ЕСЕПТЕУ МАТЕМАТИКАСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

COMPUTER MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING

МРНТИ 27.41.19
УДК 517.988.68

https://doi.org/10.51889/2959-5894.2023.81.1.004

Г.Б. Баканов[1], *С.К. Мелдебекова*[1*]

[1]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан*
[*]*e-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz*

ГИПЕРБОЛАЛЫҚ-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТІҢ ШЕКТЕУЛІ-АЙЫРЫМДЫҚ АНАЛОГЫНЫҢ ШАРТТЫ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ЖАЙЛЫ

Аңдатпа

Бұл жұмыста гиперболалық-параболалық теңдеу үшін шекаралық есептің шектеулі - айырымдық аналогы қарастырылады. Мұндай есепке қисықтар үйірі үшін қойылған интегралдық геометрия есебі келтіріледі. Бұл есептің тегіс функциялар кеңістігінде шешімі бар деп жорамалданып, орнықтылық бағалауы дәлелденді. Интегралдық геометрияның мұндай есептері көптеген қолданыс тапқан, оның ішінде сейсмобарлау мәліметтерін интерпретациялау есептері, компьютерлік томография және техникалық диагностика есептері. Интегралдық геометрия есептерінің айырымдық аналогтарын зерттеудің өзіне тән күрделі тұстары бар, үзіліссіз қойылымда алынатын көптеген қатынастар дискретті аналогқа ауысқанда анағұрлым күрделі түрге ие болады және ығысу барысында туындайтын қосылғыштарға қатысты қосымша зерттеулерді талап етеді. Мұндай есептердің жалпы жағдайда шешім бар болуының теоремасы болмағандықтан шартты корректілік ұғымы қолданылады. Жұмыс нәтижелері геотомография, медициналық томография, дефектоскопия және т.б. есептерді шешуде қолданылатын сандық әдістердің жинақтылығын көрсету үшін өте маңызды болып табылады.

Түйін сөздер: қисынсыз есеп, интегралдық геометрия, қисықтар үйірі, орнықтылық бағалауы, аралас типті теңдеу, шектеулі - айырымдық есеп, квадраттық форма.

Г.Б. Баканов[1], *С.К. Мелдебекова*[1]
[1]*Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, г.Туркестан, Казахстан*

ОБ УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация

В работе рассматривается конечно-разностный аналог граничной задачи для уравнения гиперболо-параболического типа, к которой сводится задача интегральной геометрии для семейства кривых. Полагая, что решение существует доказывается оценка устойчивости дискретного аналога этой задачи на пространстве достаточно гладких функций. Эти задачи интегральной геометрии связаны с многочисленными приложениями, в том числе задачи интерпретации данных сейсморазведки, задачи компьютерной томографии и технической диагностики. Исследование разностных аналогов задач интегральной геометрии имеет специфические трудности, связанные с тем обстоятельством, что для конечно-разностных аналогов частных производных основные соотношения выполняются с некоторым сдвигом по дискретной переменной. В связи с этим многие соотношения, получаемые в непрерывной постановке, при переходе к дискретному аналогу имеет более сложную и громоздкую форму, что требует дополнительных исследований возникающих слагаемых со сдвигом. Так как отсутствует теорема существования решения в общем случае в работе использовано понятие условной корректности. Полученный в работе результат имеет важное значение для понимания эффективности численных методов решения задач геотомографии, медицинской томографии, дефектоскопии и т.д.

Ключевые слова: некорректная задача, интегральная геометрия, семейство кривых, оценка устойчивости, уравнение смешанного типа, конечно-разностная задача, квадратичная форма.

ON THE CONDITIONAL STABILITY OF A FINITE DIFFERENCE ANALOGUE OF A BOUNDARY PROBLEM FOR A HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

Bakanov G.B.[1], Meldebekova S.K.[1]
[1]*International kazakh-turkish University named K.A.Yassawi, Turkestan, Kazakhstan*

Abstract

In this paper, we consider a finite-difference analog of the boundary value problem for an equation of hyperbolic-parabolic type. The problem of integral geometry for a family of curves is reduced to this problem. Assuming that the solution exists, an estimation of the stability of the discrete analogue of this problem on the space of sufficiently smooth functions is proved. These problems of integral geometry are associated with numerous applications, including problems of interpretation of seismic data, problems of computed tomography and technical diagnostics. The study of difference analogues of integral geometry problems has specific difficulties associated with the fact that for finite-difference analogues of partial derivatives, the basic relations are performed with a certain shift in the discrete variable. In this regard, many relations obtained in a continuous formulation, when transitioning to a discrete analogue, have a more complex and cumbersome form, which requires additional studies of the resulting terms with a shift. Since there is no theorem of the existence of a solution in the general case, the concept of conditional correctness is used in the work. The result of this work is important for understanding the effectiveness of numerical methods for solving problems of geotomography, medical tomography, flaw detection, etc.

