УДК 517 (519)
МРНТИ 27.31.17

https://doi.org/10.51889/2511.2022.57.40.009

П.Б. Бейсебай[1*], *Ғ.Х. Мұхамедиев*[2]

[1]*С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Астана қ., Қазақстан*
[2]*С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті, Өскемен қ., Қазақстан*
[*]*e-mail: beisebai@mail.ru*

САНДЫҚ ҚАТАР ЖӘНЕ ОНЫҢ ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ ҰҒЫМДАРЫН ЕНГІЗУДІҢ БІР ӘДІСТЕМЕСІ

Аңдатпа

Ұсынылған жұмыста жоғары оқу орнының оқытушыларына «Сандық қатар және оның жинақтылығы» тақырыбын білім алушыларға баяндаудың бір әдісі ұсынылған. Жоғары оқу орындары студенттерінің оқу үрдісінде қолдануға арналған «Математикалық анализ» және «Жоғары математика» пәні бойынша оқулықтардың көпшілігінде сандар қатарының анықтамасы «Сандық қатар деп сан тізбегінің мүшелерінің шексіз қосындысын айтамыз» немесе «Сандық қатар деп сан тізбегінің мүшелерінен құрылған өрнекті айтамыз» деген білім алушы үшін сандық қатардың мағынасы неде екені ашылмаған түрлерде беріледі.

Ұсынылып отырған мақалада тақырыпты баяндауды, алдымен білім алушыға, әзірше тек бірнеше сан үшін ғана тән қосынды ұғымын сан тізбегіне дейін жалғастыру мәселесі мен оны шешу жолын талдаудан бастап, сонан соң сандық қатар ұғымын мүшелерін қосындылау тұрғысынан қарастырылатын сан тізбегі ретінде енгізіп және оның қосылғыштар деп аталмай, сандық қатар деп не себепті аталуына тоқталу реттілігімен баяндау жолы ұсынылады. Авторлар әдістемені, тақырыпты осылайша бірізді сипаттау желісімен баяндау, тақырыптың материалдарының толық меңгеруілінуіне зор ықпалын тигізеді деген оймен ұсынады.

Түйін сөздер: сандық қатар, қатардың қосындысы, қатардың жинақтылығы және жинақсыздығы, дербес қосынды, сандық тізбек.

Аннотация

П.Б. Бейсебай[1], *Г.Х. Мухамедиев*[2]
[1]*Казахский агротехнический университет им. С.Сейфулллина, г.Астана, Казахстан*
[2]*Восточно-Казахстанский государственный университет им. С.Аманжолова, г.Усть-Каменогорск, Казахстан*

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИКЕ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ ЧИСЛОВОГО РЯДА И ЕГО СХОДИМОСТИ

В представленной работе предлагается преподавателям высших учебных заведений одна методика изложения темы «Числовой ряд и его сходимость». В большинстве учебников по математическому анализу и высшей математике, предназначанных для студентов высших учебных заведений, зачастую определение числового ряда приводится в следующих формулировках: «Числовым рядом называется бесконечная сумма чисел числовой последовательности» или «Числовым рядом называется выражение составлениная из чисел числовой последовательности», из которых не понятен смысл числового ряда.

В статье изложение темы предлагается начинать с исследования проблемы о продолжении понятия суммы чисел, присущего, пока только для нескольких чисел, до чисел заданной последовательности и путей ее решения. Затем, предлагается введение понятия числового ряда, как числовой последовательности, рассматриваемой с позиции суммирования ее чисел с разъяснением, почему числа последовательности не названы слагаемыми, как в случае суммирования нескольких чисел. Авторы полагают, что изложение темы в такой последовательности, полностью раскрывает суть темы.

Ключевые слова: числовой ряд, сумма ряда, сходимость и расходимость ряда, частичная сумма ряда, числовая последовательность.

