МРНТИ 27.31.15
УДК 517.584

10.51889/2959-5894.2023.82.2.010

*Г.Е. Берикханова [1], О.М. Жолымбаев [1], А.А. Анияров [2,] **

[1]Университет имени Шакарима города Семей, г. Семей, Казахстан
[2] Международный университет Астана, г. Астана, Казахстан
[*]e-mail: aniyarov.a@gmail.com

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К УРАВНЕНИЮ БЕССЕЛЯ

Аннотация

В данной статье рассматривается решение дифференциального уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Сложные механические процессы описываются дифференциальными уравнениями, приводящееся к уравнению Бесселя. Его применение широко встречаются в различных вопросах астрономии, физики и техники. В качестве примера рассматриваются задачи о потери тепла через стенку печи и цилиндрической фильтрования. Составлена математическая модель этих физико – механических процессов. Дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс, приводится к уравнению Бесселя. При решении задачи так же используется функция Бесселя, его свойства и производные. Так же применяется таблицы значения функции Бесселя и рекуррентные формулы для этой функции. Искомое решение представляется в виде степенного ряда и выражается через функции Бесселя.

Ключевые слова: переменный коэффициент, уравнение Бесселя, теплопроводность, тепловой баланс, фильтрование, напор.

Аңдатпа

Г.Е. Берікханова [1], О.М. Жолымбаев [1], А.А. Анияров [2,]
[1]Семей қаласының Шәкәрім атындағы университет, Семей қ., Қазақстан
[2]Астана халықаралық университеті, Астана қ., Қазақстан

БЕССЕЛ ТЕҢДЕУІНЕ КЕЛТІРІЛЕТІН КЕЙБІР ФИЗИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕР

Бұл мақалада айнымалы коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеуді шешу қарастырылады. Күрделі механикалық процестер Бессель теңдеуіне келтірілетін дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталады. Бұл теңдеу астрономияның, физиканың және техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Мысал ретінде пеш қабырғасы арқылы жылуды жоғалту және цилиндрлік фильтрлеу (сүзу) туралы есептер қарастырылады. Осы физика – механикалық процестердің математикалық моделі құрылды. Процесті сипаттайтын дифференциалдық теңдеу Бессель теңдеуіне келтіріледі. Есепті шешу барысында Бессель функциясы, оның қасиеттері және туындылары қолданылады. Сонымен қатар Бессель функциясының таблицалық мәндері және осы функция үшін рекурренттік формула қолданылады. Ізделінді шешім дәрежелік қатар түрінде қарастырылып, Бессель функциясы арқылы өрнектеледі.

Түйін сөздер: айнымалы коэффициент, Бессель теңдеуі, жылу өткізгіштік, жылу балансы, фильтрлеу, қысым.

Abstract

SOME PHYSICAL PROBLEMS THAT LEAD TO THE BESSEL EQUATION

Berikkhanova G.E. [1], Zholymbayev O.M. [1], Aniyarov A.A. [2,]
[1] Shakarim University of Semey, Semey, Kazakhstan
[2] Astana International University, Astana, Kazakhstan

In this study, we consider a solution of second-order differential equation with variable coefficients. Complex mechanical processes are described by differential equations leading to the Bessel equation. Its application is widely found in various issues of astronomy, physics and technology. As an example, the problems of heat loss through the furnace wall and cylindrical filtration are considered. A mathematical model of these physical and mechanical processes has been compiled. The differential equation describing the considered process is reduced to the Bessel equation. Bessel function, its properties and derivatives are used when solving the problem. The tables of the value of the Bessel function and recurrent formulas for this function are also used. The desired solution is represented as a power series and expressed in terms of the Bessel functions

Keywords: variable coefficient, Bessel equation, thermal conductivity, thermal balance, filtration, pressure.

Введение

В основе описания математической модели физико-механических задач лежит перевод ее условий на математический язык. Решение полученной математической задачи, а также их оценка должны удовлетворять условиям данной задачи. При решении физико-химических задач, приводящихся к дифференциальным уравнениям, не существует общих методов построения математической модели. А навыки в этой области могут быть приобретены в результате конкретных задач [1].

