МРНТИ 29.05.03, 27.31.15
УДК 517.957, 532.5

https://doi.org/10.51889/8002.2022.43.81.004

Н.Т. Прімхан[1], А.М. Сыздыкова[1], Г.Н. Шайхова[1]*

[1]Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан
**e-mail: syzdykova_am@mail.ru*

ЕКІ ӨЛШЕМДІ КИРАЛЬДЫ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУІНІҢ НАҚТЫ ШЕШІМДЕРІ

Аңдатпа

Математикалық физиканың сызықты емес дербес дифференциалдық теңдеулері физиканың маңызды объектісі болып табылады. Осындай белгілі теңдеулердің бірі – сызықты емес Шредингер теңдеуі болып табылады, ол гидродинамика, сызықтық емес оптика, кванттық механика және т.б. салаларда қолданылады. Сызықты емес дербес дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдерін іздеу сызықтық емес құбылыстардың динамикасын зерттеуде маңызды рөл атқарады. Қазіргі уақытта нақты шешімдерді табудың көптеген тиімді және эффективті әдістері бар. Бұл жұмыста біз сәйкес сызықты емес мүшелері бар екі өлшемді киральды сызықты емес Шредингер теңдеуін зерттейміз. Бұл теңдеу бір өлшемді сызықты емес Шредингер теңдеуінің кеңеюі болып табылады және Абловиц-Кауп-Ньюэлл-Сегура иерархиясы арқылы сипатталады. Нақты шешімдерді алу үшін синус-косинус әдісі қолданылады. Синус-косинус әдісі математикалық физиканың сызықты емес дербес дифференциалдық теңдеулерінің шешімдерін табудың тиімді математикалық құралы екендігі көрсетілген. Алынған шешімдердің динамикасы суреттерде көрсетіледі.

Түйін сөздер: синус-косинус әдісі, қарапайым дифференциалдық теңдеу, дербес туындылы дифференциалдық теңдеу, бейсызықтық, Шредингер теңдеуі.

Аннотация

Н. Т. Примхан[1], А.М. Сыздыкова[1], Г.Н.Шайхова[1]*
[1]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО КИРАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных математической физики являются важным объектом в физике. Одним из известных таких уравнений является нелинейное уравнение Шредингера, которое имеет приложение в таких областях как гидродинамика, нелинейная оптика, квантовая механика, и т. д. Поиск точных решений нелинейных уравнений в частных производных играет немалую роль в изучении динамики нелинейных явлений. В настоящее время существует множество действенных и эффективных методов нахождения точных решений. В данной работе исследовано двумерное киральное нелинейное уравнение Шредингера, которое содержит соответствующие нелинейные члены. Это уравнение является расширением одномерного нелинейного уравнения Шредингера и описывается иерархией Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сегура. Для получения точных решений применен метод синуса-косинуса. Показано, что метод синуса-косинуса представляет собой эффективный математический инструмент для поиска решения нелинейных уравнений в частных производных математической физики. Динамика полученных решений представлена на рисунках.

Ключевые слова: метод синуса-косинуса, обыкновенное дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейность, уравнение Шредингера.

Abstract

EXACT SOLUTIONS FOR TWO-DIMENSIONAL CHIRAL NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Primkhan N.T. [1], Syzdykova A.M. [1], Shaikhova G.N. [1]*
[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Nonlinear partial differential equations of mathematical physics are an important subject in physics. One of the well-known such equations is the nonlinear Schrödinger equation, which has applications in such areas as hydrodynamics, nonlinear optics, quantum mechanics, etc. The search for exact solutions to nonlinear partial differential equations plays a significant role in the study of the dynamics of nonlinear phenomena. Currently, there are many efficient and effective methods for finding exact solutions. In this paper, we study the two-dimensional chiral nonlinear Schrödinger equation, which contains the corresponding nonlinear terms. This equation is an extension of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation and is described by the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur hierarchy. To obtain exact solutions, the sine-cosine method is applied. It is shown that the sine-cosine method is an effective mathematical tool for finding solutions to nonlinear partial differential equations of mathematical physics. The dynamics of the obtained solutions is shown in the figures.