Keywords: ill-posed problem, integral geometry, family of curves, stability estimation, mixed-type equation, finite-difference problem, quadratic form.

Кіріспе

Бұл жұмыста гиперболалық-параболалық теңдеу үшін шекаралық есепке келтірілетін интегралдық геометрия есебінің шектеулі - айырымдық аналогы қарастырылады. Гиперболалық-параболалық теңдеу үшін шекаралық есеп түрлері [1-3] еңбектерде зерттелген. Интегралдық геометрия есептері томографияның математикалық негізін құрайды. Компьютерлік томографиядағы негізгі мәселе функцияны интегралдары бойынша қалпына келтіру болып табылады. Интегралдық геометрия есептері математикалық физиканың қисынсыз есептеріне жатады, оның негіздері [4-6] еңбектерінде қаланған және көптеген қосымшалармен байланысты есептерді (компьютерлік томография есебі, акустика мен сейсмобарлаудың кері есептері) құрайды. Айта кетелік, интегралдық геометрия есептерінің дифференциалды - айырымдық және шектеулі - айырымдық аналогтарын зерттеу қажеттілігін және өте перспективалы бағыт екендігін алғаш рет академик М.М. Лаврентьев айтқан. Сондықтан, интегралдық геометрия есебінің шектеулі - айырымдық аналогын зерттеу өзекті мәселе болып табылады.

Алғаш рет М. М. Лаврентьев пен В. Г. Романовтың [7] еңбегінде гиперболалық теңдеулер үшін бірқатар кері есептер интегралдық геометрия есептеріне келтірілетіні көрсетілген. Кейін В. Г. Романов интегралдық геометрия есептері үшін шешімнің жалғыздығы жайлы теоремасын дәлелдеді және шартты орнықтылық бағаларын алды [8,9]. Белгісіз функциялар класына қандай да бір кеңейтуді қолдану және басқа координаттар жүйесін таңдау арқылы регулярлы қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия есебінің шешімі бар болатыны жайлы нәтижелерді А.Х. Амиров келтірген [10,11].

Арнайы қисықтар үйірі үшін шешімнің жалғыздығы туралы және орнықтылық бағалары бойынша жалпылама нәтижені Р.Г. Мухометов алған болатын. Орнықтылықтың бұл бағалаулары интегралдық геометрия есебін оған эквивалент болатын аралас типті дербес туындылы теңдеу үшін шекаралық есепке келтіруге негізделген [12].

Бұл мақалада гиперболалық-параболалық теңдеу үшін шекаралық есепке келтірілетін салмақтық функциясы бар интегралдық геометрия есебінің қойылымы алғаш рет зерттеліп отыр.

Зерттеу әдіснамасы

Айталық, $U(x,y)\in C^2(\overline{D})$ және

$$V(\gamma,z)=\int\limits_{K(\gamma,z)} U(x,y)\rho(x,y,z)ds;\quad \gamma\in[0,l],\quad z\in[0,l]. \tag{1}$$

Интегралдық геометрия (1) есебі $\overline{D}$ облысында берілген $K(\gamma,z)$ қисықтары және $V(\gamma,z)$ функциялары бойынша $U(x,y)$ фунциясын табудан тұрады.

$$W(x,y,z)=\int\limits_{K(x,y,z)}U(x_1,y_1)\rho(x_1,y_1,z)ds$$

функциясын енгіземіз, мұндағы $K(x,y,z)$ қисығы $(x_1,y_1)\in\overline{D}$ және $(\xi(z),\eta(z))$ нүктелерін қосатын $K(\gamma,z)$ қисығының бөлігі, $z\in[0,l]$.

