**МРНТИ 27.27.19**
**УДК 517.956**

**https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.10**

*Ж.А. Токибетов[1], Н.Е. Башар[1], А.К. Пирманова[1]*

*[1]Казахский национальный университет им. аль - Фараби, г. Алматы, Казахстан*

# ЗАДАЧА КОШИ – ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

*Аннотация*

Для одного эллиптического уравнения с частными производными второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами все классические граничные задачи, которые корректны для уравнения Лапласа, Фредгольмовы. Постановка классических граничных задач для уравнения Лапласа диктуются физическими приложениями. Наиболее простой из граничных задач для уравнения Лапласа является задача Дирихле, к которой приводится задача о поле зарядов распределенных на некоторой поверхности. Задачу Дирихле для дифференциальных уравнений с частными производными в пространстве обычно называют задачей Коши-Дирихле. Данная работа посвящена для систем уравнений первого порядка с частными производными эллиптического и гиперболического типов, состоящих из четырех уравнений с тремя независимыми переменными. Построено явное решения задачи Коши-Дирихле с помощью метода экспоненциального - дифференциального оператора. Приводили очень простой пример о совпадений решений задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка и задачи Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка гиперболического типа.

**Ключевые слова:** Эллиптические и гиперболические системы уравнения, задача Коши – Дирихле, экспоненциальный - дифференциальный оператор, градиент вектора.

*Аңдатпа*

*Ж.А. Токибетов[1], Н.Е. Башар[1], А.Қ. Пірманова[1]*

**БІРІНШІ РЕТТІ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН КОШИ – ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ**

*[1]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан*

Жеткілікті тегіс коэффициенттері бар екінші ретті дербес туындылары бар бір эллиптикалық теңдеу үшін Лаплас, Фредгольм теңдеуіне сәйкес келетін барлық классикалық шекаралық есептер. Лаплас теңдеуі үшін классикалық шекаралық есептерді қою физикалық қосымшаларды талап етеді. Лаплас теңдеуі үшін шекаралық есептердің ең қарапайымы-Дирихле есебі, оған белгілі бір бетке таратылған зарядтар өрісіне арналған. Кеңістіктегі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің Дирихле есебі әдетте Коши-Дирихле есебі деп аталады. Бұл жұмыс үш тәуелсіз айнымалысы бар төрт теңдеуден тұратын эллиптикалық және гиперболалық типтегі дербес туындылары бар бірінші ретті теңдеулер жүйесіне арналған. Коши-Дирихле есебінің нақты шешімі экспоненциалды – дифференциалды оператор әдісінің көмегімен жасалды. Екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің және гиперболалық типтегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін Коши есебінің шешімдерінің сәйкес келуі туралы өте қарапайым мысал келтірілді.

**Түйін сөздер:** Эллипстік және гиперболалық теңдеулер жүйесі, Коши – Дирихле есебі, экспоненциалды - дифференциалды оператор, вектор градиенті.

*Abstract*

**THE CAUCHY-DIRICHLET PROBLEM FOR A SYSTEM OF FIRST-ORDER EQUATIONS**

*Tokibetov Zh.A. [1], Bashar N. E.[1], Pirmanova A. K. [1]*
*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

For a single second-order elliptic partial differential equation with sufficiently smooth coefficients, all classical boundary value problems that are correct for the Laplace equations are Fredholm. The formulation of classical boundary value problems for the laplace equation is dictated by physical applications. The simplest of the boundary value problems for the Laplace equation is the Dirichlet problem, which is reduced to the problem of the field of charges distributed on a certain surface. The Dirichlet problem for partial differential equations in space is usually called the Cauchy-Dirichlet problem. This work dedicated to systems of first-order partial differential equations of elliptic and hyperbolic types consisting of four equations with three unknown variables. An explicit solution of the Cauchy-Dirichlet problem is constructed using the method of an exponential – differential operator. Giving a very simple example of the co-solution of the Cauchy problem for a second-order differential equation and the Cauchy problem for systems of first-order hyperbolic differential equations.

**Keywords:** Elliptic and hyperbolic systems of equations, Cauchy-Dirichlet problem, exponential-differential operator, vector gradient.