Abstract

ON A METHOD FOR INTRODUCING
THE CONCEPTS OF A NUMERICAL SERIES AND ITS CONVERGENCE

Beisebay P.B.[1], *Mukhamediev G.H.*[2]
[1]*S.Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Astana, Kazakhstan*
[2]*S. Amanzholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan*

In the presented work, teachers of higher educational institutions are offered one method of presenting the topic "Number series and its convergence". In most textbooks on mathematical analysis and higher mathematics intended for students of higher educational institutions, the definition of a number series is often given in the following formulations:

"A number series is an infinite sum of numbers in a number sequence" or "A number series is an expression made up of numbers in a number sequence", from who do not understand the meaning of the number series.

In the article, the presentation of the topic is proposed to begin with a study of the problem of extending the concept of the sum of numbers, inherent, so far, only for several numbers, to the numbers of a given sequence and ways to solve it. Then, it is proposed to introduce the concept of a number series, as a number sequence, considered from the position of summing its numbers with an explanation why the numbers of the sequence are not called terms, as in the case of summing several numbers. The authors believe that the presentation of the topic in this sequence fully reveals the essence of the topic.

Keywords: numerical series, sum of a series, convergence and divergence of a series, partial sum of a series, numerical sequence.

Кіріспе

Қатарлар теориясы математиканың, физиканың және жаратылыстану ғылымдарының барлық дерлік салаларында қолданылуы қатарлар теориясының аталған мамандықтар бойынша мамандар даярлаудағы зор маңызын көрсетеді. Қатарлар теориясы «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» ұғымдарын енгізуден басталатындықтан, бұл ұғымдар қатарлар теориясының іргелі ұғымдары болып табылады. Сол себепті «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» ұғымдарын енгізудің білімгерлерге мейлінше жетімді түрде баяндалуы маңызды мәселелердің бірі болып танылады. Өкінішке орай, жоғары оқу орындарына арналған оқулықтар мен оқу құралдарында аталған ұғымдар білімгерлерге жетімді болатындай енгізілген деп айта алмаймыз.

Оларда сандық қатар ұғымы, негізінен, «Сандық қатар деп

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., \quad a_n = f(n), n \in N$$

сандық тізбегінің сандарынан құрылған

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

өрнегін айтамыз» [1]-[8] немесе «Сандық қатар деп

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., \quad a_n = f(n), n \in N$$

сандық тізбегінің сандарының $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ шексіз қосындысын айтамыз» [9]-[12] деген анықтамалармен енгізіледі.

Сандық қатардың «Сандық қатар деп $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ өрнегін айтамыз» деп берілген анықтамасына тоқталсақ, ол, «x санының үш дәрежесі деп x^3 өрнегін айтамыз» деп берілген, санның үш дәрежесі дегеннің мағынасы неде екені түсініксіз анықтама тәрізді, $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ өрнегінің мағынасы неде екені ашылмаған мағынасыз анықтама болады.

Сандық қатардың «Сандық қатар деп

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., \quad a_n = f(n), n \in N \tag{1}$$

сандық тізбегінің сандарының

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

шексіз қосындысын айтамыз» деп берілген анықтамасына келер болсақ, білім алушыға, әзірше «қосынды» ұғымы бірнеше санға ғана тән ұғым болғандықтан, «$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ - шексіз қосынды» дегеннің мағынасы жоқ. «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» тақырыбының мақсатының өзі - сандық тізбектің (белгілі бір ретпен қарастырылатын сандардың шексіз жиынтығының) сандарының қосындысы ұғымын енгізу. Сол себепті сандық қатардың «Сандық қатар деп $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ шексіз қосындысын айтамыз» деп берілген анықтамасы да білім алушы үшін мағынасы беймәлім анықтама болады.

Тақырыптың өзектілігі. «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» қатарлар теориясының іргелі (фундаментальды), пропедевтикалық рөл атқаратын негізгі ұғымдары. Қатарлар теориясын игеруде «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» ұғымдарын дұрыс, түсінікті, яғни тиімді етіп енгізудің, білімгерлерді сандық қатарды жинақтылыққа зерттеуге үйретудің, келешекте математиканың, физиканың, экономиканың және жаратылыстану ғылымдарының көптеген есептерін шешуде кеңінен қолданылатын «Математикалық талдау» мен «Дифференциалдық теңдеулер» тақырыптарын игеруге мүмкіндік беретіндігі, тақырыптың өзектілігін көрсетеді.