Соңғы теңдеуді $K(x,y,z)$ қисығына (x,y) нүктесінде жүргізілген, x өсімен жасайтын $\theta(x,y,z)$ бұрышы бар жанама бағытында дифференциалдайтын болсақ, онда

$$\frac{\partial W}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial W}{\partial y}\sin\theta=u(x,y)\rho(x,y,z).$$

Осыдан шығатыны:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)=0,\qquad (x,y,z)\in\Omega_1. \tag{2}$$

Есептің берілгендерінен W функциясы үшін келесі шекаралық шартты аламыз:

$$W(\xi(\gamma),\eta(\gamma),z)=V(\gamma,z),\qquad V(z,z)=0,\qquad \gamma,z\in[0,l], \tag{3}$$

мұндағы $\rho(x,y,z)$ - белгілі функция, D облысы шекарасы Γ

$$x=\xi(z),\ \ y=\eta(z),\ \ z\in[0,l],\qquad \xi(0)=\xi(l),\ \eta(0)=\eta(l)$$

қисығы болатын жазық, шектелген, бірбайланысты облыс, z параметрі – Γ қисығының ұзындығы,

$$\Omega_1=\Omega/\{(\xi(\gamma),\eta(\gamma),z):z\in[0,l]\},\ \Omega=\overline{D}\times[0,\mathrm{l}].$$

Интегралдық геометрияның (1) есебін (2) - (3) есебіне келтірудің келесі шарттары орындалсын:

а) $\overline{D}$ облысының кез келген екі нүктесі арқылы жалғыз $K(\gamma,z)$ қисығы өтеді; $K(\gamma,z)$ қисықтар үйірінің әрқайсысы Γ шекарасын $(\xi(z),\eta(z))$ және $(\xi(\gamma),\eta(\gamma))$ нүктелерінде қияды, басқа нүктелер Г шекарасына тиісті емес; барлық қисықтардың ұзындықтары бірқалыпты шектелген;

ә) $\varphi\in C^3(T),\ \psi\in C^3(T)$, осы функциялардың барлық функциялары T кеңістігінде бірқалыпты шектелген;

б) $\dfrac{1}{s}\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(\theta,s)}\geq c_1>0$, мұндағы c_1 – тұрақты шама,

в) $\varphi(x,y,0,s)=\varphi(x,y,2\pi,s),\quad \psi(x,y,0,s)=\psi(x,y,2\pi,s),$

осындай теңдіктер көрсетілген функциялардың үшінші ретті туындыларына дейін орындалады.

Сондай-ақ, абсцисса не ордината өсіне параллель болатын кез келген түзу D облысының шекарасын екі нүктеде қияды.

Айталық,

$$a_1=\inf_{(x,y)\in D}\{x\},\quad b_1=\sup_{(x,y)\in D}\{x\},\quad a_2=\inf_{(x,y)\in D}\{y\},\quad b_2=\sup_{(x,y)\in D}\{y\},$$

$$h_j=(b_j-a_j)/N_j,\ j=1,2;\quad h_3=l/N_3,$$

мұндағы $N,\ j=1,2,3$ - натурал сандар.

ε келесі шартты қанағаттандыратын болсын

$$0<\varepsilon<\min\left\{(b_1-a_1)/3,(b_2-a_2)/3\right\},$$

$$D^\varepsilon=\left\{(x,y)\in D:\min_{(\alpha,\beta)\in\Gamma}\rho((x,y),(\alpha,\beta))>\varepsilon\right\},$$

$$R_h=\left\{(x_i,y_j):x_i=a_1+ih_1,y_j=a_2+jh_2,i=1,...,N_1;\ j=1,...,N_2\right\}.$$

(a_1+ih_1,a_2+jh_2) нүктесінің $Ш(ih_1,jh_2)$ маңайы деп (a_1+ih_1,a_2+jh_2) нүктесі және $(a_1+(i\pm1)h_1,a_2+(j\pm1)h_2)$ түріндегі нүктелерінен тұратын жиынды айтамыз.

D_h^ε – $D^\varepsilon\cap R_h$ облысында $Ш(ih_1,jh_2)$ маңайымен жататын барлық (a_1+ih_1,a_2+jh_2) нүктелер жиыны.

