МРНТИ 20.20.19
УДК 004.942

https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.04

Т.Ж. Мазаков [1,2], М.Н. Калимолдаев [1,2], Ш.А. Джомартова [2], К.Б. Бегалиева [1,2], Ә.Т. Мазақова [1,2]*

[1]Ақпараттық және есептеу технологиялар институты ҚР ҒжБМ ҒК, Алматы қ., Қазақстан
[2]әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан
**e-mail: kalamkas_b@mail.ru*

АЙЫРМАШЫЛЫҚ ӘДІСІМЕН ШАРШЫ ҚИМАСЫ БАР ӨЗЕКТІҢ ЖЫЛУ ӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІН ШЕШУ

Аңдатпа

Бұл жұмыстың мақсаты – ұзындығы шектеулі тұрақты қималы сырықтың жылуфизикалық күйін зерттеу болып. Бұл жұмыс тұрақты көлденең қиманың және ұзындығы шектеулі сырықтың жылуфизикалық күйін зерттеуді автоматтандыруға арналған. Зерттеуді автоматтандыру процесі энергияның сақталу заңдарына негізделген. Тұрақты көлденең қимасы квадрат түрінде болатын үш өлшемді дене қарастырылады. Қиманың сол жақ шеті координатаның басталуымен сәйкес келеді және жылу беру коэффициенті сырықтың бүкіл бетінде тұрақты болып саналады. Сондай-ақ, сырық нүктелік температура мен беттік жылу алмасудың әсерінен болады деп болжанады. Қойылған есеп айырмашылық әдісімен шешіледі, яғни жылу өткізгіштік теңдеуі айырмашылық схемасымен жуықталады. Сандық есептеулердің нәтижелерін бірнеше файлдарға орналастыратын, сырықтағы температураның таралуын табу бағдарламасы жасалды. Динамикадағы сандық есептеулердің нәтижелері (уақыт бойынша) бір өлшемді және екі өлшемді графиктер түрінде көрсетіледі.

Түйін сөздер: жылу өткізгіштік, жылу оқшаулау, температура, стационарлық емес жылуфизикалық процесс, энергия.

Аннотация

Т.Ж. Мазаков [1,2], М.Н. Калимолдаев [1,2], Ш.А. Джомартова [2], К.Б. Бегалиева [1,2], А.Т. Мазакова [1,2]
[1]Институт Информационных и Вычислительных Технолгий КН МОН РК, г.Алматы, Казахстан
[2]Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТЕРЖНЯ С КВАДРАТНЫМ СЕЧЕНИЕМ РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Целью данной работы является исследование теплофизического состояния стержня постоянного сечения и ограниченной длины. Данная работа посвящена к автоматизации исследования теплофизического состояния стержня постоянного сечения и ограниченной длины. Процесс автоматизации исследования опирается на законы сохранения энергии. Рассматривается трехмерное тело, постоянное поперечное сечение которого имеет форму квадрата. Предполагается, что левый конец стержня совпадает с началом координат и коэффициент теплообмена считается постоянным по всей поверхности стержня. Также предполагается, что стержень находится под воздействием точечной температуры и поверхностного теплообмена. Поставленная задача решается разностным методом, т.е. уравнение теплопроводности аппроксимируется разностной схемой. Разработана программа нахождения распространения температуры по стрежню, которая помещает результаты численных расчетов в несколько файлов. Результаты численных расчетов в динамике (по времени) отображаются в виде одномерных и двумерных графиков.

Ключевые слова: теплопроводность, теплоизоляция, температура, нестационарный теплофизический процесс, энергия.

Abstract

SOLUTION OF THE THERMAL CONDUCTIVITY EQUATION OF A RODS WITH A SQUARE SECTION BY THE DIFFERENCE METHOD

Mazakov T.Zh.[1,2], Kalimoldayev M.N.[1,2], Dzhomartova Sh.A.[2], Begaliyeva K.B.[1,2], Mazakova A. T.[2]
[1] Institute of Information and Computational Technologies CS MES RK, Almaty, Kazakhstan
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

The purpose of this work is to study the thermophysical state of a rod of constant cross section and limited length. This work is devoted to the automation of the study of the thermophysical state of a rod of constant cross-section and limited length. The process of automating research is based on the laws of conservation of energy. A three-dimensional body is considered, the constant cross section of which has the shape of a square. It is assumed that the left end of the rod coincides with the origin of coordinates and the heat transfer coefficient is assumed to be constant over the entire surface of the rod. It is also assumed that the rod is subject to point temperature and surface heat transfer. The stated problem is solved by the difference method, i.e. the heat equation is approximated by a difference scheme. A program has been developed for finding the temperature distribution along the rod, which places the results of numerical calculations in several files. The results of numerical calculations in dynamics (over time) are displayed in the form of one-dimensional and two-dimensional graphs.

