ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕР МЕН МЕХАНИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ МОДЕЛЬДЕУ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

MODELING OF PHYSICAL PROCESSES AND MECHANICAL SYSTEMS

МРНТИ 27.41.23; 27.01.45
УДК 519.688; 372.851

10.51889/2959-5894.2023.82.2.009

Ж.О. Ахатаева[1], Г.Р. Кощанова[2], Л.Д. Диярова[2], Б.Т. Кулжагарова[2], Б.А.Мукушев[3]

[1]Қазақ гуманитарлық-заң инновациялық университеті, Семей қ., Қазақстан
[2]Ш.Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, Ақтау қ., Қазақстан
[3]С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Астана қ., Қазақстан
**e-mail: b.mukushev@internet.ru*

МЕХАНИКАЛЫҚ ҚҰБЫЛЫСТАРДЫ СИПАТТАЙТЫН ТРАНСЦЕНДЕНТТІК ТЕҢДЕУЛЕРЛЕР

Аңдатпа

Мақалада әртүрлі механикалық құбылыстарды математикалық әдістер көмегімен зерттеу қарастырылған. Зерттеу барысында бұл құбылыстарды сипаттайтын трансценденттік теңдеулер құрылған. Трансценденттік теңдеулерді аналитикалық жолмен шешу мүмкін емес екені белгілі. Сондықтан мұндай теңдеулердің түбірлерін табудың оңтайлы әдістері зерттеліп сараланған. Жұмыста трансценденттік теңдеулерді шешудің графикалық және компьютерлік әдістері тиімді тәсілдер ретінде қарастырылды. Теңдеулердің түбірін белгілі бір дәлдікпен табу үшін сандық әдістер қолданылған. Сандық әдістер ретінде біртіндеп жуықтау әдісі, итерациялық әдіс, жартылап бөлу және хорда тәсілдері пайдаланылған. Бірнеше теңдеу компьютерлік бағдарламалар көмегімен шешілген. Аталған бағдарламалар Python және MathCAD ортасында жасалған. Мақалада қарастырылған мысалдарды орындау барысында білім алушыларда механика, математика және компьютерлік ғылымдар арасындағы терең байланысты сипаттайтын білім жүйесі қалыптасады.

Түйін сөздер: механикалық құбылыстар, трансценденттік теңдеулер, графикалық әдіс, сандық әдіс, компьютерлік әдіс.

Аннотация

Ж.О. Ахатаева[1], Г.Р. Кощанова[2], Л.Д. Диярова[2], Б.Т. Кулжагарова[2], Б.А. Мукушев[3]
[1]Казахский гуманитарно-юридический инновационный университет, г. Семей, Казахстан
[2]Каспийский государственный университет технологии и инжиниринга имени Ш.Есенова, г. Актау, Казахстан
[3]Казахский агротехнический университет им. С.Сейфуллина, г. Астана, Казахстан

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

В статье исследованы различные механические явления посредством математических методов. В ходе исследования были созданы трансцендентные уравнения, описывающие некоторые механические явления и объекты. Известно, что трансцендентные уравнения не решаются аналитическим способом. Поэтому разработаны оптимальные методы решения этих уравнений. В работе в качестве эффективных способов решения трансцендентных уравнений выбраны графические и компьютерные методы. Для нахождения корня уравнений с определенной точностью использовались численные методы. В качестве численных методов использовались метод постепенного приближения, итерационный метод, методы половинного деления и хорды. Несколько уравнений решены с помощью компьютерных программ. Указанные программы созданы в среде Python и MathCAD. В процессе выполнения рассмотренных в статье примеров у обучающихся формируется система знаний о глубокой связи между механикой, математикой и компьютерной наукой.

Ключевые слова: механические явления, трансцендентные уравнения, графический метод, численный метод, компьютерный метод.

Abstract

TRANSCENDENTAL EQUATIONS, DESCRIBING MECHANICAL PHENOMENA

Akhatayeva Zh. O. [1], *Kochshanova G.R.* [2], *Diyarova L.D.* [2], *Kulzhagarova B.T.* [2], *Mukushev B.A.* [3]
[1]*Kazakh humanitarian and legal innovation University, Semey, Kazakhstan*
[2]*Caspian University of Technology and Engineering named after Sh. Yessenov, Aktau, Kazakhstan*
[3]*S. Seifullin Kazakh Agro Technical University, Nur-Sultan, Kazakhstan*

The article investigates various mechanical phenomena by means of mathematical methods. During the research, transcendental equations were created. These equations describe some mechanical phenomena and objects. It is known that transcendental equations are not solved analytically. Therefore, optimal methods for solving these equations have been developed. In this paper, graphic and computer methods are chosen as effective ways to solve transcendental equations. Numerical methods were used to find the root of the equations with a certain accuracy. The numerical methods used were the method of gradual approximation, iterative method, half division and chord methods. Several equations have been solved using computer programs. These programs are created in Python and MathCAD environments. In the process of performing the examples discussed in the article, students form a system of knowledge about the deep connection between mechanics, mathematics and computer science.

Keywords: mechanical phenomena, transcendental equations, graphical method, numerical method, computer method.