Keywords: sine-cosine method, ordinary differential equation, partial differential equation, nonlinearity, Schrodinger equation.

Кіріспе

Сызықтық емес эволюция теңдеулерінде өте маңызды рөл атқаратын сызықтық емес Шредингер теңдеуі гидродинамикада, молекулалық биологияда, кванттық механикада және т.б. көптеген құбылыстарда толық қолданыс тапты [1-2]. Осы уақытқа дейін сызықтық емес теңдеулердің нақты шешімін табу әлі де сызықтық емес құбылыстардың динамикасын зерттеуде өте маңызды рөл атқарады. Соңғы бірнеше онжылдықта сызықтық емес теңдеулердің нақты шешімдері қарқынды түрде зерттелді. Қолданылатын негізгі әдістер: кері шашырау әдісі, Дарбу түрлендіруі, Хирота бисызықты әдісі және Ли әдісі [3-7].

Бұл жұмыста екі өлшемді киральды сызықты емес Шредингер теңдеуін зерттейміз [8-10], ол келесі түрде беріледі:

$$iq_t + \alpha(q_{xx} + q_{yy}) + i[(\gamma_1(qq_x^* - q^* q_x) + \gamma_2(qq_y^* - q^* q_y)]q = 0, \tag{1}$$

мұндағы $q = q(x, y, t) -$ комплексті функция, $\gamma_1 \gamma_2$ - тұрақты коэффициенттер. [8]-ші жұмыста (1) теңдеудің жарық және күңгірт солитондық шешімдері тұрақты коэффициент әдісімен алынған, [9]-ші жұмыста сингулярлық периодты шешімі сынақ шешім әдісі арқылы табылған, Ли симметриясы және сақталу заңдары [10] зерттелген.

Зерттеу әдіснамасы

Екі-өлшемді киральды сызықты емес Шредингер теңдеуінің нақты шешімдерін алу үшін синус-косинус әдісі қолданылды.

Синус-косинус әдісі-математикалық физиканың көптеген сызықтық емес дербес туынды дифференциалдық теңдеулерін шешудің тиімді әдістерінің бірі болып табылады [1, 11-15].

1. Синус-косинус әдісінің сипаттамасы

Бұл бөлімде синус-косинус әдісінің сипаттамасы беріледі [1, 11-15]. Дербес туынды дифференциалдық теңдеуді

$$E_1(u_t, u_x, u_x, u_{xx}, u_{yy}, u_{xxx}, ..) = 0, \tag{2}$$

толқындық айнымалы аркылы

$$u(x, y, t) = u(\xi),\ \xi = (x + y - ct), \tag{3}$$

қарапайым дифференциалдық теңдеуге түрлендіруге болады

$$E_2(u, u', u'', u''', ..) = 0. \tag{4}$$

Ал (4) қарапайым дифференциалдық теңдеудің шешімін келесі түрде табуға болады

$$u(x, y, t) = \lambda \cos^{\beta}(\mu\xi), \tag{5}$$

немесе

$$u(x, y, t) = \lambda \sin^{\beta}(\mu\xi), \tag{6}$$

мұндағы μ, c -тұрақтылар. (5) теңдеудің туындылары келесідей алуға болады

$$u'(\mu\xi) = -\lambda\beta\mu \cos^{\beta-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi), \tag{7}$$

$$u''(\mu\xi) = -\lambda\beta^2 \mu^2 \cos^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2 \beta(\beta - 1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi), \tag{8}$$

және (6) теңдеудің туындыларын келесі түрде алынады

$$u'(\mu\xi) = \lambda\beta\mu \sin^{\beta-1}(\mu\xi)\cos(\mu\xi), \tag{9}$$

$$u''(\mu\xi) = -\lambda\beta^2 \mu^2 \sin^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2 \beta(\beta - 1)\sin^{\beta-2}(\mu\xi). \tag{10}$$

(7)-(10) теңдеулерді қарапайым дифференциалдық теңдеуге қойып, мүшелері $\cos^r(\mu\xi)$ және $\sin^r(\mu\xi)$ болатын тригонометриялық теңдеулерін аламыз. Содан кейін β-ны анықтау үшін косинус немесе синус жұбының дәрежелерін теңестіріп, параметрлерді анықтаймыз. Әрі қарай, біз $\cos^r(\mu\xi)$ немесе $\sin^r(\mu\xi)$ үшін бірдей дәрежедегі барлық коэффициенттерді жинаймыз. Белгісіз λ және μ арасындағы алгебралық теңдеулер жүйесін алып, одан коэффициенттерді анықтаймыз.

