МРНТИ 50.07.05
УДК 27.35.14

https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.08

Ж. Сулейменов[1], С.Қ. Қуаныш[1]

[1]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

КРИТИКАЛЫҚ ЖАҒДАЙДАҒЫ КВАЗИСЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ШАРТТЫ-ПЕРИОДТЫ ШЕШІМІНІҢ БАР БОЛУЫ

Аңдатпа

Сызықтық емес тербелістер теориясында жиілігі өлшемдес емес бірнеше тербелістердің қабаттасып келуі нәтижесінде пайда болатын шартты-периодты тербелістермен жиі кездесуге тура келеді. Осындай резонанстық жағдайдағы квазисызықтық жүйенің шартты-периодты шешімін табу үдерісі «кішкене бөлім» мәселесін туындатады. Бұл мәселе шешімнің бар болуын дәлелдеу мен оны құру есебін қиындата түседі.

Біздің ұсынып отырған мақаламызда В.И. Арнольдтың, И. Мозердің және басқа да зерттеушілердің жұмыстары негізінде екінші ретті бір критикалық жағдайдағы квазисызықтық дифференциалдық жүйенің шартты-периодты шешімінің бар болатындығы дәлелденіп, оны құру жолы көрсетіледі. Шешімді құру барысындағы жуықтау тізбегі Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленколар ұсынған үдемелі жинақтылық әдіске сүйеніп берілді. Жұмыстың нәтижесін нақты дифференциалдық жүйелердің шартты-периодты шешімдерін құру үшін пайдалануға болады.

Түйін сөздер: шартты-периодты, үдемелі жинақтылық, жиілік, кішкене бөлім, резонанс.

Аннотация

Ж. Сулейменов [1], С.Қ. Қуаныш[1]

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

О СУЩЕСТВОВАНИИ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЯ

В теории нелинейных колебаний приходится часто втречаться с условно-периодическими колебаниями, возникающими в результате наложения нескольких колебаний с несоизмеримыми между собой частотами. При отыскании решения резонансной квазилинейной дифференциальной системы в виде условно-периодической функции возникает проблема малого знаменателя. Вследствие этого, доказательство существования, а тем более построения такого решения является нелегкой задачей.

В данной статье опираясь на работы В.И. Арнольда, И. Мозера и других исследователей доказано существованиие и построено условно-периодическое решение одной квазилинейной дифференциальной системы второго порядка в критическом случае. Методом построения последовательности приближения выбран метод ускоренный сходимости Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского, А.М. Самойленко. Результат может быть применен для построения условно-периодического решения конкретных дифференциальных систем.

Ключевые слова: условно-периодическое, ускоренная сходимость, частота, малые знаменатели, резонанс.

Abstract

ON THE EXISTENCE OF A CONDITIONALLY PERIODIC SOLUTION OF A QUASILINEAR SYSTEM DIFFERENTIAL EQUATION IN THE CRITICAL CASE

Suleimenov Zh.[1], Kuanysh S.K.[1]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

In the theory of nonlinear oscillations one often encounters conditionally periodic oscillations resulting from the superposition of several oscillations with frequencies incommensurable with each other. When finding a solution to a resonant quasilinear differential system in the form of a conditionally periodic function, the problem of a small denominator arises. Consequently, the proof of the existence and even more the construction of such a solution is not an easy task.

In this article, drawing on the work of V.I. Arnold, I. Moser, and other researchers proved the existence and constructed a conditionally periodic solution of a second-order quasilinear differential system in the critical case. Accelerated convergence method by N.N. Bogolyubova, Yu.A. Mitropolsky, A.M. Samoylenko. The result can be applied to construct a conditionally periodic solution of specific differential systems.

Keywords: conditionally periodic, accelerated convergence, frequency, small denominators, resonance.

Квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі берілсін

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon f(t, x) \tag{1}$$

$x = colon(x_1, x_2)$, $A = (a_{j,k})$, $j = k = 1{,}2$, $f(t,x) = colon(f_1(t, x_1, x_2), f_2(t, x_1, x_2))$ t бойынша $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ шартты-периодты функция. t , x бойынша $D = \{(t,x) \subset C^3 : \|x\| \le h, \|\mathrm{Im}\,\omega t\| \le q\}$ облысында аналитикалық функция. $\det|A - \lambda E| = 0$ анықтауышының жорамал түбірлері бар. σ_1 , σ_2 сандары $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ -сандарымен рационалдық өлшемдес емес, ε -кіші параметр. S матрицасы A матрицасын жордандық түрге $J = \begin{pmatrix} \sigma_1 i & 0 \\ 0 & \sigma_2 i \end{pmatrix}$ келтіретін матрица. Демек $x = Sy$ ауыстыруы арқылы және $J = S^{-1}AS$ екенін ескеріп, (1) жүйені келесідей жазамыз:

$$\frac{dy}{dt} = Jy + S^{-1}\varepsilon f(t, Sy) \tag{2}$$

(1) жүйені (2) түрге келтірілген деп қарастыруымызға болады. (1) жүйенің шартты-периодты шешімін іздеу үшін үдемелі жинақылық итерациялық [5] әдісін пайдаланамыз. (1) жүйенің алғашқы шешімі ретінде $x^{(0)}(t,\varepsilon) = 0 := colon(0;0)$ векторын қарастырамыз. (1) жүйенің бірінші шартты-периодты шешімі ретінде $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ функциясын аламыз. Онда $x^{(1)}(t,\varepsilon)$-ке қатысты жүйе мына түрде болады:

$$\frac{dx^{(1)}(t,\varepsilon)}{dt} = \left(J + \varepsilon P^{(0)}(t)\right)x^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon\chi^{(1)}\left(t, x^{(0)}\right), \tag{3}$$

Мұнда $P^{(0)}(t) := f_x^{'}(t,0) := \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)_{(t,0)}$, $\chi^{(1)}\left(t, x^{(0)}\right) := f(t,0)$.

$x^{(1)}(t,\varepsilon)$-ге түзетуді $y^{(1)}(t,\varepsilon) := colon(y_1^{(1)}(t,\varepsilon), y_2^{(1)}(t,\varepsilon))$ деп белгілейік. Онда $y^{(1)}(t,\varepsilon)$-ге қатысты жүйе былайша жазылады

$$\frac{dy^{(1)}(t,\varepsilon)}{dt} = \left(J + \varepsilon f_x^{'}\left(t, x^{(1)}\right)\right)y^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon Y^{(1)}\left(t, x^{(1)}\right), \tag{4}$$

Мұндағы: $Y^{(1)}\left(t, x^{(1)}\right) := f\left(t, x^{(1)}\right) - f(t,0) - f_x^{'}(t,0)x^{(1)}$

$x^{(2)}(t,\varepsilon) := x^{(1)}(t,\varepsilon) + y^{(1)}(t,\varepsilon)$ формула бойынша екінші жуықтау жүйесі мына түрде

$$\frac{dx^{(2)}(t,\varepsilon)}{dt} = \left(J + \varepsilon P^{(1)}(t)\right)x^{(2)} + \varepsilon\chi^{(2)}\left(t, x^{(1)}\right), \tag{5}$$

Мұндағы: $P^{(1)}(t) := f_x'(t, x^{(1)})$, $\chi^{(2)}\left(t, x^{(1)}\right) = f\left(t, x^{(1)}\right) - f_x^{'}\left(t, x^{(1)}\right)x^{(1)}$. $x^{(2)}(t,\varepsilon)$-ге түзетуді $y^{(2)}(t,\varepsilon)$ деп белгілейік:

$$\frac{dy^{(2)}(t,\varepsilon)}{dt} = \left(J + \varepsilon P^{(2)}(t)\right)y^{(2)} + \varepsilon Y^{(2)}\left(t, x^{(1)}, y^{(1)}\right), \tag{6}$$

$$P^{(2)}(t)=P^{(2)}\left(t,x^{(2)}\right)=f_x^{'}\left(t,x^{(2)}\right),\ Y^{(2)}(t,x^{(1)},y^{(1)}):=f(x^{(1)}+y^{(1)})-f(t,x^{(1)})-f_x'(t,x^{(1)})y^{(1)}$$

