**МРНТИ 27.29.19**
**УДК 519.63**

**https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.11**

*Л.М. Тукенова*

*Университет Нархоз, г. Алматы, Казахстан*

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ОКЕАНАЛОГИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ

*Аннотация*

Математические модели океанологии являются уравнениям типа Навье-Стокса, построение устойчивых эффективных алгоритмов их решения связано с определенными трудностями, обусловленными с известными проблемами постановки граничных условий, наличием интегро-дифференциальных соотношений и т.д. На практике при решении задач океанологии широко используются конечно-разностные методы, однако в литературе отсутствуют работы посвященные теоретическим исследованиям устойчивости и сходимости используемых алгоритмов. В большинстве случаев проверка устойчивости и сходимости устанавливаются путем вычислительных экспериментов. Поэтому считаем, что разработка и математические обоснования сходящихся методов решения системы уравнений океанологии, являются актуальными задачами вычислительной математики.

В работе изучаются варианты метода фиктивных областей для нелинейной модели океана. Исследованы теорема существования исходимости решения приближенных моделей, полученных с помощью метода фиктивных областей. Выведена неулучшаемая оценка скорости сходимости решения метода фиктивных областей.

***Ключевые слова:*** краевая задача, уравнения океанологии, метод фиктивных областей.

*Аңдатпа*

*Л.М. Тукенова*

*Нархоз университеті, Алматы қ., Қазақстан*

**МҰХИТ ЕСЕБІНІҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫН ЖАЛҒАН ОБЛЫСТАР ӘДІСІ АРҚЫЛЫ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ**

Мұхит есебінің математикалық модельдері Навье-Стокс түріндегі теңдеулер болып табылады, оларды шешудің тұрақты тиімді алгоритмдерін құру белгілі бір қиыншылықтармен байланысты, белгілі шарттық мәселелерді қою, интегралды-дифференциалды қатынастардың болуы және т.б. Тәжірибеде мұхит есебі мәселелерін шешуде айырымдық әдістер кең қолданылады, алайда қолданылған алгоритмдердің тұрақтылығы мен жақындасуын теориялық зерттеуге арналған еңбектер жоқ. Көп жағдайда тұрақтылық пен конвергенция сынақтары есептеу эксперименттері арқылы орнатылады. Сондықтан біз мұхит есебі теңдеулер жүйесін шешудің конвергентті әдістерін жасау және математикалық негіздеуді есептеу математикасының өзекті мәселелері деп санаймыз. Жұмыста мұхиттың сызықтық емес моделі үшін жалған облыс әдісінің нұсқалары зерттелген. Шешімдердің жалған облыс әдісі бойынша алынған жуықталған модельдерге жақындасуының теоремасы зерттелген. Жалған люлыстар әдісін шешудің жинақталу жылдамдығының ең жақсы бағасы алынды.

**Түйін сөздер**: шекаралық есеп, мұхит теңдеулері, жалған облыстар әдісі.

*Abstract*

**MATHEMATICAL MODELING OF THE BOUNDARY CONDITIONS OF THE OCEANALOGY WITH THE HELP PHOTO AREA METHOD**

*Tukenova L.M.*
*Narxoz University, Almaty, Kazakhstan*

Mathematical models of oceanology are equations of the Navier-Stokes type, the construction of stable effective algorithms for their solution is associated with certain difficulties due to the well-known problems of setting boundary conditions, the presence of integro-differential relations, etc. In practice, when solving problems of oceanology, finite-difference methods are widely used, but there are no works in the literature devoted to theoretical studies of the stability and convergence of the algorithms used. In most cases, stability and convergence tests are established through computational experiments. Therefore, we believe that the development and mathematical substantiation of converging methods for solving the system of oceanology equations are urgent problems of computational mathematics. The paper studies variants of the fictitious domain method for a nonlinear ocean model. An existence theorem for the convergence of solutions to approximate models obtained using the fictitious domain method is investigated. An unimprovable estimate of the rate of convergence of the solution of the fictitious domain method is derived.

