МРНТИ 30.17.15
УДК 519.633

https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.03

VARIATIVE SOLUTION OF THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATIONS

Yermekkyzy L.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Abstract

One of the main types of inverse problems for partial differential equations are problems in which the coefficients of the equations or the quantities included in them must be determined using some additional information. Such problems are called coefficient inverse problems for partial differential equations. Coefficient inverse problems (identification problems) have become the subject of close study, especially in recent years. Interest in them is caused primarily by their important applied values. They find applications in solving problems of planning the development of oil fields (determining the filtration parameters of fields), in creating new types of measuring equipment, in solving problems of environmental monitoring, etc. The standard formulation of the coefficient inverse problem contains a functional (discrepancy), physics. When formulating the statements of inverse problems, the statements of direct problems are assumed to be known. The solution to the problem is sought from the condition of its minimum. Inverse problems for partial differential equations can be posed in variational form, i.e., as optimal control problems for the corresponding systems. A variational statement of one coefficient inverse problem for a one-dimensional heat equation is considered. By the solution of the boundary value problem for each fixed control coefficient we mean a generalized solution from the Sobolev space.

The questions of correctness of the considered coefficient inverse problem in the variational setting are investigated.

Keywords: coefficient inverse problem, variational statement.

Аңдатпа

Л. Ермекқызы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІ ҮШІН КОЭФФИЦИЕНТТІ КЕРІ ЕСЕБІНІҢ ВАРИАЦИЯЛЫҚ ШЕШІМІ

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін кері есептердің негізгі түрлерінің бірі коэффициентті теңдеулер немесе оларға енгізілген мөлшерде коэффициенттері кейбір қосымша ақпаратты пайдалана отырып, анықталуы тиіс проблемалар болып табылады. Мұндай есептер дербес дифференциалдық теңдеулерге арналған кері есептер коэффициентті деп аталады. Коэффициентті кері есептер (идентификациялау есебі), әсіресе соңғы жылдары, терең зерттеу нысанына айналды. Оларға деген қызығушылық ең алдымен олардың маңызды қолданбалы құндылықтарынан туындайды. Олар мұнай кен орындарын игеруді жоспарлау мәселелерін шешуде (кен орындарының сүзу параметрлерін анықтауда), өлшеу жабдықтарының жаңа түрлерін жасауда, қоршаған ортаны бақылау мәселелерін шешуде және т.б. қолданыс тапты.Стандартты коэффициентті кері есептің қойылымы сәйкес математикалық физика есебінің шешімінен тәуелді. Кері есептердің қойылымын тұжырымдау кезінде тура есептің қойылымы белгілі деп есептеледі. Есептің шешімі оның минимум шартынан ізделінеді. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге кері есептерді вариациялық түрде, яғни сәйкес жүйелер үшін оңтайлы басқару есептері ретінде қоюға болады. Бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуі үшін коэффициентті кері есебінің вариациялық нұсқасы қарастырылады. Әрбір белгіленген басқару коэффициенті үшін шекаралық есебін Соболев кеңістігінен алынған жалпыланған шешімді аламыз.

Вариациялық жағдайда қарастырылатын кері есеп коэффициентінің дұрыстығы туралы сұрақтар зерттелген.

Түйін сөздер: коэффициентті кері есеп, есептің вариациялық қойылымы.

Аннотация

Л. Ермекқызы

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ВАРИАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Одним из основных типов обратных задач для уравнений с частными производными являются задачи, в которых подлежат определению коэффициенты уравнений или величин, входящих в них, по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называют коэффициентными обратными задачами для уравнений с частными производными. Коэффициентные обратные задачи (задачи идентификации) стали предметом

пристального изучения особенно в последние годы. Интерес к ним вызван в первую очередь их важными прикладными значениями. Они находят приложения при решении задач планирования разработки нефтяных месторождений (определение фильтрационных параметров месторождений), при создании новых видов измерительной техники, при решении задач мониторинга окружающей среды и др. Стандартная постановка коэффициентной обратной задачи содержит функционал (невязку), зависящий от решения соответствующей задачи математической физики. При формулировке постановок обратных задач предполагаются известными постановки прямых задач. Решение задачи ищется из условия его минимума.. Обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены в вариационной форме, т. е. как задачи оптимального управления соответствующими системами. Рассматривается вариационная постановка одной коэффициентной обратной задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Под решением краевой задачи при каждом фиксированном управляющем коэффициенте понимается обобщенное решение из пространства Соболева.