Кіріспе

Математикалық теңдеулер теориясында классикалық теңдеулермен қатар (сызықтық, квадрат, тригонометриялық және басқалар) трансценденттік теңдеулер де зерттеледі. Келесі теңдеулер трансценденттік теңдеулердің мысалдары бола алады:

$$2^x - 10x = 0; \qquad \ln x - x^2 = 2x; \quad 0{,}7\cos x - \sin 1{,}3 = 0$$

Трансценденттік теңдеулердің басқа теңдеулер түрлерінен айырмашалығы мынада: мұндай теңдеулер аналитикалық әдіспен шешілмейді. Яғни шешімнің соңғы түрі формула түрінде болмайды. Трансценденттік теңдеулер тек сандық әдіспен ғана шешіледі.

Математика ғылымында трансценденттік теңдеулерді зерттеу кезінде олардың қолданбалы мәніне жеткілікті көңіл бөлінбей келеді. Мысалы, сызықтық, квадрат, тригонометриялық, логарифмдік, дифференциалдық және тағы басқа теңдеулерді қолдануға арналған мысалдар физика және механика ғылымдарында көптеп кездеседі, химия ғылымында да аталған теңдеулердің кейбірін кездестіруге болады.

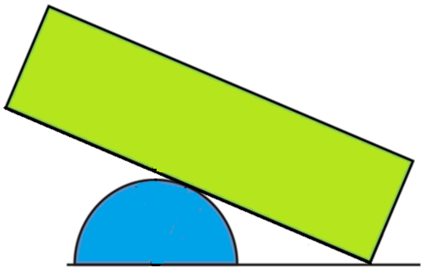
Трансценденттік теңдеулер бойынша жүргізген көп жылдық зерттеуімізге сүйене отырып мына мәселелерді анықтадық: 1) трансценденттік теңдеулермен сипатталатын физикалық немесе механикалық құбылыстар осы уақытқа дейін қарастырылмаған; 2) басқа ғылымдар саласындағы трансценденттік теңдеулердің қолданбалығы аз зерттелген; 3) қарастырылып отырған теңдеулерді шешудің тиімді әдістері (графиктік, компьютерлік және сандық) жеткілікті қарастырылмаған; 4) механикалық құбылыстарды сипаттайтын трансценденттік теңдеулерді зерттеуде ғылымаралық (междисциплинарный) тұрғыдан талдау тәсілі сирек қолданыс тапқан. Жоғарыда аталған мәселелердің болуы *зерттеудің өзектілігін* көрсетеді.

Математикалық теңдеулер теориясындағы жоғарыда келтірілген олқылықтарды жою мақсатында механика бойынша трансценденттік теңдеулермен сипатталатын нысандар мен құбылыстарды құрастыруды және оңтайлы түрде шешуді ұсынылып отырған *жұмыстың мақсаты* ретінде алдық. Механикалық нысандар мен құбылыстар құрастыру және оларды зерттеу барысында әр түрлі трансцендентті теңдеулер алынады.

Аталған мәселелерді зерттеу барысында табылған транцендентік теңдеулерді шешудің бірнеше тиімді сандық әдістері қарастырылды. Біз осы сандық әдістер ішінен графиктік, *біртіндеп жуықтау әдісі және компьютерлік әдістерді таңдап алдық* және оларды оңтайлы қолдану жолдарын зерттедік [1-4].

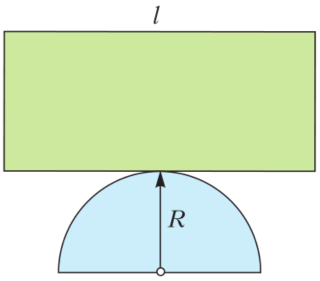
Зерттеу әдіснамасы және нәтижелері

1. *Графиктік әдісті қолдану.* Столға бекітілген жартылай цилиндрде радиусы R тақтайша тепе-теңдікте тұр. Тақтайшаның қалыңдығы h, ұзындығы 1, және $\frac{l}{h} = 3, \frac{R}{h} = 0{,}6$. Тақтайшаны горизонталь қалпынан максимал ауытқытқан кезде оның бір жағы стол бетіне тиеді. Тақтайшаны босатсақ ол бастапқы күйіне оралады ма? (Сурет1). Цилиндр мен тақтайшаның арасындағы үйкеліс шексіз үлкен [5].

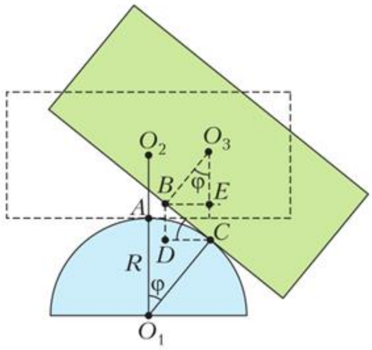


Сурет 1. Тақтайшаның горизонталь қалпынан максимал ауытқуы

Талдау. Алдымен тақтайшаның горизонталь жағдайдан стол болмаған жағдайдағы ауытқуының шекті бұрышын ($\varphi_ш$) табу керек. Егер оның мәні тақтайша мен стол арасындағы бұрыштан көп болса, тақтай бастапқы күйіне оралады. $\varphi_ш$ мәнді табу үшін стол жазықтығы болмаған жағдайдағы жартылай цилиндр мен тақтайдан тұратын жаңа механикалық жүйені қарастырамыз (Сурет 2).