Keywords: thermal conductivity, thermal insulation, temperature, non-stationary thermophysical process, energy.

Кіріспе

Ұзындығы шектеулі сырықтар қазіргі заманғы реактивті және сутегі қозғалтқыштарының, газ генераторларының, атом және жылу электр станцияларының, өңдеу өнеркәсібінің технологиялық желілерінің, ғарыш кемелерінің энергетикалық қондырғыларының тірек элементтері ретінде қолданылады. Бұл қондырғылардың тірек элементтері жылу көздерінің әртекті түрлеріне бір уақытта әсер етеді. Сондықтан жылу көздерінің әртекті түрлерінің бір мезгілде әсерінен болатын ұзындығы шектеулі сырықтардың тұрақты жылуфизикалық күйін зерттеуге мүмкіндік беретін арнайы әдістер мен есептеу алгоритмдерін және қолданбалы бағдарламалар кешенін жасау өзекті мәселе болып табылады.

Жылу өткізгіштік есептерін шешудің бірнеше әдістері бар, олар: аналитикалық, аналогтық, сандық, графикалық және эксперименттік. Олардың төртеуі тікелей теңдеулердің әртүрлі формаларынан шығады. Эксперименттік әдіс басқа әдістер нәтиже бермеген кезде қолданылады. Ол жылу өткізгіштік және нақты жылу сыйымдылығы секілді жылу физикалық қасиеттерін анықтау үшін қолданылады [1].

Күрделі формадағы қатты денелердегі жылу өткізгіштік мәселелерін шешу үшін аналитикалық және сандық әдістер қолданылады. Ішінде ағзадағы температураның бастапқы таралуы және дененің бетіндегі шекаралық жағдайлар кіретін шешімдер белгілі шекті жағдайларда шешілуі ммүкін, оларды үш жолдың бірімен анықтауға болады: беткі температура, жылу ағыны және жылу беру коэффициенті [2].

Техникадағы стационарлық емес жылу режимі өте жиі кездеседі, бірақ ол әрдайым есептелмейді. Көптеген жылу алмастырғыштарда (мысалы, рекуперативті) стационарлық емес процестер уақытша болып табылады, бірақ негізінен бұл құрылғылар стационарлық режимде жұмыс істейді. Қоғамдық тамақтандыру машиналары мен аппараттарында, регенеративті жылу алмастырғыштарда жұмыс процесі стационарлық емес режимде жүреді. Осы және ұқсас жағдайларда стационарлық емес жылу өткізгіштігін есептеу қажет, өйткені ол процестің ұзақтығын, өнімнің сапасын және қондырғының өнімділігін анықтайды.

Жылу өткізгіштік дегеніміз - температура градиенті болған кезде микробөлшектердің (молекулалар, атомдар, электрондар) жылу қозғалысына байланысты және заттың макроскопиялық қозғалысынсыз жүретін дененің ішіндегі жылудың молекулалық ауысуы. Бұл жағдайда дененің көп қыздырылған аймақтарынан көп энергияға ие бөлшектер аз қыздырылған аймақтардың бөлшектерімен соқтығысып, оларға энергияның бір бөлігін береді.

Температура – бұл зат бөлшектерінің жылу қозғалысының энергиясын сипаттайтын параметр. Демек, жылудың таралу процесі және оның бағыты дене ішіндегі температураның таралуымен тығыз байланысты. Жалпы жағдайда температура дененің әртүрлі нүктелерінде бірдей емес және келесі уақытқа байланысты: $T = T(x, y, z, t)$.

Қарастырылатын кеңістіктегі (денеде) температуралық өріс – процесс өтетін кеңістіктің (дененің) барлық нүктелері үшін белгілі бір уақытта температура мәндерінің жиынтығы [2].

Егер дене температурасы координаттарға байланысты болса және уақыт өте келе өзгермесе, онда өріс тұрақты деп аталады. Уақытқа байланысты температурада өріс тұрақсыз деп аталады.

