МРНТИ 20.53.11
УДК 372.851

https://doi.org/10.51889/2222.2022.84.15.013

Ж.Т. Рахметуллина[1], Р.У. Мукашева[1], Р.О. Мухамедова[1], И.М. Увалиева[1], Ф.С. Аменова[2]*

[1]Восточно-Казахстанский технический университет имени Д.Серикбаева, г.Усть-Каменогорск, Казахстан
[2]Восточно-Казахстанский университет имени С.Аманжолова, г.Усть-Каменогорск, Казахстан
[*]e-mail: rahmetullina@mail.ru

ЭФФЕКТИВНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, ВЛИЯЩИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПОСОБНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Аннотация

В настоящее время большое внимание уделяется развитию математических способностей, навыков аналитического и системного мышления, основ школьников и студентов. Обеспечение преемственности образовательных программ среднего и высшего образования является «стержнем» успешного обучения школьников для формирования исследовательской компетентности, привития навыков поиска и обоснования, фундаментального отношения к математике. Практическая значимость работы заключается в том, что путем преобразования задач по высшей математике можно сблизить школьную математику и математику в высших учебных заведениях, формируя тем самым у студентов навыки исследовательского поиска, стремление к знаниям вне рамок программы. Анализ полученных результатов является обоснованным и показывает, что он внесет объективные изменения в педагогическую деятельность учителей математики в поисках путей совершенствования в прикладных исследованиях.

Ключевые слова: исследовательские способности, математическое мышление, методы, кривые второго порядка, конические сечения, свойства.

Аңдатпа

Ж.Т. Рахметуллина[1], Р.У. Мукашева[1], Р.О. Мухамедова[1], И.М. Увалиева[1], Ф.С. Аменова[2]
[1]Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан
[2]С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., Қазақстан

ОҚУШЫЛАРДЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ДАҒДЫЛАРЫНА ӘСЕР ЕТЕТІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ ТИІМДІ ҚҰРАЛДАРЫ

Қазіргі уақытта математикалық қабілеттерді, талдамалық және жүйелі ойлау дағдыларын, оқушылар мен студенттердің негіздерін дамытуға көп көңіл бөлінуде. Орта және жоғары білім беру бағдарламаларының сабақтастығын қамтамасыз ету зерттеу құзыреттілігін қалыптастыру, іздестіру және негіздеу дағдыларын, математикаға іргелі қарым-қатынасты үйрету үшін оқушыларды табысты оқытудың «өзегі» болып табылады. Жұмыстың практикалық маңыздылығы жоғары математика бойынша тапсырмаларды өзгерту арқылы жоғары оқу орындарында мектеп математикасы мен математикасын жақындастыруға болады, сол арқылы студенттерде зерттеу іздестіру дағдыларын, бағдарлама шеңберінен тыс білімге ұмтылысты қалыптастыруға болады. Алынған нәтижелерді талдау негізді болып табылады және ол қолданбалы зерттеулерде жетілдіру жолдарын іздестіруде математика мұғалімдерінің педагогикалық қызметіне объективті өзгерістер енгізетінін көрсетеді.

Түйін сөздер: зерттеу қабілеттері, математикалық ойлау, тәсілдері, екінші ретті қисықтар, конустық қималар, қасиеттері.

Abstract

EFFECTIVE TOOLS FOR SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS AFFECTING STUDENTS' MATHEMATICAL SKILLS

Rakhmetullina ZH.T.[1], Mukasheva R.U.[1], Mukhamedova R.U.[1], Uvaliyeva I.M.[1], Amenova F.S.[1]
[1]D. Serikbayev East Kazakhstan technical university, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan
[2]S.Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

Currently, much attention is paid to the development of mathematical abilities, analytical and systemic thinking skills, the foundations of schoolchildren and students. Ensuring the continuity of educational programs of secondary and higher education is the "core" of successful education of schoolchildren to form research competence, instill search and justification skills, and a fundamental attitude towards mathematics. The practical significance of the work is that by transforming problems in higher mathematics, it is possible to bring school mathematics and mathematics closer together in higher educational institutions, thereby forming students' research search skills, the desire for knowledge outside the framework of the program. The analysis of the results obtained is reasonable and shows that it will make objective changes in the pedagogical activities of mathematics teachers in search of ways to improve in applied research.

Keywords: research abilities, mathematical thinking, methods, secondary curves, conic sections, properties.