Сурет 2. Тақтайша мен жарты цилиндрдің бастапқы жағдайы



Сурет 3. Тақтайшаның горизонталь қалпынан ауытқуы

Тақтайша орнықты тепе-теңдікте болады (Сурет 2). Жарты цилиндрдің центрі (O_1) және тақтайшаның ауырлық центрі (O_2) бір вертикальда жатыр (Сурет 3). Тақтайшаны вертикальдан белгілі бір φ бұрышқа ауытқытамыз. Тіреу нүктесі A нүктесінен C нүктесіне ауысады, ал тақтайшаның жарты цилиндрге тиіп тұрған нүктесі жаңа B жағдайға көшеді. Тақтайша мен жарты цилиндр арасында сырғанау жоқ болғандықтан, AC доғасының ұзындығы BC кесіндісінің ұзындығына тең:

$$\cup AC = BC = R\varphi.$$

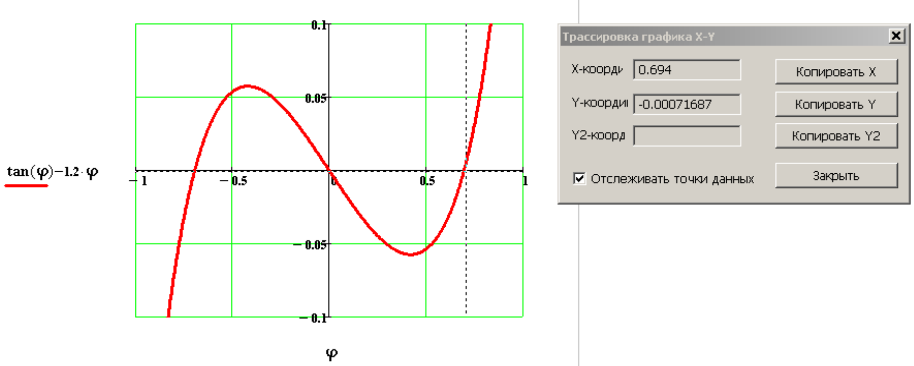
Тақтайшаның ауырлық центрі O_2 жағдайдан O_3 жағдайға өтеді. Егер O_3 арқылы жүргізілген вертикаль жаңа C тіреу нүктесінің сол жағына өтсе, онда ауырлық күші тақтайшаны тепе-теңдік жағдайына қайтаруға тырысады. Демек мынандай шарт орындалуы керек: BE $\leq$ ДС. BE $=\frac{h}{2}\sin\varphi$ және LC=DCcosφ = Rφ cosφ болғандықтан:

$$\frac{h}{2}\sin\varphi \leq R\varphi\cos\varphi, \text{ или } \operatorname{tg}\varphi \leq \frac{2R}{h}\varphi$$

$\frac{R}{h}$= 0,6 болғандықтан tg φ $\leq$ 1,2 φ. Сонымен біз мынандай трансцендenттік теңдеуді шешуге тиіспіз:

$$\operatorname{tg}\varphi - 1{,}2\varphi = 0 .$$

Ол үшін *графиктік әдісті* қолданамыз. Mathcad пакеті көмегімен $y = tg\varphi - 1{,}2\varphi$ функциясының графигін декарт координаталар өсінде саламыз (Сурет 4). Графиктен 0,5<φ<1 аралығындағы теңдеудің түбірінің ғана физикалық мағынасы бар екендігі көрініп тұр. Mathcad пакетінде орналасқан «Трассировка» құралының көмегімен теңдеудің түбірін 0,001 дәлдікпен табамыз. Тақтайшаның шекті ауытқу бұрышы $\varphi_ш \approx$ 0,694 рад ≈39,6°.



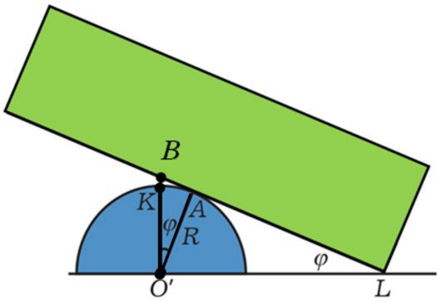
Сурет 4. tgφ-1,2 φ=0 теңдеуінің шешімі

Енді жартылай цилиндр столға орнатылған жағдайға ораламыз. 5 суреттен

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{O'A}{AL} = \frac{O'A}{BL-BA}\ ,$$

мұндағы $l = 2\,BL = 3h = 5R$; $BL = 2{,}5\,R$; $BA = \cup KA = R\,\varphi$. Демек

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{R}{2{,}5R - R\varphi} = \frac{1}{2{,}5-\varphi} \quad \text{немесе} \quad \text{tg}\varphi - \frac{1}{2{,}5-\varphi} = 0$$