Біршама уақыт өткеннен кейін дененің барлық бөліктерінің температурасы түзіліп, қоршаған орта температурасына тең болады (бұл қоршаған орта көлемі дененің көлемінен едәуір үлкен болған жағдайда және уақыт өте келе оның температурасы өзгермейтін жағдайда болады).

Стационарлық емес режимде жылуды қайта бөлу дененің жеке элементтерінің температурасының өзгеруімен бірге жүреді.

Тұрақты емес жылу өткізгіштік кезіндегі қатты дененің температуралық өрісінің өзгеруі жылу өткізгіштіктің дифференциалдық теңдеуімен сипатталады [3].

[4] жұмыста параболалық теңдеуге арналған Коши есебінің мысалында қисынсыз есептерді шешудің спектрлік әдістері бойынша жаңа нәтижелер бар: кері есепті шешуді реттеу әдісі

ұсынылған. Жылуөткізгіштіктің теңдеуінің биквадраттық лапласианы регуляризацияның параметріне тең коэффициентін енгізу негізінде регуляризацияланған теңдеу шығады.

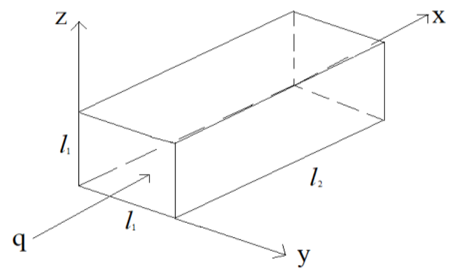
Квази – айналу әдісімен жылу алмасудың кері шекаралық есебі үшін шамамен алынған шешім жасалды және кері шекаралық есептің дұрыстылық класстарының бірінде салынған жуық шешімнің қателігін дәл рет-ретімен бағалау алынды [5].

Жартылай сызықты дифференциалдық – операторлық теңдеудің кері уақыт бойынша қисынсыз есебі үшін тұрақты жуықтау шешімі құрылды және оның қателігіне баға берілді [6].

Бастапқы шартты табу үшін кері есептің жалғыз шешімділік критериі спектрлік талдау әдісі арқылы белгіленді. Осы міндеттер үшін шешімнің бірегейлігі, бар болуы және тұрақтылығы теоремалары дәлелденді [7].

1.Есептің қойылымы

Сырықтың шектелген l_2 көлденең ұзындық жолағын және $S_{пс} = l_1 * l_1$ тұрақты көлденең қимасын қарастырайық. *Oxyz* глобалды декарттық координаттар жүйесін саламыз (1-сурет).



Сурет 1. Шаршы қимасы бар металл өзектің жалпы көрінісі

Сырықтағы жылудың таралуы келесі үш өлшемді жылу өткізгіштік теңдеуімен сипатталады

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + F \quad , \tag{1}$$

мұндағы,

k – жылу өткізгіштік коэффициенті;

ρ – тығыздығы;

с – меншікті жылу сыйымдылық;

h – жылу алмасу коэффициенті;

$F(x, y, z, t)$ – t уақыты моменті (x, y, z) жылу көздерінің қарқындылығы

$T_{ос}$– қоршаған орта температурасы;

$S_{пс}$ – сырықтың көлденең қимасының ауданы;

x, y, z – $0 \le y, z \le l_1$, $0 \le x \le l_2$ кеңістіктік айналымалылары,

$x_ц, y_ц, z_ц$ - сырық центрі: $x_ц = l_2/2, y_ц = l_1/2, z_ц = l_1/2;$

l_1– сырықтың ені мен биіктігі,

l_2– сырықтың ұзындығы.

Жартылай туындылардағы дифференциалдық теңдеу (1) - бұл изохоралы жылу беру процесі үшін энергияның сақталу дифференциалдық теңдеуі немесе тұрақты емес жылу өткізгіштік теңдеуі. Ол жылу өткізгіштік процесі жүретін қатты дененің кез-келген нүктесінде температураның уақытша және кеңістіктік өзгеруі арасындағы байланысты орнатады.

Сырықтың сол жақ ұшы координатаның басталуымен сәйкес келеді және жылу беру коэффициенті сырықтың бүкіл бетінде тұрақты болып саналады. Сондай-ақ, сырық нүктелік температура мен беттік жылу алмасудың әсерінен болады деп болжанады. Әрі қарай,біз біртекті сырықты (k, c, ρ - тұрақты) және жылу көздері жоқ екендігін ($F(x, y, z, t) = 0$) қарастырамыз.

Содан кейін (1) теңдеу келесідей болады

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

мұндағы, $a^2 = k/(c\rho)$ – жылу өткізгіштік коэффициенті.

