МРНТИ 27.25.19
УДК 517.51

https://doi.org/10.51889/2022-2.1728-7901.03

Г.И. Утесова[1], А.Б. Утесов[1]*

[1]Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
**ugi_a@mail.ru*

ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМДЕРІН КОМПЬЮТЕРЛІК (ЕСЕПТЕУІШ) ДИАМЕТР ЗЕРТТЕУІ АЯСЫНДА ДИСКРЕТТЕУ

Аңдатпа

Көп жағдайда дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің шешімдері ақырсыз объектілер құрамына кіретін қатарлар немесе интегралдар түрінде бейнеленеді. Сондықтан дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің қатарлар немесе интегралдар түріндегі шешімдерін жуықтау (дискреттеу) мәселесі туындайды.

Бұл жұмыста бастапқы шарты функционалдық $W_2^{r,\alpha}$ класында жататын жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімін (еселі қатар түріндегі) $W_2^{r,\alpha}$ класында анықталған сызықтық функционалдардың мәндері бойынша құрылған есептеу агрегаттарымен дискреттеу есебі $L^{\infty,q}, 2 \le q \le \infty$ кеңістігі метрикасында «Компьютерлік (есептеуіш) диаметр» деген атауға ие зерттеу схемасы бойынша шешілген. Ашып айтқанда, біріншіден, шешімді дискретизациялаудағы ең кіші қателіктің дәл реті анықталып, осы анықталған дәл ретті жүзеге асыратын есептеу агрегаты ұсынылған; екіншіден, ұсынылған есептеу агрегатының шектік қателігі табылған; үшіншіден, алғашқы шарттың тригонометриялық Фурье коэффициенттері арқылы құрылған кез келген есептеу агрегатының шектік қателігі ұсынылған есептеу агрегатының шектік қателігінен реті бойынша жақсы болмайтынына көз жеткізілген.

Түйін сөздер: компьютерлік (есептеуіш) диаметр, жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімдерін дискреттеу, сызықтық функционал, есептеу агрегатының шектік қателігі, функциялар класы, тригонометриялық Фурье коэффициенттері.

Аннотация

Г.И. Утесова[1], А.Б. Утесов[1]
[1]Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КОНТЕКСТЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК

Во многих случаях решения дифференциальных уравнений с частными производными представляются рядами или интегралами, являющимися бесконечными объектами. Поэтому возникает проблема приближения (дискретизации) решений дифференциальных уравнений с частными производными, представляющихся рядами или интегралами.

В данной работе по схеме исследования под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» в метрике пространства $L^{\infty,q}, 2 \le q \le \infty$ решена задача дискретизации решений (представляющихся кратными рядами) уравнения теплопроводности с начальным условием из функционального класса $W_2^{r,\alpha}$ вычислительными агрегатами, построенными по значениям линейных функционалов, определенных на классе $W_2^{r,\alpha}$. Именно, во-первых, установлен точный порядок дискретизации решения и предложен вычислительный агрегат, реализующий установленный точный порядок; во-вторых, найдена предельная погрешность предложенного вычислительного агрегата; в-третьих, доказано, что предельная погрешность любого вычислительного агрегата, построенного по тригонометрическим коэффициентам Фурье начального условия, не лучше по порядку, чем предельной погрешности предложенного вычислительного агрегата.

Ключевые слова: компьютерный (вычислительный) поперечник, дискретизация решений уравнения теплопроводности, линейный функционал, предельная погрешность вычислительного агрегата, класс функций, тригонометрические коэффициенты Фурье.

Abstract

DISCRETIZATION OF SOLUTIONS TO THE HEAT EQUATION IN THE CONTEXT OF THE STUDY COMPUTATIONAL (NUMERICAL) DIAMETER

Utessova G.I.[1], Utessov A.B.[1]

[1]Aktobe regional university named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

In many cases, solutions to partial differential equations are represented by series or integrals, which are infinite objects. Therefore, the problem of approximation (discretization) of solutions of differential equations with partial derivatives, represented by series or integrals, arises.

