МРНТИ 27.25.19
УДК 517.51

https://doi.org/10.51889/2022-2.1728-7901.04

А.Б. Утесов

Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан
adilzhan_71@mail.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ ПО ИХ НЕТОЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ

Аннотация

Одним из основных понятий разделов математики, именуемые «Численный анализ» и «Теория приближений», является понятие «поперечник». В зависимости от поставленных целей рассматриваются различные поперечники. В данной работе в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника, нацеленного на отыскание наилучших вычислительных агрегатов для реализации на компьютерах, изучена задача оптимального интегрирования функций из многомерного 1-периодического анизотропного класса Соболева. Именно, когда в качестве числовой информации выступают значения рассматриваемой функции в конечном числе точек, во - первых, установлен точный порядок погрешности оптимального интегрирования и выписан конкретный вычислительный агрегат, реализующий установленный точный порядок; во - вторых, найдена предельная погрешность конкретного оптимального вычислительного агрегата; в - третьих, доказано, что любой вычислительный агрегат, построенный по значениям функции в конечном числе точек, не имеет лучшую (по порядку) предельную погрешность, чем предельной погрешности выписанного конкретного вычислительного агрегата.

Ключевые слова: компьютерный (вычислительный) поперечник, числовая информация, значения функции, предельная погрешность вычислительного агрегата, точный порядок погрешности интегрирования, анизотропный класс Соболева.

Аңдатпа

Ә.Б. Өтесов

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

ФУНКЦИЯЛАРДЫ ОЛАРДЫҢ ДӘЛ ЕМЕС МӘНДЕРІ БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАУ ТУРАЛЫ

Математиканың «Сандық анализ» және «Жуықтаулар теориясы» атауларына ие бөлімдерінің негізгі ұғымдарының бірі – «диаметр» ұғымы. Қойылған мақсатқа байланысты әртүрлі диаметрлер қарастырылады. Бұл жұмыста компьютерлерде іске асыруға болатын ең жақсы есептеу агрегаттарын табуға бағытталған компьютерлік (есептеуіш) диаметрі аясында көпөлшемді 1- периодты анизотропты Соболев класында жататын функцияларды оптималды интегралдау есебі зерттелген. Дәл айтқанда, сандық мәлімет ретінде қарастырылып отырылған функцияның саны ақырлы нүктелердегі мәндері алынғанда, біріншіден, оптималды интегралдау нәтижесінде пайда болатын қателіктің дәл реті анықталған және сол дәл ретті жүзеге асыратын нақты есептеу агрегаты ұсынылған; екіншіден, нақты есептеу агрегатының шектік қателігі табылған; үшіншіден, функцияның саны ақырлы нүктелердегі мәндері бойынша құрылған әрбір есептеу агрегатының шектік қателігі ұсынылған нақты есептеу агрегатының шектік қателігінен жақсы болмайтыны (реті бойынша) дәлелденген.

Түйін сөздер: компьютерлік (есептеуіш) диаметр, сандық мәлімет, функция мәндері, есептеу агрегатының шектік қателігі, интегралдау қателігінің дәл реті, анизотропты Соболев класы.

Abstract

ON OPTIMAL INTEGRATION OF FUNCTIONS BY THEIR INEXACT VALUES

Utessov A.B.

Aktobe regional university named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

One of the main concepts of the sections of mathematics called «Numerical Analysis» and «Approximation Theory» is the concept of "diameter". Depending on the goals set, various diameters are considered. In this work, in the context of the Computational (numerical) diameter, aimed at finding the best computing units for implementation on computers, the problem of optimal integration of functions from the multidimensional 1-periodic anisotropic Sobolev class is studied. Namely, when the values of the function under consideration at a finite number of points act as numerical information, firstly, the exact order of the optimal integration error is established and a specific computing unit is written that implements the established exact order; secondly, the limit error of a specific optimal computing unit was found; thirdly, it has been proved that any computing unit constructed from the values of the function at a finite number of points does not have a better (in order) limit error than the limit error of the specific computing unit written out.

