МРНТИ 14.07.07
УДК 37.0(075.8)

https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.25

Б.М. Қосанов[1], Ж.Т. Қайыңбаев[2], А.К. Ардабаева[1]*

Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ, Қазақстан
Сулейман Демирель атындағы Университет, Алматы қ., Қазақстан
**e-mail: kossanov89@mail.ru*

СЫЗЫҚТЫҚ ФУНКЦИЯМЕН БАЙЛАНЫСТЫ ЭКСТРЕМУМ ЕСЕПТЕРІ

Аңдатпа

Мақалада сызықтық функциямен байланысты экстремум есептері қарастырылған. Мақаланың мақсаты: сызықтық функциямен байланысты экстремумға берілген есептер тобын шешудің жалпы әдісін көрсету және бұл әдістің оқушыларға ерте бастан-ақ экстремумға берілген есептер туралы білімдер берудегі маңыздылығын айқындау. Жалпы білім беретін мектеп оқушыларына экстремумға берілген есептерді шешуді оқытып-үйретуге кешенді тұрғыдан келу зерттеудің әдіснамалық негізі болып табылады. Зерттеу барысында мынадай нәтижелер алынған: «экстремумға берілген есептер» ұғымы анықталған, сызықтық функциямен байланысты экстремумға берілген есептердің құрылымы қарастырылған, сызықтық функцияның экстремумын табуға келтіретін есептерді шешудің жалпы әдісі жасалған, осындай есептермен жұмыс істеудің кезеңдері көрсетілген. Берілген әдістің функцияның экстремумын есептеуді талап етпейтіндігі және оның сызықтық функцияның қандай да бір кесіндідегі монотондылығына негізделгені атап көрсетілген. Сондықтан қазіргі заманғы оқушы экстремумға берілген есептерді туынды арқылы шешуді біліп қана қоймай, оларды шешудің элементар әдістерімен қарулануы тиіс.

Түйін сөздер: есеп**,** экстремум, экстремумға берілген есептер, сызықтық функция, сызықтық функциямен байланысты экстремум есептері.

Аннотация

Б.М. Косанов[1], Ж.Т. Кайынбаев[2], А.К. Ардабаева[1]
[1]Казахский педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
[2]Университет имени Сулеймана Демиреля, г. Алматы, Казахстан

ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В статье рассматриваются задачи, приводящие к нахождению экстремума линейной функции. Цель статьи: показать общий метод решения экстремальных задач, связанных с линейной функцией и раскрыть значение этого метода в более раннем приобретении знаний о задачах на экстремумы у учащихся. Методологической основой исследования является системный подход к обучению учащихся общеобразовательных школ решению задач на экстремумы. В исследовании получены такие результаты: определено понятие «задачи на экстремумы», рассмотрена структура задач на экстремумы, связанных с линейной функцией, разработан общий метод решения задач, сводящихся к нахождению экстремума линейной функции, показаны этапы работы над такими задачами. Отмечено, что данный метод не требует вычисления производной функции и он основан прежде всего на монотонность линейной функции на некотором отрезке. Поэтому современный ученик должен не только уметь решать задачи на экстремумы с помощью производной, но и владеть элементарными методами их решения.

Ключевые слова: задача, экстремум, задачи на экстремумы, линейная функция, задачи на экстремумы связанные с линейной функцией.

Abstract

EXTREMUM PROBLEMS RELATED TO A LINEAR FUNCTION

Kosanov B.M. [1], Kayynbayev Zh.T. [2], Ardabayeva A.K. [1]
[1] Abai Kazakh Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2]Suleiman Demirel University, Almaty, Kazakhstan

The article deals with the problems leading to finding the extremum of a linear function. The purpose of the article is to show a general method for solving extreme problems related to a linear function and to reveal the significance of this method in the earlier acquisition of knowledge about extreme problems from students. The methodological basis of the research is a systematic approach to teaching secondary school students to solve problems at extremes. The following results were obtained in the study: the concept of "extremum problems" was defined, the structure of extremum problems associated with a linear function was considered, a general method for solving problems that reduce to finding the extremum of a linear function was developed, the stages of work on such problems were shown. It is noted that this method does not require calculating the derivative of the function and it is based primarily on the monotonicity of a linear function on a certain segment. Therefore, a modern student should not only be able to solve extreme problems using a derivative, but also possess elementary methods.