Жылу теңдеуінің жалғыз шешімін бөлу үшін (1) теңдеуге бастапқы және шекаралық шарттарды қосу керек.

Бастапқы шарттар стационарлық емес процестерді қарастыру кезінде қажет және бастапқы уақыттағы дене ішіндегі температураның таралу заңын белгілеуден тұрады. Жалпы жағдайда бастапқы шарт аналитикалық түрде келесідей жазылуы мүмкін:

$$T|_{t=0} = q(M), \tag{3}$$

мұндағы, $M = (x, y, z) \in D$, t – $(t_0 \leq t \leq t_1)$ уақыты, $t_1 - t_0$ – сырықтың жылу өткізгіштік процесі зерттелетін уақыт аралығы.

D арқылы параллелепипеді $(0 \leq y, z \leq l_1, 0 \leq x \leq l_2\}$, ал Г арқылы D, $Q = \{x, y, z, t | (x, y, z) \in D,\ \ t \in [t_0, t_1]\}$ шекараларын белгілейміз.

Шекаралық шарттарды келесі түрде белгіленеді

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma} = 0\ . \tag{4}$$

$$T(0, y_{ц}, z_{ц}, t) = q.$$

Жылу өткізгіштіктің дифференциалдық теңдеуі бастапқы және шекаралық шарттармен бірге есепті толығымен анықтайды, яғни дененің геометриялық пішінін, бастапқы және шекаралық жағдайларды біле отырып, дифференциалдық теңдеуді соңына дейін шешуге болады, сондықтан денеде температура өрісін табуға болады, $T(x, y, z, t)$ – t уақытындағы кез келген уақытта температураны бөлу функциясы.

$T(x, y, z, t)$ функциясы дифференциалдық теңдеуді (2), сондай-ақ бастапқы және шекаралық шарттарды қанағаттандыруы керек.

Математикалық физика курсында максимум принципі және шешімнің сингулярлық теоремасы дәлелденеді, егер кейбір $T(x, y, z, t)$ функциясы жылу өткізгіштіктің дифференциалдық теңдеуін, бастапқы және шекаралық жағдайларды қанағаттандырса, онда бұл мәселенің жалғыз шешімі болады.

1-теорема (максимум принципі). Егер $T(x, y, z, t)$ функциясы Q жабық аймағында анықталған және үздіксіз теңдеуді қанағаттандырса (2), онда ол уақыттың бастапқы кезінде немесе Г шекарасында максималды және минималды мәнге жетеді.

2-теорема (бірегейлік). Егер Q аймағында анықталған және үздіксіз екі T_1 және T_2 функциялары (2) теңдеуді және бірдей бастапқы және шекаралық шарттарды (3)-(4) қанағаттандырса, онда $T_1(x, y, z, t) \equiv T_2(x, y, z, t)$ болады.

Зерттелетін мәселенің дұрыстығы осыдан туындайды, алайда зерттелген құбылыстардың күрделілігіне байланысты қазіргі математикалық әдістермен жартылай туындылардағы аналитикалық дифференциалдық теңдеулерді шешу көбінесе өте қиын, кейде мүмкін емес. Дегенмен, практикалық қолдануға болатын көптеген шешімдер бар. Осыған байланысты айырмашылық әдісімен есептелетін сандық шешім ұсынылады, яғни жылу өткізгіштік теңдеуі айырмашылық схемасымен жуықталады.

2.Есептеу алгоритмінің құрылуы

D аймағын x, y және z осьтері бойынша Δx, Δy және Δz қадамдарымен біркелкі тормен жабамыз. Теңдеудің келесі айырмашылығы былай жазылады (2)

$$\frac{T_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} = a^2\left(\frac{T_{i+1,j,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i-1,j,k}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j,k-1}^{n}}{\Delta z^2}\right), \tag{5}$$

мұндағы, Δt – уақыт қадамы , n – уақыт бойынша индекс, Δx– Ox осі бойынша қадам.

Δy–Oy осі бойынша қадам, Δz–Oz осі бойынша қадам, i, j, k – x, y және z координатталарына тиісті индекстер. (5) өрнектегі барлық қосылғыштар для n уақыт қадамы үшін жәзылады және (n+1)-ші үшін жалғыз [8].