Используя дифференциальные уравнения можно установить связь между основным физическим законом и целой группой переменных, имеющих большое значение при исследовании физических проблем. Применение даже наиболее простого физического закона к рассматриваемому процессу, протекающему при переменных условиях, приведет к сложному соотношению между переменными величинами. Например, известно дифференциальное уравнение, устанавливающие зависимость между температурой t и координатой x точки нагретого стержня, отдающего свое тепло окружающей среде

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\lambda A}\left(t - t_s\right),$$

где t_s - температура окружающей среды, α - коэффициент теплоотдачи от стержня к окружающей среды, P - периметр стержня, λ - коэффициент теплопроводности, A - площадь сечения [2]. Это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Физические задачи, приводящие к уравнению Бесселя

Сложные физические процессы описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Если при помощи замены переменных линейное уравнение с переменными коэффициентами преобразовать в уравнение с постоянными коэффициентами, то с помощью обратного преобразования найдем решение данного уравнения в элементарных функциях [3]. Примерами таких уравнений является уравнение Бесселя.

Дифференциальное уравнение вида

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n^2\right)y = 0$$

называется уравнением Бесселя. К интегрированию этого равнения приводятся многие задачи астрономии, физики и техники [4]. Нам известно, что данное уравнение интегрируется в элементарных функциях при $n = \frac{1}{2}$ и целых значениях [2].

Рассмотрим физические задачи, которые приводятся к уравнению Бесселя.

1. Потеря тепла происходит за счет ее перехода к воздуху от листового металла, покрывающего изоляцию печи. Металлическое покрытие представляет собой сталь толщиной a с теплопроводностью λ. Коэффициент теплоотдачи от стенки к воздуху α. Диаметр головки болта 5см. Температура окружающей среды t_0, температура головки болта постоянная и равна 150 град. Считая, что тепловые потери обусловливаются только теплопроводностью стержня болта, определим температуру наружной металлической стенки в нескольких точках на расстоянии до 1 м от болта [5].

По условию задачи составим математический модель. Для этого необходимо ввести следующие переменные величины: t -температуру и r - координату положения точки. Температура симметрична относительно головки болта.

Для радиуса r скорость притока тепла имеет вид:

$$q = 2\pi ra\lambda\frac{dt}{dr}$$

Скорость отдачи тепла для $r + \Delta r$ радиальной длины будет:

$$\frac{dq}{dr}=\frac{d}{dr}\left(2\pi ra\lambda\frac{dt}{dr}\right),\quad \frac{dq}{dr}=2\pi a\lambda\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right),\qquad \frac{dq}{dr}=2\pi a\lambda\left(\frac{dt}{dr}+r\frac{d^2t}{dr^2}\right)$$

или

$$dq=2\pi a\lambda\left(\frac{dt}{dr}+r\frac{d^2t}{dr^2}\right)dr \tag{1}$$

α - коэффициент теплоотдачи от стенки к воздуху. Тогда скорость количества тепла, отданного элементом кольцевой поверхности в атмосферу, имеет вид [6]:

$$\frac{dq}{dr}=\alpha\left(t-t_0\right)2\pi r$$

или

$$dq=\alpha\left(t-t_0\right)2\pi rdr \tag{2}$$

где t - температура металла в данной точке. Приравнивая (1) и (2), из теплового баланса для кольцевой поверхности, имеем:

$$2\pi a\lambda\left(\frac{dt}{dr}+r\frac{d^2t}{dr^2}\right)dr=\alpha\left(t-t_0\right)2\pi rdr,$$

сократив равенство на $2\pi dr$, получим:

$$a\lambda\left(\frac{dt}{dr}+r\frac{d^2t}{dr^2}\right)=\alpha\left(t-t_0\right)r,$$

При постоянных положительных значениях λ и a получим:

$$\frac{dt}{dr}+r\frac{d^2t}{dr^2}=\frac{\alpha\left(t-t_0\right)}{a\lambda}r,\qquad r\frac{d^2t}{dr^2}+\frac{dt}{dr}-\frac{\alpha\left(t-t_0\right)}{a\lambda}r=0,$$

или

$$\frac{d^2t}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}-\frac{\alpha\left(t-t_0\right)}{a\lambda}=0 \tag{3}$$

Пусть $y=t-t_0$ и $\beta=\dfrac{\alpha}{a\lambda}$,тогда из уравнения (3) будем иметь:

$$r^2\frac{d^2y}{dr^2}+r\frac{dy}{dr}-\beta r^2y=0 \tag{4}$$

Это дифференциальное уравнение можно привести к уравнению Бесселя.