Γ_h^ε – $Ш(ih_1,jh_2)$ маңайының $(D^\varepsilon\cap R_h)/D_h^\varepsilon$ жиынымен қиылысуы бос болмайтын $(a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in D_h^\varepsilon$ нүктелер жиыны.

$$\Delta_h^\varepsilon=\bigcup_{\Gamma_h^\varepsilon}Ш(ih_1,ih_2),\quad D_h=R_h\cap D.$$

$$\Omega_h^\varepsilon=\{(a_1+ih_1,a_2+jh_2,kh_3):(a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in D_h^\varepsilon,k=0,1,...,N_3-1\}.$$

Шекаралық (2)-(3) есебінің коэффициенттері мен шешімі келесі шарттарды қанағаттандырады деп есептейміз:

$$W(x,y,z)\in C^3(\Omega^\varepsilon),\ \theta(x,y,z)\in C^2(\Omega^\varepsilon),\quad \Omega^\varepsilon=\overline{D^\varepsilon}\times[0,l],\tag{4}$$

$$\rho(x,y,z)\in C^2(\Omega),\rho(x,y,z)>c_1>0,\frac{\partial\theta}{\partial z}>\left|\frac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\frac{1}{\rho}\right|.\tag{5}$$

Келесі шектеулі-айырымдық есепті қоямыз:

$$\left[F_{\underset{x}{0}}\frac{a}{c}+F_{\underset{y}{0}}\frac{b}{c}\right]_z=0,\quad (a_1+ih_1,a_2+ih_2,kh_3)\in\Omega_h^\varepsilon,\tag{6}$$

теңдеуін және келесі шекаралық шарттарды

$$F_{i,j}^k(z)=\Phi_{i,j}^k(z),(a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in\Delta_h^\varepsilon,k=1,...,N_3-1,\tag{7}$$

$$F_{i,j}^0(z)=F_{i,j}^{N_3}(z),(a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in D_h^\varepsilon,\tag{8}$$

қанағаттандыратын $F_{i,j}^k$ функциясын табу керек.

Мұндағы

$$F_{i,j}^k=F(x_i,y_j,z_k)=F(a_1+ih_1,a_2+jh_2,kh_3),$$

$$F_{\underset{x}{0}}=(F_{i+1,j}-F_{i-1,j})/2h_1,\ F_{\underset{y}{0}}=(F_{i,j+1}-F_{i,j-1})/2h_2,$$

$$f_z=\frac{f_{i,j}^{k+1}-f_{i,j}^k}{h_3},a=\cos\theta_{i,j}^k(z),b=\sin\theta_{i,j}^k(z),$$

$$\theta_{i,j}^k(z)=\theta(a_1+ih_1,a_2+jh_2,kh_3),c=\rho_{i,j}^k=\rho(a_1+ih_1,a_2+jh_2,kh_3).$$

Бұл қойылымда есеп шешімі жайлы ақпарат тек Γ шекарасында ғана емес, оның ε - маңайында да беріледі. Өйткені бұл $(\xi(z),\eta(z),z)$ түріндегі кез келген нүкте маңайында $\theta_z,W_{xz},W_{yz},W_{xy}$ туындыларының $\left[(x-\xi(z))^2+(y-\eta(z))^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ түріндегі ерекшеліктердің бар болуымен байланысты [12].

Зерттеу нәтижелері және оларды талқылау

Лемма 1. Егер u және v тор функциялары болса, онда

$$\left(\frac{u}{v}\right)_z = \frac{u_z v^k - u^k v_z}{v^k v^{k+1}} \tag{9}$$

$$(uv)_z = u^k v_z + u_z v^k + h_3 u_z v_z \tag{10}$$

$$(uv)_{\overset{0}{x}} = u_{\overset{0}{x}} v_i + u_i v_{\overset{0}{x}} + \frac{h_1^2}{2}\left[u_x v_x\right]_{\bar{x}} \tag{11}$$

Теорема 1. *(6)-(8) есебінің шешімі Ω_h^ε жиынында бар болсын және $\left|F_{\overset{0}{xz}}\right| \le c_2$, $\left|F_{\overset{0}{yz}}\right| \le c_2$ деп жоримыз, мұндағы c_2 - қандай да бір тұрақты. Барлық N_j, $j = 1,2,3$ үшін*

$$\left(ab_z - a_z b\right) - \left|\frac{c_z}{c}\right| \ge \alpha > 0$$

орындалсын. Сонда барлық $N_j > N^{**}$, $j = 1,2,3$ үшін оң N^{**} тұрақтысы табылып, келесі бағалау орынды болады

$$\sum_{\Omega_h^\varepsilon}\left(F_{\overset{0}{x}}^2 + F_{\overset{0}{y}}^2\right)h_1h_2h_3 \le c_3\sum_{\Delta_h^\varepsilon}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}^2 h_1h_3 + \Phi_{\overset{0}{y}}^2 h_2h_3 + \Phi_z^2(h_1+h_2)h_3\right) + c_2h_3^2. \tag{12}$$

Мұндағы c_3 тұрақтысы $\rho(x,y,z)$ функциясына және $K(\gamma,z)$ қисықтар үйіріне тәуелді болатын оң тұрақты шама.