Ұсынылып отырған *жұмыстың мақсаты:* Жоғары оқу орындарының оқытушыларына “Сандық қатар” және “Сандық қатар жинақтылығы” тақырыбын жоғарыда аталған мағынасы білімгер үшін түсініксіз, шұбалаңқы тұжырымдарды жібермей, білімгерге мейлінше ұғынықты түрде баяндаудың әдістемесін ұсыну.

Зерттеу әдістері

Оқу үдерісіндегі ең басты мәселе – білімгердің ақпаратты дұрыс қабылдауы, түсінуі (интерпретациялауы) және дұрыс пайдалануы. Олай болса, «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» ұғымдарын енізудегі басты мәселе – бұл ұғымдардың неліктен енгізіліп отырғандығы және олардың не үшін қажет екендігі жайлы ақпаратты білімгерлердің білуін, түсінуін және дұрыс қолдануын қамтамасыз ету.

Осы орайдағы басты мәселе - «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» ұғымдарын игеруді, білімгерлер қиналмай шеше алатын мысалдар қарастыру және осы мысалдар нәтижелерін жалпылау негізінде іске асыру.

Ең алдымен «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» тақырыбында қандай мәселе қарастырылатына тоқталамыз. Білімгерлерге, әзірше, тек екі немесе бірнеше санға ғана тән сандар қосындысы ұғымын белгілі бір ретпен қарастырылатын сандардың шексіз жиынтығына дейін жалғастыру, яғни сан тізбегінің сандарының қосындысы ұғымын енгізу мәселесі қарастырылады.

Мәселенің түйіні неде екені білімгерлерге түсінікті болу үшін, оларға екі немесе бірнеше сандарды қосындылау теориясына қысқаша шолу жүргізіп аламыз.

Қосынды ұғымы - жиынның екі немесе бірнеше элементтері үшін енгізілген ұғым және ол, алдымен, екі елемент үшін анықталады:

Анықтама 1. Берілген жиынның a_1 және a_2 элементтерінің қосындысы деп осы екі элементке қосу ережесі (заңы) бойынша сәйкестікке қойылған берілген жиынның элементі аталады.

a_1 және a_2 элементтерінің қосындысы яғни, осы екі элеменке қосу ережесі бойынша сәйкестікке қойылған элемент, $a_1 + a_2$ түрінде белгіленіп, a_1 және a_2 элементтері $a_1 + a_2$ қосындысының қосылғыштары деп аталады.

Әрине, бұл анықтаманың мағынасы тек қосу ережесі деп қандай ереже аталатынын білетін білімгер үшін ғана түсінікті болады. Сондықтан қосу ережесі дегеніміз қандай ереже екеніне тоқтала кеткен жөн болады.

Анықтама 2. Қосу ережесі деп:

1) $f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1)$;

2) $f(f(a_1, a_2), a_3) = f(a_1, f(a_2, a_3))$;

3) кез келген a элементі үшін $f(a,0) = a$ теңдігі орынды болатын жалғыз 0 элементі бар болады. 0 – нөлдік элемент деп аталады;

4) әрбір a элементі үшін $f(a,-a) = 0$ болатын a элементіне қарама қарсы жалғыз a элементі бар болатын шарттарын қанағаттандыратын f ережесі аталады.

Екі элементтің қосындысының анықтамасы бойынша, егер f – қосу ережесі болса, онда $f(a_1, a_2)$ элементі $a_1 + a_2$ қосындысы болады:

$$f(a_1, a_2) = a_1 + a_2$$

Қосу ережесінің көрнекі мысалы ретінде геометриялық векторлар жиынына

$$f\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC} \text{ және } f\left(\overrightarrow{AB},\vec{O}\right)= f\left(\vec{O},\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}$$

теңдіктерімен енгізілген үшбұрыштар ережесін келтіре кеткен жөн болар еді.

Сонан соң қосу ережесінің нақты сандар жиынына енгізілуіне тоқталамыз.

