Преподавателю необходимо организовать практические работы так, чтобы студенты постоянно ощущали рост сложности выполняемых заданий, были заняты напряженной творческой работой, поисками точных и правильных решений.

Список использованной литературы:

1 *Типовая учебная программа по предмету «Математика» для 1-4 классов уровня начального образования. Приложение 6 к приказу Министра образования и науки Республики Казахстан от 10 мая 2018 года № 199. - http://adilet.zan.kz/rus/docs/V1800016989*

2 *Истомина Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах. Учеб.пособие для студентов сред. И высш.пед учеб.заведений.– 4-е изд., стереотип.–М.: Изд.центр»Академия»,2001.–288с.*

3 *Калинченко А.В. Методика преподавания начального курса математики. Учебное пособие. – М.:Академия, 2017. – 208 с*

4 *Активные методы обучения на уроках математики в начальной школе/ сост.: Кушнир М.П., Мендыгалиева З.М., Петрик Е.П. Астана: АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы», 2017. - 43 с.*

5 *Белошистая А.В. Методика обучения математике в начальной школе: курс лекций.- М.:Владос, 2016.- 352 с.*

МРНТИ 27.01.45
УДК 378.016 (574)

А.К. Алпысов[1], А.Б. Кокажаева[2]

[1]Павлодарский государственный педагогический университет, г. Павлодар, Республика Казахстан
[2]Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ОБРАТНЫХ ДЕЙСТВИЙ

Аннотация

В статье рассмотрены примеры решения показательных неравенств методом обратных действий, а также метод рационализации, позволяющий упростить решение показательных неравенств. Целью рассмотрения данных методов является развитие логического мышления при решении математических задач. При решении задач необходимо хорошее знание теоретического материала и умение его использовать, владение общими подходами к решению задач, опыт в решении показательных неравенств.

Процесс решения показательных неравенств развивает творческую деятельность и формирует логическое мышление. Логическое мышление развивает у учащихся навыки критического восприятия окружающего мира, желание понять причины и суть самых разных понятий и явлений, способствует успехам в учебе.

Ключевые слова: рациональное выражение, методы обратных действий, решение показательных неравенств, стандартное неравенство.

Аңдатпа

А.К. Алпысов[1], А.Б. Кокажаева[2]
[1] Павлодар мемлекеттік педагогикалық университеті, Павлодар қ., Қазақстан
[2] Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

КӨРСЕТКІШТІК ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ КЕРІ АМАЛ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Мақалада көрсеткіштік теңсіздіктерді кері амал әдісімен шешу, сонымен қатар көрсеткіштік теңсіздіктерді шешуді жеңілдетуге мүмкіндік беретін рационализация әдісі қарастырылған. Бұл әдістерді қарастырудың мақсаты математикалық есептерді шешу арқылы логикалық ойлауды дамыту болып табылады. Есептерді шешу үшін теориялық материалды жақсы меңгеру және оны қолдана білу, есептерді шешудің тәсілдерін көрсеткіштік теңсіздіктерді шешуде дұрыс пайдалана білу қажет. Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу процесі шығармашылықты дамытады және логикалық ойлауды қалыптастырады. Логикалық ойлау оқушылардың қоршаған ортаны сыни тұрғысынан қабылдау дағдыларын дамытады, әртүрлі ұғымдар мен құбылыстардың себептері мен мәнін түсінуге негіздейді, оқудағы жетістіктерге ықпал етеді.

Түйін сөздер: рационалды өрнек, кері амал әдістері, көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу, стандартты теңсіздік.

Abstract

RESOLUTIONS OF INDICATIVE INEQUALITIES BY THE METHOD FEEDBACK

Alpusov A.K. [1], *Kokazhaeva A.B.* [2]

[1]*Pavlodar State Pedagogical University, Pavlodar, Republic of Kazakhstan*

[2]*Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*

The article discusses examples of solving exponential inequalities by the inverse action method, as well as a rationalization method that simplifies the solution of exponential inequalities. The purpose of considering these methods is the development of logical thinking in solving mathematical problems. When solving problems, you need good knowledge of theoretical material and the ability to use it, mastery of general approaches to solving problems, and experience in solving exponential inequalities.