Введение

В данной работе предлагаются подходы к формированию и развитию исследовательских навыков у учащихся старших классов. Следует отметить, что методы решения геометрических задач, геометрическое истолкование проблемы является одним из основных подходов формирования математического мышления у учащихся. Интересным является то, что подходы обеспечения преемственности школьной математики и математики в высшем учебном заведении в рамках преобразования задач, ориентируясь на знания школьного курса математики. Это позволит привитие исследовательских навыков, фундаментальному познанию и выводов замечательных свойств геометрических объектов. Понятие «дифференциальные уравнения» раскрывают математичесие модели физических процессов и некоторых геометрических задач, связанных с касательной к кривой. Преобразование геометрических задач, приводящих к составлению дифференциальных уравнений можно доступно применить для определения частных свойств кривых второго порядка и их вывода на основе математических знаний на базе школьного курса. На примере одной задачи можно охарактеризовать и доказать множество интересных свойст кривых второго порядка, определяемых с помощью касательной. В связи с этим являются важным исследования кривых второго порядка, как кривых, имеющих расширенное механическое приложение. Определение частных свойств кривых второго порядка, которые доказываются аналитически только на основе касательной к графику функции, имеют важное применение в определении траекторий движущихся небесных тел, построении проекционных аппаратов, солнечных установок.

Цель работы заключается в выявлении и доказательстве свойств кривых второго порядка с применением методов математического анализа, геометрии. В рамках сформулированной цели ставятся и решаются следующие задачи:

- преобразование прикладных задач к стандартным математическим задачам школьного курса;
- определение и вывод частных свойств кривых второго порядка, определяемые с помощью касательной и «перспектора коники».

Обзор исследования

В работе [1] проведены исследования в области трансформации математических знаний на базе геометрических интерпретаций. Эти преобразования имеют свои преимущества в определении применимости того или иного метода, связанного с визуализацией геометрического объекта, моделированием. Важность визуализации данных объектов состоит в том, что вносят свою обоснованную лепту в развитие математических способностей обучающихся, на формирование навыков математического мышления в разработке алгоритмов и приобретению умении точного рассуждения. В данных исследованиях для повышения показателей способностей математического представления применяют визуальное представление, что символизируют математическое утверждение. В этом направлении применение проектного обучения объясняется, обосновывается как один особых методов, имеющих влияние на математическое представление учащегося и с психологической и математической точек зрения. Использование математического представления и правильного соединения поможет обучающимся конкретизировать математические идеи и связать одну концепцию с другой концепцией, чтобы сформировать взгляд на математику как на интеграцию в целом.

В работе [2] авторами исследователями рассмотрены и расширены элементы теории моделирования в качестве основы для исследований и разработок в области математики и естественнонаучного образования, в качестве подходов представления связей между пространственным видением и математическим пониманием, и мышлением. Это связано с тем, что познание в естествознании, математике и повседневной жизни интерпретируется с созданием и использованием ментальных моделей, которое в свою очередь позволит описать и понять природу и количество пространственных и математических навыков.

В работе [3-4] обсуждены, что обычные методы обучения, сами по себе не могут повлиять на улучшения математического творчества и навыков мышления, необходимых современному ребенку в настоящее время. Нужны более усовершенствованные и современные методы, смешанные методы междисциплинарного исследования для формирования и развития навыков критического математического мышления у учащихся. Основой этому всего является глубокое математическое понимание и математические знания. В этой связи авторы предлагают ряд рекомендации по улучшению математического образования начиная с начальной школы с продолжением в средней школе.

В работе [5] показано, что креативность, как один из ключей к успеху в развивающейся мировой экономике, также является проявлением фундаментальной грамотности, основанной на математическом осмыслении процесса, который абсолютно необходим в 21 веке. Также в математике важно развивать творческие способности или творческое мышление, так как творческие способности являются неотъемлемой частью математики. Однако ограничение творческих способностей у учащихся приводит к набору навыков, автоматизированных с подбором, порой не подлежащих ни к какой логике. Во избежание этого авторы предлагают рассмотреть задачи и вопросы PISA которые нужно освоить и запомнить учителям для формирования навыков мышления высшего порядка, как основным реализаторам идей развития креативности, творческих способностей у учащихся.

В работе [6] приведены методы исследования реалистичного математического образования (RME) на основе применения подходов к обучению, направленных на развитие компетенций с помощью Sketchpad Geometer. Хотя используемый метод анализа данных - это описательный анализ, однако результат показывает, что реализация реалистичного математического образования с использованием блокнота Geometer в пропорциях может улучшить критическое и творческое мышление учащихся.