Keywords: computational (numerical) diameter, numerical information, the values of the function, the limit error of the computing unit, the exact order of the integration, anisotropic Sobolev class.

§1. Постановка задачи и формулировка теоремы

Следуя работам [1-3] сформулируем задачу оптимального интегрирования функций вычислительными агрегатами, построенными по неточной числовой информации о них в рамках постановки под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» (коротко: К(В)П).

Пусть даны $N \in \mathrm{N}$, класс F функций, определенных на Ω, числовая информация $l^{(N)} \equiv l^{(N)}(f) = \left(l_N^{(1)}(f),\dots,l_N^{(N)}(f)\right)$ объема N о функции $f \in F$, которая снимается с функционалов $l_N^{(1)}: F \mapsto C,\dots,l_N^{(N)}: F \mapsto C$ и функция $\varphi_N(z_1,\dots,z_N): C^N \mapsto C$ – алгоритм переработки числовой информации $l^{(N)}$. Далее, символом $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ обозначается вычислительный агрегат интегрирования $\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f),\dots,l_N^{(N)}(f)\right)$, а символом D_N – множество всех вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$.

При заданных F и D_N для последовательности $\varepsilon_N \geq 0$ положим

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N; F) \equiv \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right) \in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)},\varphi_N\right); F\right),$$

где $\delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)},\varphi_N\right); F\right) \equiv$

$$\equiv \sup_{\substack{f \in F, \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \leq 1 (\tau = 1,\dots,N)}} \left| \int_\Omega f(x)dx - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N,\dots,l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N\right) \right|.$$

Всюду ниже запись $A \underset{\alpha,\beta,\dots}{<<} B$ будет означать существование некоторой положительной величины $C(\alpha,\beta,\dots)$, зависящей лишь от переменных указанных в скобке, такой, что $|A| \leq C(\alpha,\beta,\dots)B$. При одновременном выполнении соотношений $A \underset{\alpha,\beta,\dots}{<<} B$ и $B \underset{\alpha,\beta,\dots}{<<} A$ пишется $A \underset{\alpha,\beta,\dots}{\succ\prec} B$.

Проблема оптимального интегрирования функций вычислительными агрегатами, построенными по неточной числовой информации о них, в рамках К(В)П – постановки заключается в последовательном решении следующих трех задач:

К(В)П-1. Устанавливается точный порядок величины $\delta_N(0; D_N; F)$ (т.е. находится последовательность $\{\psi_N\}_{N \geq 1}$, удовлетворяющая соотношению $\delta_N(0; D_N; F) \underset{\alpha,\beta,\dots}{\succ\prec} \psi_N$, здесь в качестве $\alpha,\beta,\dots$ берутся параметры класса F) и указывается конкретный вычислительный агрегат $\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right) \equiv \tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),\dots,\tilde{l}_N^{(N)}(f)\right)$ такой, что $\delta_N(0; \tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N); F) \underset{\alpha,\beta,\dots}{\succ\prec} \psi_N$ (в этом случае говорят, что вычислительный агрегат $\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)$ реализует точный порядок ψ_N).

К(В)П-2. Для вычислительного агрегата $\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)$ находится величина $\tilde{\varepsilon}_N > 0$, предельная погрешность вычислительного агрегата $\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)$, такая, что

$$\delta_N(0; D_N; F) \succ\prec \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; (\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N); F) =$$

$$= \sup_{\substack{f \in F, \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 (\tau = 1,..., N)}} \left| \int_{\Omega} f(x)dx - \tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N, ..., \tilde{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N\right) \right|$$

с одновременным выполнением для любой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N\ge 1}$ равенства

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \, \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right); F\right) \Big/ \delta_N(0; D_N; F) = +\infty;$$

К(В)П-3. Устанавливается массивность предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N$: находится как можно большое множество вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$ таких, что для каждого из которых при любой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N\ge 1}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \, \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right); F\right) \Big/ \delta_N(0; D_N; F) = +\infty.$$

Конкретизируя в $\delta_N(\varepsilon_N; D_N; F)$ множество D_N, класс F получаем различные задачи интегрирования в рамках К(В)П – постановки.