Keywords: problem, extremum, extremum problems, linear function, extremum problems related to a linear function.

Кіріспе

Математиканы оқытуда есептер маңызды орын алады. Есептерді шешумен байланысты білім, білік және дағдыларды қалыптастыру жалпы білім беретін мектепте математиканы оқытудың басты және аса маңызды қорытынды нәтижесі болып табылады. Жалпы алғанда, мектеп математика курсында есептердің сан алуан түрлері қарастырылады. Олардың ішінде экстремумға берілген есептердің алатын орны ерекше [1].

Экстремумға берілген есептер деп «ең үлкен мән», «ең кіші мән», «максимум» немесе «минимум» ұғымдарының бірімен байланысты есептерді түсінеді. Оқу бағдарламасы бойынша, мұндай есептер және оларды шешу мәселесі Х сыныптан бастап қана «Алгебра және анализ бастамалары» курсында жүйелі түрде қарастырыла бастайтындығы белгілі. Функцияның туындысын табуға негізделген бұл әдіс экстремумға берілген есептерді шешудің неғұрлым жалпы әдісі болып табылады [2]. Алайда, бұл әдістің кейбір кемшіліктері бар. Мәселен, кейбір есептерде шамалар арасындағы функциялық байланыс кесте түрінде берілуі немесе оны аналитикалық түрде жазып көрсету қиын болуы мүмкін. Сондай-ақ кейбір есептерді шешу барысында функцияның туындысын табу үлкен қиындықтар тудырады, кейде бізді қызықтыратын нүктелерде туындының бар болуының өзі белгісіз болуы мүмкін. Кей жағдайларда тіпті функцияның туындысын есептеп тапқан күннің өзінде $f^{/}(x) = 0$ теңдеуін шешуде айтарлықтай қиындықтар орын алады. Осы тұрғыдан алып қарағанда оқушылардың экстремумға берілген есептерді шешудің әртүрлі элементар әдістерін оқып-үйренулері және меңгерулері математиканы оқыту әдістемесіндегі өзекті мәселенің бірі болып табылады.

Зерттеу әдіснамасы

Мақаланың мақсаты: сызықтық функцияның экстремум мәндерін табуға келтіретін есептерді элементар әдіспен шешудің жолдарын көрсету.

Мақаланы жазу барысында экстремумға берілген есептерді шешумен байланысты теориялық және әдістемелік әдебиеттерге, ғылыми-әдістемелік еңбектерге, математиканың жалпы білім беретін мектепке арналған жаңартылған мазмұндағы оқу бағдарламасы мен оқулықтарына зерттеу мәселесі тұрғысынан талдаулар жасау, бақылау, озат педагогикалық тәжірибені оқып-үйрену және тарату сияқты зерттеу әдістері пайдаланылды.

Зерттеу нәтижелері

Аталмыш есептерді шешудегі аса маңызды мәселе, оқушылардың сызықтың функцияның монотондылығымен байланысты мынадай қасиеттерді берік игеруі керек болады:

1) $y = kx + b$ функциясы $k \succ 0$ болғанда, өспелі функция болады.

2) $y = kx + b$ функциясы $k \prec 0$ болғанда, кемімелі функция болады.

Осының негізінде сызықтық функцияға қатысты мынадай маңызды тұжырымдар жасауға мүмкіндік туады: 1) $k > 0$ болғанда тәуелсіз айнымалының үлкен мәніне функцияның үлкен мәні, ал тәуелсіз айнымалының кіші мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келеді; 2) $k < 0$ болғанда тәуелсіз айнымалының үлкен мәніне функцияның кіші мәні, ал тәуелсіз айнымалының кіші мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келеді[4].