The process of solving significant inequalities develops creative activity and shapes logical thinking. Logical thinking develops in students the skills of critical perception of the world around them, the desire to understand the causes and essence of the most diverse concepts and phenomena, contributes to academic success.

Keywords: Rational expression, methods of inverse actions, solution of exponential inequalities, standard inequality.

Процесс решения начнем с двух стандартных показательных неравенств вида:

$$a^{\varphi(x)} > c \qquad (1)$$

$$a^{\varphi(x)} < c \qquad (2)$$

Будем считать, что $\varphi(x)$ рациональное выражение. Основания показательных функций могут быть больше или меньше единицы. С точки зрения эффективности труда, рассмотрим отдельно каждый случай [1].

Если $a > 1$, тогда решая неравенства (1), (2) методом обратных действий, получим:

$$a^{\varphi(x)} > c \;\Rightarrow\; \log_a a^{\varphi(x)} > \log_a c \;\Rightarrow\; \varphi(x) > \log_a c \qquad (3)$$

$$a^{\varphi(x)} < c \;\Rightarrow\; \log_a a^{\varphi(x)} < \log_a c \;\Rightarrow\; \varphi(x) < \log_a c \qquad (4)$$

Если сравнить знаки неравенств исходного и конечного выражений в каждом соотношении (3) и (4), то обнаруживаем, что знаки неравенств сохранились, так как $a > 1$.

Теперь проверим случай, когда $a < 1$. Пусть $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$. Тогда $a^{\varphi(x)} > c \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{b}\right)^{\varphi(x)} > c \;\Rightarrow$ $b^{-\varphi(x)} > c \;\Rightarrow\; \log_b b^{-\varphi(x)} > \log_b c$

$$-\varphi(x) > \log_b c \;\Rightarrow\; \varphi(x) < -\log_b c.$$

Соединим между собой исходное и конечное равенства. Имеем

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{\varphi(x)} > c \;\Rightarrow\; \varphi(x) < -\log_b c.$$

В выражениях, расположенных в обеих частях от знака следования «$\Rightarrow$», произошла смена знака в неравенствах. Причиной этого является то, что основание степени меньше единицы. В процессе решения неравенств все время надо следить за структурой оснований степеней и в соответствии с этим надо менять знаки неравенств. И если решаем неравенства с параметром в основании, то возникает необходимость рассмотреть два случая: $a < 1$ и $a > 1$.

В таких случаях происходит информационная перегрузка памяти.

Впредь, с целью разгрузки памяти будем считать, что основание степени больше единицы. Если основание степени в конкретных неравенствах будет меньше единицы, то изменив знаки в показателе, всегда можем добиться того, чтобы основание степени было больше единицы [2].

Например, неравенство $0,(3)^x > 9$ имеет в основании степени число, меньшее единицы.

$$0,(3)^x > 9 \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{9}\right)^x > 9 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$$

$$3^{-x} > 3^{2} \quad \Rightarrow \quad -x > 2 \quad \Rightarrow \quad x < -2.$$

В этом примере смена знаков неравенств происходит не на основании правила, а на основании информации, полученной зрительным каналом.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. $4^{x} > 5 \quad \Rightarrow \quad x > a$?

Решение. Так как 4>1, то в требовании сохранили знак неравенства. Мы не знаем, каким числом будет ограничено x. Обозначим его буквой a. Решаем неравенство методом обратных действий.

$$4^{x} > 5 \quad \Rightarrow \quad \log_4 4^{x} > \log_4 5 \quad \Rightarrow \quad x > \log_4 5.$$

Числа 4 и 5 взаимно простые. Поэтому x ограничено снизу иррациональным числом, а сверху не ограничено. Эту мысль «сверху не ограничен» в математике обозначают знаком «∞», называемым бесконечностью. В слово «бесконечность» вложен смысл, что переменная величина x может двигаться в сторону увеличения сколько угодно. Это движение можем записать в виде неравенств так:

$$\log_4 5 < x < +\infty$$

Двойное неравенство можно рассматривать как множество чисел, заключенных между числами $\log_4 5$ и $+\infty$ и записать в виде $(\log_4 5, +\infty)$. Таким образом, решение неравенства записывается двояко:

$$\log_4 5 < x < +\infty \quad \Rightarrow \quad (\log_4 5, +\infty).$$

В математике знак «∞» открыто не называют числом. Однако используют его как число. Включим его в состав числа, назвав несобственным, которое, однако подчиняется другим правилам сложения и умножения.