Введем новую независимую переменную z и функцию u по формулам [7]:

$$y=u \tag{5}$$

где $u=u\left(z\right)$ и $r=\dfrac{z}{\sqrt{\beta}}$. Находим производные первого и второго порядка.

$$\frac{dy}{dr}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dr}{dz}}=\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{1}{\sqrt{\beta}}}=\sqrt{\beta}\frac{du}{dz},$$

аналогично находим

$$\frac{d^2y}{dr^2} = \sqrt{\beta}\,\frac{\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dz}\right)}{\frac{dr}{dz}} = \sqrt{\beta}\,\frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} = \beta\frac{d^2u}{dz^2}.$$

Подставляя в (4) вместо $r, y, \frac{dy}{dr}, \frac{d^2y}{dr^2}$ выражение через z и u, получим уравнение Бесселя [8]:

$$\frac{z^2}{\beta}\cdot\beta\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{z}{\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\beta}\frac{du}{dz} - \beta\cdot\frac{z^2}{\beta}u = 0.$$

Упростив уравнение, получим:

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} - z^2u = 0, \tag{6}$$

Так как по формуле [7, 147] индекс $p = 0$, тогда общее решение уравнения (6) имеет вид:

$$u = C_1J_0(z) + C_2Y_0(z).$$

Переходя к переменным r и y по формулам $u = y,\ z = r\sqrt{\beta}$, которые получаются из (5), получаем общее решение данного уравнения:

$$u = C_1J_0\left(r\sqrt{\beta}\right) + C_2Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right), \tag{7}$$

Решение задачи исследуем при определенных значениях параметров [5]. Допустим, $a = 1{,}5$ см; $\lambda = 400$ ккал/м·ч·град., $\alpha = \frac{12\,ккал}{м^2}\cdot град.$, диаметр головки болта5 см, $t_0 = 70^0$.

Из таблицы значения функций Бесселя [4] видно, что слагаемое $J_0\left(r\sqrt{\beta}\right)$ не имеет физического смысла. Значение функции увеличивается с возрастанием r и невозможно определять температуру и уменьшается достигая асимптотической величины 20^0C [5].

Следовательно, будем иметь:

$$t - 20 = C_2Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right) \tag{8}$$

Теперь проверим, что функция $y = C_2Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right)$ является решением уравнение (7). Для удобства, пусть постоянная $C_2 = 1$. Находим производных функции Бесселя:

$$\frac{dy}{dr} = -\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(-\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)\right) = -\sqrt{\beta}\frac{d}{dr}\left(Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)\right) =$$

$$= -\sqrt{\beta}\left(\frac{Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)}{r} - \sqrt{\beta}Y_2\left(r\sqrt{\beta}\right)\right) = -\frac{\sqrt{\beta}}{r}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right) + \beta Y_2\left(r\sqrt{\beta}\right).$$

Если полученные выражения подставлять в (4), то его левая часть имеет вид:

$$-r\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right) + r^2\beta Y_2\left(r\sqrt{\beta}\right) - r\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right) - r^2\beta Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right) =$$

$$=-2r\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)+r^2\beta\left(Y_2\left(r\sqrt{\beta}\right)-Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right)\right).$$

Нам известна рекуррентная формула для функции Бесселя $Y_n\left(x\right)$.

$$Y_{n-1}\left(x\right)-Y_{n+1}\left(x\right)=-\frac{2n}{x}Y_n\left(x\right).$$

По этой формуле вычислим:

$$Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right)-Y_2\left(r\sqrt{\beta}\right)=-\frac{2}{r\sqrt{\beta}}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right).$$

$$-2r\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)-r^2\beta\left(Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right)-Y_2\left(r\sqrt{\beta}\right)\right)=$$

$$=-2r\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)-r^2\beta\left(-\frac{2}{r\sqrt{\beta}}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)\right)=$$

$$-2r\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)+2r\sqrt{\beta}Y_1\left(r\sqrt{\beta}\right)=0$$

Тогда значение выражений $Y_2\left(r\sqrt{\beta}\right)-Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right)=0$.Отсюда следует, что $Y_0\left(r\sqrt{\beta}\right)$является решением уравнения (4) .