В данной работе задачи К(В)П - 1, - 2 и -3 решены при интегрировании фунций из анозотропного класса Соболева $W_2^r \equiv W_2^{r_1,...,r_s}(0,1)^s$ (определение класса W_2^r см., напр. в [4]) вычислительными агрегатами из

$$D_N = P_N \equiv \left\{ (l^{(N)}, \varphi_N) : l_N^{(\tau)}(f) = f\left(\xi_N^{(\tau)}\right), \tau = 1,..., N \right\},$$

где $\xi_N^{(1)} \in [0,1]^s, ..., \xi_N^{(N)} \in [0,1]^s$.

Здесь же подчеркнем, что ранее при оптимальном интегрировании функций на классах изучалась только задача К(В)П-1 (см., напр. [5], [6], а также [7, Глава 8]).

Справедлива

Теорема. Пусть $s = 2,3,...$ и $\lambda \equiv \lambda(r_1,...,r_s) = (1/r_1 + ... + 1/r_s)^{-1} > 1/2$ для любого вектора $r = (r_1,...,r_s)$ с положительными компонентами. Тогда для каждого

$$N \equiv N(K) = \prod_{i=1}^{s} N_i, \text{ где } N_i = \left[K^{\lambda/r_i}\right], K \in \mathrm{N},$$

имеют место следующие утверждения:

К(В)П-1. $\delta_N\left(0; P_N; W_2^r\right) \underset{s,r}{\succ\prec} \frac{1}{N^\lambda}$, причем указанный порядок реализуется вычислительным агрегатом $\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right)$ с функцией $\tilde{\varphi}_N(z_1,...,z_N) = (N_1...N_s)^{-1} \sum_{\tau=1}^{N} z_\tau$ и функционалами

$$\tilde{l}_N^{(1)}(f) = f\left(\tilde{\xi}_N^{(1)}\right), ..., \tilde{l}_N^{(N)}(f) = f\left(\tilde{\xi}_N^{(N)}\right),$$

где $\left\{\tilde{\xi}_N^{(\tau)}\right\}_{\tau=1}^{N}=\left\{\left(\frac{n_1}{N_1},\ldots,\frac{n_s}{N_s}\right): n_1\in\{1,\ldots,N_1\},\ldots,n_s\in\{1,\ldots,N_s\}\right\}$;

К(В)П-2. Для вычислительного агрегата $\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)$ величина $\tilde{\varepsilon}_N=N^{-\lambda}$ является предельной погрешностью, т.е. $\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right);W_2^r\right)\underset{s,r}{\succ\prec}\delta_N\left(0;P_N;W_2^r\right)$ и для любой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N\ge1}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right);W_2^r\right)\Big/\delta_N\left(0;P_N;W_2^r\right)=+\infty;$$

К(В)П -3. Всякий вычислительный агрегат $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)=\varphi_N\left(f\left(\xi_N^{(1)}\right),\ldots,f\left(\xi_N^{(N)}\right)\right)$, построенный по значениям функции f в N точках $\xi_N^{(1)},\ldots,\xi_N^{(N)}$, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N=N^{-\lambda}$.

Замечание 1. Сформулированная выше теорема анонсирована в [8].

Замечание 2. Оценка снизу в К(В)П -1 получена при целых $r_1>0,\ldots,r_s>0$.

§2. Доказательство теоремы

Для конечного множества E через $|E|$ обозначим количество его элементов. Как обычно, $[a]$ есть целая часть числа a. Всюду $m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s$.