Пример 2. $0,(6)^{x} \le \dfrac{8}{27} \quad \Rightarrow \quad x \ge a$?

Решение. Так как основание степени меньше единицы, то знак неравенства в требовании заменили на обратный. Для того, чтобы рассуждению придать логическую устойчивость, мы самом начале основание степеней переводим на число, большее единицы. Итак

$$0,(6)^{x} \le \frac{8}{27} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \le \frac{8}{27} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} \le \frac{8}{27},$$

$$\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} \le \log_{\frac{3}{2}}\frac{8}{27} \quad \Rightarrow \quad -x \le \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} \le \log_{\frac{3}{2}}\frac{8}{27}$$

$$x \ge -\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} \quad \Rightarrow \quad x \ge \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3},$$

$$x \ge \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} \quad \Rightarrow \quad x \ge 3. \quad \text{Ответ: } x \in [3, +\infty)$$

Пример 3. $0,4^{2x} \cdot \left(\dfrac{125}{8}\right)^{x-1} \ge \dfrac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad x \ge a$?

Решение. В предыдущих примерах в составе неравенства содержалась одна показательная функция, и при проведении преобразования руководствовались одной идеей – свести основание степени к числу, большему единицы. В структуре этого неравенства количество информации увеличилось. В таких случаях нужная информация извлекается из структуры ориентира [3].

Поскольку в каждой части неравенства содержится по одному члену, то в качестве ориентира возьмем неравенство:

$$a^{\varphi(x)} > c$$

Извлекаемая из ориентира первая информация такая, что каждый сомножитель данного неравенства надо представить в виде степени.

Итак,

$$0{,}4^{2x}\cdot\left(\frac{125}{8}\right)^{x-1}\geq\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{3x-3}\geq\frac{2}{5}$$

Сравнив основания степеней, принимаем решение о том, что нужно преобразовать основание $\frac{2}{5}$ к основанию $\frac{5}{2}$.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-2x}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{3x-3}\geq\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{5}{2}\right)^{-2x+3x-3}\geq\frac{2}{5},$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{3x-3-2x}\geq\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{5}{2}\right)^{x-3}\geq\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^{x-3}\geq\log_{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}$$

$$x-3\geq\log_{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad x-3\geq\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^{-1},$$

$$x-3\geq-1\quad\Rightarrow\quad x\geq 2.$$ Ответ: $x\in[2,+\infty)$

Пример 4. $2^{\sqrt{x-1}}-10+16\cdot 2^{-\sqrt{x-1}}\geq 0\quad\Rightarrow\quad x\underset{\leq}{\overset{\geq}{\ }}a$?

Решение. Неравенство содержит одну показательную функцию. Обозначив ее через у, выделим из трехчленного показательного неравенства квадратное неравенство. Имеем:

$$y=2^{\sqrt{x-1}}\quad\Rightarrow\quad y-10+16\cdot y^{-1}\geq 0,$$

$$y^2-10y+16\geq 0\quad\Rightarrow\quad (y-2)(y-8)\geq 0.$$

$$1)\ \begin{cases}y-2\leq 0\\ y-8\leq 0\end{cases}\Rightarrow\ y\leq 2.\qquad 2)\ \begin{cases}y-2\geq 0\\ y-8\geq 0\end{cases}\Rightarrow\ y\geq 8.$$

Заменив у показательной функции, получим следующие два стандартных показательных неравенства. Имеем:

$$2^{\sqrt{x-1}}\leq 2,\quad (1)\qquad 2^{\sqrt{x-1}}\geq 8.\quad (2)$$

Так как основание степеней больше единицы, то эти неравенства решаются методом обратных действий, причем знаки неравенств сохраняются.

