МРНТИ 20.01.07
УДК 372.8

https://doi.org/10.51889/2022-2.1728-7901.24

А.А. Акжолова[1], Г.Б. Камалова[1], Е.К. Хеннер[2], Е.М. Байзакова[1]*

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Пермь мемлекеттік ұлттық зерттеу университеті, Пермь қ., Ресей Федерациясы
[*]e-mail: akmarala.0706@gmail.com

МЕКТЕПТІҢ ИНФОРМАТИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМ БЕРУ ЖҮЙЕСІНДЕ ӘЛ-ФАРАБИДІҢ ТРИГОНОМЕТРИЯСЫН ОҚЫТУДЫҢ ҚАЖЕТТІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Орта ғасыр дәуірінің ұлы ойшылы әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасы – әлемдік ғылым мен өркениеттің дамуына баға жетпес үлес қосқан орасан зор теориялық және практикалық құндылыққа ие. Ол бір градусты синусты табудың және практикадағы әртүрлі есептерді шешуге қажетті тригонометриялық кестелерді құрудың бірегей алгоритмдерін ұсынады. Оларды қазіргі заманғы информатика-математикалық білімге енгізу ұлы ғалымның мұрасын кеңінен дәріптеуді ғана емес, сонымен қатар, тригонометрияны оқыту мазмұнын байытуға, оның қолданбалы бағытын күшейтуге, оқушылардың математика мен информатика саласындағы пәндік білім жүйесін кеңейтуге мүмкіндік береді, сондай-ақ, компьютерлік бағдарламалық жасақтамасыз кесте құру мүмкін емес. Әл-Фарабидің математикалық мұрасының басым бөлігін, оның ішінде тригонометрия бойынша еңбектерін алғаш рет Ислам шығысының математика және педагогика тарихы саласын салыстырмалы түрде белгілі қазақстандық ғалым Ауданбек Көбесов тауып, зерттеді. Бірақ, әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасының дидактикалық әлеуетін және оны оқу үдерісіне енгізу мәселелерін әлі ешкім зерттеген жоқ. Бұл жұмыстың мақсаты – ұлы ғалымның тригонометриялық мұрасымен танысу, оны мектептегі информатика-математикалық білім беру жүйесіне енгізу мүмкіндігін зерттеу және оқытудың тиімділігін арттыруда заманауи ақпараттық-коммуникациялық технологияларды қолдану.

Түйін сөздер: Әл-Фарабидің тригонометриясы, GeoGebra, синустар кестесін құру, оқытудағы тарихизм принципі, алпысыншы санау жүйесі, тригонометриялық сызықтар.

Аннотация

А.А. Акжолова[1], Г.Б. Камалова[1], Е.К.Хеннер[2], Е.М. Байзакова[1]
[1]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан,
[2]Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация

О НЕОБХОДИМОСТИ ОБУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ АЛЬ-ФАРАБИ В СИСТЕМЕ ШКОЛЬНОГО ИНФОРМАТИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Тригонометрическое наследие аль-Фараби – великого мыслителя эпохи средневековья, внесшего неоценимый вклад в развитие мировой науки и цивилизации, представляет огромную теоретическую и практическую ценность. В нем предлагаются уникальные алгоритмы нахождения синуса одного градуса и построения тригонометрических таблиц, необходимых для решения различных задач практики. Включение их в современное информатико-математическое образование позволит не только популяризировать наследие великого ученого, но и обогатит содержание обучения тригонометрии, усиливая его прикладную направленность, расширит систему предметных знаний обучающихся как по математике, так и информатике, поскольку построение таблицы невозможно без программной реализации на компьютере. Как и преобладающая часть математического наследия аль-Фараби, его труды по тригонометрии впервые обнаружены и изучены сравнительно недавно известным казахстанским ученым в области истории математики и педагогики исламского Востока Ауданбеком Кубесовым. Но дидактический потенциал тригонометрического наследия аль-Фараби и вопросы его внедрения в учебный процесс до сих пор никем не исследованы. Целью данной работы является знакомство с тригонометрическим наследием великого ученого и изучение возможности внедрения его в систему школьного информатико-математического образования.

Ключевые слова: тригонометрия аль-Фараби, GeoGebra, составление таблицы синусов, принцип историзма в обучении, шестидесятеричная система счисления, тригонометрические линии.

Abstract

ABOUT THE NEED TO TEACH AL-FARABI TRIGONOMETRY IN THE SCHOOL COMPUTER SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION SYSTEM

Akzholova A.[1], E.Kamalova G.[1], Khenner E.[2], Bayzakova E.[1]*
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2]Perm State University, Perm, Russian Federation

The trigonometric legacy of al-Farabi, the great thinker of the Middle Ages, who made an invaluable contribution to the development of world science and civilization, is of great theoretical and practical value. It offers unique algorithms for finding the sine of one degree and constructing trigonometric tables necessary for solving various practical tasks. Their inclusion in modern computer science and mathematics education will not only popularize the legacy of the great scientist, but also enrich the content of teaching trigonometry, strengthening its applied orientation, expand the system of subject knowledge of students in both mathematics and computer science, since the construction of a table is impossible without software implementation on a computer. Like the predominant part of al-Farabi's mathematical heritage, his works on trigonometry were first discovered and studied relatively recently by Audanbek Kubesov, a well-known Kazakh scientist in the field of the history of mathematics and pedagogy of the Islamic East. But the didactic potential of the trigonometric heritage of al-Farabi and the issues of its implementation in the educational process have not yet been investigated by anyone. The purpose of this work is to get acquainted with the trigonometric heritage of the great scientist and to study the possibility of introducing it into the system of school computer science and mathematics education.

Keywords: Al-Farabi trigonometry, GeoGebra, compilation of the sine table, the principle of historicism in teaching, the sixtieth number system, trigonometric lin.

Кіріспе

Тригонометрия ежелгі уақытта астрономияның бір бөлігі ретінде пайда болып, дамыды, оның есептеу аппараты таза геометриялық сипатта болғанымен, негізінен «хорданы есептеу» болды. Сол кезеңдегі тригонометрияның толық мәліметтері ежелгі грек астрономы Птолемейдің әйгілі «Алмагестінде» келтірілген [1].

Математиканың жеке бөлімі ретінде тригонометрия тарихы Орта ғасырларда басталды. Оған ортағасырлық үнді астрономдары айтарлықтай үлес қосты. Сол кезеңдерде ғалымдар хордаларды синустармен алмастырды. Бұл жаңалық үшбұрыштың жақтары мен бұрыштарын зерттеуге қатысты функцияларды енгізуге мүмкіндік берді. Дәл сол кездерде тригонометрия астрономиядан бөлініп, математиканың бір бөліміне айнала бастады.