Қосу ережесінің алдымен бүтін сандар жиынына енгізілетінін еске салып, оның бұл жиынға қалай енгізілгендігін

$$2+3, \quad -2+(-3), \quad -2+3, \quad 2+(-3)$$

қосындыларын есептеу ережелерін еске түсіре отырып көрсетеміз.

Сонан кейін, осы бүтін сандарды қосу ережесін негізге ала отырып, қосу ережесін нақты сандар жиынына дейін жалғастыру үдерісіне, мысалдар келтіре отырып, қысқаша шолу жасаймыз.

Ары қарай, әзірге тек екі санға тән қосынды ұғымының үш немесе одан да көп бірнеше сандарға қалай енгізілгендігіне тоқталамыз.

Мысал үшін 2, 3, 4 сандарының қосындысының қалай табылатынына тоқталсақ, бұл қосынды қосу ережесін, алдымен, 2 мен 3 сандарына қолдана отырып 2+3=5 қосындысын тауып алып, сонан соң қосу ережесін 5 қосындысы мен 4 санына қолдану арқылы алынған 5+4=9 саны, яғни қосу ережесін біртіндеп екі рет қолдану нәтижесінде алынған (2+3)+4 саны болатынын аламыз. Бұл мысалдан, жалпы алғанда, үш a_1, a_2, a_3 сандарының қосындысы ретінде a_1, a_2, a_3 сандарына *біртіндеп қосу ережесі* бойынша сәйкестікке қойылған $(a_1+a_2)+a_3$ санының қабылданатындығын көреміз.

Бұл қосынды $a_1+a_2+a_3$ түрінде белгіленеді:

$$a_1+a_2+a_3=(a_1+a_2)+a_3.$$

a_1, a_2, a_3 сандары $a_1+a_2+a_3$ қосындысының қосылғыштары деп аталады.

Осы арада a_1, a_2, a_3 сандарының жай ғана «қосылғыштар» деп емес, «қосындының қосылғыштары» деп аталатынына білімгердің назарын аудару керек.

Бірнеше санның қосындысы ұғымы да осылайша анықталады.

Анықтама 3. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ $(n=3,4,\ldots)$ сандарының қосындысы деп осы сандарға *біртіндеп қосу ережесі* бойынша (қосу ережесін біртіндеп $n-1$ рет қолдану арқылы) сәйкестікке қойылған

$$(\ldots((a_1+a_2)+a_3)+\ldots+a_{n-1})+a_n$$

санын айтамыз.

Бұл қосынды $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ түрінде белгіленеді**:**

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=(\ldots((a_1+a_2)+a_3)+\ldots+a_{n-1})+a_n,$$

мұндағы $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ сандары $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ қосындысының қосылғыштары деп аталады.

Екі және бірнеше сандардың қосындылары ұғымы осылайша енгізілген болатын.

«Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» тақырыбында қосынды ұғымын, бірнеше сандармен ғана шектелмей,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

сандық тізбегі үшін (белгілі бір ретпен қарастырылатын сандардың шексіз жиынтығы үшін) енгізу, яғни сандар тізбегіне *біртіндеп қосу ережесі* бойынша бір санды сәйкестікке қою мәселесі қарастырылады.

Біртіндеп қосу ережесінің сан тізбегіне қолданылуының оның бірнеше санға қолданылуынан айырмашылығы неде екенін қарастырамыз.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ бірнеше сандарына біртіндеп қосу үдерісінде

$$S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = S_2 + a_3, \quad S_n = S_{n-1} + a_n$$

қосындылары есептелінеді де, нәтижесінде алынған қосындылардың

$$S_2, S_3, \dots, S_n$$

шектеулі тізбегінің соңғы S_n қосындысы $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ тізбегіне біртіндеп қосу ережесі бойынша сәйкестікке қойылған сан ретінде алынады.

Ал біртіндеп қосу ережесін (1) сандық тізбегіне қолданатын болсақ, қосындылар тізбегі

$$S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

шектеусіз тізбек болады да, шектеусіз тізбекте соңғы мүше болмайтындықтан, қосындылар тізбегінің соңғы қосындысын сәйкестікке қоямыз деген сөздің мағынасы болмайды. Сол себепті тізбекке біртіндеп қосу ережесі бойынша бір санды сәйкестікке қою – әзірше шешілмеген мәселе болып шығады. Тақырып мәселесінің түйіні осында.