In this work, according to the research scheme called "Computational (numerical) diameter" in the metric of space $L^{\infty,q}, 2\le q\le\infty$, we solve the problem of discretization of solutions (represented by multiple series) of the heat equation with an initial condition from the functional class $W_2^{r,\alpha}$ by computing units constructed from the values of linear functionals defined on the class $W_2^{r,\alpha}$. Namely, firstly, the exact order of discretization of the solution is established and a computing unit is proposed that implements the established exact order; secondly, the limiting error of the proposed computing unit was found; thirdly, it has been proved that the limiting error of any computing unit constructed from the trigonometric Fourier coefficients of the initial condition is no better in order than the limiting error of the proposed computing unit.

Keywords: computational (numerical) diameter, discretization of solutions of the heat equation, linear functional, limiting error of a computing unit, class of functions, trigonometric Fourier coefficients.

§1. $W_2^{r,\alpha}$ класы анықтамасы және Компьютерлік (есептеуіш) диаметр зерттеуі

Алдымен төменде пайдаланылатын белгілеулерді келтірейік. $u(t,x;f)$ символымен жылуөткізгіштік

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2},(s=1,2,\ldots,0\le t<+\infty,x\in R^s)$$

теңдеуінің $u(0,x_1,\ldots,x_s)=f(x_1,\ldots,x_s)$ шартын қанағаттандыратын шешімін таңбалаймыз.

$\hat{f}(m)$ символымен әрбір айнымалысы бойынша бірпериодты $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$ функциясының тригонометриялық Фурье коэффициентін белгілейміз, яғни, әрбір $m\in Z^s$ үшін

$$\hat{f}(m)=\int\limits_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx, \quad \text{мұндағы } (m,x)\ -\ m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s$$

және

$x=(x_1,\ldots,x_s)\in R^s$ векторларының скалярлық көбейтіндісі, яғни, $(m,x)=m_1x_1+\ldots+m_sx_s$.

Төменде $[a]$ символымен әдеттегідей a санының бүтін бөлігі таңбаланады.

Енді $W_2^{r,\alpha}$ класы анықтамасын келтірейік (қараңыз, [1]).

Бүтін $s\ge 2$ саны, $r=(r_1,\ldots,r_s), r_1>0,\ldots,r_s>0$ және $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s),\alpha_1\in R,\ldots,\alpha_s\in R$ векторлары беріліп, әрбір $m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s$ үшін $\overline{m}_1=\max\{1,|m_1|\},\ldots,\overline{m}_s=\max\{1,|m_s|\}$ болсын. Сонда тригонометриялық $\hat{f}(m)$ Фурье коэффициенттері

$$\sum_{m\in Z^s}|\hat{f}(m)|^2(\overline{m}_1^{2r_1}\ln^{2\alpha_1}(\overline{m}_1+1)+\ldots+\overline{m}_s^{2r_s}\ln^{2\alpha_s}(\overline{m}_s+1))\le 1$$

теңсіздігін қанағаттандыратын s аргументті $f(x)=f(x_1,...,x_s)$ функцияларының жиыны дәреже – логарифмдік шкаладағы көпөлшемді Соболев класы деп аталып, $W_2^{r_1,...,r_s;\alpha_1,...,\alpha_s}[0,1]^s$ (қысқаша: $W_2^{r,\alpha}$) символымен белгіленеді.

$\alpha_1=...=\alpha_s=0$ жағдайында $W_2^{r_1,...,r_s;\alpha_1,...,\alpha_s}[0,1]^s$ класы анизотропты Соболев класы деген атауға ие $W_2^r \equiv W_2^{r_1,...,r_s}[0,1]^s$ класымен беттеседі (W_2^r класы анықтамасын [2] жұмысынан қараңыз).