Жалпы алғанда, $y = kx + b$ функциясының ең үлкен немесе ең кіші мәнін көрсетіп беру мүмкін емес, өйткені $x -$ тің шектеусіз өсуіне байланысты функция шектеусіз өседі ($k > 0$ болғанда) немесе шектеусіз кемиді ($k < 0$ болғанда). Мұны сызықтық функцияның сәйкес жағдайлардағы графиктерінен көрнекі түрде байқауға болады. Алайда, егер де сызықтық функцияны қандай да бір сандар аралығында қарастыратын болсақ, оның ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтауға болады. Мәселен, $y = 0,5x + 2$ функциясын $[-6;2]$ аралығында, ал $y = -3x + 6$ функциясын $[-1;3]$ аралығында қарастырайық. Функциялар графиктерін сызып, оларға зер салып қарайтын болсақ, мыналарды аңғарамыз: $y = 0{,}5x + 2$ функциясының $[-6;2]$ аралығындағы минимум нүктесі $x = -6$, максимум нүктесі $x = 2$ және оның осы сандар аралығындағы ең кіші мәні -1 ге, ең үлкен мәні 3-ке тең болады. Ал $y = -3x + 6$ функциясының $[-1;3]$ аралығындағы максимум нүктесі $x = -1$, минимум нүктесі $x = 3$ болады және оның осы сандар аралығындағы ең үлкен мәні -9-ға, ең кіші мәні -3-ке тең болады. Осы айтылғандардан мынадай ережелер тұжырымдауға болады.

1-ереже. $k > 0$ болса, онда $y = kx + b$ сызықтық функциясы $x = c$ нүктесінде ең кіші мәнге, ал $x = d$ нүктесінде ең үлкен мәнге ие болады, яғни:

$$\min_{[c;d]} y = kc + b \qquad \max_{[c;d]} y = kd + b$$

2-ереже. $k < 0$ болса, онда $y = kx + b$ сызықтық функциясы $x = c$ нүктесінде ең үлкен мәнге, ал $x = d$ нүктесінде ең кіші мәнге ие болады, яғни:

$$\max_{[c;d]} y = kc + b \qquad \min_{[c;d]} y = kd + b$$

Жоғарыдағы пайымдаулар сызықтық функциямен байланысты экстремумға берілген есептерді шешудің жалпы түрдегі алгоритмін тұжырымдауға мүмкіндік береді.

1) Есеп шарты мен талабына сәйкес $y = kx + b$ түріндегі сызықтық функцияны құрады.

2) Функцияның қандай сандар аралығында қарастырылатынын анықтайды.

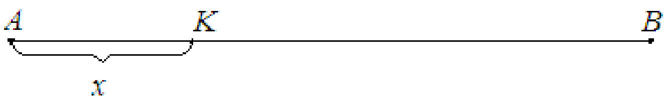
3) 1-інші немесе 2-інші ережеге сүйеніп, сызықтық функцияның осы аралықтағы ең үлкен немесе ең кіші мәнін табады.

4) Осыған сәйкес есептің жауабын жазады.

Төменде осы алгоритмді пайдалана отырып, екі есепті шешіп көрсетейік.

№1. Үлкен жолдың бойында орналасқан А және В ауылдарының арақашықтығы 4км. А ауылында 200 оқушы, ал В ауылында 150 оқушы бар. Оқушылардың барлығы жүретін жалпы жол ең аз болатындай етіп мектепті қай жерден салу керек?

Шешуі. 1) Айталық, мектеп А ауылынан x км қашықтықтағы К нүктесінде салынады деп ұйғарайық.



AK = x, онда *KB = 4 - x*, өйткені *AB = 4*.

Бұлай деп алғанда, А ауылының оқушылары мектепке дейін барлығы *200x* км, ал В ауылының оқушылары *150(4 - x)* км жол жүреді.

Демек, барлық оқушылардың жүріп өтетін жалпы жолын

$$y = 200x + 150(4 - x)$$

функциясы арқылы өрнектеуге болады. Оны түрлендірсек:

$$y = 200x + 150(4 - x) = 200x + 600 - 150x = 50x + 600$$

Сонымен жалпы жол $y = 50x + 600$ сызықтық функциясымен өрнектеледі екен.

2) Енді осы функцияға енетін x тәуелсіз айнымалысының қандай сандар аралығында өзгеретіндігін анықтайық.