Үнді астрономиялық трактаттары Птолемейдің «Алмагестімен» бірге таяу және Орта Шығыс елдерінде тригонометриялық ұғымдар мен әдістердің дамуының бастауы болды. Бұл жағдайда Птолемейдің «Алмагесті» үлкен рөл атқарды. IX ғасырдың басында ол грек тілінен араб тіліне аударылып, кейіннен ортағасырлық Шығыстың көптеген ғалымдары түсініктеме беріп, өңделді.

Оның алғашқы комментаторларының бірі – ұлы ғалым, ойшыл және ерте ортағасырлық энциклопедист, қазақ халқының тумасы әл-Фараби (870-950 жж.) болды.

Әл-Фараби ежелгі грек астрономының жұмысындағы қиын математикалық есептеулерді түсінуді жеңілдету үшін Птолемейдің тригонометриялық аппаратын біршама жетілдіреді. «Алмагестке» қосымша кітабының» [2] тригонометриялық тарауларында математикалық астрономия мен географияның әртүрлі есептерін шешу үшін математикалық әдістерді қолдануға байланысты өте дамыған тригонометрияны ұсынған. Кейін ол Лондондағы Британ мұражайында сақталған араб қолжазбасының фотокөшірмесінен аударылып, Ислам шығысының математика және педагогика тарихы саласындағы танымал қазақстандық ғалым А.Көбесов зерттеді және ол «Әл-Фарабидің математикалық мұрасы», «Математикалық трактаттар», «Птолемейдің «Алмагестке» түсініктемелері» атты шетелдік фарабист ғалымдардың жоғары бағасын алған еңбектерінде [2-4] көрініс тапты. Бұрын бұл жұмыс ешқандай тілге аударылмаған, оның бар екендігі де белгісіз еді [5].

Әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасына деген қызығушылық бүгінде ұлы ғалымға деген құрмет пен оның еңбектерін танымал етуге деген ұмтылыс қана емес, ол үлкен дидактикалық мүмкіндіктерге ие және қазіргі мектепте де, математика және информатика мұғалімін дайындауда жоғары педагогикалық білім беруде де оқуға лайықты. Сонымен қатар, оның білім беру аспектілері мен оқу үдерісіне енгізу мәселелері осы уақытқа дейін зерттелмеген.

Материалдар және әдістер

Зерттеу барысында А.Көбесовтың еңбектерінде ұсынылған әл-Фарабидің тригонометриясы бойынша жұмыстары зерделенді, алгебра және информатика пәндерінен үлгілік оқу бағдарламаларына және қазіргі уақытта оқу үдерісінде қолданылатын аталған пәндердің мектеп оқулықтарына талдау жасалды, сонымен қатар, бірқатар әдістер қолданылды: қарастырылып отырған мәселеленің жай-күйін жан-жақты зерттеу мақсатында жүргізілген теориялық талдау әдісі, зерттеу дәрежесін анықтау және оны шешу үшін педагогикалық жағдайлардың жиынтығын анықтау; тікелей және жанама бақылау.

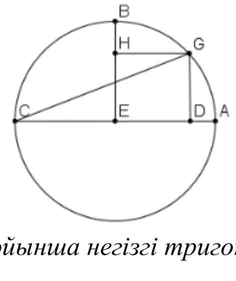
Нәтижелер және талқылау

Математиканы оқытудағы тарихи мәліметтерді көптеген ғалым-әдіскерлер мен математика оқытушылары: В.Я.Буняковский, Н.Я.Виленкин, П.С.Гурьев, Л.Ф.Магницкий, А.Ф.Малинин, К.А.Малыгин, Т.Ф.Осиповский, Д.М.Перевощиков, И.И.Чистяков және басқалары пайдаланды. Қазіргі уақытта математикалық білім берудің гуманитарлық құрамдас бөлігі ретінде ғылым тарихы рөлінің өсуіне байланысты мектептегі математикалық білім берудің тарихи компонентін күшейту мәселесі жаратылыстану ғылыми білім берудің қазіргі заманғы шетелдік және отандық теоретиктері мен практиктерінің жіті назарында болып отыр. Олар: М.И Глухова, Ю.А.Дробышев, О.Н.Журавлева, Т.А.Иванова, Д.Икрамов, А.Е.Малых, Т.С.Полякова, И.М.Смирнова, Т.Т.Фискович, О.В.Шабанова, Б.Ж.Мамуров, Г.К.Нур [6-8] және басқалары.

Олардың еңбектерінде мектептегі математика курсында математикалық идеялар мен әдістердің генезисін қарастыру қажеттілігі бірнеше рет айтылған, оқушылардың математикалық білім деңгейін арттыру мақсатында сабақтарда да, сыныптан тыс жұмыстарда да осы мәселенің жеке аспектілерін шешудің әртүрлі нұсқалары ұсынылған.

Тригонометрия, математиканың көптеген бөлімдері сияқты формальды түрде жасанды, өмірден ажыратылған, түсініксіз болып көрінеді. Егер осы мәселеге әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасын қазіргі білім беру жүйесіне енгізу арқылы тарихи даму тұрғысынан қарайтын болсақ, онда оның терең өмірлік мәні, табиғилығы, қажеттілігі көрінеді.

Өзінің тригонометриялық тарауларының басында әл-Фараби негізгі тригонометриялық сызықтарға – хордалар, синус, косинус және т.б. туралы түсінік береді. Ол «ABC – шеңбер, E – шеңбердің центрі, AC – шеңбердің диаметрі (Сурет 1). E нүктесінен EB түзуін жүргіземіз. Басқа AG беремізде, AG сызығын жүргіземіз, GD-ді AC-ға перпендикуляр түсіреміз және GH-ті перпендикуляр BE-ге, G және C қосамыз. Сонда AG сызығы AG хордасының доғасы, GC хордасы оның толықтыруы, GH – оның косинусы, DE тең AD сызықтары – AG доғасының жебесі, BH – GB доғасының жебесі, GB доғасы AG доғасының шеңберге дейінгі толықтыруы, GBC доғасы – AC доғасының шеңбердің жартысына дейінгі толықтыруы» [1].

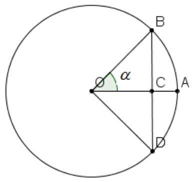


Сурет 1. Әл-Фараби бойынша негізгі тригонометриялық сызықтар

Мәтіннен көрініп тұрғандай, ол синустар мен косинустарды бірінші тоқсанда, ал Птолемей сияқты хордаларды жоғарғы жарты жазықтықта қарастырады. Сонымен қатар, мәтін мен суреттен негізгі тригонометриялық сәйкестендіруді $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = R^2$ және келесі азайту формулаларын $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, сондай-ақ, бірінші тоқсанда синус сызығының мәні артып, косинус сызықтары азаятынын оңай анықтауға болады.