Онда $x^{(j)}(t,\varepsilon):=colon\left(x_1^{(j)}(t,\varepsilon),x_2^{(j)}(t,\varepsilon)\right)$ және $y^{(j)}(t,\varepsilon):=colon\left(y_1^{(j)}(t,\varepsilon),y_2^{(j)}(t,\varepsilon)\right),\ \ j=1,2,...,$ үшін теңдеулер жүйесі:

$$\frac{dx^{(j)}(t,\varepsilon)}{dt}=\left(J+\varepsilon P^{(j-1)}(t)\right)x^{(j)}+\varepsilon\chi^{(j)}\left(t,x^{(j-1)}\right),\tag{7}$$

$$\frac{dy^{(j)}(t,\varepsilon)}{dt}=\left(J+\varepsilon P^{(j)}(t)\right)y^{(j)}+\varepsilon Y^{(j)}\left(t,x^{(j-1)},y^{(j-1)}\right),\tag{8}$$

мұнда $P^{(j-1)},\chi^{(j)},Y^{(j)},\ j=2,3,...$ - $P^{(0)},\chi^{(1)},Y^{(1)}$ функциялары арқылы анықталады.

$$P^{(j)}(t)=P^{(j)}\left(t,x^{(j)}\right)=f_x^{'}\left(t,x^{(j)}\right),\ \chi^{(j)}\left(t,x^{(j-1)}\right)=f\left(t,x^{(j-1)}\right)-f_x^{'}\left(t,x^{(j-1)}\right)x^{(j-1)},$$

$$Y^{(j)}\left(t,x^{(j-1)},y^{(j-1)}\right)=f\left(t,x^{(j-1)}+y^{(j-1)}\right)-f\left(t,x^{(j-1)}\right)-f_x^{'}\left(t,x^{(j-1)}\right)y^{(j-1)},\ \ j\geq 1.$$

(7) және (8) жүйелерінің құрылымы бір болғандықтан , осы жүйелерге ортақ бір модельдік теңдеу қарастырамыз. Біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dz}{dt}=(J+\varepsilon P(t))z+\varepsilon q(t)\tag{9}$$

мұнда, $J=diag(\sigma_1,\sigma_2)$, $P(t)=\left(p_{jk}(t)\right),\ \ j,k=1,2;\ \ q(t):=colon(q_1(t),q_2(t))$. $P(t)$ матрицалары және $q(t)$ вектор-функциясы аналитикалық, жиілік базис t бойынша $\omega_1,\omega_2,...,\omega_n$ шартты-периодты. $B=(b^1,b^2)$ -тұрақты, ал $R(t)=\begin{pmatrix} r^1(t) & r^2(t)\end{pmatrix}$ - $P(t)$ матрицасының шартты-периодты бөлігі болсын. $P(t)$ матрицасы келесі түрде болады: $P(t)=B+R(t)$.Енді $T(t):=\int R(t)dt$ белгілейік және $TR=RT$, $BT=TB$ шарттар орындалсын. $z=e^{\varepsilon T(t)}\upsilon$ алмастыруын енгізейік. Онда келесідей теңдеулер жүйесін алынады: $\frac{d\upsilon}{dt}=(J+\varepsilon B)\upsilon+\varepsilon q(t)e^{-\varepsilon\int R(t)dt}$

Белгілеулер енгізелік: $g(t):=q(t)e^{-\varepsilon\int R(t)dt}$, $g(t):=colon(g_1(t),g_2(t))$.