Доказательство теоремы 1 начнем с получения требуемой оценки сверху для величин $\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right);W_2^r\right)$. Поскольку условие $\lambda>1/2$ обеспечивает равномерную сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f\in W_2^r$ (см. лемму из [4]), то

$$f\left(\frac{n_1}{N_1},\ldots,\frac{n_s}{N_s}\right)=\sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m_1(n_1/N_1)+\ldots+m_s(n_s/N_s))}.$$

Поэтому, в силу леммы 1 из [9, стр. 18 – 19]), получим

$$\frac{1}{N_1\ldots N_s}\sum_{n_1=1}^{N_1}\ldots\sum_{n_s=1}^{N_s}f\left(\frac{n_1}{N_1},\ldots,\frac{n_s}{N_s}\right)=\sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m)\left(\frac{1}{N_1}\sum_{n_1=1}^{N_1}e^{2\pi i m_1(n_1/N_1)}\right)\times\ldots$$

$$\times\left(\frac{1}{N_s}\sum_{n_s=1}^{N_s}e^{2\pi i m_s(n_s/N_s)}\right)=\sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m_1N_1,\ldots,m_sN_s).$$

Следовательно, учитывая равенство $\hat{f}(0,\ldots,0)=\int_{[0,1]^s}f(x)dx$, имеем

$$\int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx-\tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f)\right)=-\sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m_1N_1,...,m_sN_s),$$

откуда

$$\left|\int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx-\tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f)\right)\right|\le\sum_{m\in Z^s\setminus\{0\}}\left|\hat{f}(m_1N_1,...,m_sN_s)\right|. \qquad (1)$$

В силу неравенства Гельдера, определения класса и чисел $N_1,...,N_s$, с учетом сходимости кратного ряда $\sum\limits_{m\in Z^s}\left(\bar{m}_1^{2r_1}+...+\bar{m}_s^{2r_s}\right)^{-1}$ при $\lambda>1/2$, получим

$$\sum_{m\in Z^s\setminus\{0\}}\left|\hat{f}(m_1N_1,...,m_sN_s)\right|\underset{s,r}{<<}\frac{1}{N^\lambda}.$$

Стало быть, согласно (1), справедливо

$$\sup_{f\in W_2^r}\left|\int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx-\tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f)\right)\right|\underset{s,r}{<<}\frac{1}{N^\lambda}. \qquad (2)$$

Так как для любой функции $f\in W_2^r$ имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx-\tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N,...,\tilde{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N\right)\right|\le$$

$$\le\left|\int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx-\tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f)\right)\right|+\frac{\tilde{\varepsilon}_N}{N_1\times\cdots\times N_s}\sum_{\tau=1}^{N}\left|\gamma_N^{(\tau)}\right|,$$

то, отсюда, с учетом (2), получим

$$\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right);W_2^r\right)\underset{s,r}{<<}\frac{1}{N^\lambda}. \qquad (3)$$

Теперь при целых положительных значениях $r_1,...,r_s$ оценим снизу величину $\delta_N\left(0;P_N;W_2^r\right)$ по методу, использованному при получении оценки снизу для погрешности оптимального интегрирования функций на классе $C_{r_1,...,r_s}(A)$ (см., напр. [10, стр. 230 – 233]).

Пусть для каждого $N\in\mathrm{N}$ произвольно заданы функция $\varphi_N:C^N\to C$ и функционалы $l_N^{(1)}(f)=f\left(\xi_N^{(1)}\right),...,l_N^{(N)}(f)=f\left(\xi_N^{(N)}\right)$.