Мектептің А ауылында немесе В ауылында, сондай-ақ олардың арасындағы кез-келген жерден салынуы мүмкін екендігін ескерсек, $x -$ тің 0 мен 4 сандары аралығында, яғни $[0;4]$ аралығында өзгеретіндігі айқындалады. Сонымен берілген есеп оқушылардың барлығы жүріп өтуге тиісті жалпы жолдың, яғни $y = 50x + 600$ функциясының ең кіші мәнін табуға келіп тіреледі.

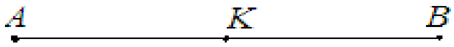
3) $k = 50 > 0$ болғандықтан сызықтық функцияның экстремум нүктелерін табу ережесі бойынша берілген функция $x = 0$ нүктесінде ең кіші мәнге ие болады, яғни

$$\min_{[0;4]} y = 50\cdot 0 + 600 = 600$$

4) Бұл дегеніміз мектепті А ауылында салу керек деген сөз, сонда барлық оқушылардың жүріп өтетін жалпы жолы ең аз, яғни 600км болады.

Жауабы: мектепті А ауылында салу керек.

Соңында оқушыларға есептің шешімі айқын түрде түсінікті болу үшін алынған жауапты басқа да мүмкін болатын шешімдермен салыстырып, бағалап көрсеткен дұрыс болады деп ойлаймыз. Мәселен, мектеп ауылдардың дәл ортасынан салынады деп ойласақ,



$AK = 2км$ және $KB = 2км.$ Онда жолдың жалпы ұзындығы:

$$200\cdot 2 + 150\cdot 2 = 400 + 300 = 700$$

Демек, бұл жағдайда оқушылардың барлығы жүріп өтетін жалпы жолдың ұзындығы 700 км болады екен.

Енді мектеп А ауылынан 0,5км, 1км, 3км немесе 3,5км қашықтықта салынса не болар еді?

Осы жағдайлардың әрқайсысы үшін жалпы жолдың ұзындығын табар болсақ:

1) $200\cdot 0{,}5 + 150\cdot 3{,}5 = 625$
2) $200\cdot 1 + 150\cdot 3 = 650$
3) $200\cdot 3 + 150\cdot 1 = 750$
4) $200\cdot 3{,}5 + 150\cdot 0{,}5 = 775$

Бұл жасалған талдаулар мектепті А ауылында салғанда ғана барлық оқушылар жүріп өтуге тиіс жалпы жолдың ең аз мәнге ие болатындығын көрсетеді.

№2. Тас жол бойында орналасқан екі А мен В шахталарының ара қашықтығы 60км. А шахтасында тәулігіне 200т кен, ал В шахтасында тәулігіне 100т кен өндіріледі. Кенді тасып жеткізу үшін тонна-километр мөлшері ең аз болатындай етіп, кен байыту зауытын қай жерден салу керек?

Шешуі. 1) Зауыт А мен В шахталарының арасындағы С нүктесінде салынады деп ұйғарып, *AC = x* белгілеуін енгізсек, *CB = 60 - x*. Есеп шарты бойынша А-дан В-ға және В-дан С-ға кенді тасымалдайтын көліктің әрбір күні жүріп өтетін тонна-километрінің мөлшерлерін сәйкесінше, *200x* және *100(60-x)* деп өрнектеуге болады. Сонда тонна-километрлердің қосынды мөлшері мынадай функциямен өрнектеледі:

$$y = 200x + 100(60 - x) = 100x + 6000$$

2) Бұл - $[0;60]$ аралығында анықталатын сызықтық функция.

3) 1-ережеге сәйкес, $y = 100x + 6000$ сызықтық функциясының $[0;60]$аралығындағы ең кіші мәнін табамыз. $k = 100 > 0$ болғандықтан, $y = 100x + 6000$ сызықтық функциясы $x = 60$нүктесінде ең кіші мәнге ие болады, яғни:

$$\min_{[0;60]} y = 100\times 0 + 6000 = 6000$$

4) Демек, $x = 0$, яғни зауытты А шахтасының жанынан салу керек.

Жауабы: зауытты А шахтасында салу керек.