Бұл мәселені шешудің жолын мысалмен қарастырайық.

Мысал үшін $a_n = \dfrac{9}{10^n}, n \in N$ жалпы мүшесімен берілген

$$\frac{9}{10}, \frac{9}{10^2}, \frac{9}{10^3}, \dots, \frac{9}{10^n}, \dots \tag{2}$$

тізбегін алайық.

Осы тізбекке қолданылған біртіндеп қосу үдерісі

$$S_n = 1 - \frac{1}{10^n}, n = 2,3,\dots$$

жалпы мүшесімен берілетін

$$1 - \frac{1}{10^2}, 1 - \frac{1}{10^3}, \dots, 1 - \frac{1}{10^n}, \dots$$

қосындылар тізбегімен сипатталады.

Ал қосындылардың бұл тізбегі, яғни (2) тізбегінің сандарын біртіндеп қосу үдерісі 1 санына жинақталады:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1.$$

Осы 1 санын берілген (2) сандық тізбегіне біртіндеп қосу ережесі бойынша сәйкестікке қойылған сан ретінде, яғни (2) тізбегінің сандарының қосындысы ретінде аламыз. Аталған қосындыны

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots$$

түрінде белгілейміз:

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+...+\frac{9}{10^n}+...=1.$$

Осы мысал негізінде

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n,...$$

тізбегіне біртіндеп қосу ережесі бойынша сәйкестікке қойылатын сан жөнінде келесі ұйғарымға келеміз:

(1) тізбегіне біртіндеп қосу ережесі бойынша сәйкестікке қойылатын сан ретінде, яғни (1) тізбегінің мүшелерінің қосындысы ретінде

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+a_3+...+a_n)=S$$

санын аламыз да, бұл қосындыны $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ түрінде белгілейміз:

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+a_3+...+a_n)=S.$$

Әрине, бұл ұғым тек жинақты, яғни шегі бар және ақырлы болатын (шегі сан болатын) тізбектерге ғана тән ұғым болады, бірақ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ шегі кез келген тізбек үшін бар және ақырлы бола бермейді ($\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ шегі жоқ немесе шексіздікке тең болатын сандық тізбектер де болады).

Мысалы, $a_n=(-1)^n,\quad n\in N$ жалпы мүшесімен берілген

$$-1, 1, -1, 1,...$$

сандық тізбегі үшін

$$S_n=\begin{cases} 0, \text{ егер n} & \text{жұп болса} \\ -1, \text{ егер n} & \text{тақ болса}\end{cases}$$

болады да, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ шегі жоқ болады. Олай болса біртіндеп қосу ережесі $a_n=(-1)^n,\quad n\in N$ тізбегіне ешбір санды сәйкестікке қоймайды, яғни біртіндеп қосу тұрғысынан бұл тізбектің сандарының қосындысы болмайды (біртіндеп қосу тұрғысынан берілген тізбек қосындыланбайтын тізбек болады).

Сол сияқты, $a_n=2n,\quad n\in N$ жалпы мүшесімен берілген

$$2, 4, 6, ...,2n,...$$

сандық тізбегі үшін

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2+2n}{2}n=\lim_{n\to+\infty}(1+n)n=+\infty$$

болатындықтан, біртіндеп қосу тұрғысынан бұл тізбек те қосындыланбайтын тізбек болады.

Сонымен біз біртіндеп қосу ережесі тұрғысынан сан тізбектерін екі түрге бөлдік:

– қосындыланатын (қосындысы бар), яғни $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ шегі сан болатын тізбектер:

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\lim_{n\to+\infty} S_n = S;$$

– қосындыланбайтын (қосындысы жоқ), яғни $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ шегі шексіздікке тең немесе жоқ болатын тізбектер.

Енді жоғарыда айтылғандарды, келтірілген ұғымдарға арнайы атаулар беріп және тиісті белгілеулер енгізіп, тізбектей баяндаудың сұлбасын келтірейік.