2. Синус-косинус әдісін қолдану

(1) дербес туынды дифференциалдық теңдеуге синус-косинус әдісін қолдану үшін келесі түрлендіруді қолданамыз

$$q = u(x, y, t)e^{i(ax+by+dt)}, \tag{11}$$

мұнда a, b, d - тұрақты коэффициентер. (11) теңдеуді (1) теңдеуге қойып, келесідей дербес туынды дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$iu_t - du + \alpha(u_{xx} + 2iau_x - a^2u + u_{yy} + 2ibu_y - b^2u) + 2(\gamma_1 a + \gamma_2 b)u^3 = 0. \tag{12}$$

$u(x, y, t) = u(\xi),\ \xi = (x + y - ct)$ түрлендіру арқылы қарапайым дифференциалдық теңдеуге келеміз

$$-icu' - du + \alpha(u'' + 2iau' - a^2u + u'' + 2ibu' - b^2u) + 2(\gamma_1 a + \gamma_2 b)u^3 = 0. \tag{13}$$

Жоғарыда табылған теңдеуді нақты және жорамал бөліктерге ажырату арқылы келесі жүйеге келеміз

$$-(d + \alpha a^2 + \alpha b^2)u + 2\alpha u'' + 2(\gamma_1 a + \gamma_2 b)u^3 = 0, \tag{14}$$

$$-cu' + 2\alpha au' + 2\alpha bu' = 0. \tag{15}$$

(15)-ші теңдеуді бір рет интегралдап жане интегралданған тұрақтыны ноль деп санап, келесі өрнекті табамыз

$$c = 2\alpha(a + b). \tag{16}$$

Осыдан соң (14) теңдеуді синус-косинус әдісімен шешеміз

$$-(d + \alpha a^2 + \alpha b^2)u + 2\alpha u'' + 2(\gamma_1 a + \gamma_2 b)u^3 = 0.$$

Зерттеу нәтижелері

2.1 Косинус шешімі

(14) теңдеудің косинус шешімін табу үшін (5) түрлендіру қолданамыз

$$u(\mu\xi) = \lambda \cos^\beta(\mu\xi), \tag{17}$$

$$u''(\mu\xi) = -\lambda\beta^2\mu^2 \cos^\beta(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi). \tag{18}$$

(17), (18) теңдеулерді (14) теңдеуге қойып келесі түрдегі теңдеуді табамыз

$$-(d + \alpha a^2 + \alpha b^2)\lambda\cos^\beta(\mu\xi) - 2\alpha\lambda\beta^2\mu^2\cos^\beta(\mu\xi) + 2\alpha\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi) + 2(\gamma_1 a + \gamma_2 b)\lambda^3\cos^{3\beta}(\mu\xi) = 0. \tag{19}$$

Тепе-теңдік әдісін қолданып, (19) теңдеудегі $\cos^\beta$ функциясының дәрежелерін теңестіріп, β мәнін анықтаймыз

$$\beta - 2 = 3\beta,\ \textit{онда}\ \beta = -1.$$

Жоғарыда табылған β мәнін (19) теңдеуге қойып, келесі теңдеуді аламыз

$$-(d + \alpha a^2 + \alpha b^2)\lambda\cos^{-1}(\mu\xi) - 2\alpha\lambda\beta^2\mu^2\cos^{-1}(\mu\xi) + 2\alpha\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{-3}(\mu\xi) + 2(\gamma_1 a + \gamma_2 b)\lambda^3\cos^{-3}(\mu\xi) = 0. \tag{20}$$