Бұл есепті шешкеннен кейін оқушыларға тонна-километрдің қосынды мөлшерінің зауыттың салыну орнына байланысты өзгеретіндігін түсіндіру керек. Ол үшін зауытты А шахтасынан 30км, 20км және 10км қашықтықта салынады деген ұйғарымдардың әрқайсысы үшін тонна-километрдің қосынды мөлшерін есептеп көрсеткен орынды болады, сонда:

1) $y = 100x + 6000 = 100 \times 30 + 6000 = 9000;$
2) $y = 100x + 6000 = 100 \times 20 + 6000 = 8000;$
3) $y = 100x + 6000 = 100 \times 10 + 6000 = 7000.$

Берілген есепті жақсы түсіну үшін қосымша төмендегідей мәселені де шешіп көрсеткен жөн. Егер:

а) А шахтасында 100т, ал В шахтасында 200т кен өндірілсе;

ә) А шахтасында 200т, ал В шахтасында 190т кен өндірілсе;

б) А шахтасында да В шахтасында да 200тоннадан кен өндірілсе, онда зауытты қай жерден салу керек?

Бұл сұрақтарға жауап беру үшін $[0;60]$ аралығында мынадай сызықтық функциялардың ең кіші мәндерін табу керек болады:

1) $y = 100x + 200(60 - x) = -100x + 12000;$
2) $y = 200x + 190(60 - x) = 10x + 11400;$
3) $y = 200x + 200(60 - x) = 12000.$

Осы айтылғандардың барлығынан мынадай аса маңызды қорытынды шығаруға болады: егер А шахтасында В шахтасына қарағанда кен көп өндірілсе, онда зауытты А шахтасының қасынан салу керек; ал егер де шахталардағы өндірілетін кеннің мөлшері бірдей болса, онда зауытты шахталардың арасын қосатын түзу жолдың бойынан кез келген жерден салған тиімді болады.

Дискуссия

Экстремумға берілген есептердің кейбірінде шамалар арасындағы байланысты сызықтық функция арқылы өрнектеп көрсетуге болады. Алайда, оларды функцияның туындысын табуға негізделген жалпы әдіспен шешу мүмкін болмайды, себебі мұнда сызықтық функцияның туындысын табудың және $f^{/}(x) = 0$ теңдеуін құрудың еш мағынасы болмайды. Сондықтан экстремумға берілген есептердің бұл тобын шешуде қажет болатын тірек білімдерді анықтап алу керек болады.

Біздіңше, олар мыналар:

1) Сызықтық функция және оның анықтамасы;
2) Сызықтық функцияның графигі;
3) Сызықтық функцияның қасиеттері;
4) Сызықтық функцияның монотондылығы.

Бұл тақырыптар 7-сыныптың алгебра курсында қарастырылатыны белгілі [3].

Демек, 7-сыныпта «Функция. Функцияның графигі» тарауының соңын ала оқушыларда экстремумға берілген есептер туралы айқын түрдегі түсінік қалыптастыруға әбден болады. Жоғарыда келтірілген тақырыптарды оқып-үйренумен байланысты жүргізілетін жұмыстар негізінде оқушылар экстремумға берілген есеп туралы бастама түсінік алып, оны шешудің кезеңдеріне сәйкес орындалатын іс-әрекеттерді жүргізуді үйрене бастайды. Бұл оқушылардың экстремумға берілген есептерді шеше білу іскерлігін қалыптастырудың алғашқы баспалдағы іспеттес болады, кейінірек бұл іскерліктер экстремумға берілген күрделірек есептерді қарастыру және оларды шешу барысында онан әрі жетіле және шыңдала түседі.

Қорытынды

Шамалар арасындағы байланысты сызықтық функция түрінде өрнектеуге болатындай экстремумға берілген есептердің бірнешеуінің мысалдарын келтірелік.

№3. Университеттің екі оқу корпусының ара қашықтығы 1,5 км. Олардың бірінде 300 студент, ал екіншісінде 200 студент оқиды. Барлық студенттердің жүріп өтетін жалпы жолы ең аз болатындай етіп жатақхананы қай жерден салу керек?