Зерттеу нәтижелері

«Сандық қатар және оның жинақтылығы» тақырыбында берілген

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n,..., \quad a_n=f(n), n\in N \,(1)$$

тізбегін қосындылау, яғни осы тізбекке біртіндеп қосу ережесі бойынша бір санды сәйкестікке қою мәселесі қарастырылады.

Жоғарыда айтылғандарды, келтірілген ұғымдарға арнайы атаулар мен тиісті белгілеулер енгізе отырып, тізбектей баяндаудың сұлбасын келтірейік.

Біріншіден, осы тұрғыдан қарастырылатын сан тізбегіне арнайы атау берейік.

Бірнеше санға бұл сандар қандай болмасын, қосу ережесі бір санды сәйкестікке қоятындықтан, олардың қосындысы міндетті түрде бар болады да, бірнеше сандар осы қосындының қосылғыштары болады, яғни, біртіндеп қосу тұрғысынан қарастырылатын кез келген бірнеше санды, қосылғыштар деп атай аламыз.

Ал сандық тізбектің қосындысы міндетті түрде бар болады деп айта алмаймыз, сондықтан тізбектің мүшелерін қандай да бір қосындының қосылғыштары деп атай алмаймыз.

Сан тізбегінің (1) түрінде жазылуын бір қатарға жазылған сандар деп те қарастыруға болатындықтан, біртіндеп қосу тұрғысынан қарастырылатын сан тізбегін *сандық қатар* деп атаймыз.

Сонымен, біз келесі анықтамаға келеміз:

Анықтама 4. *Сандық қатар* деп мүшелерін біртіндеп қосу тұрғысынан қарастырылатын сан тізбегі аталады.

Сандық тізбектің (1) түріндегі жазылуындағы «,» («үтір») белгісінің ешқандай математикалық рөлі жоқ, ол тек тізбекті көрнекі (визуальді) қабылдағанда осы тізбектің мүшелерін бір-бірінен ажыратушы ретінде қойылған. Сондықтан, біртіндеп қосу тұрғысынан қарастырылатын (1) сан тізбегін, яғни (1) сандық қатарын, тізбектегі үтір белгісінің орнына, тізбектің қосу амалымен байланысты қарастырылатын тізбек екенін мегзеп тұратын «+» («плюс») белгісімен ажыратып жазғанда пайда болатын

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (3)$$

өрнегімен белгілейміз.

(3) сандық қатары қысқаша $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ түрінде белгіленеді.

Ескерту. Әзірге тізбектің мүшелерінің қосындысы ұғымы енгізілген жоқ, сондықтан (3) өрнегі қосынды емес, яғни «+» таңбасы қосу белгісі емес, ол сандарды бір-бірінен ажыратушы рөлін атқаратын таңба.

Жоғарыда айтылғандай, (3) сандық қатарына қолданылатын біртіндеп қосу үдерісі

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

жалпы мүшесімен берілетін қосындылар тізбегімен сипатталады.

Анықтама 5. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ қосындысы (3) қатарының алғашқы n мүшесінің немесе $n -$*ші дербес қосындысы* деп аталады.

Анықтама 6. Егер $\lim_{n\to+\infty} S_n$ бар және ақырлы, яғни $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ сан болса, онда (3) сандық қатары жинақты (қосындысы бар, біртіндеп қосу тұрғысынан қосындыланатын) қатар деп аталады да, S шегі осы (3) қатарының қосындысы деп аталады.

Жинақты қатардың қосындысы

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{ немесе } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad (4)$$

түрлерінде белгіленеді:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S \text{ немесе } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S\,. \qquad (5)$$

Ескерту. Жинақты қатардың өзі де және оның қосындысы да бір

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

өрнегімен белгіленіп тұр:

(4) жазылымындағы $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ өрнегі – сандық қатардың, яғни мүшелерін біртіндеп қосу тұрғысынан қарастырылатын сандық тізбектің белгілеуі болса, (5) жазылуындағы тура осы $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ өрнегі – жинақты қатардың қосындысының, яғни $\lim_{n\to+\infty} S_n$ санының белгілеуі болады.