Косинус функцияларының әрбір жұбының коэффициенттерін теңестіру арқылы келесі теңдеулер жүйесін табамыз:

$$\cos^{-1}:\ -(d+\alpha a^2+\alpha b^2)\lambda-2\alpha\lambda\mu^2=0, \tag{21}$$

$$\cos^{-3}:\ 4\alpha\lambda\mu^2+2(\gamma_1 a+\gamma_2 b)\lambda^3=0. \tag{22}$$

(21)- (22) теңдеулер жүйесінен келесі коэффициентердін мәндерін анықтаймыз

$$\mu=\sqrt{\frac{-(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}},\quad \lambda=\sqrt{\frac{d+\alpha a^2+\alpha b^2}{a\gamma_1+b\gamma_2}}. \tag{23}$$

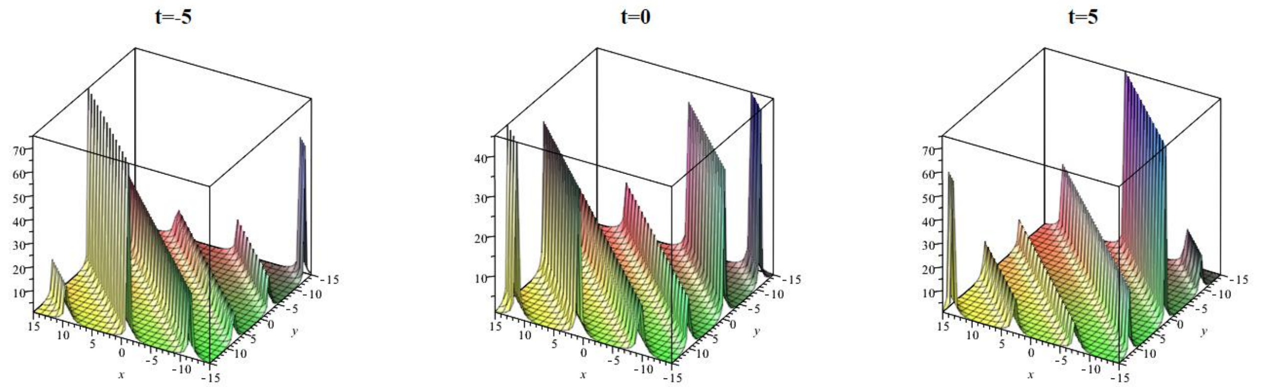
Жоғарыда табылған мәндерді (17) теңдеуге қойсақ, одан кейін алынған өрнекті (11) теңдеуге қойып екі-өлшемді киральды сызықты емес Шредингер теңдеуінің нақты шешімдерін табамыз

$$q_{11}=\sqrt{\frac{d+\alpha a^2+\alpha b^2}{a\gamma_1+b\gamma_2}}\sec\left(\sqrt{\frac{-(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}}(x+y-ct)\right)e^{i(ax+by+dt)},\ \text{егер}\ \frac{(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}<0, \tag{24}$$

$$q_{12}=\sqrt{\frac{d+\alpha a^2+\alpha b^2}{a\gamma_1+b\gamma_2}}sch\left(\sqrt{\frac{-(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}}(x+y-ct)\right)e^{i(ax+by+dt)},\ \text{егер}\ \frac{(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}>0, \tag{25}$$

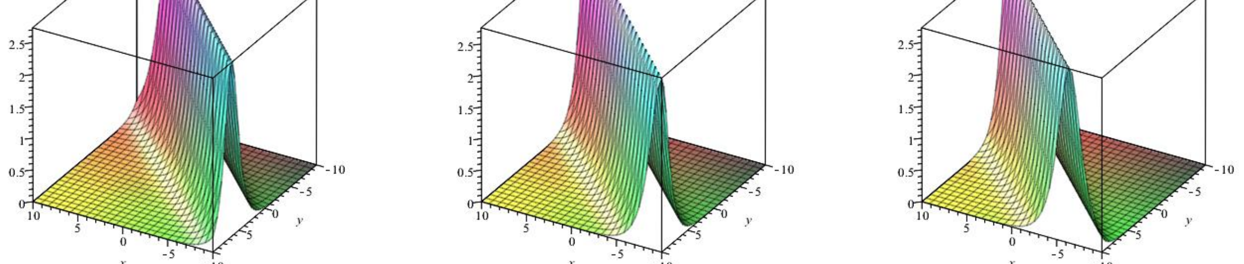
мұндағы $c=2\alpha(a+b)$.