Дәлелдеу. [13-15] еңбектерінде ұсынылған әдістемені қолдана отырып, (6) теңдеуінің екі жағын да $2c(-bF_{\overset{0}{x}} + aF_{\overset{0}{y}})$ өрнегіне көбейтеміз, алынған теңдікті келесі түрде жазамыз $S_1 + S_2 = 0$, мұндағы

$$S_1 = S_2 = c\left(-bF_{\overset{0}{x}} + aF_{\overset{0}{y}}\right)\left[F_{\overset{0}{x}}\frac{a}{c} + F_{\overset{0}{y}}\frac{b}{c}\right]_z.$$

Функциялардың көбейтіндісін дифференциалдаудың (10) формуласын қолданып, S_1 өрнегін түрлендіреміз:

$$\begin{aligned} S_1 = &\left[c\left(-bF_{\overset{0}{x}} + aF_{\overset{0}{y}}\right)\left(\frac{a}{c}F_{\overset{0}{x}} + \frac{b}{c}F_{\overset{0}{y}}\right)\right]_z - \\ &-\left[c\left(-bF_{\overset{0}{x}} + aF_{\overset{0}{y}}\right)\right]_z\left(\frac{a}{c}F_{\overset{0}{x}} + \frac{b}{c}F_{\overset{0}{y}}\right) - \\ &-h_3\left[c\left(-bF_{\overset{0}{x}} + aF_{\overset{0}{y}}\right)\right]_z\left[\frac{a}{c}F_{\overset{0}{x}} + \frac{b}{c}F_{\overset{0}{y}}\right]_z = 0 \end{aligned}$$

S_1 мен S_2 өрнектеріндегі жақшаларды (9), (10) формулалары мен (6) теңдігін назарға ала отырып ашып, сондай-ақ

$$\left(1 - \frac{c^k}{c^{k+1}}\right) \approx o(h_3), \quad \left(\frac{1}{c^{k+1}} - \frac{1}{c^k}\right) \approx o(h_3), \quad \left(\frac{1}{c^{k+1}} + \frac{1}{c^k}\right) \approx \frac{2}{c^k} + o(h_3),$$
$$d = 2ab = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta, \quad e = a^2 - b^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,$$

екендігін және

$$F_{0_x} F_{0_{xz}} = \frac{1}{2}\left(F_{0_x}^2\right)_z - \frac{h_3}{2} F_{0_{xz}}^2, \quad F_{0_y} F_{0_{yz}} = \frac{1}{2}\left(F_{0_y}^2\right)_z - \frac{h_3}{2} F_{0_{yz}}^2$$

формулаларын ескере отырып

$$S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 = 0 \tag{13}$$

екендігін аламыз, мұндағы

$$S_3 = \frac{1}{2}\left\{F_{0_x}^2\left[(ab_z - a_z\,\mathrm{b}) + d\frac{c_z}{c}\right] - 2F_{0_x}^{k+1} e\frac{c_z}{c} + \right.$$
$$\left. + \left(F_{0_y}^{k+1}\right)^2\left[(ab_z - a_z b) - d\frac{c_z}{c}\right]\right\},$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\left\{\left(F_{0_x}^{k+1}\right)^2\left[(ab_z - a_z b) + d\frac{c_z}{c}\right] - 2F_{0_x}^{k+1} F_{0_y} e\frac{c_z}{c} + \right.$$
$$\left. + F_{0_y}^2\left[(ab_z - a_z b) - d\frac{c_z}{c}\right]\right\},$$

$$S_5 = -\frac{h_3^2}{2} F_{0_{xz}}^2\left[(ab_z - a_z\,\mathrm{b}) + d\frac{c_z}{c}\right] - \frac{h_3^2}{2} F_{0_{yz}}^2\left[(ab_z - a_z b) - d\frac{c_z}{c}\right] +$$
$$+ F_{0_x}^2 (a_z b + abc_z) o(h_3) + F_{0_y}^2 (ab_z - abc_z) o(h_3) +$$
$$+ F_{0_x} F_{0_y}^{k+1} b^2 c_z o(h_3) - F_{0_y} F_{0_x}^{k+1} a^2 c_z o(h_3),$$