**Keywords:** boundary value problem, oceanology equations, method of fictitious areas.

**Постановка задачи**

Нестационарная линейная задача течения в океане в области $\Omega_T=(0,T)\times\Omega,\quad \Omega=(0,H)\times\Omega_1$, $\Omega_1\subset R^2$ сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\mu_0\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+\mu\Delta\upsilon-l\times\upsilon-\hat{\nabla}\xi+f, \tag{1}$$

$$\int_0^H d\hat{i}v\upsilon dx_3=\int_0^H\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_3}\right)dx_3=0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial x_3}=0,\quad \int_\Omega\xi dx=0, \tag{2}$$

с начально- краевыми условиями

$$\upsilon\Big|_{x_3=0}=0,\ \frac{\partial\upsilon}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H}=0,\ \upsilon\big|_{t=0}=\upsilon_0(x), \tag{3}$$

где $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2)$, $\hat{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, $\upsilon\big|_r=0$, $\gamma$ *− боковая граница области* $\Omega$. (4)

Задачу (1)-(4) решаем методом фиктивных областей [2], [3].

Согласно методу фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам во вспомогательной области

$$D_T=(0,T)\times D,\qquad D=(0,H)\times(\Omega_1\cup\Omega_0)=\Omega\cup D_0,$$

Строго содержащей в себе $\Omega$ с боковой границей Г, решаем систему уравнений с малым параметром

$$\frac{\partial\upsilon^\varepsilon}{\partial t}=\mu_0\frac{\partial^2\upsilon^\varepsilon}{\partial x_3^2}+\mu\Delta\upsilon^\varepsilon-l\times\upsilon^\varepsilon-\hat{\nabla}\xi^\varepsilon+f-\frac{\xi_0(x)}{\varepsilon}\upsilon^\varepsilon, \tag{5}$$

$$\int_0^H d\hat{i}v\upsilon^\varepsilon dx_3=0,\quad \frac{\partial\xi^\varepsilon}{\partial x_3}=0,\quad \int_D\xi dx=0, \tag{6}$$

$$\upsilon^\varepsilon\big|_{t=0}=\upsilon_0(x), \tag{7}$$

$$\upsilon^\varepsilon\big|_{x_3=0}=0,\qquad \frac{\partial\upsilon^\varepsilon}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H}=0,\qquad \upsilon^\varepsilon\big|_\Gamma=0, \tag{8}$$

где $\xi_0(x)=\begin{cases}0,\ x\in\Omega,\\ 1,\ x\in D_0\end{cases}$

Методы получения неулучшаемой оценки скорости сходимости методом фиктивных областей для линейных параболических уравнений [4] для данных систем непригодны. В данной работе предлагается новый подход для получения точной оценки погрешности между решениями задачи и приближенного решения, полученного методом фиктивных областей.

В дальнейшем через $C$ - будем обозначать различные постоянные, зависящие от данных задачи и постоянных теоремы вложения, но не зависящие от малого параметра ε. Будем использовать обозначения пространств из работы [5].

Введем пространства

$$\hat{C}(D)=\left\{\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in C^2(D),\qquad \int_\partial^H \widehat{div}\varphi dx_3=0,\quad \varphi|_\Gamma=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x_3=H}=0,\varphi|_{x_3=0}=0.\right\}$$

Замыкания в $\widehat{C(D)}$ – в нормах пространств $L_2(D), W_2^1(D), W_2^2(D)$ обозначим через $V_1(D), V_2(D)$ соответственно.

**Определение.** *Сильным решением задачи (5)-(8) называется функция*

$$\upsilon^\varepsilon \in L_2(0,T;\ V_2(D)), \widehat{\nabla}\,\xi^\varepsilon \in L_2\big(0,T;\ L_2(D)\big), \qquad \upsilon_t^\varepsilon \in L_2\big(0,T;\ L_2(D)\big),$$

*удовлетворяющая уравнению (5)-(6) и начально- граничным условиям (7), (8) почти всюду в соответствующей мере.*

Продолжим нулем вне $\Omega$ функцию $\upsilon_0(x), f(x,t)$. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть* $f(x,t) \in L_2\big(0,T;\ L_2(D)\big), \upsilon_0(x) \in V_1(D), \gamma \in C^2$.