Әрі қарай, ол синусты «Қос доғаның хордасының жартысы ретінде» анықтайды, яғни, егер $BD = chd\,2\alpha$ (Сурет 2), онда BC - доғаның синус сызығы $AB = \alpha$ және

$$\sin\alpha = 1/2 \cdot chd\,2\alpha \qquad (1)$$

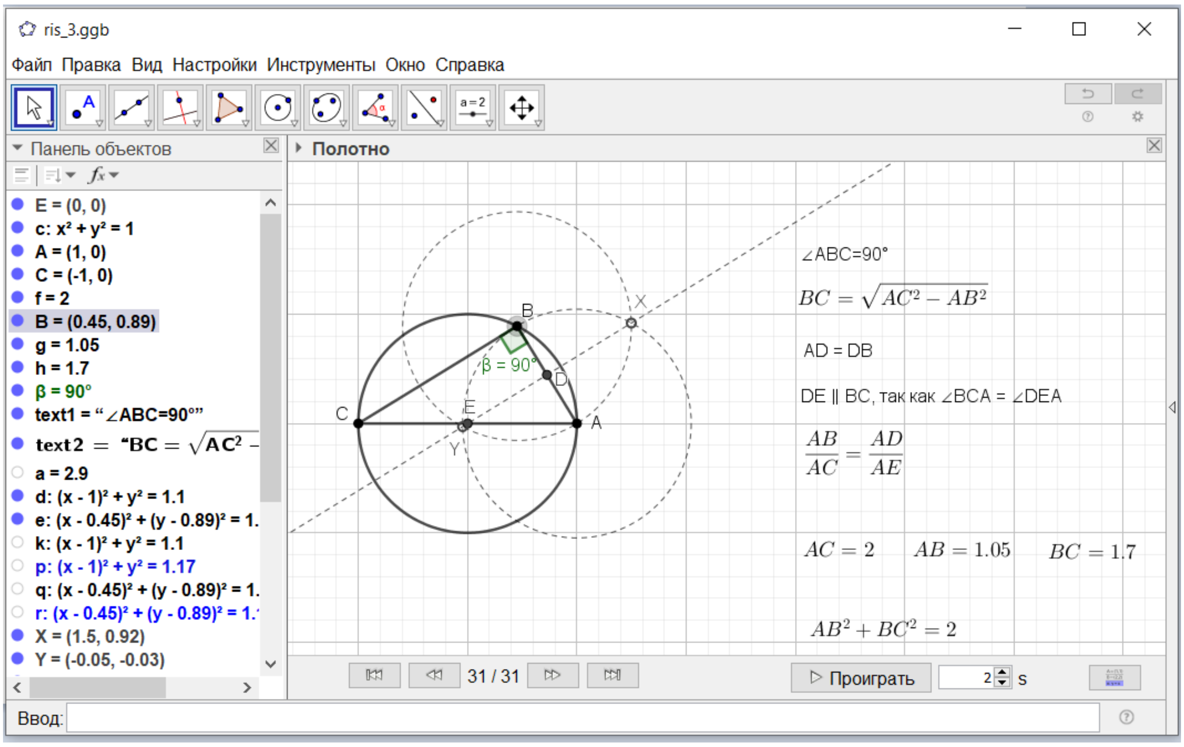


Сурет 2. Әл-Фараби бойынша синусты анықтау

Бұл Птолемейдің түсініктемесінен кейінгі ең алғашқы бізге белгілі синусты енгізу.

Бұдан әрі «Алмагестте» ол 2α доғасының хордасын α бұрышының синусымен ауыстырады. Мұндай ауыстырудың өзі соншалықты маңызды емес болып көрінгенімен, хордадан жартылай хордаға өту астрономияда шеңбердегі үшбұрыштың жақтары мен бұрыштарына байланысты әртүрлі тригонометриялық функциялардың кеңінен енгізілуіне ықпал етті.

Синус ұғымын енгізгеннен кейін негізгі тригонометриялық сызықтарды түсіндіруде әл-Фараби белгілі α доғасының хордасы бойынша оның толықтыруының хордасын табу әдісін сипаттайды. «ABC – шеңбері берілсін, AC – оның диаметрі. Оған AB доғасын орнатып, AB және BC сызықтарын сызамыз (Сурет 3). AB хордасын белгілі деп есептейік. Онда BC хордасы да белгілі болады» [2]. Және өзінің тұжырымында дәлелдейді.



Сурет 3. Доғаның қосымшасының хордасын анықтау

Көрсетілген AB және BC хордалары шеңбердің диаметріне негізделген іштей сызылған бұрыштың жақтарын құрайды, сондықтан ABC бұрышы тік болады. ABC үшбұрышындағы Пифагор теоремасына сәйкес: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ болады. Есептің шарты бойынша AB белгілі, AC – шеңбердің диаметрі. Онда $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ оңай анықталады.

Немесе, егер $AB = chd\alpha$ белгілерін енгізсеңіз, ал $BC = chd(180^0 - \alpha) -$ хордасы оның толықтыруы болса; онда теңдік

$$chd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(2R)^2 - chd^2\alpha}. \qquad (2)$$

Әрі қарай ол былай деп жазады: Әрбір хорда шеңбердің диаметріне, шеңбердің жарты диаметріне осы хорданың жарты доғасының синусы ретінде жатады, себебі, егер біз AB сызығын D нүктесінде қақ бөлеміз және DE сызығын жүргіземіз, мұндағы E – шеңбердің центрі, онда BCA және DEA бұрыштарының теңдігіне байланысты DE және BC параллель болады; AD - AB жарты доғасының синусы, сондықтан AB – AC-ға, AD мен AE сияқты жатады.