Положим $M_i = 2\cdot\left(\left[N^{\lambda/r_i}\right]+1\right), i\in\{1,\ldots,s\}.$ Далее, разобъем куб $[0,1]^s$ на равных параллелепипедов $\Pi_{m_1,\ldots,m_s} = \prod_{i=1}^{s}\left[\frac{m_i-1}{M_i},\ldots,\frac{m_i}{M_i}\right], m_i\in\{1,\ldots,M_i\}$ и определим функции

$$\psi_{m_1,\ldots,m_s}(x) = \frac{1}{N^\lambda}\prod_{i=1}^{s}\psi(M_i x_i - m_i + 1), x\in\Pi_{m_1,\ldots,m_s},$$

где ψ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на $[0,1]$ такая, что

$$\max_{x\in[0,1]}\psi(x)=1, \psi(0)=\psi(1)=0.$$

Рассмотрим функцию $f_N:[0,1]^s\to R,$ определенную следующим образом: если $x\in[0,1]^s$ принадлежит параллелепипеду, содержащему хотя бы одну точку $\xi_N^{(1)},\ldots,\xi_N^{(N)}$, то положим $f_N(x)=0;$ если же точка $x\in[0,1]^s$ принадлежит параллелепипеду $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}$, свободному от точек $\xi_N^{(1)},\ldots,\xi_N^{(N)}$, то положим $f_N(x)=\psi_{m_1,\ldots,m_s}(x).$

Пусть f_N^* есть 1 – периодическое продолжение функции $f_N:[0,1]^s\to R.$ Так как в любой точке $x\in[0,1]^s$ все производные $\frac{\partial^{r_i} f_N}{\partial x_i^{r_i}}(x), i=1,\ldots,s$ по модулю не превосходят некоторое число $C(s,r_1,\ldots,r_s)>0,$ то имеет место включение $f_N^*\in W_2^r.$ Для любого $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}$ имеем

$$\int\limits_{\Pi_{m_1,\ldots,m_s}}\psi_{m_1,\ldots,m_s}(x)\,dx = \frac{1}{N^\lambda}\prod_{i=1}^{s}\int\limits_{(m_i-1)/M_i}^{m_i/M_i}\psi(M_i x_i - m_i+1)\,dx_i =$$

/ произведем замену переменных: $u_i = M_i x_i - m_i + 1$ /

$$=\frac{(M_1\times\cdots\times M_s)^{-1}}{N^\lambda}\left(\int\limits_0^1\psi(x)\,dx\right)^s = C(s)\frac{(M_1\times\cdots\times M_s)^{-1}}{N^\lambda}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{[0,1]^s} f_N(x)\,dx \gg_s \frac{1}{N^\lambda}, \tag{4}$$

поскольку количество параллелепипедов $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}$, не содержащих ни одной точки $\xi_N^{(1)},\ldots,\xi_N^{(N)}$ не меньше, чем $M_1\times\cdots\times M_s - N$ и $M_1\times\cdots\times M_s - N \ge (2^s-1)N.$

Тогда, с учетом равенств $f_N^*\left(\xi_N^{(1)}\right)=0,\ldots, f_N^*\left(\xi_N^{(N)}\right)=0$ и включение $f_N^*\in W_2^r$, имеем

$$\sup_{f}\left\{\left|\int\limits_{[0,1]^s} f(x)-\varphi_N\left(f\left(\xi_N^{(1)}\right),\dots,f\left(\xi_N^{(N)}\right)\right)\right| : f\in W_2^r\right\}\ge$$

$$\ge \max\left\{\left|\int\limits_{[0,1]^s} f_N^*(x)\,dx-\varphi_N(0,\dots,0)\right|,\left|\int\limits_{[0,1]^s}(-f_N^*)(x)\,dx-\varphi_N(0,\dots,0)\right|\right\}\ge \int\limits_{[0,1]^s} f_N(x)dx.$$

Отсюда, в силу (4), получим

$$\delta_N\left(0;P_N;W_2^r\right) \underset{s,r}{>>} \frac{1}{N^{\lambda}}. \tag{5}$$

Так как для всех $\varepsilon_N\ge 0,\ F, D_N$ и $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N$ имеют место неравенства

$$\delta_N(0;D_N;F)\le \delta_N\left(0;\left(l^{(N)},\varphi_N\right);F\right)\le \delta_N\left(\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right);F\right),$$

то из (3) и (5) вытекают доказательства К(В)П-1 и первой части К(В)П-2.