Табылған (24) шешімнің графиктері келесі суретте көрсетілген (1-сурет).



Сурет 1. $q_{11}(x,y,t)$ *шешімінің динамикасы*
мұндағы $a=0.1; b=0.1; d=-0.2; \alpha=1; \gamma_1=1; \gamma_2=1.$

(34) шешім бойынша графиктер төменде көрсетілген (2-сурет).



Сурет 2. $q_{12}(x,y,t)$ *шешімінің динамикасы мұндағы* $a=0.1; b=0.1; d=1.5; \alpha=1; \gamma_1=1; \gamma_2=1.$

2.1 Синус шешімі

(14) теңдеудің синус шешімін табу үшін (6) түрлендіруді қолданамыз

$$u(\mu\xi)=\lambda\sin^{\beta}(\mu\xi), \tag{26}$$

$$u''(\mu\xi)=-\lambda\beta^2\mu^2\sin^{\beta}(\mu\xi)+\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\sin^{\beta-2}(\mu\xi). \tag{27}$$

(26),(27) теңдеулерді (14) теңдеуге қойып келесі түрдегі теңдеуді табамыз

$$-(d+\alpha a^2+\alpha b^2)\lambda\sin^{\beta}(\mu\xi)-2\alpha\lambda\beta^2\mu^2\sin^{\beta}(\mu\xi)+2\alpha\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\sin^{\beta-2}(\mu\xi)+2(\gamma_1 a+\gamma_2 b)\lambda^3\sin^{3\beta}(\mu\xi)=0. \tag{28}$$

Бұл теңдеуге тепе-теңдік әдісін қолданып, (28) теңдеудегі $\sin^{\beta}$ функциясының дәрежелерін теңестіріп, β мәнін анықтаймыз

$$\beta-2=3\beta\text{, онда } \beta=-1.$$

Жоғарыда табылған β мәнін (28) теңдеуге қойып, келесі теңдеуді аламыз

$$-(d+\alpha a^2+\alpha b^2)\lambda\sin^{-1}(\mu\xi)-2\alpha\lambda\beta^2\mu^2\sin^{-1}(\mu\xi)+2\alpha\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\sin^{-3}(\mu\xi)+2(\gamma_1 a+\gamma_2 b)\lambda^3\sin^{-3}(\mu\xi)=0. \tag{29}$$

Синус функцияларының әрбір жұбының коэффициенттерін теңестіру арқылы келесі теңдеулер жүйесін табамыз:

$$\sin^{-1}: -(d+\alpha a^2+\alpha b^2)\lambda-2\alpha\lambda\mu^2=0, \tag{30}$$

$$\sin^{-3}: 4\alpha\lambda\mu^2+2(\gamma_1 a+\gamma_2 b)\lambda^3=0. \tag{31}$$

(30)- (31) теңдеулер жүйесінен келесі коэффициентердің мәндерін анықтаймыз

$$\mu=\sqrt{\frac{-(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}},\quad \lambda=\sqrt{\frac{d+\alpha a^2+\alpha b^2}{a\gamma_1+b\gamma_2}}. \tag{32}$$