Ескерту. $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ сандық қатарының біртіндеп қосу тұрғысынан қарастырылған $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ сан тізбегі болғанымен, «$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ сандық қатары жинақты» дегеніміз бен «$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ тізбегі жинақты» дегеніміз әртүрлі ұйғарымдар болады: сандық қатардың жинақтылығының анықтамасынан, «сандық қатар жинақты» дегенді - $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ сан тізбегінің емес, осы сан тізбегінің дербес қосындыларының $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ тізбегі, яғни біртіндеп қосу үдерісі жинақты деп түсіну керек екені шығады.

Анықтама 7. Егер $\lim_{n\to+\infty} S_n$ шегі шексіздікке тең немесе жоқ болса, онда (4) қатары жинақсыз немесе біртіндеп қосу тұрғысынан қосындыланбайтын қатар деп аталады.

Ескерту. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$ жағдайында, шартты түрде, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \infty$ деп те айта береміз (∞ - сан емес).

Талқылау

Жұмыста ұсынылған әдістеме желісінде Сәкен Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің энергетикалық факультетінің бірінші курс студенттеріне «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» тақырыбында ашық дәріс өткізілді. Ашық сабақ «Жоғары математика» кафедрасының әдістемелік семинарында талқыланып, тақырыпты баяндаудың сабақта келтірілген баяндау әдістемесін жоғары оқу орындарының оқытушыларына тақырыпты білімгерге мейлінше ұғынықты болатындай етіп баяндаудың әдістемесі ретінде ұсынуға болады деген қортынды жасалды.

Қорытынды

Аталған мақала білім алушыларға «Сандық қатар және оның жинақтылығы» тақырыбын баяндау тек бірнеше сандарға тән қосынды ұғымын сан тізбегі үшін енгізу мәселесі мен оны шешудің жолдарын талдап, сондай-ақ сандық қатар ұғымын мүшелерін қосындылау тұрғысынан қарастырылатын сан тізбегі енгізіліп және оның атауын сандық қатар деп атап, оның осылай аталу себебінің реттілігін көрсетіп, негіздеп және авторлар тарапынан оларды тізбектей баяндау жолы ұсынылды.

Халық даналығы - «Әр нәрсенің өз орны, уақыты және шегі бар» дейді. «Математикалық талдау» пәнін оқыту барысында, «Сандық қатар» және «Сандық қатар жинақтылығы» ұғымдарын енгізудің ұсынылып отырған, көрсетілген әдістемесі, оқыту үрдісіндегі келтірілген даналықты түсініп қана қоймай, сонымен бірге оны басшылыққа алудың жарқын көрінісі.

Әдістеме пәнді оқыту барысында пәндік материалдардың түсініктілігін жоғарылатумен, бірізділігін қалыптастырумен бірге, оқытушы мен білімгерлер, білімгер мен басқа білімгерлер арасында әріптестік қатынас орнатып, топ мүшелері арасында сыйластық, бірлік деңгейін жоғарылатады. Бұл әдістемені кез келген ұғымды енгізу барысында өзгеріссіз пайдалануға болады.

Ұсынылып отырған әдістеменің тиімділігі де осында.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. *Сағынтаев С., Сағынтаева С.С. Жоғары математика. Оқулық. – Алматы: АЭжБУ, 2020, – 609 б. ISBN 978-601-329-164-2*
2. *Грачев Д.А. Числовые ряды и бесконечные произведения в вопросах и задачах. Учебное пособие. – МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018. –60 с.*
3. *Горбунова Н.Ю., Платонова Н.Н. Ряды. Учебное пособие. – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2017 – 156 с. ISBN 978-5-94279-352-4*
4. *Абдиманапова П.Б. Математика. Оқу құралы. – Алматы: АТУ РББ, 2019.-174 б. ISBN 978-601-263-503-4*
5. *Жәутіков О.А. Математикалық анализ курсы. Оқулық. – Алматы: «Экономик» баспасы, 2014. – 832 б.*
6. *Базарбекова А.А., Базарбеков А.Б. Жоғары математика: Оқулық – Алматы: «Евро» баспасы, 2017. – 368 б.*

7. Ибрашев Х.И., Еркғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы. Оқулық / ҚЗ жоғары оқу орындарының қауымдастығы. Алматы: «Экономика» баспасы. ЖШС, 2014. Т II. – 252 б.