$$2^{\sqrt{x-1}}\leq 2\quad\Rightarrow\quad\log_2 2^{\sqrt{x-1}}\leq\log_2 2,$$

$$\sqrt{x-1}\leq 1\quad\Rightarrow\quad x-1\leq 1,\ \Rightarrow\ x\leq 2.$$

$$2^{\sqrt{x-1}}\geq 8\quad\Rightarrow\quad\log_2 2^{\sqrt{x-1}}\geq\log_2 8,$$

$$\log_2 2^{\sqrt{x-1}}\geq\log_2 2^3\quad\Rightarrow\quad\sqrt{x-1}\geq 3,$$

$$x-1\geq 9\quad\Rightarrow\quad x\geq 10.$$

Решение первого стандартного показательного неравенства ограничено сверху, а снизу неограниченно. Поэтому решение запишем в виде двойного неравенства $-\infty<x\leq 2.$

Решение второго стандартного показательного неравенства ограничено снизу, а сверху не ограничено, и решение имеет вид $4\leq x<\infty.$ Ответ: $(-\infty;2]\cup[4;\infty)$

Пример 5. $2^{\sqrt{x-1}}-10+16\cdot 2^{-\sqrt{x-1}}\le 0 \quad\Rightarrow\quad x\underset{\le}{\overset{\ge}{}}a$?

Решение. Мы специально взяли то же трехчленное неравенство с целью показать влияние знака неравенства на структуру стандартного показательного неравенства. Когда в структуру квадратного уравнения вводится показательная функция, тогда положительные части параболы отображаются в другую кривую с сохранением свойств каждой части [4].

При решении трехчленного уравнения, т.е. при обозначении показательной функции через новую переменную, мы выделяем одну часть стандартного уравнения и одновременно выделяем квадратное уравнение, из которого определяется другая часть стандартного уравнения.

То же самое происходит и с неравенством, только преобразуются граничные кривые с внутренностью вместе. Выясним, в связи с изменением знака трехчленного неравенства, какая часть параболы имеет положительные ординаты, и выясним структуру стандартного неравенства [5].

$y=2^{\sqrt{x-1}}$. Тогда получим:

$$y^2-10y+16\le 0 \;\Rightarrow\; (y-2)(y-8)\le 0.$$

В этом случае имеет место:

$$\begin{cases} y-2\ge 0\\ y-8\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 2\\ y\le 8\end{cases} \Rightarrow 2\le y\le 8.$$

Итак, стандартное неравенство имеет вид: $2\le 2^{\sqrt{x-1}}\le 8.$

Это неравенство решается методом обратных действий. Имеем:

$$2\le 2^{\sqrt{x-1}}\le 8 \quad\Rightarrow\quad \log_2 2\le \log_2 2^{\sqrt{x-1}}\le \log_2 8,$$

$$1\le\sqrt{x-1}\le 3 \quad\Rightarrow\quad 1\le x-1\le 9 \quad\Rightarrow\quad 2\le x\le 10.$$

Пример 6. $3^{2x}-6\cdot 6^x+8\cdot 2^{2x}\le 0 \quad\Rightarrow\quad a?\le x\le b?$

Решение. Квадратный трехчлен содержит степени с разными основаниями. Причем основания двух крайних степеней простые числа, а основание степени среднего члена является произведением этих простых чисел. На основании этой информации мы принимаем решение о том, что нужно делить обе части неравенства на 2^{2x}. Тогда получим:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-6\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+8\le 0$$

Структура показательной функции определилась.