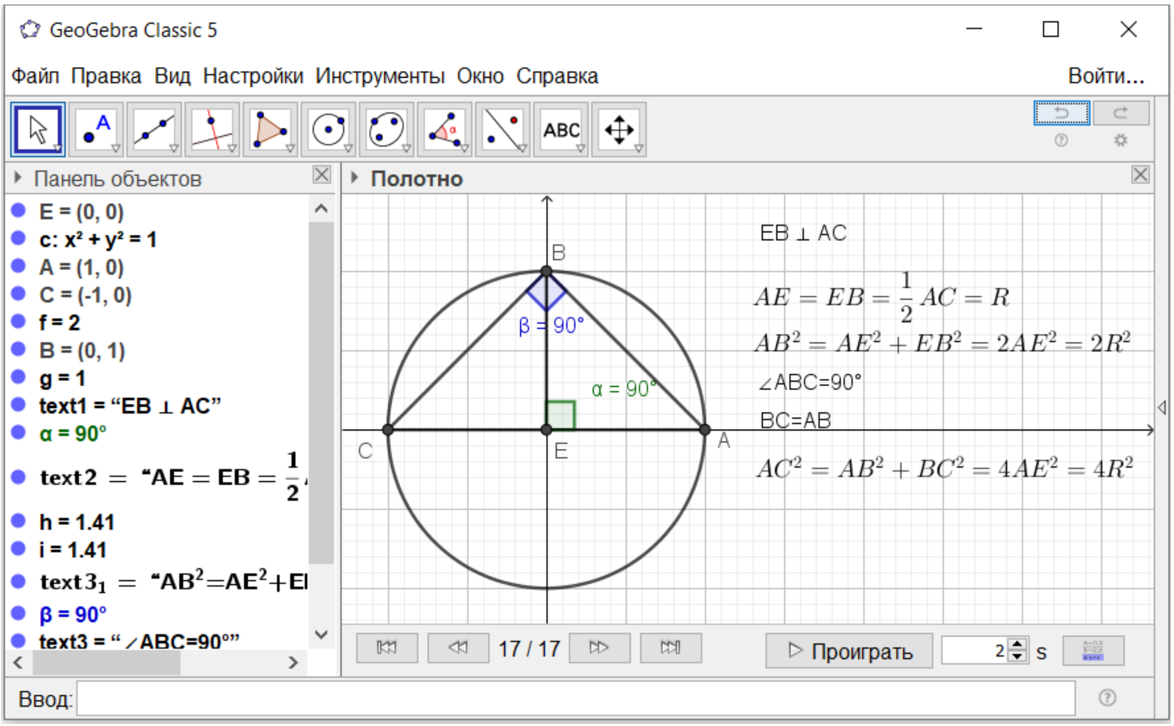
Енгізілген белгілерге байланысты $\frac{chd\alpha}{2R} = \frac{sin(\alpha/2)}{R}$, бұл, сонымен бірге, ол енгізген формуланы негіздейді (1).

Бұл жерде әл-Фарабидегі барлық есептер мен олардың шешімдері іс-әрекеттердің нақты реттілігімен ұсынылғанын және сызбалармен түсіндірілгенін айта ету керек. Тұжырымдалған мәлімдемелердің мәнін, олардың дәлелдерін жақсы түсініп, көрнекі түрде көрсетуге GeoGebra бағдарламалық ортасының мүмкіндігі өте зор [9].

Сонымен қатар, GeoGebra бағдарламасында тиісті түсініктемелермен құрылған құрылымдарды жоғалтып алу мүмкіндігі де бар. Мұнда оқушылар белгілі құрылымның құрылуын қадам бойынша жасап көрулеріне және алгоритмді жақсы түсініп алуларына болады. Сондай-ақ, осы динамикалық ортадағы барлық бастапқы деректерді оңай өзгертуге, нүктелерді жылжытуға, кесіндінің ұзындығын өзгертуге болады және де бұл өзгерістердің нәтижесі компьютер экранында бірден көрінеді. Бұл дәлелдемелердің дұрыстығын тексеруге мүмкіндік береді. Әр түрлі бастапқы деректермен тәжірибе жасау мүмкіндігінің болуы кез келген тапсырманы тереңірек игеруге мүмкіндік береді.

Әл-Фарабидің жұмысында тригонометрия бойынша көптеген тапсырмалар қарастырылған, олардың ішінде шеңбердің төрттен бір бөлігі, үштен бір бөлігі, оннан бір бөлігі және бесінші шеңбер бар. Олардың әрқайсысы «Алмагестке» қосымша кітабының» жеке тарауында келтірілген.

Сонымен, ол «Шеңбердің төрттен бір бөлігінде хорданың көлемін табу» туралы үшінші тарауда былай деп жазады: «ABC шеңбері берілсін, E – оның центрі, AC – оның диаметрі, EB – тік бұрышын сызамыз. A және B, B және C-ны қосамыз. Әрбір AB және BC доғалары шеңбердің төрттен бір бөлігіне тең, сондықтан әрбір AB және BC сызықтары шеңбердің төрттен бір бөлігінің хордасы болады (Сурет 4). Мен оларды белгілі деп есептеймін» [2]. Және оның дәлелін келтіреді.



Сурет 4. Шеңбердің төрттен бір бөлігіндегі хорданың мәнін табу

AEB тікбұрышты үшбұрышында AE және EB жақтары белгілі және жартылай диаметрге тең: AE= EB=1/2AC.

$AB^2 = AE^2 + EB^2 = 2AE^2 = 1/2AC^2$ Пифагор теоремасына сәйкес, яғни шеңбердің төтрттен бір бөлігінің хордасының квадраты жартылай диаметрдің екі квадратына тең.

Мұндағы $AB = chd90^0 = \sqrt{2}AE$.

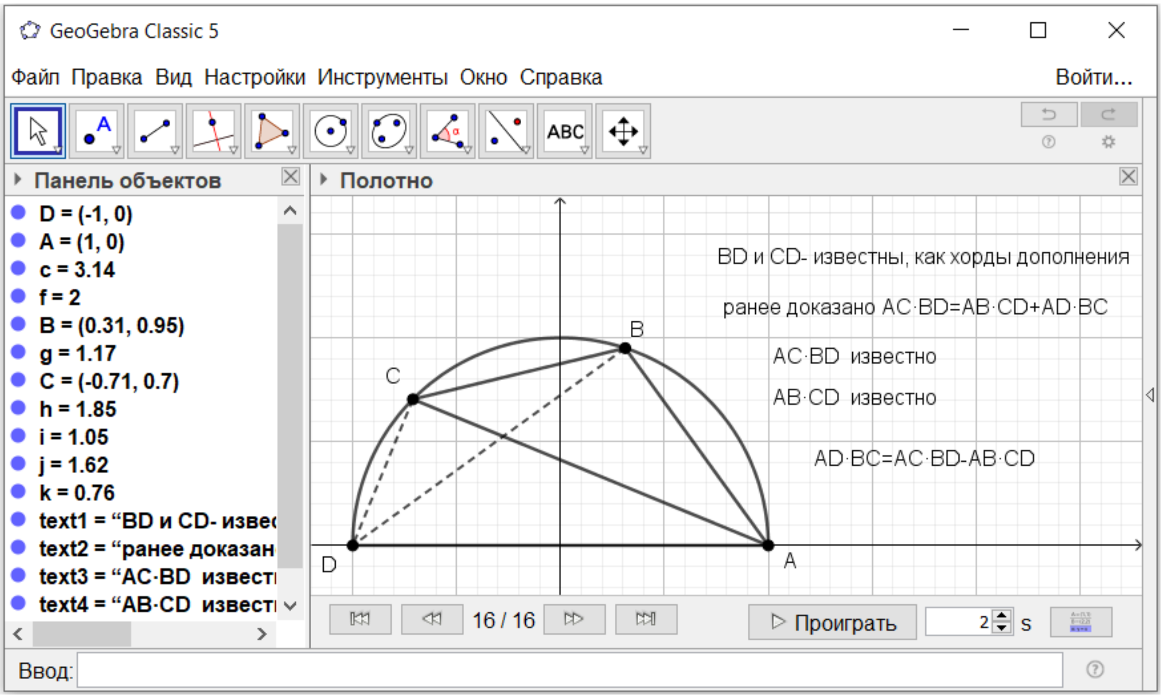
Егер AE=R белгісін енгізсек және (1) формуласын пайдалана отырып, $sin\,45^0 = \frac{chd90^0}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ аламыз.