Исследованы вопросы корректности рассматриваемой коэффициентной обратной задачи в вариационной постановки.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, вариационная постановка

1. Statement of the problem. The paper considers a one-dimensional heat conduction equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\rho c\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$c\rho(u)u_t=\left(\lambda(u)u_x\right)_x,\quad (x,t)\in(0,a)\times(0,T) \tag{1}$$

with initial boundary conditions

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad x\in(0,a) \tag{2}$$

$$u(0,t)=g_1(t), \tag{3}$$

$$u(a,t)=g_2(t),\qquad t\in(0,T). \tag{4}$$

Usually, a direct task is understood as finding a solution u problems (1) - (4) for the given functions $c,\rho,\lambda,\varphi,l_1,l_2$.

Let the following conditions be satisfied

$$\begin{cases} c\rho(u)\in C^2[b,c], \\ \lambda(u)\in C^3[b,c], \\ g_1,g_2\in W_2^1[0,T], \\ u_0\in W_2^1[0,a], \qquad g_1(0)=\varphi(0),\ g_2(0)=\varphi(a), \end{cases}$$

$[b,c]$ contains domain of values $u(x,t)$ for all sufficiently small variations λ. In this case, the domain of definition of functions $c(u),\lambda(u)$ is fixed, since by virtue of the maximum principle [1]

$$b=\min\left\{\min_{[0,T]}g_1(t),\min_{[0,T]}g_2(t),\min_{[0,a]}\varphi(x),\right\}$$

$$c=\max\left\{\max_{[0,T]}g_1(t),\max_{[0,T]}g_2(t),\max_{[0,a]}\varphi(x),\right\}.$$

Then there is a solution to the problem (1)-(4) $u\in W_2^{2,1}\left((0,a)\times(0,T)\right)$ [1].

However, the coefficients are not always c,λ predetermined. More often, a situation arises when they are subject to determination based on some additional information. Such problems are called coefficient inverse problems for the heat equation.

This article considers the coefficient inverse problem in the following setting: the known c,ρ,φ,g_1,g_2 find a couple of functions (u,λ) so that the additional condition [2]

$$u\left(d(t),t\right)=f(t),\quad t\in(0,T),\ 0<d(t)<a, \tag{5}$$

where $d(t),f(t)$ some famous features. Let be $x=d(t)$ - piecewise smooth function.

The task of determining (u,λ) (1)-(4) To avoid the indicated difficulty, instead of solving the incorrect problem (1)-(4) we have to involve stable initial-boundary value problems for the same heat equation. Problem (1) - (4) with a given coefficient $\lambda(u)$.

Thus, the operator:

$$A:\ \lambda \to f\ ,$$

conjunctive λ with f : $(A(\lambda))(t) = f(t),\ \ t \in (0,T),\ 0 < d(t) < a$. Investigation of operator properties A and its adjoint operator allows using variational methods to find an approximate solution to the inverse problem (1) - (5) [3].

2. Variational formulation of the problem of finding the coefficient λ.

It is required to minimize the functionality

$$J(\lambda) = \int_0^T \left[u\left(d(t),t,\lambda\right) - f(t)\right]^2 dt. \tag{6}$$

where $u(x,t,\lambda)$ - solution of problem (1) - (4) corresponding to the coefficient $\lambda(u)$. Here T is fixed number.