В трехмерном евклидовом пространстве $E_3$ переменных $x, y, z$ рассмотрим эллиптическую систему первого порядка

$$\begin{aligned} &u_x + v_y + w_z = 0, \\ &s_x - v_z + w_y = 0, \\ &s_y + u_z - w_x = 0, \\ &s_z - u_y + v_x = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Эту систему называют системой Мойсила – Теодереско [1] и является трехмерным аналогом системы Коши-Римана. Она строится при помощи уравнения Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0. \tag{2}$$

Если градиент решения уравнения (2) обозначим через $u, v, w,$ т.е. $\nabla U = (u, v, w)$ то он удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &u_x + v_y + w_z = 0 \\ &v_z - w_y = 0, \\ &u_z - w_x = 0, \\ &u_y - v_x = 0 \end{aligned}$$

и вводя четвертую искомую функцию $s$ в эту систему, получим (1). Вектор $P = (u, v, w, s)$, являющимся решением системы (1), называют голоморфным и каждая компонента голоморфного вектора является гармонической функцией. По аналогии с системой (1) при помощи градиента решения уравнения

$$V_{xx} + V_{yy} - V_{zz} = 0 \tag{3}$$

образуем гиперболическую систему первого порядка

$$\begin{aligned} &u_x + v_y - w_z = 0, \\ &s_x - v_z + w_y = 0, \\ &s_y + u_z - w_x = 0, \\ &s_z - u_y + v_x = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

здесь $\nabla V = (u, v, w)$.

**1.** Рассмотрим более подробно краевую задачу Коши-Дирихле [2]: требуется определить регулярное в полупространстве $z > 0$ решение $P = (u, v, w, s)$ системы (1), удовлетворяющее условию

$$P = (u, v, w, s)\big|_{z=0} = f(x, y), \tag{5}$$

где $f(x, y)$ - заданная бесконечно-дифференцируемый четырехмерный вектор - функция.

Вводя в рассмотрение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

систему (1) запишем в виде

$$P_z = (A\partial_x + B\partial_y)P. \tag{6}$$

Теперь применяя экспонециальный дифференциальный оператор [3]

$$\exp\left(-z\frac{\partial}{\partial z}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{z^m\partial^m}{m!\partial z^m}$$

к уравнению (5), получим

$$P-z\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}-\ldots=f(x,y). \qquad (7)$$

Но из (6) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=(A\partial_x+B\partial_y)\frac{\partial P}{\partial z}=(A\partial_x+B\partial_y)^2P,\ldots,\frac{\partial^m P}{\partial z^m}=(A\partial_x+B\partial_y)^mP,\ldots \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7) имеем

$$e^{-z(A\partial_x+B\partial_y)}P=f(x,y)$$

отсюда решение

$$P=e^{z(A\partial_x+B\partial_y)}f(x,y)$$

или

$$P=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}(A\partial_x+B\partial_y)^k f(x,y). \qquad (9)$$

Таким образом, нами доказана теорема: если область - полупространство $z>0$ и данные начального условия $f(x,y)$ – бесконечно-дифференцируемый вектор-функция и ряд в правой части последней формулы, а также ряды, получаемые из него почленным дифференцированием по переменным $x,y,z$, сходятся равномерно, то решение задачи Коши – Дирихле (5) для системы Мойсила – Теодореско (1) дается формулой (9).

**2.** Для системы (4), как и для всякой гиперболической системы в полупространстве $z>0$ корректна задача Коши – Дирихле, решение которой можно построить как в пункте 1. Сначало вводя в рассмотрение матрицы

$$C=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

и вектор $Q=(u,v,w,s)$, систему (4) запишем в виде

$$Q_z=CQ_x+DQ_y, \qquad (10)$$

Здесь каждая компонента вектора $Q=(u,v,w,s)$ удовлетворяет волновому уравнению (3).

Определим регулярное в полупространстве $z>0$ решение $Q=(u,v,w,s)$ системы (4), удовлетворяющее начальному условию

$$Q=(u,v,w,s)\big|_{z=0}=g(x,y), \qquad (11)$$

Здесь $g(x,y)$ - заданный бесконечно – дифференцируемый четырехмерный вектор-функция $g=(g_1,g_2,g_3,g_4)$.

Как и выше, применяя экспоненциальный дифференциальный оператор

$$e^{-z\frac{\partial}{\partial z}}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{z^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial z^m}$$

к системе (10) при условии (11), имеем

$$Q-z\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}+\ldots+(-1)^m\frac{z^m}{m!}\frac{\partial^m Q}{\partial z^m}+\ldots=g(x,y), \qquad (12)$$

здесь учитывая, что

$$\frac{\partial^k Q}{\partial z^k} = (C\partial_x + D\partial_y)^k Q, k = 2,3,\dots \tag{13}$$

и после подстановки (13) в (12) получим решение задачи (10), (11) в виде

$$Q = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} (C\partial_x + D\partial_y)^k g(x,y) \quad . \tag{14}$$

Таким образом, мы получим следующий результат: если вектор-функция $g(x,y)$ такая, что она бесконечно – дифференцируема, ряд (14) и ряды полученные из него почленным дифференцированием нужное число раз по переменным $x, y, z$, равномерно сходятся, то решение задачи Коши – Дирихле (10) – (11) дается формулой (14).