8. Тоқбергенов Ж.Б. Жоғары математиканың қысқаша курсы техникалық және технологиялық мамандықтарының студенттеріне арналған оқулық - Алматы: «Отан» ЖҚ, 2014. – 373 б.

9. Гребенщиков Ю., Седых И., Шевелев А. Математика. Учебник и практикум для СПО: МОСКВА. Юрайт. 2016.- 443 с.

10. Ақжігітов Е.Ә. Экономистерге арналған математика. 2-бөлім. Оқулық. – Астана: С.Сейфуллин атындағы ҚАТУ, 2018, – 260 б. ISBN 978-9965-874-32-6

11. Чумакова С.В. Математическое моделирование и математический анализ. Краткий курс ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2017. – 46 с.

12. Қасымов Е.Ә., Қасымов Қ.Ә. Жоғары математика курсы (Математикалық анализ). Оқулық. 2 – бөлім. – Алматы, «Экономика» баспасы. 2014, - 386 б.

References:

1. Sagyntaev S., Sagyntaeva S.S. (2020) Zhogary matematika [Higher mathematics]. Okulyk. Almaty: AJezhBU, 609. ISBN 978-601-329-164-2. (In Kazakh)

2. Grachev D.A. (2018) Chislovye rjady i beskonechnye proizvedenija v voprosah i zadachah [Number series and infinite products in questions and problems]. Uchebnoe posobie. MGU imeni M.V. Lomonosova, 6. (In Russian)

3. Gorbunova N.Ju., Platonova N.N. (2017) Rjady [Rows]. Uchebnoe posobie. Perm': IPC «Prokrost#», 156. ISBN 978-5-94279-352-4 (In Russian)

4. Abdimanapova P.B. (2019) Matematika. Oku kuraly. Almaty: ATU RBB, 174. ISBN 978-601-263-503-4 (In Kazakh)

5. Zhautikov O.A. (2014) Matematikalyk analiz kursy [Mathematical analysis course]. Okulyk. Almaty: «Jekonomik» baspasy, 832. (In Kazakh)

6. Bazarbekova A.A., Bazarbekov A.B. (2017) Zhogary matematika [Higher mathematics]: Okulyk. Almaty: «Evro» baspasy, 368. (In Kazakh)

7. Ibrashev H.I., Erkgұlov Sh.T. (2014) Matematikalyқ analiz kursy [Mathematical analysis course]. Okulyk. ҚZ zhokary oku oryndarynyң kauymdastygy. Almaty: «Jekonomika» baspasy. ZhShS, T II. 252. (In Kazakh)

8. Toқbergenov Zh.B. (2014) Zhogary matematikanyң kysқasha kursy tehnikalyk zhane tehnologijalyқ mamandyқtarynyң studentterine arnalgan oқulyқ [A short course of higher mathematics is a textbook for students of technical and technological specialties]. Almaty: «Otan» ZhҚ, 373. (In Kazakh)

9. Grebenshhikov Ju., Sedyh I., Shevelev A. (2016) Matematika [Matematika]. Uchebnik i praktikum dlja SPO: MOSKVA. Jurajt. 443. (In Russian)

10. Aқzhigitov E.Ә. (2018) Jekonomisterge arnalғan matematika. 2-bөlim [Mathematics for Economists. Part 2.]. Okulyk. Astana: S.Sejfullin atyndaғy ҚATU, 260. ISBN 978-9965-874-32-6. (In Kazakh)

11. Chumakova S.V. (2017) Matematicheskoe modelirovanie i matematicheskij analiz [Mathematical modeling and mathematical analysis]. Kratkij kurs FGOU VPO «Saratovskij GAU». Saratov, 46. (In Russian)

12. Қasymov E.Ә., Қasymov Қ.Ә. (386) Zhoғary matematika kursy (Matematikalyқ analiz) [Advanced Mathematics Course (Mathematical Analysis)]. Okulyk. 2-bolim. Almaty, «Jekonomika» baspasy. 386. (In Kazakh)