ABC тікбұрышты үшбұрышта: AC2 = AB2 + BC2 =4AE2, өйткені AB=BC және әрқайсысының квадраты $2AE^2$ тең. Бұл 4-суретте анық көрсетілген.

Осы сериядағы қалған тапсырмалар ұқсас түрде дәлелденеді.

Әрі қарай ғалымның жұмысында екі доғаның қосындысы мен айырымының хордасы, жарты доғаның хордасы және т.б. есептер қарастырылады. Осылардың біреуін «Хордасы белгілі, екі доғаның айырымының хордасының көлемін табуды» қарастырып көрейік:

«ABCD – жартылай шеңбері берілсін, AD – оның диаметрі және оның AB және AC хордалары белгілі. B және C-ны қосамыз (Сурет 5). Менің тұжырымдауымша «BC белгілі», - деп жазады ол» [2]. Әрі қарай оның шешімін сипаттайды.



Сурет 5. Бұрыштардың айырымының хордасы туралы теореманың суреттемесі

Хорданың шарты бойынша AB және AC белгілі. Тиісінше, BD және CD толықтыруларының хордасын жүргізейік, олар оңай анықталады, сондықтан олар да белгілі болып табылады.

Птолемейдің белгілі теоремасына сәйкес, «шеңберге сызылған төртбұрыштың диагональдарының көбейтіндісі оның қарама-қарсы жақтарының көбейтіндісінің қосындысына тең», оны әл-Фараби өзінің жұмысында келтіреді (Сурет 5):

$$AC*BD=AB*CD+AD*BC \qquad (3)$$

AC*BD көбейтіндісі белгілі болғандықтан, AB*CD көбейтіндісі де белгілі; онда қалған AD*BC көбейтіндісін (3) табу оңай болады:

$$AD*BC = AC*BD - AB*CD;$$

Мұнда AD хордасы белгілі болғандықтан BC хордасы да белгілі болады.

Жаңа белгілерді енгізе отырып, (3) айтылымды жазамыз.

AC және AB доғаларына сәйкес келетін бұрыштар α және β сәйкесінше тең болсын, онда

$AC = chd\alpha$; $CD = chd(180^0 - \alpha)$ – хорда оның толықтыруы;

$AB = chd\beta$; $BD = chd(180^0 - \beta)$ – хорда оның толықтыруы;

DAB және DAC бұрыштарының айырымының BC хордасы: $C = chd(\alpha - \beta)$; $AD = chd180^0$

(3) теңдікке хорданың бұл мәндерін ауыстырып қойып, доғаның айырымының хордасының формуласын аламыз:

$chd(\alpha - \beta) = \frac{1}{chd180^0}[chd\alpha \cdot chd(180^0 - \beta) - chd\beta \cdot chd(180^0 - \alpha)]$. Бұл екі бұрыштың айырымының синусының белгілі формуласына тең:

$sin(\alpha - \beta) = sin\,\alpha \cdot cos\,\beta - sin\,\beta \cdot cos\,\alpha$, (1) қатынасын қолдана отырып, хордаларды синустармен алмастыру арқылы алуға болады.

Жоғарыда дәлелденген барлық формулалар тригонометриялық функциялар кестесін құрудағы маңызды кезеңдердің бірі болып табылатын бір градустағы синустың сандық мәнін табу үшін қажет болады.

Ортағасырлық шығыс математиктері бұл есепті шешудің әртүрлі әдістерін әзірлеуге үлкен мән берді. Біздің білуімізше, әл-Фараби өзінің ««Алмагестке» қосымша кітабында» Шығыста бірінші болып бір градустағы косинус және синустың мәнін анықтайды. Ол қолданған бір градусты хорданы есептеу әдісі Птолемейдің әдісімен бірдей болғанымен, әл-Фараби алпыстық бөлшекпен есептеу әдістерін жетілдіру арқылы Птолемейдің есептеу дәлдігін одан әрі жақсартады.

Ол бір градустағы синус пен хорданы есептеу кезінде ерекше рөл атқаратын лемманы алдын-ала дәлелдейді: егер $\alpha \succ \beta$ онда $\dfrac{chd\,\alpha}{crd\ \beta} \prec \dfrac{\alpha}{\beta}$, осының негізінде әрі қарай синус, косинус және хорданың кестелері құрылады. Птолемейден кейін әл-Фараби алдымен $72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$ айырымының доғаларының хордасын табады, одан кейін оны 6°, 3°, 1.5° және $\frac{3^\circ}{4}$ дәйекті түрде анықтайды.

Дәлелденген лемманың көмегімен келесідей теңсіздікті алады

$crd\,1^\circ : crd\,\dfrac{3^\circ}{4} < 1 : \dfrac{3}{4}$,

$crd\,1^\circ < \dfrac{4}{3}\cdot crd\,\dfrac{3^\circ}{4} \approx 1^\circ 2' 49'' 52'''$ және $crd\,\dfrac{3^\circ}{2} : crd\,1^\circ < \dfrac{3}{2} : 1$,

$crd\,1^\circ > \dfrac{2}{3}\cdot crd\,\dfrac{3^\circ}{2} \approx 1^\circ 2' 49'' 48'''$. Оның ішінде $1^\circ 2' 49'' 48''' < crd\,1^\circ < 1^\circ 2' 49'' 52'''$.

Әл-фарабидің бір градустағы хордасының шамаланған мәні үшін табылған екі мәннің арифметикалық ортасы алынады $crd\,1^\circ \approx 1^\circ 2' 49'' 50'''$. Егер Птолемей тапқан бір градусты хорданың мәні дәл бес ондық белгіге дейін болса, әл-Фарабиде ол дәл алты ондық белгіні қоса алғанмен тең болған. Әл-Фарабидің бір градусты синусты есептеу дәлдігін жақсарту бойынша көрсеткен жетістігін одан әрі ортағасырлық Шығыстың басқа математиктері дамытты.