Сондықтан тордың ішкі нүктелері үшін келесі уақыт қадамындағы температура мәнін алдыңғы мәндер арқылы білдіреміз

$$T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^{n} + \Delta t a^2 \left(\frac{T_{i+1,j,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i-1,j,k}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{n} - 2T_{i,j,k}^{n} + T_{i,j,k-1}^{n}}{\Delta z^2} \right), \quad (6)$$

Келесі итерациялық шешім алгоритмі ұсынылады:

1. D облысындағы барлық ішкі нүктелерге $t = t_0$, n = 0. $T_{i,j,k}^{0}$ = 0 ,

$$T^0|_{\Gamma} = q(M), \quad (7)$$

мұнда, $M = (x, y, z) \in \Gamma$, Г шекарасындағы барлық нүктелерге ортақ.

2. (6) формуласы бойынша D облысының ішкі нүктелерінің $T_{i,j,k}^{n+1}$ мәнін есептейміз.

3. Егер $t < t_1$ критериі орындалса, онда t = t + Δt, n= n + 1 болады да , 2 қадамға ауысу жүргізіліде, әйтпесе итерациялық процесс аяқталады [9-10]

Есептеулерді орындау кезінде айырмашылық схемасының (3) тұрақтылығын зерттеу керек, атап айтқанда келесі шартты тексеру керек [11].

$$\Delta t \le \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) . \quad (8)$$

3.Нақты бастапқы мәндермен есептердің сандық шешімі

Сандық есептеулердің нәтижелерін бірнеше файлдарға орналастыратын температураның таралуын табу бағдарламасы жасалды. Динамикадағы сандық есептеулердің нәтижелері (уақыт бойынша) бір өлшемді және екі өлшемді графиктер түрінде көрсетіледі. Есептеулер келесі бастапқы мәндермен жүргізілді:

$l_1 = 1.0; l_2 = 10.0; \Delta t = 0.01;$
nx =10; ny= 6; nz= 6;
$\Delta x = {l_2}/{nx}\ , \Delta y = {l_1}/{ny}\ , \Delta z = {l_1}/{nz};$

$q = 200; \rho = 7.870; c = 0.13;\ k = 0.177;$

2-7 суреттерде эксперименттік есептеулердің нәтижелері графикалық түрде ұсынылған. 2-суретте динамикадағы шығу тегінен бастап X бағытында өзектің ортасында температураның таралу графигі көрсетілген. 0-ден 200 градусқа дейінгі температураның үлкен айырмашылығына байланысты 3-суретте динамикадағы шығу тегінен бір қадам шегініспен өзектің ортасында X бағытында температураның таралу графигі көрсетілген.

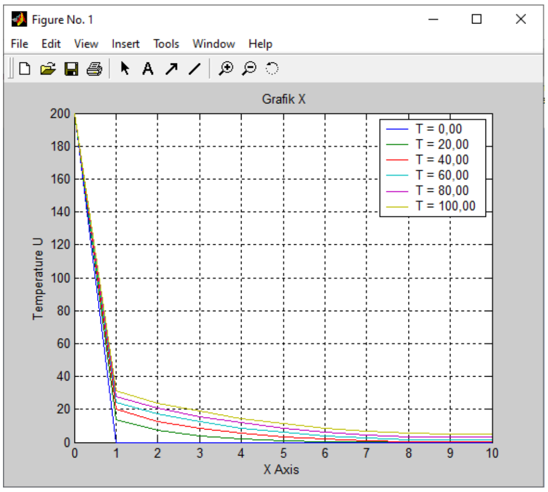
3-суреттен көрініп тұрғандай, өзектің ортасындағы температура 100 секундта 0-ден 5 градусқа дейін көтеріледі.

4-суретте Y осінің сол жақ ұшындағы (шығу тегі) өзектің ортасында температураның таралу графигі көрсетілген, өзектің шеттерінде температура 100 секундта 0-ден 29.65 градусқа дейін көтеріледі.

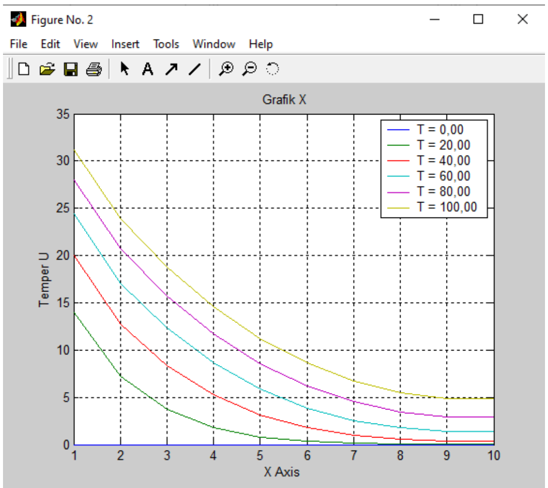
5-суретте T = 40 секунд уақытындағы X және Y осьтері бағытында өзектің ортасында температураның таралу графигі көрсетілген.