Теперь убедимся в том, что для всех $(l^{(N)},\varphi_N)\in P_N$ при любой возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}_{N\ge 1}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right);W_2^r\right)\Big/\delta_N\left(0;P_N;W_2^r\right)=+\infty. \tag{6}$$

Заметим, что установив справедливость равенства (6) мы одновременно докажем К(В)П-3 и вторую часть К(В)П-2, и тем самым завершаем доказательство теоремы.

Пусть дана возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность $\{\eta_N\}_{N\ge 1}$.

Положим $\beta_N=\min\{\eta_N,\ln N\}$ и для каждого $N=2,3,\dots$ определим функцию $t_N(x)=\tilde{\varepsilon}_N\beta_N$.

Поскольку $\hat{t}_N(m)=0$ для всех $m\ne 0$ и $\hat{t}_N(0)=\int\limits_0^1\tilde{\varepsilon}_N\beta_N dx\le\tilde{\varepsilon}_N\beta_N\le\dfrac{\ln N}{N^{\lambda}}\le 1,$

то функция $t_N^*(x)=\dfrac{1}{s}\tilde{\varepsilon}_N\beta_N$ принадлежит классу W_2^r.

Так как для чисел $\bar{\gamma}_N^{(i)}=-\dfrac{l_N^{(i)}(t_N^*)}{\tilde{\varepsilon}_N\eta_N}$ и $\bar{\bar{\gamma}}_N^{(i)}=-\dfrac{l_N^{(i)}(-t_N^*)}{\tilde{\varepsilon}_N\eta_N},\ i\in\{1,2,\dots,N\}$ выполнены неравенства

$$\left|\bar{\gamma}_N^{(1)}\right|\le 1,\dots,\left|\bar{\gamma}_N^{(N)}\right|\le 1,\left|\bar{\bar{\gamma}}_N^{(1)}\right|\le 1,\dots,\left|\bar{\bar{\gamma}}_N^{(N)}\right|\le 1$$

и равенства

$$l_N^{(i)}(t_N^*)+\bar{\gamma}_N^{(i)}\tilde{\varepsilon}_N\eta_N=0,\ l_N^{(i)}(-t_N^*)+\bar{\bar{\gamma}}_N^{(i)}\tilde{\varepsilon}_N\eta_N=0,$$

то

$$\sup_{\substack{f \in F, \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1(\tau=1,\dots,N)}} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,\dots,l_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N\right)\right| \ge$$

$$\ge \max\left\{\left|\int\limits_{[0,1]^s} t_N^*(x)dx - \varphi_N\left(l_N^{(1)}\left(t_N^*\right)+\bar{\gamma}_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,\dots,l_N^{(N)}\left(t_N^*\right)+\bar{\gamma}_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|\int\limits_{[0,1]^s} (-t_N^*(x))dx - \varphi_N\left(l_N^{(1)}\left(-t_N^*\right)+\bar{\bar{\gamma}}_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,\dots,l_N^{(N)}\left(-t_N^*\right)+\bar{\bar{\gamma}}_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N\right)\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|\int\limits_{[0,1]^s} t_N^*(x)dx - \varphi_N(0,\dots,0)\right|, \left|\int\limits_{[0,1]^s} t_N^*(x)dx - \varphi_N(0,\dots,0)\right|\right\} \underset{s}{>>} \tilde{\varepsilon}_N\beta_N,$$

откуда, учитывая соотношение $\tilde{\varepsilon}_N = \frac{1}{N^\lambda} \underset{s,r}{\succ\prec} \delta_N\left(0; P_N; W_2^r\right)$, имеем

$$\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right); W_2^r\right) \underset{s}{>>} \delta_N(0; P_N; W_2^r)\beta_N.$$

Из этого неравенства следует (6), поскольку $\lim\limits_{N\to\infty} \beta_N = +\infty$. Теорема доказана.