Воспользуясь числовыми значениями параметров, находим:

$$\beta=\frac{\alpha}{\lambda a}=\frac{12}{40\cdot 0,015}=20$$

$$r_0=\frac{0,05}{2}=0,025$$

И так:

$$150-70=C_2Y_0\left(0,025\sqrt{20}\right)=C_2Y_0\left(0,116\right)=2,3C_2$$

Следовательно $C_2=34,8$. Тогда искомая температура наружной стенки:

$$t-70=34,8Y_0\left(r\sqrt{20}\right).$$

2. В цилиндрическом фильтре осадке с общим коэффициентом фильтрования k имеется центральное отверстие с радиусом r_0. Будем принимать, что у концов фильтрующего цилиндра, вследствие недостаточной очистки их, жидкость течет через поры осадка вертикально. Напоры жидкости у верхнего и нижнего концов цилиндра примем, соответственно, равным h_1 и h_2, а коэффициенты фильтрования k_1 и k_2. Требуется определить напор h в слое, находящемся на расстоянии r от средней части фильтра [5].

Для описание математической модели по условию задачи, изучим данный процесс.

Через среднюю часть фильтра длиной l процесс идет горизонтально. У верхнего края аппарата длиною l_1 процесс проходит вертикально. Длиною l_2, такая же часть будет и у нижнего края.

Рассматривается в средней части аппарата кольцо толщиной dr и высотой l. Данное кольцо ограничено сверху и снизу линиями напоров h, которые обеспечивают цилиндрическое фильтрование к стенке аппарата.

Разность объемов втекающей и вытекающей жидкости через цилиндрические поверхности кольца за единицу времени есть:

$$2k\pi l\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right)dr \tag{9}$$

По условию задачи, через верхние и нижнее основания кольца напора равного h за единицу времени втекает жидкость объемом соответственно [5]:

$$2\pi r k_1 \frac{h_1 - h}{l_1} dr \tag{10}$$

$$2\pi r k_2 \frac{h_2 - h}{l_2} dr \tag{11}$$

В выражениях (10) и (11) величины $k_1 \frac{h_1 - h}{l_1}$ и $k_2 \frac{h_2 - h}{l_2}$ представляют скорости фильтрования жидкости верхний и нижний слои осадка с высотами соответственно l_1 и l_2.

Чтобы найти изменение объема жидкости внутри рассматриваемого кольца за единицу времени, сложим выражения (9), (10), (11).

$$2k\pi l \frac{d}{dr}\left(r \frac{dh}{dr} \right) dr + 2\pi r k_1 \frac{h_1 - h}{l_1} dr + 2\pi r k_2 \frac{h_2 - h}{l_2} dr \tag{12}$$

Из-за несжимаемости жидкости, изменение объема равняется нулю. Тогда получим:

$$2k\pi l \frac{d}{dr}\left(r \frac{dh}{dr} \right) dr + 2\pi r k_1 \frac{h_1 - h}{l_1} dr + 2\pi r k_2 \frac{h_2 - h}{l_2} dr = 0 \tag{13}$$

Сократив обе части на $2\pi dr$ получим уравнение неразрывности в виде:

$$kl \frac{d}{dr}\left(r \frac{dh}{dr} \right) + r k_1 \frac{h_1 - h}{l_1} + r k_2 \frac{h_2 - h}{l_2} = 0 \tag{14}$$

или

$$kl \left(\frac{dh}{dr} + r \frac{d^2 h}{dr^2} \right) + r k_1 \frac{h_1 - h}{l_1} + r k_2 \frac{h_2 - h}{l_2} = 0,$$

$$klr \frac{d^2 h}{dr^2} + kl \frac{dh}{dr} + r k_1 \frac{h_1 - h}{l_1} + r k_2 \frac{h_2 - h}{l_2} = 0,$$

Разделив обе части уравнения на klr и упростив, получим:

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dh}{dr} + \frac{k_1}{kl} \cdot \frac{h_1 - h}{l_1} + \frac{k_2}{kl} \cdot \frac{h_2 - h}{l_2} = 0,$$