Сурет 5. Столда орналасқан жарты цилиндрде тақтайшаның максимал ауытқуы

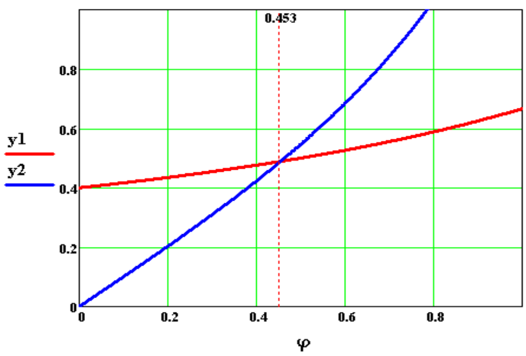
Бұл теңдеу де трансцendенттік болып табылады. Оны да Mathcad пакеті көмегімен графиктік әдіспен шешеміз (Сурет 6):

$$y = \text{tg}\,\varphi;\ \ y = \frac{1}{2{,}5-\varphi}$$

Mathcad ортасында осы екі функцияның дискретті теңдеулерін жазамыз және олардың графиктерінің қиылысу нүктесін табамыз. Сонда шешім 0,001 дәлдікпен табылады. Демек φ≈0,453.

$$\mathbf{i} := 0\,..\,1000 \qquad \varphi_{\mathbf{i}} := \mathbf{i}\cdot 0.001$$

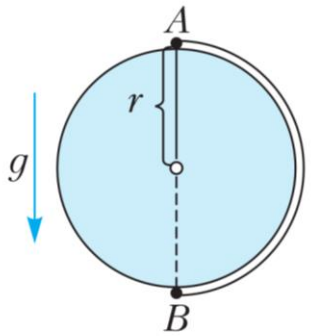
$$\mathbf{y1_i} := \frac{1}{2.5-\varphi_{\mathbf{i}}} \qquad \mathbf{y2_i} := \tan(\varphi_{\mathbf{i}})$$



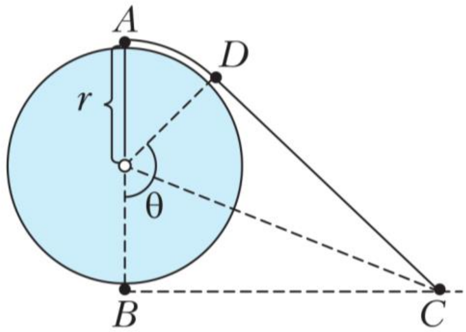
Сурет 6. $tg\varphi = \frac{1}{2{,}5-\varphi}$ теңдеуінің графиктік шешімі

Демек жарты цилиндрдің үстінде орналасқан тақтайша стол бетімен мынандай бұрыш ғана жасай алады $\varphi_{мах} \approx 0,453$ рад $\approx 26°$. $\varphi_{мах.} < \varphi_{ш.} = 39,8°$ болғандықтан тақтайша бастапқы жағдайына қайтып келеді.

2. *Біртіндеп жуықтау тәсілі*. Радиусы R болатын қозғалмайтын дискге оралған жіп жартылай шеңбер құрайды (Сурет 7). Жіптің бір ұшы A нүктесінде бекітілген. Жіптің екінші ұшына жүк байланған және оны B нүктесінде ұстап тұр (A және B нүктелері бір вертикальда орналасқан). Жүкті босатады. Жүк дискден максимал алыстаған кезде жіптің қандай бөлігі дискге тиіп тұрады? Кедергіні елемейміз.



Сурет 7. A нүктесіне байланған жүгі бар жіптің бастапқы жағдайы



Сурет 8. A нүктесіне байланған жүгі бар жіптің соңғы жағдайы

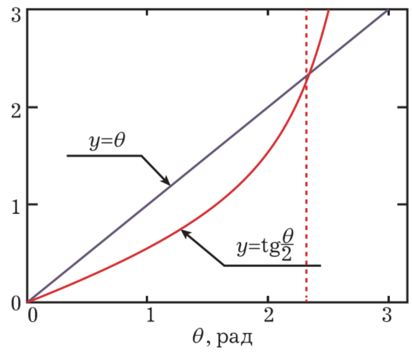
Талдау. Энергияның сақталу заңы бойынша B нүктесі және жүк дискден максимал алыстаған кездегі C нүктесі бір горизонталь бойында жатады (Сурет 8). Суреттен табамыз: $tg\frac{\theta}{2} = \frac{CD}{r}$

Екінші жағынан BD доғасының ұзындығы CD кесіндінің ұзындығына тең:

$\cup BD = CD = r\theta$. Сөйтіп, $\text{tg}\,\frac{\theta}{2} = \theta$.

Бұл теңдеу трансцендenттік. Теңдеуді шешу үшін сандық әдістердің мына бір тәсілін қолданамыз. $0 < \theta < \pi$ аралығында теңдеудің шешімдерінің санын табу үшін төмендегі функциялардың графиктерін саламыз (Сурет 9):

$$y = \theta \text{ және } y = tg\frac{\theta}{2}$$



Сурет 9. $y = \theta$ *және* $y = tg\frac{\theta}{2}$ *функцияларының графиктер*

Графиктен $0<\theta<\pi$ аралығында теңдеу θ=2 нүктеге жақын бір ғана түбірге ие болатынын көреміз.