Онда (9) бойынша :

$$\frac{d\upsilon}{dt}=(J+\varepsilon B)\upsilon+\varepsilon g(t)\tag{10}$$

$$g(t)=\sum_{\|k\|\geq 0}C^k\exp(i(k,\omega)t),\tag{11}$$

$$k:=(k_1,...,k_n),\ \omega=(\omega_1,...,\omega_n),\ \|k\|:=|k_1|+...+|k_n|,$$

$$C^k:=colon\left(C_1^k,C_2^k\right),\ k\omega:=k_1\omega_1+...+k_n\omega_n.$$

(10) жүйенің шартты-периодты шешімін мына түрде ізделік:

$$\upsilon(t,\varepsilon)=\sum_{\|k\|\geq 0}d^k\exp(i(k,\omega)t),\tag{12}$$

мұндағы $d^k=colon\left(d_1^k,d_2^k\right)$ -анықталмаған коэффициенттер.

(12)-ні алып (10)-ға қойсақ

$$\sum_{\|k\|\ge 0} d^k \frac{e^{i(k,\omega)t}}{i(k,\omega)} = (J+\varepsilon B)\sum_{\|k\|\ge 0} d^k e^{i(k,\omega)t} + \varepsilon \sum_{\|k\|\ge 0} C^k e^{i(k,\omega)t}$$

теңдеуі алынады. Мұндағы кері матрица

$$d^k = \varepsilon C^k \begin{bmatrix} i((k,\omega)-\sigma_1)-\varepsilon b_{11}; & -\varepsilon b_{12} \\ -\varepsilon b_{21}; & i((k,\omega)-\sigma_2)-\varepsilon b_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Бұл d^k коэффициенттерді (12)-ке апарып орнына қоямыз. Онда $\upsilon(t,\varepsilon)$ мына түрде болады

$$\upsilon(t,\varepsilon) = \sum_{\|k\|\ge 0} \varepsilon \begin{bmatrix} i((k,\omega)-\sigma_1)-\varepsilon b_{11}; & -\varepsilon b_{12} \\ -\varepsilon b_{21}; & i((k,\omega)-\sigma_2)-\varepsilon b_{22} \end{bmatrix}^{-1} C^k e^{i(k,\omega)t} \tag{13}$$

Егер қатар бірқалыпты жинақты болса, онда (1) жүйенің шартты-периодты шешім болады.
Белгілеулер енгізелік:

$$k_{n+1} := -1,\ \omega_{n+1} := \sigma_1,\ k_{n+2} := -1,\ \omega_{n+2} := \sigma_2,\ k^* := (k_1,...,k_{n+2}),\ \omega^* := (\omega_1,...,\omega_{n+2}),$$
$$(k^*,\omega^*) := k_1\omega_1 + ... + k_{n+2}\omega_{n+2},\ (k_*,\omega_*) := k_1\omega_1 + ... + k_{n+1}\omega_{n+1}.$$

Сонда $\{\omega_1,...,\omega_{n+2}\} \subset Q^*$ жиіліктері үшін және $k_1,...,k_{n+2}$ бүтін сандары үшін келесі теңсіздік орындалады: $|(k^*,\omega^*)| \ge K(\|k\|+2)^{-(n+2)}$.

Мұндағы $K>0$-бекітілген тұрақты [1].

$\|\operatorname{Im}\omega t\| \le q$ жолақта белгілеулер енгізелік:

$$M_0 := \|q(t)\|_0 = \sup_t \|q(t)\|,\ N_0 := \|R(t)\|_0 = \sup_t \|R(t)\|.$$

Мұндағы $\|\cdot\|_0$ арқылы $\|\operatorname{Im}\omega t\| \le q$ жолақта анықталған норма белгіленеді.

$R(t) = (r^1(t), r^2(t)) - P(t)$ матрицасының таза шартты-периодты бөлігі.