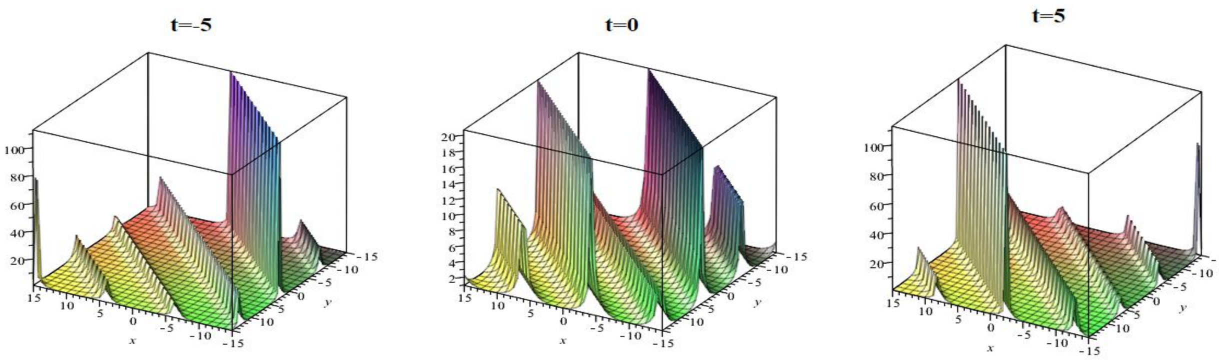
Жоғарыда табылған мәндерді (26) теңдеуге қойсақ, одан кейін алынған өрнекті (11) теңдеуге қойып екі-өлшемді киральды сызықты емес Шредингер теңдеуінің нақты шешімдерін табамыз

$$q_{21}=\sqrt{\frac{d+\alpha a^2+\alpha b^2}{a\gamma_1+b\gamma_2}}\operatorname{cosec}\left(\sqrt{\frac{-(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}}(x+y-ct)\right)e^{i(ax+by+dt)}\text{, егер } \frac{(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}<0, \tag{33}$$

$$q_{22}=\sqrt{\frac{d+\alpha a^2+\alpha b^2}{a\gamma_1+b\gamma_2}}\operatorname{csch}\left(\sqrt{\frac{-(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}}(x+y-ct)\right)e^{i(ax+by+dt)}\text{, егер } \frac{(d+\alpha a^2+\alpha b^2)}{2\alpha}>0, \tag{34}$$

мұндағы $c=2\alpha(a+b)$.

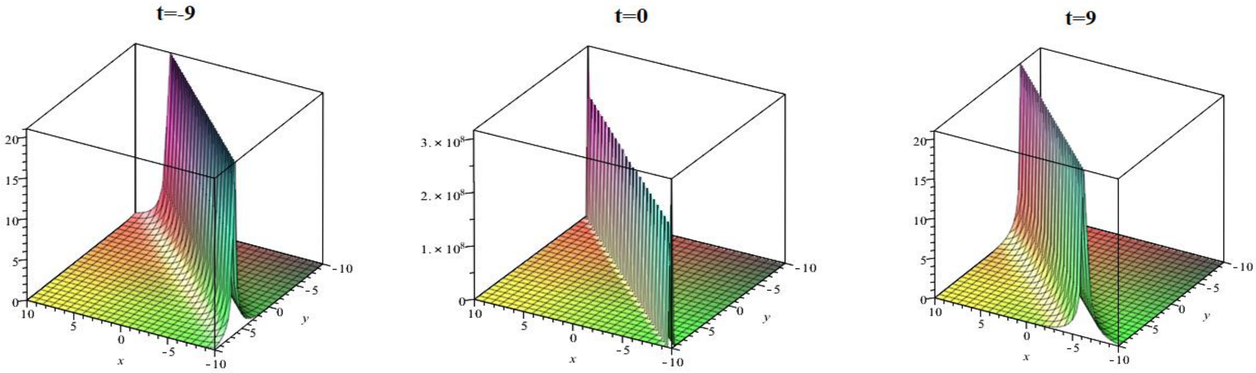
Табылған (33) шешімнің графиктері келесі суретте көрсетілген (3-сурет).



Сурет 3. $q_{21}(x,y,t)$ *шешімінің динамикасы мұндағы*

$a=0.1; b=0.1; d=-0.2; \alpha=1; \gamma_1=1; \gamma_2=1.$

(34) шешім бойынша графиктер төменде көрсетілген (4-сурет).