6-суретте T = 40 секунд уақыт ішінде шығу тегінен бір қадам шегінісі бар X және Y осьтері бағытында өзектің ортасында температураның таралу графигі көрсетілген. Суреттен көрініп тұрғандай, оң жақтың температурасы іс жүзінде өскен жоқ.

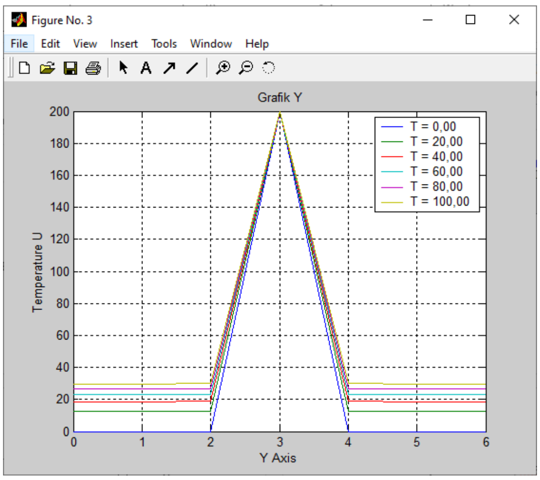
7-суретте T = 100 секунд уақыт ішінде шығу тегінен бір қадам шегінісі бар X және Y осьтері бағытында өзектің ортасында температураның таралу графигі көрсетілген. Суреттен көрініп тұрғандай, оң жақтағы температура 5 градусқа жетті.



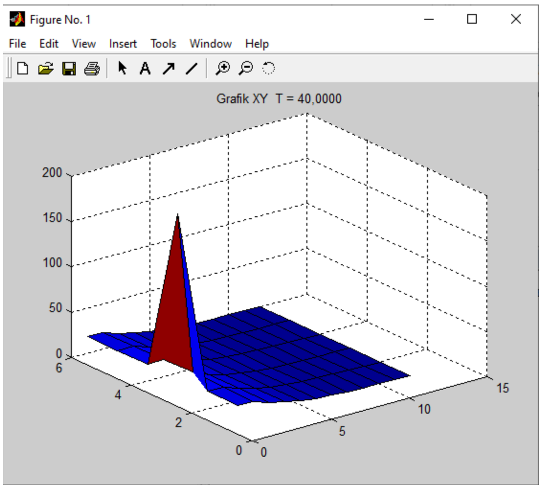
Сурет 2. Координатаның басынан бастап x бағытында сырықтың ортасы бойынша температураның таралу графигі



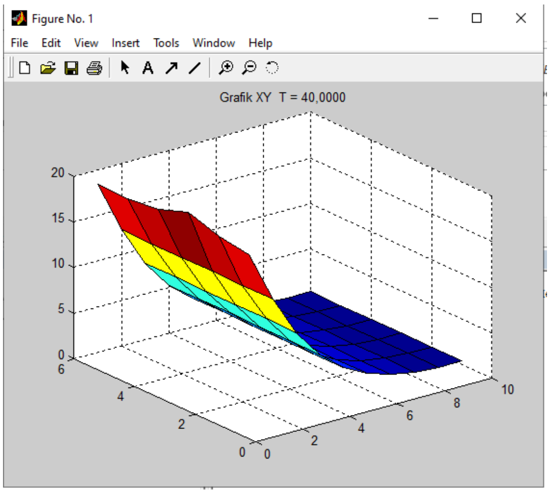
Сурет 3. Координатаның басынан бір қадам шегініспен x бағытында сырықтың ортасы бойынша температураның таралу графигі



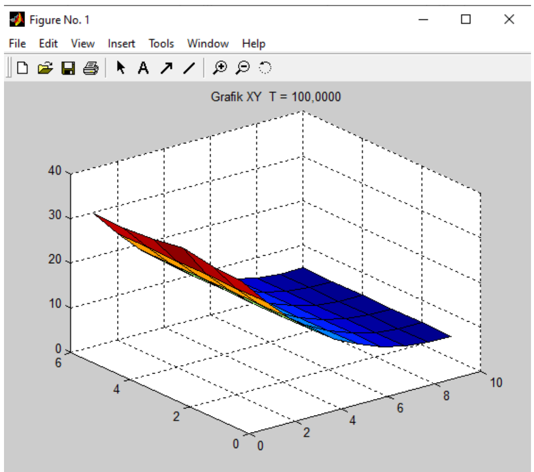
Сурет 4. Сырықтың ортасында температураның Y бағытында таралу графигі