№4. Екі А және В зауыттарының ара қашықтығы 40км, А зауытының мұнайға деген сұранысы тәулігіне 80т, ал В зауытынікі -70т. 1т мұнайды 1 километрге тасымалдау А зауыты үшін 800 теңге, ал В зауыты үшін 1000 теңге. Мұнайды тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығын ең аз болатындай етіп, зауыттарды мұнаймен қамтамасыз ететін базаны қай жерден салу керек?

№5. Бір көшенің бойында орналасқан ара қашықтығы 5км А және В базарларын тауармен қамтамасыз ететін қойма салу керек. А базарының көкеніске деген тәуліктік сұранысы 50 тонна, ал В базарынікі - 40 тонна. 1 тонна тауарды 1 километрге тасымалдау А базары үшін 800 теңге, ал В базары үшін 900 теңге тұрады. Көкеністі тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығын ең аз болатындай етіп, базарларды көкеніспен қамтамасыз ететін қойманы қай жерден салған дұрыс?

Қорыта айтқанда, осы сияқты есептер экстремумға берілген есептердің ерекше бір тобын құрайды деуге толық негіз бар. Тағы бір байқалатыны, бұл есептер аса қиын емес және оларды негізгі мектептің алгебра курсында «Функция.Функцияның графигі» тарауын өткенде қарастыруға болады [5-6]. Бұл әдістемелік тұрғыдан алғандағы аса маңызды мәселені шешуге, яғни оқушыларда негізгі мектепте-ақ экстремумға берілген есептер туралы берік түсінік қалыптастыруға және оларды экстремумға берілген кейбір есептерді шешудің қарапайым әдістерімен қаруландыруға мол мүмкіндік туғызады.

Пайдаланылған әдебиет тізімі

1 Макаркин В.М., Апайчева Л.А. Метод Лагранжа решения экстремальной задачи // Международный студенческий научный вестник. – М.,2016. – № 3-3.

2 Әбілқасымова А.Е. және т.б. Алгебра және анализ бастамалары. Жалпы білім беретін мектептің 10 сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Мектеп, 2020. – 165б.

3 Әбілқасымова А.Е. және т.б. Алгебра. Жалпы білім беретін мектептің 7 сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Мектеп, 2020. – 270б.

4 Абылкасымова А.Е. и др. Методические основы обучения решению математических задач в школе. – Алматы, 2017. – 245с.

5 Абылкасымова А.Е. и др. Алгебра. Методическое руководство. Пособие для учителей 7 класса общеобразовательной школы. – Алматы: Мектеп, 2020. – 104с.

6 Абылкасымова А.Е. и др. "The Turkish vector" influence on teaching the exact disciplines in modern educational system of Kazakhstan: On the example of teaching algebra and mathematics. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 2016, 12(4), стр. 3481–3492.

References:

1 Makarkin V.M., Apaicheva L.A. (2016) Metod Lagranzha reshenija jekstremal'noj zadachi [Lagrange method for solving an extreme problem]. International Student Scientific Bulletin. M., № 3-3. (In Russian)

*2 Abilkasymova A.E. zhane T.B. (2020) Algebra zhane analysis of bastamalary [*Initiatives of algebra and analysis*]. Zhalpi bilim beretin mekteptin 10 synybina arnalgan okulyk. Almaty: Mektep, 165. (In Kazakh)*

*3 Abilkasymova A.E. zhane T.B. (2020) Algebra. Zhalpi bilim beretin mekteptin 7 sonybyna arnalgan okulyk [*Algebra. Textbook for 7th grade of secondary school*]. Almaty: Mektep, 270. (In Kazakh)*

*4 Abylkasymova A.E. et al. (2017) Metodicheskie osnovy obuchenija resheniju matematicheskih zadach v shkole [*Methodical bases of teaching solution of mathematical tasks in school*]. Almaty, 245. (In Russian)*

*5 Abylkasymova A.E .et al. (2020) Algebra. Metodicheskoe rukovodstvo [*Algebra. Methodical guidance*]. A manual for teachers of the 7th grade of a secondary school. Almaty: Mektep, 104. (In Russian)*

6 Abylkasymova A.E. et al. (2016) "The Turkish vector" influence on teaching the exact disciplines in modern educational system of Kazakhstan: On the example of teaching algebra and mathematics. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 12(4), 3481-3492.