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dh}{dr} + \frac{k_1 h_1}{kll_1} - \frac{k_1 h}{kll_1} + \frac{k_2 h_2}{kll_2} - \frac{k_2 h}{kll_2} = 0,$$

или

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dh}{dr} - \frac{h}{kl}\left(\frac{k_1}{l_1} + \frac{k_2}{l_2} \right) + \frac{1}{kl}\left(\frac{k_1 h_1}{l_1} + \frac{k_2 h_2}{l_2} \right) = 0,$$

$$\frac{d^2h}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh}{dr}-\frac{1}{kl}\left(\frac{k_1}{l_1}+\frac{k_2}{l_2}\right)\left(h-\frac{\frac{k_1h_1}{l_1}+\frac{k_2h_2}{l_2}}{\frac{k_1}{l_1}+\frac{k_2}{l_2}}\right)=0,$$

$$\frac{d^2h}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh}{dr}-\frac{1}{kl}\left(\frac{k_1}{l_1}+\frac{k_2}{l_2}\right)\left(h-\frac{\frac{k_1l_2h_1+k_2l_1h_2}{l_1l_2}}{\frac{k_1l_2+k_2l_1}{l_1l_2}}\right)=0,$$

$$\frac{d^2h}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh}{dr}-\frac{1}{kl}\left(\frac{k_1}{l_1}+\frac{k_2}{l_2}\right)\left(h-\frac{k_1l_2h_1+k_2l_1h_2}{k_1l_2+k_2l_1}\right)=0 \tag{15}$$

Введем следующее обозначение:

$$\eta=\frac{1}{kl}\left(\frac{k_1}{l_1}+\frac{k_2}{l_2}\right),\quad H_0=h-\frac{k_1l_2h_1+k_2l_1h_2}{k_1l_2+k_2l_1}.$$

η и H_0- постоянные числа. Тогда уравнение (15) имеет вид:

$$\frac{d^2h}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh}{dr}-\eta\left(h-H_0\right)=0 \tag{16}$$

В уравнение (16) введем новую искомую функцию $S=h-H_0$. Тогда уравнение (16) запишем в виде

$$\frac{d^2S}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dS}{dr}-\eta S=0$$

$$r^2\frac{d^2S}{dr^2}+r\frac{dS}{dr}-\eta r^2S=0 \tag{17}$$

Дифференциальное уравнение (17) можно привести к уравнению Бесселя.
Для этого введем новую независимую переменную t и функцию u по формулам [7]:

$$S=u,\quad r=\frac{t}{\sqrt{\eta}} \tag{18}$$

Находим производные первого и второго порядка.

$$\frac{dS}{dr}=\frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dr}{dt}}=\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{1}{\sqrt{\eta}}}=\sqrt{\eta}\frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2S}{dr^2}=\sqrt{\eta}\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right)}{\frac{dr}{dt}}=\sqrt{\eta}\frac{\frac{d^2u}{dt^2}}{\frac{1}{\sqrt{\eta}}}=\eta\frac{d^2u}{dt^2}$$

Подставляя в (17) вместо $r,\ S,\ \frac{dS}{dr},\ \frac{d^2S}{dr^2}$ выражения через t и u, получим:

$$\frac{t^2}{\eta}\cdot\eta\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{t}{\sqrt{\eta}}\cdot\sqrt{\eta}\frac{du}{dt}-\eta\cdot\frac{t^2}{\eta}u=0,$$

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+t\frac{du}{dt}-t^2u=0 \tag{19}$$

Уравнение (19) есть уравнение Бесселя. Вычисляя по формуле из [7], находим, что индекс $p=0$. Тогда общее решение (19) будет:

$$u=AJ_0\left(t\right)+BY_0\left(t\right).$$

Переходя к переменным r и S по формулам $u=S,\ t=r\sqrt{\eta}$, которые получаются из (18), общий интеграл решение уравнения (17) имеет вид:

$$S=AJ_0\left(r\sqrt{\eta}\right)+BY_0\left(r\sqrt{\eta}\right) \tag{20}$$

Здесь A и B постоянные, $J_0\left(r\sqrt{\eta}\right)$ и $Y_0\left(r\sqrt{\eta}\right)$ функции Бесселя нулевого порядка [4]. Учитывая, что $S=h-H_0$, получим:

$$h=H_0+AJ_0\left(r\sqrt{\eta}\right)+BY_0\left(r\sqrt{\eta}\right) \tag{21}$$

В работе [10] было отмечено, что при x стремящемся к бесконечности, значение функции Бесселя $J_0\left(x\right)$ неограниченно возрастает. Отсюда следует, что в общем интеграле (21) должно быть $A=0$. Тогда получим решение вида

$$h=H_0+BY_0\left(r\sqrt{\eta}\right) \tag{22}$$

Для определения значение B, находим скорость процесса у стенки аппарата:

$$W=-k\frac{dh}{dr}=\frac{V}{2\pi r_0 l},$$

или

$$\frac{dh}{dr}=-\frac{V}{2\pi r_0 kl}, \tag{23}$$

где V -расход фильтрата.

Теперь дифференцируем уравнение (22):

$$\frac{dh}{dr}=B\sqrt{\eta}Y_0'\left(r\sqrt{\eta}\right).$$

Используем свойства производных функции Бесселя [9], что $Y_0'\left(r\sqrt{\eta}\right)=-Y_1\left(r\sqrt{\eta}\right)$, тогда

$$\frac{dh}{dr}=-B\sqrt{\eta}Y_1\left(r\sqrt{\eta}\right).$$

У стенок аппарата, когда $r = r_0$, производная имеет вид:

$$\frac{dh}{dr} = -B\sqrt{\eta}Y_1\left(r_0\sqrt{\eta}\right) \tag{24}$$

Приравнивая правые части (23) и (24), получим:

$$\frac{V}{2\pi r_0 kl} = B\sqrt{\eta}Y_1\left(r_0\sqrt{\eta}\right),$$

и отсюда

$$B = \frac{V}{2\pi r_0 kl\sqrt{\eta}Y_1\left(r_0\sqrt{\eta}\right)}.$$

И так, из уравнения (22) получаем окончательное выражение для напора:

$$h = H_0 - \frac{V\,Y_0\left(r\sqrt{\eta}\right)}{2\pi r_0 kl\sqrt{\eta}Y_1\left(r_0\sqrt{\eta}\right)}. \tag{25}$$

Здесь расход фильтрата V берется с отрицательным знаком. При определенных значениях параметров, $Y_0\left(r\sqrt{\eta}\right)$ и $Y_1\left(r_0\sqrt{\eta}\right)$ находим из таблицы функций Бесселя [9].

Дискуссия

Решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами выше первого порядка не выражаются через элементарные функции. Интегрирование такого уравнения не приводится к квадратурам. Наиболее удобным приемам является представление искомого решения в виде степенного ряда [11], [12]. Данный метод является удобным в применении к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, приводящееся к уравнению Бесселя. Искомое решение представляется в виде степенного ряда и выражается через функции Бесселя [13].

Заключение

Применение уравнение Бесселя широко встречаются в различных вопросах механики. Сложные процессы описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. С помощью замены переменных приведем их к уравнению Бесселя. Искомое решение представляется в виде степенного ряда [4].

Имеется ряд дифференциальных уравнений, решение которых выражаются через функции Бесселя. Между тремя функциями Бесселя, индексы которых отличаются на единицу, существует простая линейная зависимость, обеспечивающая рекуррентную формулу для этой функции [14]. Решение многих технических задач приводится к уравнению вида

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + \left(b + cx^m\right)y = 0,$$

который дает обширный класс линейных дифференциальных уравнений [7]. Данное уравнение приводится при помощи введения нового переменного к уравнению Бесселя. Его общий интеграл, как мы видим в приведенных задачах, выражается через функции Бесселя.

Список использованных источников:

1 Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств.- М: Высшая школа. 1991.-400с.

2 Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2006. - 472 с.

3 Арсенин В. А. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука,1984. - 384 с.

4 Матвеев Н.М. Методы интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.- М: Высшая школа. 1967.-564с.

5 Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. Ленинград: Химия, 1970. – 824 с.

6 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: изд–воМоск. ун–та: Наука, 2004. - 798 с.

7 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: УРСС, 2002. –260с.