Әл-Фараби одан әрі қарай $crd\,1^\circ \approx 1^\circ 2' 49'' 50'''$ мәнінен $crd\,179^\circ \approx 119^\circ 59' 43'' 33'''$ (хорда оның толықтыруы ретінде) мәнін табады және хордасы белгілі екі доғаның қосындысының мөлшерін анықтау туралы оның дәлелдеген тұжырымына сәйкес $\sin 1^\circ \approx 1^\circ 2' 49'' 43'''$ және $\cos 1^\circ \approx 59^\circ 59' 27'' 30'''$ алатын, бірден 180^0 дейінгі барлық хордаларды анықтайды.

Ондық бөлшектерде $\sin 1^\circ$ әл-Фарабидің жақындауы дұрыс 0,017452406 орнына 0,017452389-ға тең болады. Бір градустағы косинустың мәні бір градустағы тангенс пен котангенсті есептеу үшін қажет. Олар өз кезегінде осы функциялардың кестелерін құруға қажет болады.

Хордалар мен синустардың мәндерін есептеу құралдарынсыз қолмен есептеу көп уақытты қажет етеді. Дегенмен, әл-Фарабидің сипаттаған алгоритміне сәйкес хордалар мен синустар кестесінің құрылымына әр жаңа мәнге бірдей әрекеттер тізбегін нақты беруге болады. Бұл олардың компьютерде орындалуын айтарлықтай жеңілдетеді.

Әрине, әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасы қазіргі информатика-математикалық білім беруде оқуға лайықты. Мектеп білім беру жүйесінде оқушылардың тригонометриялық функциялармен алғашқы танысуы 8-сыныпта жүргізіледі. Тригонометриялық функцияларды жүйелі түрде меңгеру жаңартылған мазмұн бойынша 9-сыныптың алгебра курсында басталады. Жаңартылған мазмұн бойынша негізгі орта білім беру деңгейінің 7-9 сыныптарына арналған «Алгебра» пәнінің үлгілік оқу бағдарламасын талдау [10], әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасының жоғарыда келтірілген тапсырмаларының барлығы дерлік мектеп оқушыларына алгебраны оқытудың ұзақ мерзімді жоспарында кездеседі (кесте 1).

Сондықтан, тригонометрия бойынша әл-Фарабидің есептерін алгебраның міндетті курсының аясында да, оларды бағдарламалық материалмен бірге оқуға болатынын да, өзіндік элективті курс түрінде де қарастыруға болады. Оқушылар тригонометрия туралы берік білімге ие болуы керек, өйткені ол үлкен практикалық бағытқа ие, ұғымдардың үлкен тізбегінің буыны және пәнаралық байланыстарды жүзеге асыруда үлкен маңызға ие болып табылады.

Кесте 1. Алгебраны оқытудың ұзақ мерзімді жоспарындағы тригонометрия бөлімінің мазмұны

Ұзақ мерзімді жоспар бөлімі	*Ұзақ мерзімді жоспар бөлімінің мазмұны*	*Оқыту мақсаттары*	*Олардың әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасында бар болуы*
3 тоқсан			
Тригонометрия	*Бұрыш пен доғаның градустық және радиандық өлшемдері*	*9.1.1.1 бұрыштың радиандық өлшемі ұғымын меңгеру;* *9.1.2.1 градусты радианға және радианды градусқа айналдыру;* *9.1.1.2 бірлік шеңбердің бойында* $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ *сандарын белгілеу*	
	Кез келген бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі. Бұрыш синусының, косинусының, тангенсінің және котангенсінің мәндері	*9.2.4.1 тригонометриялық функциялардың анықтамаларын білу;* *9.2.4.2 бірлік шеңбердегі нүктелердің координаталары (* $\cos\propto, \sin\propto$*) мен тригонометриялық функциялардың өзара байланысын білу*	+
	Тригонометриялық функциялар және олардың қасиеттері	*9.2.4.5 бірлік шеңбердің көмегімен тригонометриялық функциялардың анықталу облысы мен мәндер жиынын табу;* *9.2.4.6 бірлік шеңбердің көмегімен тригонометриялық функциялардың жұптылығын (тақтылығын), периодтылығын , бірсарындылығын және таңбатұрақтылық аралықтарын түсіндіру*	+
	Тригонометрия формулалары	*9.2.4.4 келтіру формулаларын қорытып шығару және қолдану;* *9.2.4.3 бұрыштардың қосындысы мен айырымының, жарты және қос бұрыштың тригонометриялық формулаларын қорытып шығару және қолдану*	+
4 тоқсан			
Тригонометрия	*Тригонометрия формулалары*	*9.2.4.7 тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын көбейтіндіге және көбейтіндісін қосындыға немесе айырымға түрлендіру формулаларын қорытып шығару және қолдану*	+
	Тригонометриялық өрнектерді тепе-тең түрлендіру	*9.2.4.8 тригонометриялық өрнектерді тепе-тең түрлендіруді орындау*	

Сонымен қатар, бағдарламада әр бөлім шеңберінде жобалық жұмыс қарастырылған, онда оқушыларға әл-Фарабидің алгоритмі негізінде синустар кестесін құрудың компьютерлік бағдарламасын әзірлеуге пәнаралық (математика, информатика) жобалық тапсырмалар ұсынылуы мүмкін. Бірақ бүгінгі таңда мектепте тригонометрияны оқытудың кемшіліктерінің бірі – білімді шамадан тыс ресімдеу, тригонометриялық формулаларды түсіндіруде тарихи ақпараттарды пайдаланбау болып табылады. Белгілі психолог және әдіскер Л.М.Фридман осы себепке байланысты «көптеген білім алушылар математиканың ғылым ретіндегі дұрыс түсінігіне ие емес, оның пайда болуы мен даму тарихының және қазіргі жағдайы мен мәселелерінің негізгі фактілерін білмейді» деп тұжырымдайды [11].

Әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасымен танысу, ең алдымен, оқушылардың тригонометриялық есептер және оларды шешудің мүмкін жолдары туралы түсініктерін кеңейтуге, оқушылардың тригонометрия туралы білімдерін жүйелеуге, тригонометриялық формулаларды неғұрлым саналы түсінуге, танымдық және зерттеу дағдыларын дамытуға ықпал етеді. Оқушылардың математикалық білім деңгейін арттыруға, олардың қазіргі қоғамның одан әрі дамуындағы ғылыми білімнің рөлін түсінуіне ықпал ететіні сөзсіз. Оларды оқытуда заманауи математикалық пакеттерді, пәнаралық жобалық тапсырмалар аясында информатика курсында мектеп оқушыларының өздері жасай алатын цифрлық білім беру ресурстарын пайдалану тригонометрияны оқыту үдерісін қызықты етеді, оқуға деген ынтаны арттырады және, ең бастысы, ол оқытудың тиімділігі мен сапасын арттырады [12].