Сурет 5. Шығу нүктесінен X және Y осьтері бағытында сырықтың ортасында температураның таралу графигі



Сурет 6. T=40 секунд уақыт ішінде шығу тегінен бір қадам шегініспен X және Y осьтері бағытында сырықтың ортасы бойынша температураның таралу графигі



Сурет 7. T=100 секунд уақыт ішінде шығу тегінен бір қадам шегініспен X және Y осьтері бағытында сырықтың ортасы бойынша температураның таралу графигі

Қорытынды

Квадрат қималы сырықтың жылу өткізгіштік теңдеуін зерттеу үшін айырмашылық схемасы жасалды және мәселені шешудің алгоритмдері ұсынылды. Айырмашылық схемасы үшін оның тұрақтылығын қамтамасыз ететін параметрлер таңдалды.

Сандық есептеулердің нәтижелері максимум принципіне сәйкес келеді (Теорема 1) және эксперименттік мәліметтерге қайшы келмейді [12]. Сонымен қатар, нәтижелер мәтіндік файлдарға шығарылады және сәйкес бағдарлама жазылған MATLAB жүйесін қолдана отырып, температура динамикасының бір өлшемді және екі өлшемді кескіндерінің құрылысын қамтамасыз етеді [13].

Жылу өткізгіштік теңдеуін зерттеу үшін аралық математиканы қолдану перспективалы бағыт болып табылады [14-15].

Жұмыс 2021-2022 жылдарға арналған "Ғылым мен білім беруде тиімді пайдалануды қамтамасыз ететін Қазақстан Республикасының ғылыми зоологиялық коллекциясы бойынша ұлттық электрондық деректер банкін әзірлеу" ИРН OR11465437 жобасы бойынша ғылыми зерттеулерді бағдарламалық-нысаналы қаржыландыру қаражаты есебінен орындалды.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Карпович Д.С., Суша О.Н., Коровкина Н.П., Кобринец В.П. Аналитический и численный методы решения уравнения теплопроводности // Труды БГТУ. Физико-математические науки и информатика, 2015, № 6. с.122-127

2 Байков В.А. Уравнения математической физики. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 252с.

3 Вороненко Б.А., Крысин А.Г., Пеленко В.В., Цуранов О.А. Аналитическое описание процесса нестационарной теплопроводности. СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. 48 с

4 Тихомиров В.В., Бобылева О.Н. О регуляризации обратной задачи для уравнения теплопроводности // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2017, Том 13, № 1, с.25-29

5 Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения //Вестник ЮрГУ, Серия «Математика. Механика. Физика», выпуск 6, 2012, № 11, с. 8-13

6 Табаринцева Е.В. О решении некорректно поставленной задачи для нелинейного дифференциального уравнения методом проекционной регуляризации // Вестник ЮрГУ, Серия «Математика. Механика. Физика», 2013, том 5, № 2, с. 65-71

7 Зайнулов А.Р. Обратные задачи для уравнения теплопроводности // Вестник СамГУ, 2015, № 6, с. 62-75

8 Марданов Р.Ф. Численные методы решения плоской задачи теплопроводности. - Казань: Казанский гос. университет, 2007. – 23с

9 Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС, 2003. -784 с.

10 Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. - 480 с

11 Фаязов К.С., Хажиев И.З. Оценка устойчивости и приближенное решение краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка //Математические заметки СВФУ, 2015. Том 22, № 1. с.78-88

12 Сиковский Д. Ф. Методы вычислительной теплофизики. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013.- 98 с.

13 Дьяконов В.П. MATLAB 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1+Simulink 5/5. Обработка сигналов и изображений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 592 с.

14 Mazakov T., Wójcik W., Jomartova Sh., Karymsakova N., Ziyatbekova G., Tursynbai A. The Stability Interval of the Set of Linear System // INTL Journal of Electronics and Telecommunications. – 2021. – Vol. 67, N. 2. – P.155-161. DOI: 10.24425/ijet.2021.135958

15 Nurdaulet, I., Talgat, M., Orken, M., Ziyatbekova, G. Application of fuzzy and interval analysis to the study of the prediction and control model of the epidemiologic situation // Journal of Theoretical and Applied Information Technology, Pakistan, 2018. – Vol. 96, - Issue 14, – pp. 4358-4368.