The specified functional is minimized according to the following algorithm:

1. Choose an arbitrary initial value of the coefficient $\lambda_0 \in C^3[b,c]$.
2. We solve the direct problem (1) - (4) with the coefficient and find its solution $u(x,t;\lambda_0)$
3. We calculate the value of the functional $J(\lambda_0)$ according to the formula (6).
4. Its necessary to choose $\lambda_1(\cdot) = \lambda_0(\cdot) + \delta\lambda_0(\cdot)$ so that the inequality $J(\lambda_1) < J(\lambda_0)$.
5. Repeat the cycle until $\left|J(\lambda_{k+1}) - J(\lambda_k)\right| < \varepsilon$, where $\varepsilon > 0$ specified accuracy.
6. For selection $\lambda_1(\cdot)$ optimal choice is necessary $\delta\lambda_0(\cdot)$.

3. Rationale for the optimal choice $\delta\lambda_0$.

Let be $\delta\lambda_0 \in C^3[b,c]$. We denote $u(x,t;\lambda_0) = u_0,\ u(x,t;\lambda_0 + \delta\lambda_0) = u_1$ solutions of problem (1) - (4) with coefficients $\lambda_0(u), \lambda_0(u) + \delta\lambda_0(u)$ accordingly. Convenient designation $\delta u_0 = u(x,t,\lambda_0 + \delta\lambda_0) - u(x,t,\lambda_0) = u_1 - u_0$. Let us find a problem that satisfies δu_0. For this, we write down problem (1) - (4) with the coefficient $\lambda_0(u) + \delta\lambda_0(u)$, using the introduced designations [4]

$$c\rho(u_0 + \delta u_0)(u_0 + \delta u_0)_t = \left(\left(\lambda_0(u_0 + \delta u_0) + \delta\lambda_0(u_0 + \delta u_0)\right)(u_0 + \delta u_0)_x\right)_x, \tag{7}$$

$$(u_0 + \delta u_0)\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{8}$$

$$(u_0 + \delta u_0)\big|_{x=0} = g_1(t), \tag{9}$$

$$(u_0 + \delta u_0)\big|_{x=b} = g_2(t). \tag{10}$$

By virtue of the maximum principle

$$b \le u_0(x,t) + \delta u_0(x,t) \le c\rho$$
$$\forall\,(x,t) \in (0,a) \times (0,T),$$

and therefore functions

$$\lambda_0 + \delta\lambda_0 \in C^3[b,c],\ \ c(u_0 + \delta u_0) \in C^2[b,c],$$

and these functions are defined for any $(x,t) \in (0,a) \times (0,T)$. The solution of the problem (7)-(10) $u_0 + \delta u_0 \in W_2^{2,1}((0,a) \times (0,T))$. As $u_0, u_0 + \delta u_0 \in W_2^{2,1}((0,a) \times (0,T))$, then it follows that $\delta u_0 \in W_2^{2,1}((0,a) \times (0,T))$.

We use in (7) the following expansions

$\lambda_0(u_0+\delta u_0)=\lambda_0(u_0)+\lambda_0'(u_0)\delta u_0+o(\|\delta u_0\|)$,

$\delta\lambda_0(u_0+\delta u_0)=\delta\lambda_0(u_0)+(\delta\lambda_0(u_0))'\delta u_0+o(\|\delta u_0\|)$, where $\|\delta u_0\|=\|\delta u_0\|_{W_2^{2,1}((0,a)\times(0,T))}$.

Then for δu_0 it is easy to get the following problem

$$\left(c(u_0)\delta u_0\right)_t=\left(\lambda_0(u_0)\delta u_{0x}\right)_x+\left(\lambda_0'(u_0)\delta u_0\cdot u_{0x}\right)_x+\left(u_{0x}\delta\lambda_0(u_0)\right)_x+o(\|\delta u_0\|), \quad (11)$$

$(x,t)\in(0,a)\times(0,T)$,

$$\delta u_0(x,0)=0, \quad (12)$$

$$\delta u_0(0,t)=\delta u_0(a,t)=0\,. \quad (13)$$

Let be $\Phi(x,t)=\left(u_{0x}(x,t)\delta\lambda_0\left(u_0(x,t)\right)\right)_x+o(\|\delta u_0\|)$, then the estimate

$$\|\delta u_0\|_{W_2^{2,1}((0,a)\times(0,T))}\le M_1\|\Phi\|_{L_2((0,a)\times(0,T))}\le M_2\|\delta\lambda_0\|,\ \text{where } \|\delta\lambda_0\|=\|\delta\lambda_0\|_{C^2[b,c]}.$$