*Тогда существует единственное сильное решение задачи (5)-(8) и для решения справедлива оценка*

$$\|\upsilon_t^\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(D))} + \|\upsilon^\varepsilon\|_{L_2(0,T;V_2(D))} + \big\|\widehat{\nabla}\xi^\varepsilon\big\|_{L_2(0,T;L_2(D))} \le C_\varepsilon, \tag{9}$$

$$\|\upsilon^\varepsilon - \upsilon\|_{L_2(0,T;\ L_2(\Omega)} \le C\sqrt{\varepsilon}, \tag{10}$$

*где* $C_\varepsilon \to \infty,\ \varepsilon \to 0, \upsilon$ *- является решением задач (1)-(3). Оценка (10)-неулучшаемая по порядку* $\varepsilon$.

*Метод фиктивных областей с продолжением по старшему коэффициенту.*

Метод фиктивных областей для задачи (1)-(3) с продолжением по старшим коэффициентам сводятся к решению системы дифференциальных уравнений в области $D_T$ .

$$\frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \upsilon^\varepsilon}{\partial x_3^2} + div(\mu^\varepsilon \nabla\, \upsilon^\varepsilon - \delta\xi^\varepsilon) - l \times \upsilon^\varepsilon, \tag{11}$$

$$\int_0^H div\, \upsilon^\varepsilon\, dx_3 = 0, \tag{12}$$

Систему (11), (12) решаем с условиями

$$\upsilon^\varepsilon|_{t=0} = \upsilon_0(x), x \in D, \upsilon^\varepsilon|_\Gamma = 0, t \in (0,T), \tag{13}$$

и условиями согласованиями

$$[\upsilon^\varepsilon]_\tau = 0,\ \left[\mu^\varepsilon \frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial n} - \delta\xi^\varepsilon\right]_\tau = 0, t \in (0,T), \tag{14}$$

где $\delta -$ метрический тензор, $\mu^\varepsilon = \begin{cases} \mu, & x \in \Omega \\ \frac{\mu}{\varepsilon}, & x \in D_0 \end{cases}$

$[\cdot]_\tau -$ означает скачок функции на границе $\gamma$. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть* $\upsilon_0(x) \in V_1(D),\ f \in L_2\big(0,T; L_2(D)\big), \gamma \in C^2$.

*Тогда существует единственное сильное решение задач (11)-(14) и для решения справедливы оценки*

$$\left\|\frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;\ V_1(D))} + \|\upsilon^\varepsilon\|_{L_2(0,T;\ L_2(D))} + \left\|\upsilon_{x_3x_3}^\varepsilon\right\|_{L_2(0\ ,T;\ L_2(D))} \le C < \infty,$$

$$\|\upsilon^\varepsilon\|_{L_2\left(0,T;\ W_2^2(\Omega)\right)} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\upsilon_{x_2x_2}^\varepsilon\right\|_{L_2\left(0\ ,T;\ L_2(D_0)\right)} + \left\|\upsilon_{x_1x_1}^\varepsilon\right\|_{L_2\left(0\ ,T;\ L_2(D_0)\right)} + \big\|\widehat{\nabla}\xi^\varepsilon\big\|_{L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right)} + \tag{15}$$

$$+\big\|\widehat{\nabla}\xi^\varepsilon\big\|_{L_2\left(0,T;L_2(D_0)\right)} + \|\xi^\varepsilon\|_{L_2\left(0,T;L_2(\mathrm{D})\right)} \le C\left(\|\upsilon_0\|_{V_1(D)} + \|f\|_{L_2\left(0,T;\ L_2(D)\right)}\right),$$

$$\|\upsilon^\varepsilon - \upsilon\|_{L_2(0,T;\ L_2(\Omega))} \le C\varepsilon, \tag{16}$$

*где при* $\varepsilon \to 0$ *сильное решение задачи (11)-(14) сходится к сильному решению задач (1)-(3). Оценка близости решения (16) неулучшаемая по порядку* $\varepsilon$.