Как мы выше отметили, что все компоненты системы (10) удовлетворяет волновому уравнению (3), то как следует из работы [4], решение задачи (10)-(11) при условии $g(x,y)$ - дважды непрерывно дифференцируемой вектор - функция, задаваемая в некоторой области $Q$ плоскости $z = 0$, выписывается явной формулой [5] как решение волнового уравнения с начальными условиями

$$Q\Big|_{z=0} = g, Q_z\Big|_{z=0} = (g_{3x} - g_{4y}, g_{4x} + g_{3y}, g_{1x} + g_{2y}, g_{2x} - g_{1y}) \, . \tag{15}$$

Теперь приведем обоснование условий (15).

Для этого сначала найдем представленные решений системы (4) с помощью двух произвольных решений волнового уравнения (3). Если введем в рассмотрение с действительной переменной $z$ и комплексную переменную $\zeta = x + iy$, а также две комплексные функции $p = u - iv, q = -\omega + is$. Тогда (4) записывается в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial \zeta} = 0 \tag{16}$$

и $p, q$ представляем через произвольные комплексные постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ и комплексной функцией $\varphi(x, y, z) = \sigma + i\omega$, здесь $\sigma, \omega$ - волновые функции трех переменных:

$$p = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$
$$q = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}. \tag{17}$$

После подстановки (17) в (16) определим, что равенства (16) удовлетворяется при $\delta = 0, -\gamma = \beta, \mu = -\alpha, \nu = 0$.

Следовательно, для того чтобы (17) представляли общего решения системы (16), они дальше имеет вид:

$$p = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$
$$q = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}, \tag{18}$$

где $\varphi = \sigma + i\omega, \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2$ - произвольные комплексные числа. Отсюда, если ввести обозначения $F = (\beta_1, \alpha_1, -\beta_2), G = (-\beta_2, \beta_1, -\alpha_2), M = (-\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1), N = (-\alpha_2, -\alpha_1, -\beta_2)$, то общее решение гиперболической системы (6) записывается в виде

$$u = (F, \nabla\sigma) + (G, \nabla\omega), v = (G, \nabla\sigma) - (F, \nabla\omega),$$
$$w = (M, \nabla\sigma) + (N, \nabla\omega), s = (N, \nabla\sigma) - (M, \nabla\omega). \tag{19}$$

Рассмотрим задачу Коши для системы (4), удовлетворяющее условиям

$$u = f, v = g, w = h, s = \tau \text{ при } z = 0, \tag{20}$$

где $f, g, h, \tau \in C^2(\Omega), \Omega$ - некоторая область плоскости $z = 0$ и из (4) следует

$$u_z = h_x - \tau_y, v_z = \tau_x + h_y, w_z = f_x - g_y, s_z = g_x - f_y. \tag{21}$$

Это и совпадает с (15).

*Пример.* Если

$$g = (5x - y, 3x, 4x + y, 7x + 5y + 1),$$

то по (14) найдем

$$Q = (5x - y - t, 3x + 8t, 4x + y + 5t, s = 7x + 5y + 4t + 1),$$

решения задач (3), (15) и (4), (11) совпадают.

*Список использованной литературы:*

1 *Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: 1966, - 204 с.*

2 *Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.Наука, 1981, 448с*

3 *Токибетов Ж.А., Жанай А.Ж. О задаче Коши для системы гиперболического типа первого порядка .Вестник КазНПУ, серия «физмат науки», - 2017, №2(58), с.105-109.*

4 *Янушаускас А.И. Некоторые обобщения голоморфного вектора. Дифф. уравнения, 1982, Т.18, №4, с.699-705.*

5 *Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: 1964, -830 с.*

*References:*

1 *Bicadze A.V. (1966) Kraevye zadachi dlja jellipticheskih uravnenij vtorogo porjadka [Boundary value problems for second-order elliptic equations]. M., 204. (In Russian)*

2 *Bicadze A.V. (1981) Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Some classes of partial differential equations]. M.Nauka, 448. (In Russian)*

3 *Tokibetov Zh.A., Zhanaj A.Zh. (2017) O zadache Koshi dlja sistemy giperbolicheskogo tipa pervogo porjadka [On the Cauchy problem for a first-order hyperbolic type system].Vestnik KazNPU, №2(58), 105-109. (In Russian)*

4 *Janushauskas A.I.(1982) Nekotorye obobshhenija golomorfnogo vektora [Some generalizations of the holomorphic vector]. Diff. uravnenija, T.18, №4, 699-705. (In Russian)*

5 *Kurant R.(1964) Uravnenija s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations]. M.,830. (In Russian)*