Компьютерлік (есептеуіш) диаметр зерттеуі (қысқаша: К(Е)Д – зерттеуі) мына шама арқылы жүргізіледі (мысалы, қараңыз, [3]):

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N, T, F)_Y = \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N} \delta_N(\varepsilon_N;(l^{(N)},\varphi_N),T,F)_Y,$$

мұндағы $\delta_N\left(\varepsilon_N;(l^{(N)},\varphi_N),T,F\right)_Y=$

$$=\sup_{f\in F}\sup_{z_1,...,z_N}\left\{\left\|(Tf)(\cdot)-\varphi_N(z_1,...,z_N;\cdot)\right\|_Y : \left|z_i-l_N^{(i)}(f)\right|\le\varepsilon_N, i=1,...,N\right\}\equiv$$

$$\equiv\sup_{f\in F}\sup_{\left\{\gamma_N^{(i)}\right\}_{i=1}^N}\left\{\begin{array}{l}\left\|(T\,f)(\cdot)-\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\varepsilon_N,...,l_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N;\cdot\right)\right\|_Y :\\ \left|\gamma_N^{(1)}\right|\le 1,...,\left|\gamma_N^{(N)}\right|\le 1\end{array}\right\},$$

ε_N- теріс емес мүшелі тізбек, F – $f:\Omega\to C$ функцияларының класы, Y – $g:\Omega_1\to C$ функцияларының нормаланған кеңістігі, $T-$ нормаланған $X\,(F\subset X)$ кеңістігін нормаланған Y кеңістігіне бейнелейтін оператор, $l^{(N)}-$ $l_N^{(1)}:F\to C,...,l_N^{(N)}:F\to C$ функционалдарына сәйкес комплескмәнді $\left(l_N^{(1)}(f),...,l_N^{(N)}(f)\right)$ векторы, φ_N- $C^N\times\Omega_1$ жиынында анықталған және әрбір $\left(z_1,...,z_N\right)\in C^N$ үшін $\varphi_N(z_1,...,z_N;y)\in Y$ кірістіруін қанағаттандыратын комплекс мәнді функция, ал $D_N\subset\left\{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right\}$.

Бұдан әрі әрбір $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ жұбына сәйкес, y айнымалысына тәуелді $\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f),...,l_N^{(N)}(f);y\right)$ функциясы есептеу агрегаты деп аталады. Сондай – ақ, $A\underset{\alpha,\beta,...}{<<}B$ жазуы тек $<<$ символы астындағы $\alpha,\beta,...$ параметрлеріне тәуелді қайсыбір $C(\alpha,\beta,...)>0$ шамасы үшін $|A|\le C(\alpha,\beta,...)B$ теңсіздігі орындалатынын білдіреді.

Егер $A \underset{\alpha,\beta,...}{<<} B$ және $B \underset{\alpha,\beta,...}{<<} A$ теңсіздіктері қатар орындалса, онда $A \underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec} B$ өрнегі жазылады.

К(Е)Д – зерттеуінде $T: F \to Y$ операторының, F класының, D_N жиынының, Y кеңістігінің әртүрлі жағдайларында бірінен соң бірі К(Е)Д - 1, К(Е)Д - 2 және К(Е)Д - 3 есептері шығарылады:

К(Е)Д - 1. $\delta_N(0; D_N, T, F)_Y$ шамасының дәл реті анықталады, яғни, қандай да бір $\{\psi_N\}_{N\geq 1}$ тізбегі үшін $\delta_N(0; D_N, T, F)_Y \underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec} \psi_N$ болатыны дәлелденеді және қайсыбір $\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right) \equiv \tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f); y\right)$ есептеу агрегаты $\delta_N(0; \tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N), T, F)_Y \underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec} \psi_N$ орындалатындай құрылады (бұл жағдайда $\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегаты ψ_N дәл ретін жүзеге асырады деп айтады);

К(Е)Д - 2. $\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегаты үшін $\tilde{\varepsilon}_N > 0$ тізбегі, $\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегатының шектік қателігі, $\delta_N(0; D_N, T, F)_Y \underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec} \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; (\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N), T, F)_Y$

және

$\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right), T, F\right)_Y \Big/ \delta_N(0; D_N, T, F)_Y = +\infty$, мұндағы $\{\eta_N\}_{N\geq 1}$ $-(+\infty)-$ ке өсіп ұмтылатын оң мүшелі тізбек, шарттары орындалатындай анықталады;

К(Е)Д - 3. $\tilde{\varepsilon}_N$ шектік қателігінің массивтілігі анықталады: $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ есептеу агрегаттарының мүмкіндігінше кең жиыны $(+\infty)-$ке өсіп ұмтылатын оң мүшелі әрбір $\{\eta_N\}_{N\geq 1}$ тізбегі үшін $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} \delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right), T, F\right)_Y \Big/ \delta_N(0; D_N; T, F)_Y = +\infty$ теңдігі тура болатындай ізделеді.