*Математическое моделирование краевых условий океаналогии с помощью метода фиктивных областей.*

В системах (1), (2) в физических постановках отсутствует граничные условия для функции $\xi(x_1, x_2, t)$ (уровень воды). Этот факт в значительной степени затрудняет создание эффективного численного алгоритма. Далее предлагаем вариант метода фиктивных областей для нелинейной стационарной задачи, где можно поставить граничные условия для функции $\xi(t, x_1, x_2,)$.

Рассмотрим систему нелинейной стационарной модели океана

$$(\vec{\upsilon} \cdot \nabla)\upsilon = \mu_0 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_3^2} + \mu\Delta\upsilon - l \times \upsilon - \hat{\nabla}\xi + f, \tag{17}$$

$$\int_0^H d\widehat{w}\upsilon dx_3 = 0, \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0,$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H} = 0, \qquad \upsilon\Big|_{x_3=0} = 0, \qquad \upsilon\Big|_{\tau} = 0, \tag{18}$$

где

$$\vec{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2, -\int_0^{x_3} d\widehat{i}v\upsilon dx_3).$$

Для задачи (17), (18) в соответствии с методом фиктивных областей сформируем вспомогательную задачу. Предположим, что область $\overline{D} = [0,1]\times[0,1]\times[0,H]$ - прямоуголный параллелепипед.

$$(\vec{\upsilon}\nabla)\upsilon^3 = \mu_0 \frac{\partial^2 \upsilon^\varepsilon}{\partial x_3^2} + \mu\Delta\upsilon^\varepsilon - l \times \upsilon^\varepsilon - \hat{\nabla}\xi^\varepsilon - \frac{\xi_0(x)}{\varepsilon}\upsilon^\varepsilon + f, \tag{19}$$

$$\int_0^H d\widehat{i}v\upsilon^\varepsilon dx_3 = 0, \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_3} = 0, \tag{20}$$

По переменным $x_1$, $x_2$ - поставим условия периодичности для функций $\xi^\varepsilon$, $\upsilon^\varepsilon$

$$\frac{\partial^k \xi^\varepsilon}{\partial x_i^k}\Bigg|_{x_i=0} = \frac{\partial^k \xi^\varepsilon}{\partial x_i^k}\Big|_{x_i=1}, \qquad \text{k=0,1,} \quad \text{i=1,2,} \tag{21}$$

$$\frac{\partial^k \upsilon}{\partial x_i^k}\Bigg|_{x_i=0} = \frac{\partial^k \upsilon^\varepsilon}{\partial x_i^k}\Big|_{x_i=1}, \qquad \text{k=0,1,} \quad \text{i=1,2,} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H} = 0, \qquad \upsilon^\varepsilon\Big|_{x_3=0} = 0. \tag{23}$$

Относительно разрешимости задач имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** *Если* $f \in L_2(D)$, $\gamma \in C^2$. *То существует хотя бы одно сильное решение задач (19)-(23) и для решения справедливы оценки*

$$\|\upsilon^\varepsilon\|_{V_1(D)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\upsilon^\varepsilon\|_{L_2(D_0)} \le C\|f\|_{L_2(D)}, \|\upsilon^\varepsilon\|_{W_2^2\cap V_1(D)} \le C_\varepsilon\|f\|_{L_2(D)}, \ \|\upsilon - \upsilon^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \le C\sqrt{\varepsilon}, \tag{24}$$