Сурет 4. $q_{22}(x, y, t)$ *шешімінің динамикасы*

мұндағы $a = 0.1; b = 0.1; d = 0.1; \alpha = 1; \gamma_1 = 1; \gamma_2 = 1.$

Қорытынды

Математикалық физиканың сызықты емес дербес дифференциалдық теңдеулері қазіргі уақытта физиканың маңызды бөлігі болып табылуда. Осы ретте сызықты емес дербес дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдерін іздеу сызықтық емес құбылыстардың динамикасын зерттеуде маңызды рөл атқарады. Бұл жұмыста екі-өлшемді киральды сызықты емес Шредингер теңдеуінің нақты шешімдері табылды. Нақты шешімдерді табу үшін косинус-синус әдісі қолданылды. Зерттеу нәтижесінде косинус-синус әдісін пайдалана отырып солитондық, периодты шешімдер табылды. Maple бағдарламасында алынған шешімдердің 3D графиктері тұрғызылды. Бұл шешімдер кейбір физиканың және математиканың практикалық есептерінде колданылуы мүмкін. Сондай-ақ бұл әдіс сызықтық емес теңдеулерге қолданылуы мүмкін.

Зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің жобасы аясында дайындалған (ЖТН жобасы: AP09057947).

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Wazwaz A., Partial differential equations and solitary waves theory.// Springer. 2009, P.746.

2 Yesmakhanova K., Nugmanova G., Shaikhova G., Bekova G., Myrzakulov R. Coupled dispersionless and generalized Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent sources: Geometry and equivalence. // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2020. Vol.17, № 7. P. 2050104. https://doi.org/10.1142/S0219887820501042

3 Serikbayev N.S., Shaikhova G.N., Yesmakhanova K.R., Myrzakulov R. Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional Davey-Stewartson equations. //Journal of Physics: Conference Series (1) 1391. 2019. P.012166. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1391/1/012166

4 Burdik C., Shaikhova G., Rakhimzhanov B. Soliton solutions and travelling wave solutions for the two-dimensional generalized nonlinear Schrodinger equations.// European Physical Journal Plus. 136:1095. 2021. P.1-17. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02092-6

5 Kutum B.B., Yesmakhanova K.R., Shaikhova G.N. The differential-q-difference 2D Toda equation: bilinear form and soliton solutions. //Journal of Physics: Conference Series 1391. 2019. P.012122. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1391/1/012122

6 Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R., Darboux transformation and soliton solution for generalized Konno-Oono equation.//Journal of Physics: Conference Series 1416. 2019. P. 012003. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1416/1/012003

7 Shaikhova G.N., Rakhimzhanov B.K., and Zhanbosinova Zh.K., Travelling wave solutions for the generalized nonlinear Schr¨odinger equation //Journal of Physics: Conference Series, 2090. 2021. P. 012062. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.05.026

8 Biswas A., Chiral solitons in (1 + 2) dimensions. // Int. J. Theor. Phys.. 2009. №48(12). P. 3403–3409. https://doi.org/10.1007/s10773-009-0145-4.

9 Eslami M., Trial solution technique to chiral nonlinear Schrödinger's equation in (1 + 2)- dimensions, Nonlinear Dyn., 2016. Vol. 85. P.813–816, https://doi.org/10.1007/s11071-016-2724-2.

10 Mao J., Tiana Sh., Zhang T., Yan X., Lie symmetry analysis, conservation laws and analytical solutions for chiral nonlinear Schrödinger equation in (2 + 1)-dimensions. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2020. Vol. 25.№ 3, *P.358–377. https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.16653.*

11 Yusufoglu E., Bekir A., Solitons and periodic solutions of coupled nonlinear evolution equations by using Sine-Cosine method. //International Journal of Computer Mathematics. 2006. Vol. 83(12). P. 915-924. https://doi.org/10.1080/00207160601138756

12 Wazwaz A.M., A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. //Mathematical and Computer Modeling. 2004. № 40(5). P. 499-508. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2003.12.010

13 Shaikhova G.N., Kalykbay Y.S., Exact solutions of the Hirota equation via the sine-cosine method. // Вестник Южно-Уральского университета. Серия «Математика. Механика. Физика». -2021.-№3(13). – С. 47-52.