В работе [7] приводится об элементе описательно-развивающем методе исследования, о важном составляющем модули контекстуального обучения для курса преодоления выявленных пробелов в обучении. В работе [8] приведены результаты исследования об образовательной программе STEAM, в основы которых изучаются с использованием образовательных инструментов GeoGebra и 4Dframe. Отмечается эффективность применимой программы в реструктуризацию знаний в отношении графической визуализации и представления архитектурных объектов. Работа [9] посвящена к исследованию пространственных навыков, способствующих к формированию математических способностей с использованием моделей латентной кривой роста.

В работе [10] описываются результаты исследования, проведенного в профессиональной школе Индонезии на предмет выявления эффективности влияния математических способностей к изучению математических задач в контексте закона спроса. Исследование охватило все этапы: редукция, представление, интерпретация, вывод и проверка. Результат показывает, что не всегда вопросы, сформулированные о законе спроса, для изучения способностей школьников к творческому мышлению, могут привести к развитию большому объему творческого математического мышления. В данной работе [11] описан опыт, полученный в рамках исследовательского проекта по разработке и оценке образовательных цифровых ресурсов, направленных на развитие творческого математического мышления. Данный опыт эффективен для развития творческого математического мышления с точки зрения персонализированного нелинейного пути.

Методология исследования

Замечательные превращения кривых второго порядка в друг-друга на конической поверхности определяет интересные свойства, позволяющие визуализировать и получить геометрическую интерпретацию данных. Таким образом, плоскость, пересекающая конус по окружности, поворачиваясь вокруг прямой, касающейся этой окружности, будет пересекать конус по все более вытянутым эллипсам. Когда поворачивающаяся плоскость окажется параллельной одной из образующих конуса, то сечение превратится в параболу, при дальнейшем вращении плоскости оно будет представлять собой гиперболу. Парабола представляет собой граничный случай между эллипсами и гиперболами. Если для окружности известно, что второй фокус сливается с первым, то с увеличением эксцентриситета второй фокус удаляется, от первого, кривая постепенно растягивается и превращается в эллипс. При дальнейшем удалении фокусов эллипс деформируется в параболу, то есть его второй фокус «уходит в бесконечность». Вновь появившийся второй фокус на фокальной оси обеспечивает появление кривой гиперболы.

Рассмотрим следующую геометрическую задачу: Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2. Преобразованная формулировка данной задачи направлена на получение интересного свойства кривых второго порядка связанных определением конических сечений:

Свойство 1.

Площадь треугольника, образованного касательной и его пересечением с асимптотами гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, полученного пересечением конуса, заданного уравнением $x^2 = y^2 + z^2$ произвольной плоскостью, $z = \pm a$, равна одному и тому же постоянному числу a^2.

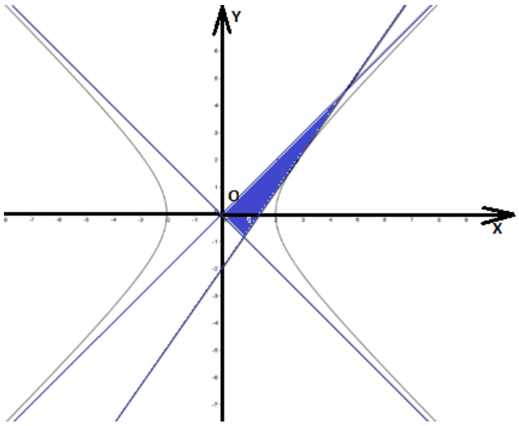

Рисунок 1. Графическая интерпретация свойства 1

Для доказательства свойства достаточно определить вид выделенного треугольника на рисунке 1 и вычислить его площадь.

Вывод: Каковы бы не были координаты точки касания для касательной к равнобочной гиперболе площадь треугольника, составленного касательной и его пересечением с асимптотами всегда будет равна квадрату полуосей.

Свойство 2.

Площадь треугольника, образованного касательной и его пересечением с асимптотой и перпендикуляром от точки касания до асимптот конического сечения $x^2 - y^2 = a^2$, полученного пересечением конуса, заданного уравнением $x^2 = y^2 + z^2$ произвольной плоскостью, $z = \pm a$, равна одному и тому же числу $\dfrac{a^2}{4}$.

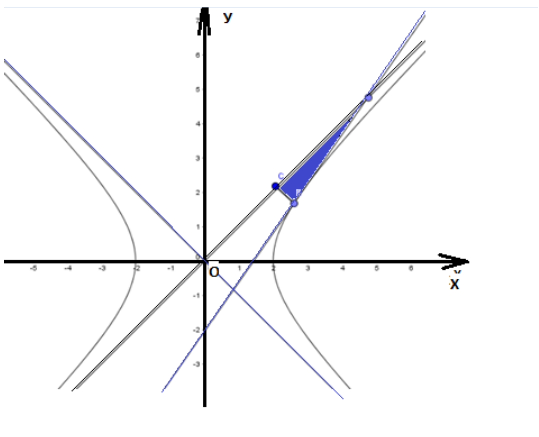

Рисунок 2. Графическая интерпретация свойства 2.