Олай болса $R^m(t) = \sum_{\|k\|\ge 0} \rho^{mk} e^{i(k,\omega)t}$, $\rho^{mk} := colon(\rho_1^{mk}, \rho_2^{mk})$, $m=1,2;$ қатар коэффициенттері $\|\rho^{mk}\|_0 \le N_0 e^{-\|k\|q}$, $m=1,2$. $T(t)$ үшін, $\|\operatorname{Im}\omega t\| \le q-2\delta_1;$ $2\delta_1 < q$ жолағында $T(t) = \int R(t)dt$, $R^m(t) = \sum_{\|k\|\ge 0} \rho^{mk} e^{i(k,\omega)t}$ екенін ескеріп

$$T(t) = \sum_{\|k\|\ge 0} \frac{1}{i(k,\omega)} \rho^{mk} e^{i(k,\omega)t} \quad \|T(t)\|_1 \le \sum_{\|k\|\ge 0} \frac{N_0 e^{-\|k\|q} e^{\|k\|(q-2\delta_1)}}{K\|k\|^{-n}} \le \sum_{\|k\|\ge 0} \frac{N_0}{K} e^{-2\delta_1\|k\|} \|k\|^n$$

$\forall \omega \in \overline{G}$, мұнда $\overline{G}$ - жиында $|(k,\omega)| \ge K\|k\|^{-n}$ орындалады.

$\|\cdot\|_1$ арқылы $\|\operatorname{Im}\omega t\| \le q-2\delta_1$ жолағында норма белгіленілген.

Жалпы $\|\cdot\|_j$ арқылы $\|\mathrm{Im}\,\omega t\| \le q - 2(\delta_1 + ... + \delta_j)$ жолақта норма белгіленеді. $T(t)$-ны бағалау үшін алдымен $\sum\limits_{\|k\|\ge 0} \|k\|^n e^{-2\delta_1\|k\|}$, $0 < \delta < 1, n > 1$ өрнегін бағаласақ:

$$\sum_{\|k\|\ge 0} \|k\|^n e^{-2\delta_1\|k\|} = \sum_{\|k\|\ge 0} e^{\ln\|k\|^n} e^{-2\delta_1\|k\|} = \sum_{\|k\ge 0\|} e^{n\ln\|k\| - 2\delta_1\|k\|}$$

$\|k\| = z$, деп белгілейік. $\|\mathrm{Im}\,\omega t\| \le q - 2\delta_1 - 2\delta_2, 2\delta_2 < q - 2\delta_1$ жолақта (12) жүйенің шешімінің бағалауын алайық. $\upsilon(t,\varepsilon)$-ні $\|\cdot\|_2$-де бағаласақ

$$\|\upsilon(t,\varepsilon)\|_2 \le \sum_{\|k\|\ge 0} \frac{\varepsilon M_1}{K}(\|k\| + 2)^{n+2} e^{-\|k\|(q-2\delta_1)} e^{\|k\|(q-2\delta_1-2\delta_2)} \le \sum_{\|k\|\ge 0} \frac{\varepsilon M_1}{K}(\|k\| + 2)^{n+2} e^{-2\|k\|\delta_2}$$

$T(t)-$ға жасаған бағалауларымызды $\upsilon(t,\varepsilon)$ үшін де жасайық

$$\|\upsilon(t,\varepsilon)\|_2 \le \frac{\varepsilon M_1}{K}\left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+2} \frac{e^{2\delta_2}}{\delta_2^{n+2}} \frac{4^n}{\delta_2^n} \le \frac{\varepsilon M_1}{K}\left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+2} \frac{4^{n+2} e^{2\delta_2}}{16\delta_2^{2n+2}} \le \frac{\varepsilon M_1}{K}\left(\frac{4(n+2)}{e}\right)^{n+2} \frac{e^{2\delta_2}}{16\delta_2^{2n+2}}$$

Енді $0 < \delta_2 < 1$, $\delta_2 < \sqrt{2}$ үшін

$$\|\upsilon(t,\varepsilon)\|_2 \le \frac{\varepsilon M_1}{K}\left(\frac{4(n+2)}{e}\right)^{n+2} \frac{e^{2\delta_2}}{16\delta_2^{2n+1}\delta_2} \le \frac{\varepsilon M_1}{K}\left(\frac{4(n+2)}{e}\right)^{n+2} \frac{e^2}{4\sqrt{2}\delta_2^{2n+1}}$$