14 Shaikhova G.N., Syzdykova A.M., Daulet S., Exact solutions of the the generalized nonlinear Scrodinger equation. // Журнал «Математическая физика и компьютерное моделирование». -2021. №3(24). – С. 18-25.

15 Shaikhova G.N., Rakhimzhanov B.K., Traveling wave solutions for the extended modified Korteweg-de Vries equation. // Вестник Национальной инженерной академии РК. -2021. -№4(82). – С. 197-203.

References:

1 Wazwaz A.,Partial differential equations and solitary waves theory.// Springer. 2009, P.746.

2 Yesmakhanova K., Nugmanova G., Shaikhova G., Bekova G., Myrzakulov R. Coupled dispersionless and generalized Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent sources: Geometry and equivalence. // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2020. Vol.17, № 7. P. 2050104. https://doi.org/10.1142/S0219887820501042

3 Serikbayev N.S., Shaikhova G.N., Yesmakhanova K.R., Myrzakulov R. Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional Davey-Stewartson equations. //Journal of Physics: Conference Series (1) 1391. 2019. P.012166. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1391/1/012166

4 Burdik C., Shaikhova G., Rakhimzhanov B. Soliton solutions and travelling wave solutions for the two-dimensional generalized nonlinear Schrodinger equations.// European Physical Journal Plus. 136:1095. 2021. P.1-17. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02092-6

5 Kutum B.B., Yesmakhanova K.R., Shaikhova G.N. The differential-q-difference 2D Toda equation: bilinear form and soliton solutions. //Journal of Physics: Conference Series 1391. 2019. P.012122. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1391/1/012122

6 Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R., Darboux transformation and soliton solution for generalized Konno-Oono equation.//Journal of Physics: Conference Series 1416. 2019. P. 012003. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1416/1/012003

7 Shaikhova G.N., Rakhimzhanov B.K., and Zhanbosinova Zh.K., Travelling wave solutions for the generalized nonlinear Schr¨odinger equation //Journal of Physics: Conference Series, 2090. 2021. P. 012062. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.05.026

8 Biswas A., Chiral solitons in (1 + 2) dimensions. // Int. J. Theor. Phys.. 2009. №48(12). P. 3403–3409. https://doi.org/10.1007/s10773-009-0145-4.

9 Eslami M.., Trial solution technique to chiral nonlinear Schrödinger's equation in (1 + 2)- dimensions, Nonlinear Dyn., 2016. Vol. 85. P.813–816, https://doi.org/10.1007/s11071-016-2724-2.

10 Mao J., Tiana Sh., Zhang T., Yan X., Lie symmetry analysis, conservation laws and analytical solutions for chiral nonlinear Schrödinger equation in (2 + 1)-dimensions. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2020. Vol. 25.№ 3, P.358–377. https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.16653.

11 Yusufoglu E., Bekir A., Solitons and periodic solutions of coupled nonlinear evolution equations by using Sine-Cosine method. //International Journal of Computer Mathematics. 2006. Vol. 83(12). P. 915-924. https://doi.org/10.1080/00207160601138756

12 Wazwaz A.M., A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. //Mathematical and Computer Modeling. 2004. № 40(5). P. 499-508. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2003.12.010

13 Shaikhova G.N., Kalykbay Y.S. (2021) Exact solutions of the Hirota equation via the sine-cosine method // Vestnik Juzhno-Ural'skogo universiteta Serija «Matematika. Mehanika. Fizika», №3(13), 47-52. (In Russian)

14 Shaikhova G.N., Syzdykova A.M., Daulet S. (2021) Exact solutions of the the generalized nonlinear Scrodinger equation // Zhurnal «Matematicheskaja fizika i komp'juternoe modelirovanie, №3(24), 18-25. (In Russian)

15 Shaikhova G.N., Rakhimzhanov B.K. (2021) Traveling wave solutions for the extended modified Korteweg-de Vries equation // Vestnik Nacional'noj inzhenernoj akademii RK., №4(82), 197-203. (In Russian)