*при малом* $\|f\|_{L_2(D)}$, *где* υ− *является решением задач (17)-(18)* $C_\varepsilon \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Заметим, что при численном решении относительно $\xi^\varepsilon$ − получаем уравнения Пуассона с разрывными коэффициентами, зависящими от малого параметра. Здесь можно применить итерационные методы, предложенные в работе [2], в которых скорости сходимости не зависят от изменения малого параметра $\varepsilon$ . Аналогично можно исследовать метод фиктивных областей с продолжением по старшему коэффициенту с граничными условиями (21)-(23). Получена точная оценка скорости сходимости

$$\|\upsilon^{\varepsilon} - \upsilon\|_{L_2(\Omega)} \le C\varepsilon. \tag{25}$$

Наконец, рассмотрим математическое моделирование краевых условий методом фиктивных областей для нестационарных уравнения океанологии

$$\frac{\partial \upsilon^{\varepsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\varepsilon\nabla)\upsilon^{\varepsilon} = \mu_0 \frac{\partial^2 \upsilon^{\varepsilon}}{\partial x_3^3} + \mu\Delta\upsilon^{\varepsilon} - \widehat{\nabla}\xi + f - \frac{\xi_0(x)\upsilon^{\varepsilon}}{\varepsilon}, \qquad \int_0^H \widehat{div}\upsilon^{\varepsilon} dx_3 = 0, \tag{26}$$

с граничными условиями (21), (22) и

$$\upsilon^{\varepsilon}\big|_{t=0} = \upsilon, \quad \upsilon^{\varepsilon}\big|_{x_3=0} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon^{\varepsilon}}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H} = 0.$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть* $f(x,t) \in L_2\big(0,T;L_2(D)\big), \gamma \in C^2, \upsilon_0(x) \in V_1(D)$.

*Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задач (26), (27), (21), (22) и для решения справедлива оценка.*

$$\|\upsilon^{\varepsilon}\|_{L_\infty(0,T;\,L_2(D))} + \|\upsilon^{\varepsilon}\|_{L_2(0,T;\,V_1(D))} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\upsilon^{\varepsilon}\|_{L_2(0,T;\,L_2(D))} \le C < \infty,$$

и обобщенное решение сходится обобщенному решению нестационарной модели океана при $\varepsilon \to 0$ со скоростью

$$\|\upsilon^{\varepsilon} - \upsilon\|_{L_{2(0,T;\,L_2}(\Omega)} \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

*Список использованной литературы:*

1 *Каменкович В.М., Кошляков М.Н., Монин А.С. Синоптические вихри в океане. МГУ, 2014, - 216 с.*

2 *Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М: Мир, 2016. Т. 1, 398с.; Т.2, - 416 с.*

3 *Тукенова Л.М. Приближенное решение для краевой задачи океана. // Вестник КазНИТУ №6. 2018. Стр. 440-446.*

4 *Кукуджанов В.*

5 *Н. Численное методы в механике сплошных сред. Учебное пособие. – М: «МАТИ» - РГТУ, 2016. -158 с.*

6 *Журавков М.А., Круподеров А.В., Щербаков С.С. Гранично-элементное моделирование в механике. Минск: БГУ, 2017. – 174 с.*

*References:*

1 *Kamenkovich V.M., Koshljakov M.N., Monin A.S. (2014) Sinopticheskie vihri v okeane [Synoptic vortices in the ocean]. MGU, 216. (In Russian)*

2 *Gill A.( 2016) Dinamika atmosfery i okeana [Dynamics of the atmosphere and ocean]. M: Mir, T. 1, 398, T.2,416.*

3 *Tukenova L.M. (2018) Priblizhennoe reshenie dlja kraevoj zadachi okeana [Approximate solution for the ocean boundary value problem]. Vestnik KazNITU №6,440-446. (In Russian)*

4 *Kukudzhanov V.N.( 2016) Chislennoe metody v mehanike sploshnyh sred [Numerical methods in continuum mechanics]. Uchebnoe posobie. M. «MATI» - RGTU, 158. (In Russian)*

6 *Zhuravkov M.A., Krupoderov A.V., Shherbakov S.S. (2017) Granichno-jelementnoe modelirovanie v mehanike [Boundary-element modeling in mechanics].Minsk. BGU, 174. (In Russian)*