$\delta_N(\varepsilon_N; D_N, T, F)_Y$ шамасындағы D_N жиынын, F класын, T операторын және Y кеңістігінің әртүрлі жағдайларында бірнеше К(Е)Д – зерттеуіне келеміз (мысалы, [4-7] жұмыстарын қараңыз).

Осы жерде [8 - 10] жұмыстарында К(Е)Д – зерттеуі $Tf(\cdot) = u(\cdot; f)$ жағдайында жылуөткізгіштік теңдеуі үшін толық жүргізілгенін, яғни, К(Е)Д-1, К(Е)Д -2 және К(Е)Д - 3 есептері толықтай шешілгенін айта кетейік.

Бұл жұмыста L_N арқылы $l^{(N)}$ компоненті сызықтық

$$l_N^{(1)}: W_2^{r,\alpha} \to C, ..., l_N^{(N)}: W_2^{r,\alpha} \to C$$

функционалдарынан тұратын барлық $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ жұптарының жиыны белгіленіп,

$$Tf(\cdot) = u(\cdot; f),\ F = W_2^{r,\alpha}[0,1]^s,\ Y = L^{\infty,q}\left([0,1]^s \times [0,+\infty)\right), D_N = L_N$$

жағдайларында К(Е)Д -1, К(Е)Д -2 және К(Е)Д -3 есептері шығарылған ($Y = L^{\infty,q}\left([0,+\infty)\times[0,1]^s\right)$ кеңістігінің анықтамасын [9] жұмысынан қарауға болады).

§2. Негізгі нәтиже және оны дәлелдеу схемасы

Бұл жұмыстың негізгі нәтижесі мына

Теорема. $\lambda \equiv \lambda(r_1,\dots,r_s) = (1/r_1+\dots+1/r_s)^{-1} > \frac{1}{2}$ *теңсіздігі орындалып,* $2 \le q \le \infty$ *және* $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = \alpha \ge 0$ *болсын.*

Сонда $N \equiv N(K) = \prod_{i=1}^{s}\left(2\left[K^{\lambda/r_i}\right]+1\right)$, $K = 1,2,\dots$ *үшін келесі тұжырымдар ақиқат болады:*

К(Е)Д -1. $\delta_N\left(0; L_N, (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), W_2^{r,\alpha}\right)_{L^{\infty,q}} \underset{s,r,\alpha,q}{\asymp}$

$$\underset{s,r,\alpha,q}{\asymp} \delta_N\left(0; \left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right), (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), W_2^{r,\alpha}\right)_{L^{\infty,q}} \underset{s,r,\alpha,q}{\asymp} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{\lambda}\ln^{\alpha} N},$$

мұндағы $\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right) \equiv \left(\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),\dots,\tilde{l}_N^{(N)}(f)\right), \varphi_N\right)$ *жұбы былай анықталған:*

$$\tilde{\varphi}_N(z_1,\dots,z_N; t, x) = \sum_{\tau=1}^{N} z_\tau e^{-4\pi^2(\tilde{m}^{(\tau)}, \tilde{m}^{(\tau)})t} e^{2\pi i(\tilde{m}^{(\tau)}, x)},$$

$$\tilde{l}_N^{(1)}(f) = \hat{f}\left(\tilde{m}^{(1)}\right),\dots,\tilde{l}_N^{(N)}(f) = \hat{f}\left(\tilde{m}^{(N)}\right),$$

$$\left(\forall \tau = 1,\dots,N: \tilde{m}^{(\tau)} = \left(\tilde{m}_1^{(\tau)},\dots,\tilde{m}_s^{(\tau)}\right) \in A_K \equiv\right.$$

$$\left.\equiv \left\{m \in Z^s : |m_1| \le \left[K^{\lambda/r_1}\right],\dots,|m_s| \le \left[K^{\lambda/r_s}\right]\right\}\right)$$