Түбірді дәлірек табу үшін сандық әдістер ішінен *біртіндеп жуықтау тәсілін* таңдап алдық [5]. Бұл әдісті қолдану үшін алдымен теңдеуді мынандай функция түрінде жазамыз: $\theta_n = f(\theta_{n-1}) = tg\frac{\theta_{n-1}}{2}$

Осы функцияның $\theta_0=2$ нүктесі маңайындағы нөлдік жуықтау мәндерін табамыз:

$\theta_1 = f(\theta_0) \approx 1,557$, $\theta_2 = f(\theta_1) \approx 0,986$, $\theta_3 = f(\theta_2) \approx 0,537$, $\theta_4 = f(\theta_3) \approx 0,275$.

Табылған мәндер тізбегі $\theta_0=2$ нүктесінен алыстап бара жатқанын көреміз. Демек функцияны дұрыс таңдаған жоқпыз. Сондықтан оны басқаша түрде жазамыз:

$\theta_n = F(\theta_{n-1}) = 2\text{arctg}(\theta_{n-1})$

Аргументтің $\theta_0=2$ мәні үшін төмендегі сан тізбегін табамыз:

$\theta_1 = F(\theta_0) \approx 2,214$, $\theta_2 = F(\theta_1) \approx 2,293$, $\theta_3 = F(\theta_2) \approx 2,319$, $\theta_4 = F(\theta_3) \approx 2,327$,

$\theta_5 = F(\theta_4) \approx 2{,}330$, $\theta_6 = F(\theta_5) \approx 2{,}331$, $\theta_7=F(\theta_6) \approx 2{,}331$.

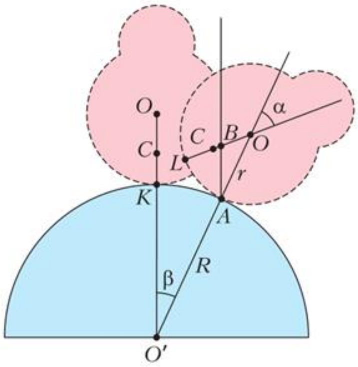
$\theta_6 = \theta_7$ теңдігі жеткілікті дәлдікпен орындалғандықтан $\theta \approx 2{,}331$ радиан $\approx 133{,}6°$ түрінде жаза аламыз. Трансценденттік теңдеу түбірі табылды. Сөйтіп,

$$\frac{\cup AD}{\cup AB} = \frac{\pi-\theta}{\pi} \approx 0{,}258.$$

3. *Компьютерлік әдісті қолдану.*

1 мысал. Радиусы R=20 см болатын жарты шардың үстіне "Ванька-Встанька" ойыншығы қойылған (Сурет 10). Ойыншықтың төменгі аймағы радиусы r=5 см сфера болып табылады. C – ойыншықтың ауырлық центрі, OC=2 см. Ойыншық бастапқы күйіне қайта алу үшін оны қандай шекті β_{max} бұрышқа дейін бұруға болады.

Талдау. Егер ойыншық, мысалы, оңға қарай ауытқып кетсе, оның ауырлық центрі солай қарай жылжиды (Сурет 10).



Сурет 10. Жарты сфера үстіндегі ойыншықтың әр түрлі жағдайы

Егер ауытқыған ойыншықтың ауырлық центрі ойыншық пен A тіреу нүктесін қосатын AB вертикальдың сол жағында болса, ауырлық күшінің моменті ойыншықты бастапқы тепе-теңдік қалпына алып келеді. Егер ауырлық центрі AB-ның оң жағына өтсе, ойыншық құлап кетеді.

α – ойыншықтың ауытқу бұрышы, β – $O'A$ радиустың бұрылу бұрышы. И LA және KA доғалар өзара тең, демек $\alpha r=\beta R$ бұдан

$$\alpha = \beta\frac{R}{r}$$

OAB үшбұрыштан $\frac{OB}{\sin\varphi} = \frac{AO}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{r}{\sin(\beta(1+R/r))}$

Немесе $OB = \frac{r\sin\beta}{\sin(\beta(1+R/r))}$

Егер $OC > OB$ болса ойыншық бастапқы жағдайына көшеді

$$OC > \frac{r\sin\beta}{\sin(\beta(1+R/r))}$$

R/ r = 4 және $\frac{r}{OC} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ ескерсек мынандай теңдеу аламыз:

$$\sin 5\beta > 2{,}5\sin\beta$$

β_{max} бұрышты табу үшін төмендегі тригонометриялық теңдеуді шешеміз:

$$\sin 5\beta max=2{,}5\sin\beta max.$$

Бұл теңдеудің аналитикалық шешімі жоқ, демек трансценденттік теңдеуге жатады. Теңдеуді *компьютерлік әдіспен* шешеміз. Теңдеуді шешу үшін Microsoft Excel, Matlab, Mathematica, Mathcad, Pascal, C^{++} , Python және т.б. программалау ортасын пайдалануға болады.