Список использованной литературы:

1 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Computational (Numerical) diameter in the context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ),N1, 89 - 97(2019). https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-89-97

2 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. Order Estimates of the Norms of derivates of Functions with Zero Values of Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 61(3), 77 – 82 (2017). DOI: 10.3103/S1066369X17030100

3 Temirgaliev N., ZhubanishevaA. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432- 1443(2015). https://doi.org/10.1134/S0965542515090146

4 Утесов А.Б., Абдыкулов А.Т. Полное К(В)П – исследование задачи восстановления функций из анизотропных классов Соболева по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, №1(122)/2018, стр. 90 - 98.

5 Nurmoldin E.E. Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the Ul`yanov U_2 – classes, Sib. Zh. Vychisl. Mat.,8(4), 337- 351(2005).

6 Temirgaliev N., S.S. Kudaibergenov, and A.A.Shomanova. An application of tensor product of functionals in problems of numerical integration. Izvestiya: Mathematics, 73(2) , 393- 434(2009). DOI 10.1070/IM2009v073n02ABEH002451.

7 Dinh Dung, Vladimir N. Temlyakov, Tino Ullrich. Hyperbolic Cross Approximation. arXiv: 1601.03978v1[math. NA]. 15 Jan 2016. p. 1- 154.

8 Утесов А.Б.Об оптимальном интегрировании функций из анизотропных классов Соболева в рамках К(В)П – постановки. Сборник трудов XII Межд. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий», Воронеж, 25-28 сентября, 2019 г., стр. 378 - 380.

9 Коробов Н.М. Теоретико - числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.

10 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., 1987.

References:

1 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Computational (Numerical) diameter in the context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ),N1, 89 - 97(2019). https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-89-97

2 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. Order Estimates of the Norms of derivates of Functions with Zero Values of Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 61(3), 77 – 82 (2017). DOI: 10.3103/S1066369X17030100

3 Temirgaliev N., ZhubanishevaA. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432- 1443(2015). https://doi.org/10.1134/S0965542515090146

4 Utesov A.B., Abdykulov A.T. Polnoe K(V)P – issledovanie zadachi vosstanovlenija funkcij iz anizotropnyh klassov Soboleva po netochnym znachenijam ih trigonometricheskih kojefficientov Fur'e[The complete C(N)D-solution of the problem recovery of functions from anisotropic Sobolev classes by their unexact trigonometric Fourier coefficients]. Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, №1(122)/2018, str. 90 - 98. (In Russian)

5 Nurmoldin E.E. Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the Ul`yanov U_2- *classes, Sib. Zh. Vychisl. Mat.,8(4), 337- 351(2005).*

6 Temirgaliev N., S.S. Kudaibergenov, and A.A.Shomanova. An application of tensor product of functionals in problems of numerical integration. Izvestiya: Mathematics, 73(2), 393- 434(2009). DOI 10.1070/IM2009v073n02ABEH002451.

7 Dinh Dung, Vladimir N. Temlyakov, Tino Ullrich. Hyperbolic Cross Approximation. arXiv: 1601.03978v1[math. NA]. 15 Jan 2016. p. 1- 154.

8 Utesov A.B. Ob optimal'nom integrirovanii funkcij iz anizotropnyh klassov Soboleva v ramkah K(V)P – postanovki [On the integration of functions from anisotropic Sobolev classes in the framework of the C(N)D - statement]. Sbornik trudov XII Mezhd. konf. «Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternyh tekhnologij», Voronezh, 25-28 sentyabrya, 2019 g., str. 378 - 380. (In Russian)

9 Korobov N.M. Teoretiko - chislovye metody v priblizhennom analize [Numerical - theoretic methods in approximate analysis]. M., 1963.(In Russian)

10 Bahvalov N.S., ZHidkov N.P., Kobel'kov G.M. CHislennye metody [Numerical methods]. M., 1987.(In Russian)