К(Е)Д - 2. $\tilde{\varepsilon}_N = \frac{1}{N^{\lambda}\sqrt{N}\ln^{\alpha} N}$ *тізбегі К(Е)Д -1 тұжырымындағы* $\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right)$ *есептеу агрегатының шектік қателігі болады, өйткені, біріншіден,*

$$\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N = \frac{1}{N^{\lambda}\sqrt{N}\ln^{\alpha} N}; \left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right), (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), W_2^{r,\alpha}\right)_{L^{\infty,q}} \underset{s,r,\alpha,q}{\asymp}$$

$$\underset{s,r,\alpha,q}{\asymp} \delta_N\left(0; L_N, (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), W_2^{r,\alpha}\right)_{L^{\infty,q}}$$

екіншіден, $$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N; \left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right), (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), W_2^{r,\alpha}\right)_{L^{\infty,q}}}{\delta_N\left(0; L_N, (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), W_2^{r,\alpha}\right)_{L^{\infty,q}}} = +\infty;$$

К(Е)Д - 3. $\varPhi_N = \left\{ \left(l^{(N)}, \varphi_N \right) : l_N^{(1)}(f) = f\left(m^{(1)}\right), \ldots, l_N^{(N)}(f) = f\left(m^{(N)}\right) \right\}$ *жиынында жататын кез келген* $(l^{(N)}, \varphi_N)$ *есептеу агрегаты үшін*

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{\delta_N \left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N ; \left(l^{(N)}, \varphi_N \right), (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), W_2^{r,\alpha} \right)_{L^{\infty,q}}}{\delta_N \left(0; L_N, (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), W_2^{r,\alpha} \right)_{L^{\infty,q}}} = +\infty$$

теңдігі орындалады.

Бұл теоремадан мынадай қорытындылар жасауға болады:

1) Әрбір $N = 1,2,\ldots$ үшін $\varPhi_N \subset L_N$ кірістіруі орындалатындықтан, келтірілген теоремадан [8] жұмысындағы теорема шығады;

2) Жалпы түрдегі $\left(l^{(N)}, \varphi_N \right) \in L_N$ есептеу агрегаты кез келген $f \in W_2^{r,\alpha}$ үшін $u(t, x; f)$ шешімін $L^{\infty,q}$ метрикасында $\psi(N) = \dfrac{C(s, r_1, \ldots, r_s, \alpha, q) N^{1/2 - 1/q}}{N^{\lambda} \ln^{\alpha} N}$ дәлдігінен реті бойынша жақсы дәлдікпен жуықтай алмайды;

3) $\tilde{\varphi}_N(\hat{f}(\tilde{m}^{(1)}), \ldots, \hat{f}(\tilde{m}^{(N)}); t, x) = \sum_{\tau=1}^{N} \hat{f}(\tilde{m}^{(\tau)}) e^{-4\pi^2 (\tilde{m}^{(\tau)}, \tilde{m}^{(\tau)}) t} e^{2\pi i (\tilde{m}^{(\tau)}, x)}$ есептеу агрегаты әрбір $f \in W_2^{r,\alpha}$ функциясына сәйкес $u(t, x; f)$ шешімін $L^{\infty,q}$ метрикасында $\psi(N)$ дәлдігімен оптималды жуықтайды;

4) $f \in W_2^{r,\alpha}$ жағдайында жоғарыдағы $\hat{f}\left(\tilde{m}^{(\tau)}\right)$ Фурье коэффициенттерінің орнына $\left| z_\tau - \hat{f}\left(\tilde{m}^{(\tau)}\right) \right| \le \dfrac{1}{N^{\lambda} \sqrt{N} \ln^{\alpha} N}$ теңсіздігін қанағаттандыратын $z_\tau \ (\tau = 1, \ldots, N)$ сандарын алғаннан $u(t, x; f)$ шешімін $L^{\infty,q}$ метрикасында жуықтау дәлдігі өзгермейді;