8 Вирченко Н.А., Четвертак М.А. Об одном обобщении функции Бесселя // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 4 (37). С. 16-21, doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1361

9 Кручкович Г.И. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Москва: Высшая школа, 1970. –510 с.

10 Мейрамгазинова Г.Б., Берикханова Г.Е. Уравнение Бесселя и его применение // Материалы Республиканской научно-практической конференции «Математика: методы инновации в науке и образовании». Алматы, 2015.

11 Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том II, издание 24,Москва, 2017.

12 Самойлова Н.Н: Исследование обтеканиянеравномерно нагретого сфероида с помощью краевых задач для линеаризованной по скорости системы уравнений газовой динамики. Каталог диссертации. 2019.

13 Bonilla B., Kilbas A. A., Rivero M., Rodriguez L., Trujillo J. J. Modified Bessel-type function and solution of differential and integral equations, Indian J. Pure and Appl. Math., 2000, vol. 31, no. 1, pp. 93-109

14 Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: МГТУим. Н. Э. Баумана, 2006. - 368 с.

References:

1 Kafarov V.V., Glebov M.B. (1991) Matematicheskoe modelirovanie osnovnih protsessov himicheskih proizvodstv. [Mathematical modeling of the main processes of chemical production]. M.: Visshaya shkola, 400 (in Russian)

2 Stepanov V.V. (2006) Kurs differentsialnikh uravnenii. [Course of Differential Equations]. M: KomKniga, 472 (in Russian).

3 Arsenin V.A .(1984) Methods of mathematical physics and special functions. [Methods of mathematical physics and special functions]. M.: Nauka, 384 (in Russian)

4 Matveev. *N.M. (1967) Medoti integrirovaniya obiknovennih differentsialnih uravnenii. [Methods of Integration of Ordinary Differential Equations]. M.: Visshaya shkola, 564 (in Russian)*

5 Batuner L.M., Pozin M.E. (1970) Matematicheskie metodi v khimicheskoi tekhnike. [Mathematical methods in chemical engineering]. Leningrad, Khiniya, 824 (in Russian)

6 Tikhonov A.N., Samarskii A.A. (2004) Equations of mathematical physics.[Equations of mathematical physics]. M.: publishinghouse Mosk. University: Nauka, 798 (in Russian)

7 Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. (2002) Obiknavennie differentsialnie uravneniya. [Ordinary differential equations]. Moskva: URSS, 256 (in Russian)

8 Virchenko N.A., Chetvertak M.O. (2014) On one generalization of Bessel function [On one generalization of the Bessel function]. Vestn. Samar. Gos.Techn.Un-ta.Ser. Fiz.-mat. Nauki Issue 4 (37). 16-21, doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1361 (in Russian)

9 Kruchkovich G.I. et. al. (1970). Sbornik zadach I uprazhnenii po spetsialnim glavam visshei matematiki. [Collection of problems and exercises on special chapters of higher mathematics]. Moskva: Visshaya shkola, 510 (in Russian)

10 Meiramgazinova G.B., Berikkhanova G.E. (2015) Uravnenie Besselya I ego primenenie [The Bessel equation and its application]. Materiali Respublikanskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Matematika: metodi innovatsii v nauke I obrazovanii». Almaty (in Russian)

11 Smirnov V.I. (2017) Kurs visshei matematiki [Higher mathematics course]. Vol 2, Issue 24, Moskow (in Russian)

12 Smoilova N.N. (2019) Isslidovanie obtekaniya nerevnomerno nagretogo sferoida s pomoshiu kraevih zadach dlya linerezovannoi po skorosti systemi uravneniya gazovoi dinamiki [Study of the flow around a nonuniformly heated spheroid using boundary value problems for a system of gas dynamics equations linearized in velocity]. PhD dissertatsiya (in Russian)

13 Bonilla B., Kilbas A. A., Rivero M., Rodriguez L., Trujillo J. J. (2000) Modified Bessel-type function and solution of differential and integral equation. Indian J. Pure and Appl. Math., vol. 31, no. 1, 93-109 (in English)

14 Martinson L.K, Malov Yu. I. (2006) Differential equations of mathematical physics. [Differential equations of mathematical physics]. Moscow: MSTU im. N.E. Bauman, 368 (in Russian)