Енді $z(t,\varepsilon)-$ді бағалайық

$$\|z(t,\varepsilon)\|_2 \le e^{\varepsilon Q N_0 \delta_1^{-2n}} \frac{\varepsilon M_1}{K}\left(\frac{4(n+2)}{e}\right)^{n+2} \frac{e^2}{4\sqrt{2}\delta_2^{2n+1}} \le \frac{\varepsilon M_1}{\sqrt{2}\delta_2^{2n+1}}\left[1 + \frac{1}{4K}\left(\frac{4(n+2)}{e}\right)^{n+2}\right] e^{2\varepsilon Q N_0 \delta_1^{-2n}}$$

$Q_1 := \dfrac{1}{4K}\left(\dfrac{4(n+2)}{e}\right)^{n+2}$ деп белгілейік. Онда

$$\|z(t,\varepsilon)\|_2 \le \frac{\varepsilon M_1}{\sqrt{2}\delta_2^{2n+1}}(1 + Q_1)e^{2\varepsilon N_0 Q \delta_1^{-2n}} \tag{14}$$

Енді (7), (8) теңдеулер жүйесінің жинақтылығын дәлелдейік.

Бірінші жуықтау $x^{(1)}(t,\varepsilon)-$дегі $P^{(0)}(t) := f_x^{'}(t,0)$ матрицаның түрі келесідей болады: $P^{(0)}(t) = B^{(0)} + iC^{(0)} + R^{(0)}(t)$, $B^{(0)} := (b_{lm})$, $C^{(0)} := (c_{lm})$, $l, m = 1,2;$ түрде болады.

Мұндағы, $R^{(0)}(t) - P^{(0)}(t)$ матрицасының таза шартты-периодты бөлігі. $f(t,0)$ және $f_x^{'}(t,0)$ функциялары аналитикалық және $\omega_1,...,\omega_n$ жиілік базисті шартты-периодты. Онда $\|\mathrm{Im}\,\omega t\| \le q - 2\delta_1 - 2\delta_2$; $2(\delta_1 + \delta_2) < q$. Онда

$$\|x^{(1)}(t,\varepsilon)\|_2 \le \frac{\varepsilon M}{\sqrt{2}\delta_2^{2n+1}}(1 + Q_1)\exp(2\varepsilon N_0 Q \delta_1^{-2n})$$

$N_0 := \left\| R^{(0)}(t) \right\|_0$, $M := \left\| f(t,0) \right\|$. Егер $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ D облысында болса, онда $f\left(t, x^{(1)}\right)$ және $Y^{(1)}\left(t, x^{(1)}\right)$–да t және $x^{(1)}$ бойынша аналитикалық болады. Егерде $N_1 := \left\| R^{(1)}(t) \right\|$, $R^{(1)}(t) - P^{(1)}(t)$ матрицасының таза шартты-периодты бөлігі деп белгілейтін болсақ

$$\left\| y^{(1)}(t,\varepsilon) \right\| \le \frac{\varepsilon M_2}{\sqrt{2}\delta_4^{2n+1}} (1 + Q_1) \exp\left(2\varepsilon N_1 Q \delta_3^{-2n}\right)$$

$\omega = \left(\omega_1, ..., \omega_{n+1}, \omega_{n+2}\right)$, $\omega_{n+i} := \sigma_i + \varepsilon\left(c_{11}^{(i)} + c_{22}^{(i)}\right)$, $i = 1{,}2$, үшін (14) теңсіздік қанағаттандырылады. Мұндағы $c_{lm}^{(1)}$ келесі жіктеуден алынады:

$$P^{(1)}(t) = B^{(1)} + iC^{(1)} + R^{(1)}(t), B^{(1)} := \left(b_{lm}^{(1)}\right), C^{(1)} := \left(c_{lm}^{(1)}\right), R^{(1)} := \left(r_{lm}^{(1)}\right), l, m = 1{,}2.$$

Онда бұл бағалаулар $y^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j \ge 2$ үшін орындалады.