5) Кез келген $\hat{f}\left(m^{(1)}\right), \ldots, \hat{f}\left(m^{(N)}\right)$ Фурье коэффициенттері мен кез келген

$$\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1, \ldots, z_N; t, x) : C^N \times ([0, +\infty) \times [0,1]^s) \to C$$

функциясы бойынша құрылған $\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), \ldots, \hat{f}\left(m^{(N)}\right); t, x \right)$ есептеу агрегатының $L^{\infty,q}$ метрикасындағы жуықтау дәлдігі де, шектік қателігі де $\tilde{\varphi}_N(\hat{f}\left(\tilde{m}^{(1)}\right), \ldots, \hat{f}\left(\tilde{m}^{(N)}\right); t, x)$ есептеу агрегатының жуықтау дәлдігі мен шектік қателігінен реті бойынша жақсы болмайды.

Теорема дәлелдеуі кез келген $g \in C[0,1]^s$ функциясы мен әрбір $q \in [2, \infty]$ үшін орынды болатын (қараңыз, [11, 256 бет])

$$\| g \|_q \le \| g \|_2^{2/q} \| g \|_\infty^{1-2/q} \tag{1}$$

теңсіздігін және төмендегі бес лемманы қолдану арқылы жүзеге асады.

1 - **лемма** [9]. $\lambda>1/2$ *теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір* $r=(r_1,...,r_s),\ r_1>0,...,r_s>0$ *векторы үшін еселі* $\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}...\int\limits_1^{+\infty}}_{s}\frac{dx_1...dx_s}{x_1^{2r_1}+...+x_s^{2r_s}}$ *интегралы жинақталады.*

2 - лемма. $\lambda>1/2$ *теңсіздігінің орындалуы* $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_s=\alpha\geq 0$ *жағдайында* $f\in W_2^{r,\alpha}$ *функциясының Фурье қатарының абсолютті және бірқалыпты жинақталуын қамтамасыз етеді.*

3 - лемма [12]. $f(x)=f(x_1,...,x_s)$ *бастапқы шарты абсолютті жинақталатын* $\sum\limits_{m\in Z^s}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)}$ *Фурье қатары болатын жылуөткізгіштік теңдеуінің* $u(t,x;f)$ *шешімі әрбір* $(t,x)\in[0,+\infty)\times[0,1]^s$ *нүктесінде* $\sum\limits_{m\in Z^s}\hat{f}(m)e^{-4\pi^2(m,m)t}e^{2\pi i(m,x)}$ *қатарымен беттеседі.*

4 - лемма [13]. *Егер* $|G_N|\geq 2N,\quad |G_N|\underset{s}{\succ\prec}N$ *шарттарын қанағаттандыратын* $G_N\subset Z^s(N,s=1,2,...)$*жиыны берілген болса, онда тригонометриялық көпмүшеліктер жиынында анықталған кез келген сызықтық* $l_1,...,l_N$ *функционалдары үшін* $l_1(\chi_N)=\cdots=l_N(\chi_N)=0$, $\left\|\chi_N\right\|_{L^2}=\sqrt{N}$ *теңдіктері мен* $\left\|\chi_N\right\|_{L^\infty}\geq N$ *теңсіздігі орындалатындай* $\chi_N(x)=\sum\limits_{m\in G_N}c_m e^{2\pi i(m,x)}$ *көпмүшелігі табылады.*

5 - лемма [14, 22 - бет]. *Бүтін оң* $N_1,...,N_s$ *сандары және* $t(x)=\sum\limits_{m\in\Pi}c_m e^{2\pi i(m,x)}$, $\Pi=\{m\in Z^s:|m_1|\leq N_1,...,|m_s|\leq N_s\}$ *тригонометриялық полиномы берілген болсын. Сонда* $1\leq q\leq p\leq\infty$ *теңсіздіктері орындалғанда,* $\|t\|_p\leq C(s)\|t\|_q\cdot(N_1...N_s)^{1/q-1/p}$ *болады.*