Using the equality

$$\left(\lambda_0(u_0)\delta u_0\right)_{xx}=\left(\lambda_0'(u_0)\delta u_0\cdot u_{0x}\right)_x+\left(\lambda_0(u_0)\delta u_{0x}\right)_x$$

and discarding in (11) the quantities of higher order of smallness $o(\|\delta\lambda_0\|)$**,** we write down the final task for $w\approx\delta u_0$

$$\int_0^T\left(\lambda_0(u_0)w\right)(x,t)\Big|_{x=d(t)}\left[\psi_x(x,t)\right]_{(d(t),t)}dt\ =\ \int_0^T\int_0^a\left(\delta\lambda_0(u_0)u_{0x}\right)_x\psi\,dxdt, \quad (14)$$

where $\left[\psi_x(x,t)\right]_{(d(t),t)}=\psi_x\left(d(t)+0,t\right)-\psi_x\left(d(t)-0,t\right)$ - function jump ψ_x at the point $\left(d(t),t\right)$.

Let be ψ_x satisfies the additional condition

$$\left(\lambda_0(u_0)w\right)(x,t)\Big|_{x=d(t)}\left[\psi_x(x,t)\right]_{(d(t),t)}=2\left[u_0\left(d(t),t,\lambda_0\right)-f(t)\right]. \quad (15)$$

Consider the difference between the functionals, taking into account the introduced notation

$$\delta J(\lambda_0,\delta\lambda_0)=J(\lambda_0+\delta\lambda_0)-J(\lambda_0)=$$

$$=\int_0^T\left[\left(u(d(t),t,\lambda_0+\delta\lambda_0)-f(t)\right)^2-\left(u(d(t),t,\lambda_0)-f(t)\right)^2\right]dt=$$

$$=\int_0^T\delta u_0(d(t),t,\lambda_0)\cdot 2\left[u_0(d(t),t;\lambda_0)-f(t)\right]dt+o\left(\|\delta\lambda_0\|\right)\cong$$

$$\cong\int_0^T w\left(d(t),t\right)\cdot 2\left[u_0(d(t),t,\lambda_0)-f(t)\right]dt\ .$$

Hence, taking into account relations (14), (15), we arrive at the representation

$$\delta J(\lambda_0,\delta\lambda_0)=\int_0^T w\left(d(t),t\right)\cdot 2\left[u_0\left(d(t),t,\lambda_0\right)-f(t)\right]dt\ =\ \int_0^T\int_0^a\left(\delta\lambda_0(u_0)u_{0x}\right)_x\psi\,dxdt.$$

Now choose $\delta\lambda_0$ *so that the condition* $\delta J(\lambda_0,\delta\lambda_0)<0$, *then* $J(\lambda_0+\delta\lambda_0)<J(\lambda_0)$.

References:

1 Kabanikhin S.I.(2009) Inverse and ill-posed problems. Novosibirsk: Siberian Scientific Publishing House, 457 (In Russian)

2 Kabanikhin S.I., Koptyug I.V., Iskakov K.T., Sagdeev R.Z. (2000) Inverse problem for diffusion transport of water upon single pellet moisture sorbition. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation Shanghai University v.1, pp.31-42. (In Russian)

3 Kabanikhin S.I., Koptyug I.V., Iskakov K.T. and Sagdeev R.Z. (1998) Inverse problem for a quasilinear equation of diffusion. Journal of Inverse and Ill-Posed Problem vol. 6(4), The Netherlands, Utrecht, pp. 335-352. (In Russian)

4 Denisov A.M. (1994) Introduction to the theory of inverse problems. M. Publishing house of Moscow State University, 208 p. (In Russian)