Ғалымдар енгізген синус (1) анықтамасына сүйене отырып, GeoGebra бағдарламалық ортада хордалар мен синустар кестесін құрудың бүкіл процесін елестету қиын емес. Онда Microsoft Excel-ге ұқсас электрондық кестенің болуы оны жүз сексен градусқа дейінгі бұрыштық мәндермен және оларға сәйкес синус мәндерімен толтыру процесін автоматтандыруға мүмкіндік береді.

Әрине, мектеп оқушыларына бұрыннан қалыптасқан теориялар мен анықтамаларды ғана емес, математикалық білімнің пайда болуы мен дамуы туралы нақты және қызықты түсінік берілуі керек. Мұнда ғылыми жаңалықтар тарихынан алынған мәліметтерді, тригонометриялық формулаларды дәлелдеу әдістерінің пайда болуы мен жетілуі туралы ақпаратты, қоғамның даму тарихының белгілі бір кезеңіндегі әлеуметтік прогрестегі ғылымның рөлін, ғалымның өмірі мен қызметі туралы ақпараттарды пайдалануға болады. Бұл мектептегі математика және информатика курстарының мазмұнын байытады және оқушылардың тригонометрияға деген қызығушылығының пайда болуы мен дамуына оң әсер етеді. Оқытудың дұрыс ұйымдастырылуы мен ғылым тарихынан алынған ақпараттар маңызды оң тәрбиелік рөл атқара алады. Біріншіден, олардың көмегімен ғылымның адамның тәжірибелік іс-әрекетінің әсерінен пайда болатынын және дамитынын көрсетуге болады. Екіншіден, Қазақстанның тумасының ғылымды дамытудағы рөлі оқушылардың бойында ұлттық мақтаныш сезімін және жалпы ғалымдарға деген құрмет сезімін тәрбиелеуге негіз болады.

Табысқа жетудің кілті – оларды нақты материалдармен органикалық түрде біріктіріп, мектеп математикасы мен информатика шеңберіндегі оқу үдерісіне шебер енгізу болып табылады. Осындай байланыстың нәтижесінде тарихи элементтер оқушылардың өздері үшін сабақтың қажетті бөлігіне айналады, олардың тригонометрияға деген танымдық қызығушылықтары артады. Сондай-ақ, бұл оқушыларда нақты пәндік-тарихи білім жүйесін қалыптастыруда ғана емес, сонымен қатар, жастардың өмірін, оның жеке және кәсіби қалыптасуын анықтайтын рухани құндылықтар, адамгершілік ұстанымдар мен идеалдар жүйесін қалыптастыруды қамтамасыз етеді.

Негізгі әдістемелік қиындықты бағдарламалық материалды зерттеуді тиісті тарихи ақпаратты ұсынумен қалай біріктіруге болатындығы және ұлы ғалымның тригонометриялық мұрасынан материалды үйренуге деген қызығушылық тудырады. Бұл қиындықты біртіндеп, жүйелі және мұқият жұмыс істеу барысында жеңуге болады. Мұғалімге бұл бастаманы бастау үшін үлкен еңбек ету қажет. Әр мұғалімнің оқушыларға тарихи-математикалық мәліметтерді жеткізудің қажеттілігін түсінуі және жасай білуі өте маңызды.

Сондай-ақ, тарихи материалдар жалпы білім беретін сыныптардың да, мамандандырылған сыныптардың да математика стандарттарында, бағдарламаларында және оқулықтарында ұсынылуы қажет. Оқулықтарда ол бөлімнің немесе тақырыптың негізгі мәтініне енгізілуі керек. Қазіргі уақытта еліміздің мектептерінде қолданылатын алгебра оқулықтарында тарихи фактілер қысқаша берілген [13].

Бірақ, өкінішке орай, оларда орта ғасырдағы ұлы ғалым, Қазақстанның тумасы әл-Фарабидің тригонометриясы туралы еңбектерінен бір де бір мәліметтер келтірілмеген. Оқушыларды тарихи материалмен таныстыруды тек сабақтарда ғана емес, сонымен қатар сыныптан тыс сабақтарда және кіріктірілген элективті курстарда (математика және информатика) жүргізуге болады. Сыныптан тыс жұмыстар оқушыларды математиканың даму тарихымен таныстыруға үлкен мүмкіндік береді. Сыныптан тыс жұмыстардың түрлері әртүрлі болуы мүмкін: мұғалімнің басшылығымен әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасы бойынша есептерді шешуге арналған сабақтар, пәнаралық жобалық тапсырмалар бойынша жұмыстар, цифрлық білім беру ресурстарын әзірлеу, оқушылардың да мұғалімдердің де баяндамаларын тыңдау, математикалық кештер мен викториналар, қабырға газеттерін шығару, тарихи күнтізбе жүргізу және т.б.

Сыныптан тыс жұмыстардың әр түрлі формаларын жүйелі түрде жүргізу, әл-Фарабидің есептері мен дәлелдерін нақты әрекеттер тізбегі түрінде ұсыну және оларды заманауи компьютерлік технологиялармен қатар, оқытуда қолдану арқылы оқушылардың цифрлық білім беру ресурстарын өздерінің жасауына, оқушылардың ғалымның тригонометриялық мұрасына және тригонометрияны зерттеуге деген қызығушылықтарын тудырады.

Қорытынды

Әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасының білім беру әлеуетін зерттеу, алгебра бойынша типтік оқу бағдарламасын, мектепте қолданылатын оқулықтарды талдау оны мектеп оқушыларын даярлау жүйесіне енгізу мүмкіндігін, орындылығын және қажеттілігін негіздейді, бұл білім мазмұнын байытады, оқытудың қолданбалы бағытын күшейтеді, алгебраның мектеп курсында тригонометрия бөлімін берік меңгеруге ықпал етеді. Меңгеру сапасының жоғарылауы әл-Фарабидің тригонометриялық мұрасында әр жаңа тұжырымдаманы, тұжырымды, әрбір тригонометриялық формуланы зерттеудің орындылығы түсінікті екендігімен түсіндіріледі, өйткені олардың барлығы синус кестесін және практикалық маңызы бар басқа тригонометриялық функцияларды құру мәселесін шешудің қажетті бөлігі болып табылады. Оқушылар оларды дәлелдеудің тағы бір әдісімен танысады. Компьютерде кесте құру алгоритмін бағдарламалық қамтамасыз ету оқушылардың бағдарламалау дағдыларын жетілдіруге мүмкіндік береді. Осы ретте қазіргі заманғы ақпараттық-коммуникациялық технологияларды пайдалану оқушылардың ынтасын, оқыту сапасы мен тиімділігін арттырады. Оқытуды ұйымдастырудың мұндай тәсілі зерттелетін материалға деген қызығушылықтың дамуына, ғылыми дүниетанымның қалыптасуына, оқудағы сана қағидатын нығайтуға ықпал етеді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Птолемей К. Альмагест: Математическое сочинение в тринадцати книгах: Пер. с древнегреч. И.Н.Веселовского /Ин-т истории естествознания и техники РАН: науч. ред. Г.Е.Куртик. – М.:Наука. Физматлит, 1998. – 672с.