Енді теореманы дәлелдеу схемасына тоқталайық. Алғашқы үш леммаға және (1) теңсіздігіне сүйене отырып, мына теңсіздікті аламыз:

$$\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N=\frac{1}{N^\lambda\sqrt{N}\ln^\alpha N};\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right),(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W_2^{r,\alpha}\right)_{L^{\infty,q}}\underset{s,r,\alpha,q}{<<}\frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda\ln^\alpha N}. \tag{2}$$

4 - ші және 5 - ші леммаларды пайдаланып,

$$\delta_N\left(0;L_N,(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W_2^{r,\alpha}\right)_{L^{\infty,q}}\underset{s,r,\alpha,q}{>>}\frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda\ln^\alpha N} \tag{3}$$

теңсіздігіне келеміз. Әрине, кез келген $\varepsilon_N\geq 0$ тізбегі, F класы, Y кеңістігі, $T:F\to Y$ операторы, D_N жиыны мен $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N$ үшін

$$\delta_N(0;D_N,T,F)_Y\leq\delta_N(\varepsilon_N;D_N,T,F)_Y\leq\delta_N(\varepsilon_N;(l^{(N)},\varphi_N),T,F)_Y,$$

теңсіздіктері тура болады. Сондықтан, (2) және (3) теңсіздіктерінен К(Е)Д-1, К(Е)Д-2 тұжырымдарындағы теңсіздіктер шығады. Ал К(Е)Д-2 және К(Е)Д-3 тұжырымдарындағы теңдіктердің ақиқаттылығына [9] жұмысындағы талдауларды $W_2^{r,\alpha}$ класы жағдайында қайталай отырып оңай көз жеткіземіз.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Утесов А.Б. Оптимальное восстановление функций из анизотропных классов Соболева в степенно - логарифмической шкале. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, серия Математика. Компьютерные науки. Механика, 2021, том 136, №3, стр. 37 - 41. DOI:https://doi.org/10.32523/2616-7182

2 Утесов А.Б., Абдыкулов А.Т. Полное К(В)П – исследование задачи восстановления функций из анизотропных классов Соболева по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, №1(122)/2018, стр. 90 - 98.

3 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Computational (Numerical) diameter in the context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ),N1, 89 - 97(2019). https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-89-97

4 Temirgaliev N., ZhubanishevaA. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432- 1443(2015). https://doi.org/10.1134/S0965542515090146

5 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. Order Estimates of the Norms of derivates of Functions with Zero Values of Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 61(3), 77 – 82. (2017). DOI: 10.3103/S1066369X17030100

6 Утесов А.Б. Об оптимальном восстановлении функций из класса Коробова в рамках К(В)П – постановки. Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «физ.– мат. науки», №2(70), 2020, стр. 115 – 121.

7 Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, №1 (126) / 2019. С.8-51. DOI:https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-8-51

8 Утесов А.Б., Утесова Г.И. Бастапқы шарты $W_2^{r,\alpha}$ класына тиесілі жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімін К(Е)Д - зерттеуі аясында дискретизациялау туралы. Қ. Жұбанов атындағы АӨМУ хабаршысы, №1(2020), 50 -54 беттер.

9 Utesov A.B. and Bazarkhanova A.A. On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit. Differential Equations, 2021, Vol. 57, No.12, pp. 1726-1735. DOI 10.1134/S0012266121120168

10 Утесов А., Утесова Г. О дискретизации решений уравнения теплопроводности по числовой информации. Вестник КазНПУ им. Абая. Серия: физико-математические науки. Том 77 №1(2022). DOI:https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.04

11 Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Труды МИАН СССР, 1951, т.38, с. 244 - 278.

12 Loo Keng Hua and Yang Wang, Application of Number Theory to Numerical Analysis, Berlin– Heidelberg – New York: Springer, 1981.

13 Azhgalliev Sh. On the discretization of solutions of the heat equation, Matematical Notes, 82(2), 153– 158 (2007). https://doi.org/10.4213/mzm3789

14 Dinh Dung, Vladimir N. Temlyakov, Tino Ullrich. Hyperbolic Cross Approximation. arXiv: 1601.03978v1[math. NA]. 15 Jan 2016. pp. 1– 154.