Төменде sin5x-2,5sinx=0 теңдеуін шешуге арналған Python ортасында жасалған бағдарлама берілген (Листинг 1) [7].

Листинг 1

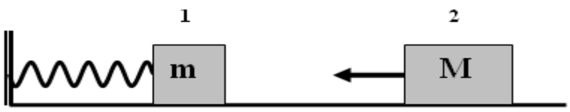
```
import math
def f(x):
    f=math.sin(5*x)-2.5*math.sin(x)
    return f

def df(x):
    df=5*math.cos(5*x)-2.5*math.cos(x)
    return df

x=float(input('tybirdin zhuyk mani = '
eps=float(input('kazhetti daldik = '))
pf=f(x)/df(x)
i=0
while abs(pf) > eps:
    x=x-pf
    pf=f(x)/df(x)
    i+=1

print(f'iterazia cany = {i}')
print(f'tybipdin dal mani = {x}')

PS C:\Projects\OTHER\MBA> & C:/Python/Python310/p
tybirdin zhuyk mani = 0.5
kazhetti daldik = 0.0001
iterazia cany = 3
tybipdin dal mani = 0.3847611456101222б
PS C:\Projects\OTHER\MBA>
```

Есептеу нәтижелері: түбірдің жуық мәні – 0.5, қажетті дәлдік – 0,0001, итерациялар саны – 3, 0,3848 радиан шаманы түбірдің жуық мәні ретінде аламыз. Сонымен, $\beta_{max} \approx 0{,}3848$ рад $\approx 22°$. Яғни $-22° < \beta < 22°$ аралығында ойыншық орнықты болады, құламайды.

2 мысал. Жылтыр горизонталь бетте тыныштықта тұрған массасы m кубик қабырғамен серппе арқылы бекітілген. Осы кубикке оң жақтан массасы M екінші кубик тұрақты жылдамдықпен қозғалып келеді де, соғады (Сурет 11).

а) Егер $m/M = 1/2$, $m/M \ll 1$ болған жағдайда бірінші кубиктің тербеліс периодының қандай бөлігі өткеннен кейін кубиктердің екінші соқтығысуы болады?

б) $\gamma = m/M$ қандай болғанда екінші соқтығысу болмайды?



Сурет 11. Кубиктердің бастапқы жағдайы

Талдау. υ_0 – екінші кубиктің бастапқы жылдамдығы. υ_1 және υ_2 кубиктердің бірінші соққыдан кейінгі жылдамдықтары. Соққыдан кейін екі кубик те солға қарай қозғалады. Механикалық энергияның сақталу заңынан төмендегі теңдеулерді жазамыз

$$M\upsilon_0 = m\upsilon_1 + M\upsilon_2, \quad \frac{M\vartheta_0^2}{2} = \frac{m\vartheta_1^2}{2} + \frac{M\vartheta_2^2}{2},$$

Бұдан $\vartheta_1 = \vartheta_0 \frac{2}{1+\gamma}$, $\vartheta_2 = \vartheta_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$

Бірінші соқтығысудан кейін екінші кубик бірқалыпты қозғалады және оның координатасы уақытқа байланысты мына заңмен өзгереді:

$$x_2 = \vartheta_2 t = \vartheta_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t$$

Бірінші кубиктің гармониялық тербелісі мына заңға бағынады: $x_1 = x_m \sin \omega t$

Гармониялық тербелістің жиілігі $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, мұндағы k — серппенің қатаңдығы. x_m тербеліс амплитудасын энергияның сақталу заңынан табамыз:

$$\frac{m\vartheta_1^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} \Rightarrow x_m = \frac{\vartheta_1}{\omega} = \frac{2\vartheta_0}{(1+\gamma)\omega}$$

Сөйтіп, $x_1 = \frac{2\vartheta_0}{(1+\gamma)\omega} \sin \omega t$

Кубиктердің екінші соққысы болу үшін, $x_1 = x_2$ орындалуы керек. Демек

$$\frac{2\vartheta_0}{(1+\gamma)\omega} \sin \omega t = \vartheta_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t$$

Бұдан $2\sin\omega t = (1-\gamma)\omega t$

Немесе $2\sin(2\pi \frac{t}{T}) = (1-\gamma) 2\pi \frac{t}{T}$

мұндағы – Т тербелістер периоды, t/T — іздеп отырған периодттың бөлігі.

Белгілеу енгіземіз: $\pi t/T = z$. Сонда жоғарыдағы теңдеудің түрі мынандай болады:

$$\sin 2z = (1-\gamma)z$$

а) $\gamma = 1/2$ болғанда мынандай трансценденттік теңдеу аламыз: $\sin 2z = \frac{z}{2}$

$y = \sin 2z$ және $y = z/2$ теңдеулерінің графиктерін саламыз (Сурет 12). Осы екі графиктің қиылсу нүктесі немесе $\sin 2z = \frac{z}{2}$ теңдеуінің шешімі $1 < z < 1{,}5$ интервалында жатқаныны білеміз. Аталған трансценденттік теңдеуді шешу үшін сандық әдістердің бірі – *хорда әдісін* қолданамыз. Осы әдіске арналған MathCAD ортасында жасалған бағдарлама көмегімен трансценденттік теңдеуді шешеміз (Листинг 2) [8-10].