2 Аль-Фараби. Математические трактаты. – Алма-Ата, «Наука», 1972.– 324с.

3 Кубесов А.К. Математическое наследие Аль-Фараби. - Алма-Ата. 1974.–246 с.

4 Комментарии к «Альмагесту» Птолемея (1975). / пер. с араб. А. Кубесова и Дж. аль-Даббаха. Алма-Ата: Наука. 527 с.

5 Garry J. Tee (University of Aucland). (1978). Kubesov A. K. The Mathematical Heritage of al-Farabi (in Russian) // Journal for the history of Arabic science. No. 1.

6 Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О роли элементов истории математики в преподавании математики // Abstracts of X International Scientific and Practical Conference Liverpool, United Kingdom, 2020. – С. 701-702.

7 Нур Г.К. Методика использования истории математики в основной школе в условиях гуманизации образования. Дис.кан. пед. наук. Алматы. 2002. – 150с.

8 Елтай Ж., Нур Г.К. Принцип историзма в преподавании математики в школе // Успехи современного естествознания. – 2013. – № 10. – С. 26-27; URL: https://natural-sciences.ru/ru/article/view?id=32918 (дата обращения: 24.02.2022).

9 Rushan Ziatdinov, Valeriy M. Rakuta. Dynamic Geometry Environments as a Tool for Computer Modeling in the System of Modern Mathematics Education // European Journal of Contemporary Education, 2012. – Vol. (1), № 1. P.93-100

10 Типовая учебная программа по учебному предмету «Алгебра» для 7-9 классов уровня основного среднего образования по обновленному содержанию // Утверждена приказом Министра образования и науки Республики Казахстан от 25 октября 2017 года, №545. – Астана, 2017. - 26 с.

11 Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. М., 1983 - 160 с.

12 Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Бостанов Б.Г., Умбетбаев К.У. Информационные технологии в обучении математическому наследию аль-Фараби//Труды XI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (SITITO'2016), Москва, Россия, 25-26 ноября, 2016. – С. 426–439

13 Шыныбеков А.Н., Шыныбеков Д.А., Жумабаев Р.Н. Алгебра: Учебник для 9 класса общеобразовательной школы. – Алматы: Атамура, 2019. – 224с.

References:

1 Ptolemej K. (1998) Al'magest: Matematicheskoe sochinenie v trinadcati knigah [Almagest: Mathematical essay in thirteen books]. Per. s drevnegrech. I.N.Veselovskogo. In-t istorii estestvoznanija i tehniki RAN: nauch.red.G.E.Kurtik. M.: Nauka. Fizmatlit. 672. (In Russian)

2 Al'-Farabi. (1972) Matematicheskie traktaty [Mathematical treatises]. Alma-Ata, «Nauka», 324. (In Russion)

3 Kubesov A.K. (1974) Matematicheskoe nasledie Al'-Farabi [Al-Farabi's Mathematical Legacy]. Alma-Ata. 246. (In Russian)

4 Kubesov A., Dzh. al'-Dabbaha (1975) Kommentarii k «Al'magestu» Ptolemeja [Comments on Ptolemy's Almagest]. Alma-Ata: Nauka. 527. (In Russian)

5 Garry J. Tee (University of Aucland). (1978). Kubesov A.K. [The Mathematical Heritage of al-Farabi]. Journal for the history of Arabic science. No. 1. (in Russian)

6 Mamurov B.Zh., Zhuraeva N.O. (2020) O roli jelementov istorii matematiki v prepodavanii matematiki [On the role of elements of the history of mathematics in teaching mathematics]. Abstracts of X International Scientific and Practical Conference Liverpool, United Kingdom. 701-702. (In Russian)

7 Nur G.K. (2002) Metodika ispol'zovanija istorii matematiki v osnovnoj shkole v uslovijah gumanizacii obrazovanija [Methods of using the history of mathematics in primary school in the conditions of humanization of education] Dis.kan. ped. nauk. Almaty. 150. (In Russian)

8 Eltaj Zh., Nur G.K. (2013) Princip istorizma v prepodavanii matematiki v shkole [The principle of historicism in teaching mathematics at school] Uspehi sovremennogo estestvoznanija. № 10. 26-27. (In Russian) https://natural-sciences.ru/ru/article/view?id=32918 (data obrashhenija: 24.02.2022

9 Rushan Ziatdinov, Valeriy M. Rakuta. (2012) [Dynamic Geometry Environments as a Tool for Computer Modeling in the System of Modern Mathematics Education]. European Journal of Contemporary Education, Vol. (1), № 1. 93-100. (In English)

10 Tipovaja uchebnaja programma po uchebnomu predmetu «Algebra» dlja 7-9 klassov urovnja osnovnogo srednego obrazovanija po obnovlennomu soderzhaniju [A standard curriculum for the subject "Algebra" for grades 7-9 of the basic secondary education level according to the updated content]. Utverzhdena prikazom Ministra obrazovanija i nauki Respubliki Kazahstan ot 25 oktjabrja 2017 goda, №545. Astana, 26. (In Russian)

11 Fridman L.M. (1983) Psihologo-pedagogicheskie osnovy obuchenija matematike v shkole [Psychological and pedagogical foundations of teaching mathematics at school] M. 160. (In Russian)

12 Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B., Bostanov B.G., Umbetbaev K.U. (2016) Informacionnye tehnologii v obuchenii matematicheskomu naslediju al'-Farabi [Information technologies in teaching mathematical heritage of al-Farabi] Trudy XI Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie» (SITITO'2016), 25-26 nojabrja, 426–439 (in Russian)

13 Shynybekov A.N., Shynybekov D.A., Zhumabaev R.N. (2019) Algebra: Uchebnik dlja 9 klassa obshheobrazovatel'noj shkoly [Algebra: Textbook for the 9th grade of a secondary school] Almaty: Atamura, 224. (In Russian).