Reference:

1 Karpovich D.S., Susha O.N., Korovkina N.P., Kobrinets V.P. (2015) Analiticheskij i chislennyj metody reshenija uravnenija teploprovodnosti [Analytical and numerical methods for solving the heat equation]. Trudy BGTU. Fiziko-matematicheskie nauki i informatika, № 6. 122-127. (In Russian)

2 Bajkov V.A. (2003) Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. Moskva-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 252. (In Russian)

3 Voronenko B.A., Krysin A.G., Pelenko V.V., Curanov O.A. (2014) analiticheskoe opisanie processa nestacionarnoj teploprovodnosti [Analytical description of the process of non-stationary heat conduction]. SPb.: NIU ITMOZ; IHiBT, 48. (In Russian)

4 Tihomirov V.V., Bobyleva O.N. (2017) O regulizacii obratnoj zadachi dlja uravnenija teploprovodnosti [On the regularization of the inverse problem for the heat equation]. Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie, Тот 13 №1,.25-29. (In Russian)

5 Tabarinceva E.V., Menihes L.D., Drozin A.D. (2012) O reshenii granichnoj obratnoj zadachi dlja parabolicheskogo uravnenija metodom kvaziobrashhenija [On the solution of a boundary inverse problem for a parabolic equation by the quasi-inversion method]. Vestnik JurGU, Serija "Metmatika. Mehanika. Fizika", vypusk 6, №11, 8-13. (In Russian)

6 Tabarinceva E.V. (2013) O reshenii nekorrektno postavlennoj zadachi dlja nelinejnogo differencial'nogo uravnenija metodom proekcionnoj reguljarizacii [On the solution of an ill-posed problem for a nonlinear differential equation by the projection regularization method]. Vestnik JurGU, Serija "Metmatika. Mehanika. Fizika", vypusk 6, , tom 5, №2, 65-71. (In Russian)

7 Zajnulov A.R. (2015) Obratnye zadachi dlja uravnenija teploprovodnosti [Обратные задачи для уравнения теплопроводности]. Vestnik SamGU, № 6, 62-75. (In Russian)

8 Mardanov R.F. (2007) Chislennye metody reshenija ploskoj zadachi teploprovodnosti [Numerical methods for solving the plane problem of heat conduction]. Kazanj': Kazanskij gos. universitet, 23. (In Russian)

9 Samarskij A.A., Vabisshhevich P.N. (2003) Vychislitel'naja teploperedacha [Computational heat transfer]. M.:Editorial URSS,. 784. (In Russian)

10 Samarskij A.A., Vabisshhevich P.N. (2009) Chislennye metody reshenija obratnyh zadach matematicheskoj fiziki [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. M.:Izd-vo LKI, 480. (In Russian)

11 Fajazov K.S., Hazhiev I.Z. (2015) Ocenka ustojchivosti i priblizhennoe reshenie kraevoj zadachi dlja uravnenija v chastnyh proizvodnyz chetvertogo porjadka [Stability estimation and approximate solution of a boundary value problem for a fourth-order partial differential equation]. Matematicheskie zametki SVFU, Тот 22, №1. 78-88. (In Russian)

12 Sikovskij D.F. Metody vychislitel'noj teplofiziki [Methods of computational thermal physics]. Novosibirsk: Novosib.gos.un-t, 98. (In Russian)

13 D'jakonov V.P. (2005) MATLAB 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1+Simulink 5/5. Obrabotka signalov i izobrazhenij [Signal and Image Processing]. M.: SOLON-Press, 592. (In Russian)

14 Mazakov T., Wójcik W., Jomartova Sh., Karymsakova N., Ziyatbekova G., Tursynbai A. (2021) The Stability Interval of the Set of Linear System // INTL Journal of Electronics and Telecommunications. Vol. 67, N. 2. P.155-161. DOI: 10.24425/ijet.2021.135958. (In Russian)

15 Nurdaulet, I., Talgat, M., Orken, M., Ziyatbekova, G. (2018) Application of fuzzy and interval analysis to the study of the prediction and control model of the epidemiologic situation. Journal of Theoretical and Applied Information Technology, Pakistan, Vol. 96, Issue 14, pp. 4358-4368. (In Russian)