Заменой $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ данное неравенство сводим к квадратному:

$$y^2-6y+8\le 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y-2\ge 0\\ y-4\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 2\\ y\le 4\end{cases} \Rightarrow 2\le y\le 4.$$

Составим стандартное показательное уравнение: $2\le\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\le 4.$

Будем решать его методом обратных действий. Прологарифмировав по основанию 3/2, имеем:

$$\log_{\frac{3}{2}} 2\le \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\le \log_{\frac{3}{2}} 4,$$

$$\log_{\frac{3}{2}} 2\le x\le \log_{\frac{3}{2}} 4.$$

Ответ: $[\log_{\frac{3}{2}} 2;\log_{\frac{3}{2}} 4]$

Пример 7. $98-7^{x^2+5x-48}\ge 49^{x^2+5x-49} \;\Rightarrow\; b\le ?\ge x\le ?\ge c$

Решение. Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$7^{2(x^2+5x-49)}+7^{x^2+5x-48}-98\le 0 \;\Rightarrow\; 7^{2(x^2+5x-48-1)}+7^{x^2+5x-48}-98\le 0,$$

$$7^{2(x^2+5x-48)}\cdot 7^{-2}+7^{x^2+5x-48}-98\le 0 \;\Rightarrow\; 7^{2(x^2+5x-48)}+49\cdot 7^{x^2+5x-48}-49\cdot 98\le 0$$

$$\left|7^{x^2+5x-48}=y\right| \;\Rightarrow\; y^2+49y-49\cdot 98\le 0$$

$$\left(y+\frac{49}{2}\right)^2-49\cdot 98-\left(\frac{49}{2}\right)^2\le 0 \;\Rightarrow\; \left(y+\frac{49}{2}\right)^2\le\frac{4\cdot 49\cdot 98+49^2}{4},$$

$$y+\frac{49}{2}\le\pm\frac{49\sqrt{4\cdot 2+1}}{2} \;\Rightarrow\; \left(y+\frac{49}{2}\right)_{1,2}\le\pm\left(\frac{49\cdot 3}{2}\right),$$

$$y_1+\frac{49}{2}\le-\frac{147}{2} \;\Rightarrow\; y_1\le-\frac{147}{2}-\frac{49}{2}=-98 \;\Rightarrow\; y_2\le 49.$$

$y>0$ удовлетворяет уравнение $\left|7^{x^2+5x-48}=y\right|$, поэтому

$$7^{x^2+5x-48}=49 \;\Rightarrow\; \log_7 7^{x^2+5x-48}=\log_7 49,$$

$$\log_7 7^{x^2+5x-48}=\log_7 7^2 \;\Rightarrow\; (x^2+5x-48)\log_7 7=2\log_7 7,$$

$$x^2+5x-48=2 \;\Rightarrow\; x_1=-10,\; x_2=5.$$

Решением уравнении является -10 и 5. Если вставим исходное неравенство, тогда получим 0 = 0. Эти числа удовлетворяет нестрогие неравенство: $x\in[-10,\;\;5]$

Выводы

Для формирования творческих способностей значение математики является особым. Математические задачи помогают в освоении законов и свойств, а также в улучшении процесса мышления. Основой процесса мышления являются математические выражения. Без получения информации о выражении мы не можем мыслить, а также решить задачу [6].

Информация в составе выражения при решении задачи приводит мыслительную деятельность в движение. Математика является абстрактной наукой, поэтому без обучения их мыслить абстрактно не можем сформировать их математические способности.

Среди математиков сформировано мнение о том, что чем больше будут решены математические задачи, тем самым и абстрактные мысли сами собой будут развиваться. На сегодняшний день замечается наличие отрицательного впечатления данного мнения. Разумеется, без решения задачи нельзя формировать абстрактное мышление. Это необходимое условие, но оно не является достаточным. Поэтому вместо того, чтобы решить три-четыре различных задачи, полезно решить одну задачу несколькими способами.

Список использованной литературы:

1 Алпысов А.К. Методика преподавания математики. Учебное пособие. Павлодар. 2012. 172 с.

2 Есмухан М.Е., Алпысов А.К. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Учебное пособие. Кокшетау. 2002. 122 с.

3 Алпысов А.К. Математика. Уравнения и неравенства. Павлодар. 2013. 187с.

4 Бидосов А. Методика преподавания математики. –А. 2010. 287с

5 Мамиконов А.Г. Принятие решений и информация. –М. 1998.

6 Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. –М., 1997.