Свойство 1 представляет собой некоторое обобщение свойства 2, которое обосновывается геометрической интерпретацией свойства, на рисунке 2.

Свойство 3.

Координаты точек пересечения касательной в точке $N(x_0, y_0)$ с асимптотами для гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, полученного пересечением конуса, заданного уравнением $x^2 = y^2 + z^2$ с произвольной плоскостью, $z = \pm a$, будут равны одним и тем же значениям $P(x_0 + y_0; x_0 + y_0)$ и $Q(x_0 - y_0; y_0 - x_0)$.

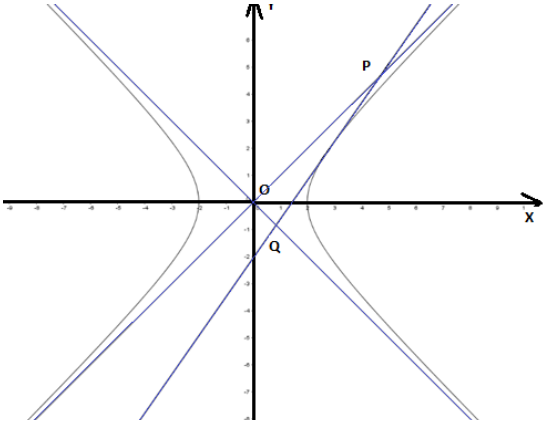

Рисунок 3. Коническое сечение при пересечении плоскостью $z = a$.

При пересечении получается коническое сечение, заданное уравнением $x^2 - y^2 = a^2$ и определяемое как гипербола (рисунок 3). Для принятия решения учащиеся должны представить подробный план. При доказательстве свойства 3, школьники будут оперировать предыдущим свойством, чтобы получить полную информацию о характере кривых.

Свойство 4.

Для параболы (Рисунок 4) $y^2 = 2px$, полученного пересечением конуса, заданного уравнением $x^2 = y^2 + z^2$ с произвольной плоскостью, параллельной одной из образующих конуса с условным обозначением $z = x - p$, треугольник, образованный касательными, проведенными к любым симметрическим точкам относительно оси симметрии и прямой проходящей через ординат точек имеет координаты центра окружности девяти точек Эйлера равные $\left(\frac{p}{4};0\right)$.

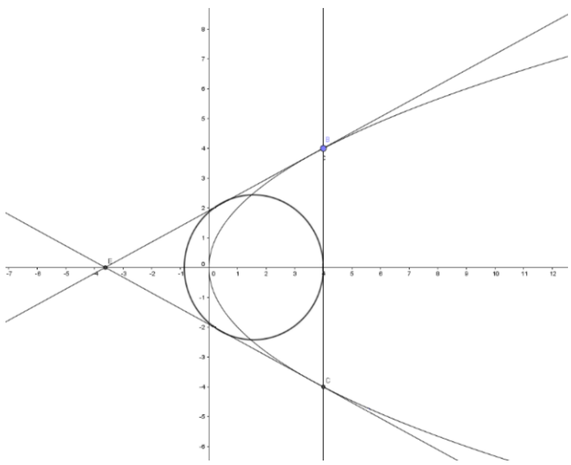

Рисунок 4. Графическая интерпретация свойства 4.

Доказательства свойства основывается на составлении уравнений двух касательных к параболе в точках, симметричных относительно оси симметрии. Это свойство отличается от других свойств тем, что учащийся будет намеренно искать связь с предыдущими свойствами, чтобы доказать это свойство. При этом учащийся разлагает информацию на составляющие, структурирует данные и выясняет их взаимосвязь друг с другом. Такой подход позволяет студенту принять наилучшее из всех возможных решений.

Вывод: Каковы бы не были координаты точек касания для касательной к параболе координаты центра окружности девяти точек Эйлера, для треугольника, образованного симметричными касательными к параболе и точкой касания для любого случая не зависят от расположения точек касания, фокуса и директрисы. Данное свойство справедливо для любого расположения параболы.