D облысында $\left\| f_x^{'}(t,x) \right\| \le \frac{1}{2} L, \left\| f_{x^2}^{''}(t,x) \right\| \le 2P,\ f_{x^2}^{''} := \left(\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_m^2} \right), m, l = 1{,}2.$

Онда барлық $x^{(j)}(t,\varepsilon)$ жуықтаулары $\|x\| \le h$ облыста қалады.

$$\left\| P^{(j)}(t) \right\| \le L, \left\| Y^{(j)}\left(t, x^{(j-1)}, y^{(j-1)}\right) \right\| \le P \left\| y^{(j-1)} \right\|^2 \text{ болсын.}$$

$$\left\| x^{(1)}(t,\varepsilon) \right\|_2 \le \frac{\varepsilon Q_0}{\sqrt{2}\delta_2^{2n+1}} (1 + Q_1) \exp\left(2\varepsilon L Q \delta_1^{-2n}\right),$$

$$\left\| y^{(j)}(t,\varepsilon) \right\|_{2j+2} \le \frac{\varepsilon P(1+Q)}{\sqrt{2}\delta_{2j+2}^{2n+1}} \exp\left(2\varepsilon L Q \delta_{2j+1}^{-2n}\right) \left\| y^{(j-1)}(t,\varepsilon) \right\|_{2j}^2, \ j \ge 1$$

мұндағы $Q_0 := \left\| f(t,0) \right\|_0$.

Соңында (1) жүйенің шешімі қатар қосындысы арқылы анықталады:

$$x(t,\varepsilon) = x^{(1)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{\infty} y^{(j)}(t,\varepsilon)$$

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 *Колмогоров А.Н. О сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, т. 98 с .572*

2 *Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН, 1963,том 18, выпуск 6(114),91-192*

3 *Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат.наук 1968. Т. 23, № 4. С. 179-228.*

4 *Mozer J., "A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations," Ann,Scuola Nozm Super,de Piza, ser111 20(2),1966:65-315*

5 *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев "Наукова думка", 1969*

6 *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. Киев: Науково думка, 1984. 213с.*

7 *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. М. Наука 1971.*

8 *Лика Д.К., Рябов Ю.А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев, 1974.*

References:

1 Kolmogorov A.N. (1954) O sohranenii uslovnoperiodicheskih dvizhenij pri malom izmenii funkcii Gamil'tona [On the conservation of conditional periodic movements with a small change in the Hamilton function]. Dokl. AN SSSR, t. 98, 572. (In Russian)

2 Arnol'd V.I. (1963) Malye znamenateli i problema ustojchivosti dvizhenija v klassicheskoj i nebesnoj mehanike [Small denominators and the problem of motion stability in classical and celestial mechanics]. UMN, tom 18, vypusk 6(114), 91-192. (In Russian)

3 Mozer Ju. (1968) Bystro shodjashhijsja metod iteracij i nelinejnye differencial'nye uravnenija [Fast convergent iteration method and nonlinear differential equations]. Uspehi mat.nauk, t. 23, № 4, 179-228. (In Russian)

4 Mozer J. (1966) A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations, Ann,Scuola Nozm Super,de Piza, ser111 20(2), 65-315. (In English)

5 Bogoljubov N.N., Mitropol'skij Ju.A., Samojlenko A.M. (1969) Metod uskorennoj shodimosti v nelinejnoj mehanike [The method of accelerated convergence in nonlinear mechanics]. Kiev,Naukova dumka. (In Russian)

6 Mitropol'skij Ju.A., Samojlenko A.M., Martynjuk D.I. (1984) Sistemy jevoljucionnyh uravnenij s periodicheskimi i uslovno-periodicheskimi kojefficientami [Systems of evolutionary equations with periodic and conditionally periodic coefficients]. Kiev, Naukovo dumka, 213. (In Russian)

7 Grebennikov E.A., Rjabov Ju.A. (1971) Novye kachestvennye metody v nebesnoj mehanike [New qualitative methods in celestial mechanics]. M. Nauka. (In Russian)

8 Lika D.K., Rjabov Ju.A. Metody iteracij i mazhorirujushhie uravnenija Ljapunova v teorii nelinejnyh kolebanij. Kishinev, 1974. (In Russian)