Листинг 2

$\text{ORIGIN} := 0$

$y(z) := \sin(2 \cdot z) - \frac{z}{2}$

$i := 1..10 \qquad n := 10$

$z_i := 0.1 + i \cdot \frac{0.9}{n}$

$F_i := y(z_i) \qquad z := 1$

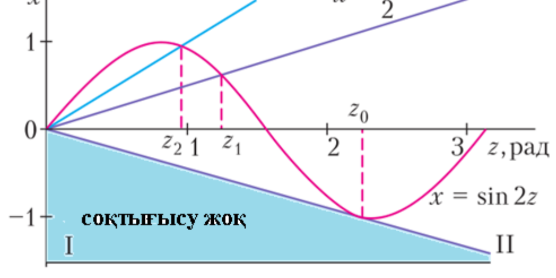
Given

$\sin(2 \cdot z) - \frac{z}{2} = 0 \quad \text{Find}(z) = 1.237$

Сөйтіп жоғарыда қарастырылған трансценденттік теңдеудің шешімін табамыз: $z_1 \approx 1{,}237$ рад, немесе $\pi \frac{t}{T} \approx 1{,}237$, $\frac{t}{T} \approx 0{,}39$

Егер $m \ll M$ болса, онда $\gamma \to 0$, сөйтіп төмендегі теңдеуді аламыз $\sin 2z = z$

Mathcad пакеті көмегімен $z_2 \approx 0{,}948$ рад, немесе $\frac{t}{T} \approx 0{,}30$ табамыз.



Сурет 12. Кубиктердің қозғалысын және соқтығысуын сипаттайтын графиктер

б) 12 суреттегі графиктерге сүйене отырып мынандай тұжырым айта аламыз: егер екінші кубиктің түзу қозғалысын сипаттайтын координатаның графигу синусоиданы екінші рет қиып өтпесе, онда кубиктер екінші рет соқтығыспайды. Осы шартты О нүктесінен шығатын және *I*, *II* түзулердің арасында орналасқан барлық түзу сызықтар қанағаттандырады. *I* түзу m/M→∞ жағдайды қанағаттандырады. (оң жақтан солға қарай қозғалып келе жатқан кубиктің массасы өте аз). *II* түзу синусоиданың жанамасы болып тұр. Осы деректерді пайдаланып γ шаманы табамыз.

Жанаманың теңдеуінің жалпы түрін жазамыз:

$f(z) = f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0)$, мұндағы z_0 түзудің синусоидамен жанасқан нүктесінің абсциссасы. $f(z) = \sin 2z$ және $f'(z) = 2\cos 2z$. 0 нүктесі (координаттар басы)жанама теңдеуі былай жазылады:

$0 = f'(z_0)(0 - z_0) + f(z_0)$ немесе $0 = -2\,z_0 \cos 2z_0 + \sin 2z_0$.

Бұдан

$$tg2z_0 = 2z_0$$

Сөйтіп жаңа трансценденттік теңдеу алдық. Бұл теңдеуді сандық әдістердің бірі – *жартылай бөлу әдісімен* шештік. Python немесе MathCAD ортасында жасалған бағдарламалар мынандай нәтиже берді: синусоида мен жанаманың ортақ нүктесінің абсциссасы $z_0 \approx 2{,}247$ шамаға тең.

sin2z = (1-γ)z теңдеуін пайдалана отырып γ мәнін табамыз.

$$\gamma = 1 - \frac{\sin 2z_0}{z_0} \approx 1{,}434$$

Кубиктар екінші рет соқтығыспау үшін төмендегі шарт орындалуы керек: $1{,}434 < \gamma < \infty$

Қорытынды

Жұмыс механикалық құбылыстарды математикалық әдістер көмегімен зерттеу мәселесіне арналған. Біз аналитикалық шешімі жоқ трансценденттік теңдеулермен сипатталатын механикалық құбылыстарды және нысандарды құрастырдық. Аталған құбылыстар мен нысандарды зерттеу барысында табылған транценденттік теңдеулерді шешудің бірнеше тиімді сандық әдістері қарастырылды. Біз осы сандық әдістер ішінен графиктік, біртіндеп жуықтау әдісі және компьютерлік әдістерді таңдап алдық. Сонымен қатар осы теңдеуді шешу әдістерін оңтайлы қолдану жолдары зерттелді. Зерттеу барысында төмендегідей ғылыми нәтижелерге қол жетті.

1. Графиктік әдіс MathCAD пакетін қолдану арқылы іске асты. Пакетте орналасқан «Трассировка» құралының көмегімен теңдеудің түбірін 0,001 дәлдікпен таптық. Сонымен қатар трансценденттік теңдеу MathCAD бағдарламасы тілінде жазылды.

2. Біртіндеп жуықтау әдісін қолдануды көрнекі ету мақсатында тербеліс жасайтын күрделі механикалық жүйе құрастырылды. Осы күрделі қозғалысты сипаттайтын жеке бір жағдай аталған сандық әдіс көмегімен жан-жақты зерттелді.