References:

1 Utesov A.B. Optimal'noe vosstanovlenie funkcij iz anizotropnyh klassov Soboleva v stepenno – logarifmicheskoj shkale[Optimal recovery of functions from anisotropic Sobolev classes on a power- logarithmic scale]. Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, seriya Matematika. Komp'yuternye nauki. Mekhanika, 2021, tom 136, №3, str. 37 - 41. (In Russian) DOI:https://doi.org/10.32523/2616-7182

2 Utesov A.B., Abdykulov A.T. Polnoe K(V)P – issledovanie zadachi vosstanovlenija funkcij iz anizotropnyh klassov Soboleva po netochnym znachenijam ih trigonometricheskih kojefficientov Fur'e[The complete C(N)D-solution of the problem recovery of functions from anisotropic Sobolev classes by their unexact trigonometric Fourier coefficients]. Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, №1(122)/2018, str. 90 - 98. (In Russian)

3 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Computational (Numerical) diameter in the context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ),N1, 89 - 97(2019). https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-89-97

4 Temirgaliev N., ZhubanishevaA. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432- 1443(2015). https://doi.org/10.1134/S0965542515090146

5 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. Order Estimates of the Norms of derivates of Functions with Zero Values of Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 61(3), 77 – 82 (2017). DOI: 10.3103/S1066369X17030100

6 Utesov A.B. Ob optimal'nom vosstanovlenii funkcij iz klassa Korobova v ramkah K(V)P – postanovki [On optimal recovery of functions from the Korobov class in the framework of C(N)D - statement]. Vestnik KazNPU im. Abaja. Serija «fiz.–mat. nauki», №2(70), 2020, str. 115 – 121. (In Russian)

7 Temirgaliev N., Taugynbaeva G.E., Abikenova Sh.K. Diskretizacija reshenij uravnenij v chastnyh proizvodnyh v kontekste Komp'juternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Discretization of solutions of partial differential equations in the context of Computational(numerical)diameter]. Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, №1 (126) / 2019. S.8-51.(In Russian) DOI:https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-8-51

8 Utesov A.B., Utesova G.I. Bastapқy sharty $W_2^{r,\alpha}$ *klasyna tiesili zhyluөtkizgishtik teңdeuiniң sheshimin K(E)D - zertteui ajasynda diskretizacijalau turaly[On discretization of the solution of the heat equation with an initial condition from the class* $W_2^{r,\alpha}$ *in the framework of C(N)D - study]. Қ. Zhұbanov atyndaғy AӨMU habarshysy, №1(2020), 50 -54 better. (In Kazakh)*

9 Utesov A.B. and Bazarkhanova A.A. On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit. Differential Equations, 2021, Vol. 57, No.12, pp. 1726-1735. DOI 10.1134/S0012266121120168

10 Utesov A., Utesova G. O diskretizacii reshenij uravneniya teploprovodnosti po chislovoj informacii [On discretization of solutions of the heat equation by numerical information]. Vestnik KazNPU im. Abaya. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki. Tom 77 №1(2022). (In Russian)DOI:https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.04

11 Nikol'skij S.M. Neravenstva dlja celyh funkcij konechnoj stepeni i ih primenenie v teorii differenciruemyh funkcij mnogih peremennyh [Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of many variables]. Trudy MIAN SSSR, 1951, t.38, s. 244 - 278. (In Russian)

12 Loo Keng Hua and Yang Wang, Application of Number Theory to Numerical Analysis, Berlin– Heidelberg – New York: Springer, 1981.

13 Azhgalliev Sh. On the discretization of solutions of the heat equation, Matematical Notes, 82(2), 153– 158 (2007). https://doi.org/10.4213/mzm3789

14 Dinh Dung, Vladimir N. Temlyakov, Tino Ullrich. Hyperbolic Cross Approximation. arXiv: 1601.03978v1[math. NA]. 15 Jan 2016. pp. 1– 154.