Результаты исследования и обсуждение

Полученные свойства кривых второго порядка позволяют учащемуся увидеть проблему целиком, тем самым распознать кривую полностью на примере своих свойств и описать алгоритм своих действий:

разложить его на несколько составляющих,

анализировать каждый элемент,

выделить положительные и отрицательные моменты,

расставлять приоритеты;

выбрать наиболее подходящий вариант или метод решения проблемы.

Для анализа влияния применяемой методики на развитие исследовательских способностей студентов были выделены следующие компоненты исследовательской компетентности:

К1. Мотивационно-ценностный компонент,

К2. Когнитивно-содержательный компонент,

К3. Деятельностный компонент,

К4. Оценочный компонент.

Заключение

Весовые коэффициенты компонентов исследовательской компетентности и показателей определялись с использованием экспертных оценок школьных учителей математики (21 человек). Первоначально экспертам предлагалось ранжировать перечисленные знания, навыки, умения, качества личности и т. д. по степени значимости для готовности студента к исследовательской деятельности. В результате опроса получена оригинальная матрица данных, элементами которой являются рейтинговые экспертные ранги, характеризующие значимость компонента в процессе формирования исследовательской компетенции: Весовые коэффициенты для каждого из компонентов: К1=0,23, К2=0,25, К3=0,26, К4=0,26.

Для выявления согласованности мнений 21 экспертов в качестве критерия был определен коэффициент конкордации по формуле

$$W = \frac{S}{S_{\max}} \Rightarrow W = 0{,}76.$$

Полученный коэффициент конкордации свидетельствует о высокой степени согласованности экспертов по критериям ранжирования. Показатель уровня сформированности исследовательских способностей студентов зависит от уровня развития ее компонентов.

Список использованых источников:

1. *Muchamad S.N., Nanang P., Jarnawi A. D. (2019). Mathematical Proof: The Learning Obstacles Of Pre-Service Mathematics Teachers On Transformation Geometry. Journal on Mathematics Education 1(11), 117-126. DOI: https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5379.117-126*
2. *Young, C. J., Levine, S. C., & Mix, K. S. (2018). The connection between spatial and mathematical ability across development. Frontiers in psychology, 9, 755. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00755*
3. *Sari, D. P. (2018). Errors of Students Learning with React Strategy in Solving the Problems of Mathematical Representation Ability. Journal on Mathematics Education, 9(1), 121-128. DOI:10.22342/jme.9.1.4378.121-128*

4. Ogunsola, O. A., Adelana, O. P., & Adewale, K. A. (2021). Effect of Problem-Based Learning Approach on Students' Academic Performance in Senior Secondary Mathematics. Journal of Science and Mathematics Letters, 9(2), 75-85. DOI: https://doi.org/10.37134/jsml.vol9.2.8.2021

5. Putri, A., Roza, Y., & Maimunah, M. (2020). Development of learning tools with the discovery learning model to improve the critical thinking ability of mathematics. Journal of Educational Sciences, 4(1), 83-92. https://jes.ejournal.unri.ac.id/index.php/JES

6. Dhayanti, D., Johar, R., & Zubainur, C. M. (2018). Improving Students' Critical and Creative Thinking through Realistic Mathematics Education Using Geometer's Sketchpad. Journal of Research and Advances in Mathematics Education, 3(1), 25-35. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1283911.pdf

7. Madrazo, A.L., & Dio, R.V. (2020). Contextualized Learning Modules in Bridging Students' Learning Gaps in Calculus with Analytic Geometry through Independent Learning. Journal on Mathematics Education, 11(3), 457-476. http://doi.org/10.22342/jme.11.3.12456.457-476.

8. Ju, H., Park, H., Jung, E. Y., & Paik, S. H. (2022). Proposal for a STEAM education program for creativity exploring the roofline of a hanok using GeoGebra and 4Dframe. Thinking Skills and Creativity, 45, 101062. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2022.101062

9. Möhring, W., Ribner, A. D., Segerer, R., Libertus, M. E., Kahl, T., Troesch, L. M., & Grob, A. (2021). Developmental trajectories of children's spatial skills: Influencing variables and associations with later mathematical thinking. Learning and Instruction, 75, 101515. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2021.101515

10. Fatimah, A. T. (2021). Mathematical Reasoning of Vocational High School Students on Mathematical Tasks in the Law of Demand Context. AlphaMath: Journal of Mathematics Education, 7(2), 101-113. DOI: 10.30595/alphamath.v7i2.10585

11. El-Demerdash, M., Trgalová, J., & Mercat, C. (2019). Design and Evaluation of Digital Resources for the Development of Creative Mathematical Thinking: A Case of Teaching the Concept of Locus. In Technology in Mathematics Teaching (pp. 145-172). Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-19741-4_7.