3. Компьютерлік әдіс механикалық жүйенің орнықты тепе-теңдігін және өзара соқтығысатын денелердің әр түрлі жағдайларын сипаттайтын трансценденттік теңдеулерді көрнекі түрде және оңтайлы шешу мақсатында қолданылды. Аталған механикалық нысандарды практикалық амалдарды қолдана отырып жасадық.

4. Мақалада қарастырылған механикалық құбылыстар және нысандарды сипаттайтын трансценденттік теңдеулерді шешу барысында білім алушыларда механика, математика және компьютерлік ғылымдар арасындағы терең байланысқа негізделген білім жүйесі (ғылымаралық білім жүйесі) қалыптасады.

***Қаржыландыру**. Жұмыс Қазақстан Республикасының Жоғары білім және ғылым министрлігінің қаржылық демеуі арқылы орындалды (грант № AP14869376).*

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Гулин А.В., Мажорова О.С., Морозова В.А. Введение в численные методы в задачах и упражнениях. – Москва: «АРГАМАК-МЕДИА ИНФРА-М», 2014. – 368 с.

2 Yi Wang, Bo Yu, Filippo Berto, Weihua Cai, Kai Bao. Modern numerical methods and their applications in mechanical engineering // Advances in Mechanical Engineering. 2019, Vol. 11(11) 1–3 DOI: 0.1177/1687814019887255 https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1687814019887255

3 Leszek Sow, Zbigniew Saternus, Marcin Kubiak. Numerical Modelling of Mechanical Phenomena in the Gantry Crane Beam // Procedia Engineering Volume 177, 2017, P. 225-232 https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.193

4 Skrzypczak T., Węgrzyn-Skrzypczak E. Mathematical and numerical model of solidification process of pure metals. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55 (15–16) (2012), pp. 4276-4284. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0017931012002190

5 Мукушев Б.А. Метод графических оценок // Квант.- 1989, №12.

6 Калиткин Н. Н. Численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.- 592 с.

7 Лутц, М. Программирование на Python. Т. 1 / М. Лутц. - М.: Символ, 2016. - 992 с.

8 Jonathan O. Etcuban, Bell S. Campanilla, Al D. Horteza. The Use of Mathcad in the Achievement of Education Students in Teaching College Algebra in a University // International electronic journal of mathematics education 2019, Vol. 14, No. 2, 341-351 https://doi.org/10.29333/iejme/5718

9 Mark S. Walbert, Anthony L. Ostrosky. Using Mathcad to Teach Undergraduate Mathematical Economics The Journal of Economic Education Volume 28, 1997 - Issue 4 Pages 304-315 https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00220489709597935?journalCode=vece20

10 Benker, H. Practical use of Mathcad: Solving mathematical problems with a computer Algebra system. Springer Science & Business Media. Retrieved from https://goo.gl/P57iwu

References:

1 Gulin A.V., Mazhorova O. S., Morozova V. A. (2014) Vvedenie v chislennye metody v zadachah i uprazhneniyah [Introduction to numerical methods in problems and exercises]. - Moscow: "ARGAMAK-MEDIA INFRA-M", 368 p. (in Russian).

2 Yi Wang, Bo Yu, Filippo Berto, Weihua Cai, Kai Bao. (2019) Modern numerical methods and their applications in mechanical engineering // Advances in Mechanical Engineering. Vol. 11(11) 1–3 DOI: 0.1177/1687814019887255 https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1687814019887255

3 Leszek Sow, Zbigniew Saternus, Marcin Kubiak. (2017) Numerical Modelling of Mechanical Phenomena in the Gantry Crane Beam // Procedia Engineering Volume 177, P. 225-232 https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.193

4 Skrzypczak T., Węgrzyn-Skrzypczak E. (2012) Mathematical and numerical model of solidification process of pure metals. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55 (15–16) pp. 4276-4284. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0017931012002190

5 Mukushev B. A. (1989) Metod graficheskih ocenok [Method of graphic estimates] // Kvant. - No. 12. (in Russian).

6 Kalitkin N. N.(2011) CHislennye metody [Chislennye metody].- St. Peters-burg: BKhV-Peterburg, (in Russian).

7 Lutz, M. Programming in Python. Vol. 1 / M. Lutz. - M.: Symbol, 2016. - 992 p. (in Russian).

8 Jonathan O. Etcuban, Bell S. Campanilla, Al D. Horteza.(2019) The Use of Mathcad in the Achievement of Education Students in Teaching College Algebra in a University // International electronic journal of mathematics education Vol. 14, No. 2, 341-351 https://doi.org/10.29333/iejme/5718

9 Mark S. Walbert, Anthony L. Ostrosky. (1997) Using Mathcad to Teach Undergraduate Mathematical Economics The Journal of Economic Education Volume 28, Issue 4 Pages 304-315 https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00220489709597935?journalCode=vece20

10 Benker, H. (1999) Practical use of Mathcad: Solving mathematical problems with a computer Algebra system. Springer Science & Business Media. Retrieved from https://goo.gl/P57iwu