$\left(D_r^2\right)^* h(t)=D_r^2 h(t)=0. \tag{20}$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$h(t)=\beta_0+\beta_1\int_T^t r^{-1}(x)dx, \tag{21}$$

где $\overline{\beta}=(\beta_0,\beta_1)\in R^2$.

В случае (12) из (21) следует, что $\beta_0=\beta_1=0$, так как в силу (12), постоянная функция и функция $\int_T^t r^{-1}(x)dx$ не принадлежат пространству $L_{p',v^{1-p'}}(I_T)$. Таким образом, $h\equiv 0$ и функционал $F\in B$ имеет вид $F(f)=\alpha_0 f(T)+\alpha_1 D_r^1 f(T)$ для $f\in W_{p,v}^2(r)$. Откуда $F(f)=0$ для $f\in LW_{p,v}^2(r)$. Следовательно, для всех, $F\in B,\ F(f)=0,\quad \forall f\in LW_{p,v}^2(r)$, т.е. $\overset{\circ}{W}{}_{p,v}^2(r)\supset LW_{p,v}^2(r)$ и выполнено (13).

Рассмотрим случай (11). Откуда следует, что функция $\int_T^t r^{-1}(x)dx$ не принадлежит пространству $L_{p',v^{1-p'}}(I_T)$. Так как $h\in L_{p',v^{1-p'}}(I_T)$, то в (21) $\beta_1=0$ и $h(t)=\beta_0$. Тогда, в силу (18), $F\in B$ имеет вид $F(f)=\beta_0\int_T^\infty D_r^2 f(t)dt+\alpha_0 f(T)+\alpha_1 D_r^1 f(T),\quad \forall f\in W_{p,v}^2(r).$

Тогда

$$F(f)=\beta_0\int_T^\infty D_r^2 f(t)dt,\quad \forall f\in LR'W_{p,v}^2(r). \tag{22}$$

Но, для $f\in LR'W_{p,v}^2(r)$ $D_r^1 f(\infty)=D_r^1 f(T)=0$, т.е. $\int_T^\infty D_r^2 f(t)dt=D_r^1 f(\infty)-D_r^1 f(T)=0$, поэтому из (22) следует, что для любого $F\in B,\ F(f)=0,\quad \forall f\in LR'W_{p,v}^2(r).$

Тогда $\overset{\circ}{W}{}^{2}_{p,v}(r) \supset LR'W^{2}_{p,v}(r)$ и выполнено (14).

Пусть, теперь, выполнено (3). В этом случае функция (21) принадлежит пространству $L_{p',v^{1-p'}}(I)$ и функционал $F \in B$ имеет вид

$$F(f) = \beta_0 \int_T^\infty D_r^2 f(t)dt + \beta_1 \int_T^\infty \int_T^t r^{-1}(x)dx D_r^2 f(T)dt, \quad \forall f \in LRW^2_{p,v}(r). \tag{23}$$

Из условий $D_r^1 f(\infty) = D_r^1 f(T) = 0$, следует $\int_T^\infty D_r^2 f(t)dt = 0.$ $f \in W^2_{p,v}(r)$. Интегрируя второе слагаемое в (23) по частям и с учетом $f(T) = f(\infty) = D_r^1 f(\infty) = 0$ имеем

$$\int_T^\infty \int_T^t r^{-1}(x)dx D_r^2 f(T)dt = -\lim_{t\to\infty} \int_T^t r^{-1}(x)dx \int_t^\infty D_r^2 f(\tau)d\tau = 0. \tag{24}$$

Тогда из (23) следует, что для любого $F \in B,\ F(f) = 0, \quad \forall f \in LRW^2_{p,v}(r).$

Следовательно, $\overset{\circ}{W}{}^{2}_{p,v}(r) \supset LRW^{2}_{p,v}(r)$ и выполнено (15).

Обращение в нуль последнего предела в (24) следует из следующих соотношений.

$$\int_T^t r^{-1}(x)dx \int_t^\infty \left|D_r^2 f(\tau)\right| d\tau \le \int_T^t r^{-1}(x)dx \left(\int_t^\infty v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left\|D_r^2 f\right\|_{p,v},$$

$$0 = \lim_{z\to\infty} \left(\int_z^\infty v^{1-p'}(t) \left(\int_T^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \ge \lim_{z\to\infty} \int_T^z r^{-1}(x)dx \left(\int_z^\infty v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Теорема 1 доказана.

Список использованной литературы

1 Мазья В.Г. Пространства С.Л.Соболева. Л.: Изд-во Ленингр.ун-та. 1985 . 416 с.

2 Бесов О.В. О плотности финитных функций в весовом пространстве С. Л. Соболева. Тр. МИАН СССР, 161, -1983. -С. 29–47.

3 Бесов О.В., Куфнер А. О плотности гладких функций в весовых пространствах. Чехосл. мат. журн. -1968, 18 (93), с. 178-188.

4 Кудрявцев Л. Д. О плотности финитных функций в весовых пространствах. ДАН СССР, -1978, 239, -№1, -с. 46-49.

5 Лизоркин П. И. О замыкании множества финитных функций в весовом пространстве $W^l_{p,\Phi}$. ДАН СССР, -1978, 239, -№ 4, -с. 789-792.

6 Домышева Л. Н. О плотности финитных функций в весовых пространствах. Тр. МИАН СССР, 161, -1983, -с. 106-111.

7 Ойнаров Р. О плотности финитных функций в весовых пространствах и весовые неравенства. Докл. АН СССР, 303:3 (1988), -с. 559–563.