$$S_6 = F_{0_x} F_{0_y} bb_z\left(1 - \frac{c^k}{c^{k+1}}\right) + F_{0_x} F_{0_y} aa_z\left(\frac{c^k}{c^{k+1}} - 1\right) -$$
$$- h_3 F_{0_x} F_{0_{yz}}\left(aa_z + bb_z\frac{c^k}{c^{k+1}}\right) + h_3 F_{0_y} F_{0_{xz}}\left(aa_z\frac{c^k}{c^{k+1}} + bb_z\right),$$

$$S_7 = \left[\left(-F_{0_x} b + F_{0_y} a\right)\left(F_{0_x} a + F_{0_y} b\right)\right]_z - F_{0_x} F_{0_{yz}} + F_{0_y} F_{0_{xz}},$$

$$S_8 = h_3 F_{0_x}^2 ab_z\frac{c_z}{c} + h_3^2 F_{0_x} F_{0_{xz}} ab_z\frac{c_z}{c} + h_3 F_{0_x} F_{0_y} aa_z\frac{c_z}{c} + h_3 F_{0_x} F_{0_y} bb_z\frac{c_z}{c} -$$
$$- h_3^2 F_{0_x} F_{0_{yz}} aa_z\frac{c_z}{c} + h_3^2 F_{0_y} F_{0_{xz}} bb_z\frac{c_z}{c} - h_3 F_{0_y}^2 a_z b\frac{c_z}{c} - h_3^2 F_{0_y} F_{0_{yz}} a_z b\frac{c_z}{c}.$$

Енді осы өрнектердің әрқайсысын түрлендіріп, бағалаймыз.

S_3 және S_4 өрнектерін F_{0_x} және $F_{0_y}^{k+1}$, $F_{0_x}^{k+1}$ және F_{0_y} функцияларына қатысты квадраттық форма деп қарастырсақ, оның анықтауышы келесідей есептеледі:

$$\begin{vmatrix} (ab_z - a_z b) + d\frac{c_z}{c} & -e\frac{c_z}{c} \\ -e\frac{c_z}{c} & (ab_z - a_z b) - d\frac{c_z}{c} \end{vmatrix} = \left(ab_z - a_z b\right)^2 - d^2\left|\frac{c_z}{c}\right|^2 - e^2\left|\frac{c_z}{c}\right|^2 = \left(ab_z - a_z b\right)^2 - \left|\frac{c_z}{c}\right|^2,$$

себебі $e^2 + d^2 = 1$, мұнда $e = \cos 2\theta, \quad d = \sin 2\theta.$ Сонда $\left(ab_z - a_z b\right) - \left|\frac{c_z}{c}\right| \geq \alpha > 0$ шартынан S3 және S_4 квадраттық формаларының оң анықталғандығы шығады.

$\lambda_1 x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_3 y^2$ оң анықталған квадраттық форма үшін орынды болатын

$$\lambda_1 x^2 + 2\lambda_2 xy + \lambda_3 y^2 \ge \frac{2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^2)}{\lambda_1 + \lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + 4\lambda_2^2}}(x^2 + y^2)$$

теңсіздігін пайдалана отырып, алатынымыз

$$S_3 \ge \frac{1}{2}\left[\left(ab_z - a_z b\right) - \left|\frac{c_z}{c}\right|\right]\left[\left(F^{k}_{\underset{x}{0}}\right)^2 + \left(F^{k+1}_{\underset{y}{0}}\right)^2\right], \tag{14}$$

$$S_4 \ge \frac{1}{2}\left[ab_z - a_z b - \left|\frac{c_z}{c}\right|\right]\left[\left(F^{k+1}_{\underset{x}{0}}\right)^2 + \left(F^{k}_{\underset{y}{0}}\right)^2\right]. \tag{15}$$

$\left(1 - \dfrac{c^k}{c^{k+1}}\right) \approx o(h_3)$ екенін ескере отырып

$$\begin{aligned}
S_6 &= F_{\underset{x}{0}} F_{\underset{y}{0}} bb_z o(h_3) + F_{\underset{x}{0}} F_{\underset{y}{0}} aa_z o(h_3) - h_3 F_{\underset{x}{0}} F_{\underset{yz}{0}}\left(aa_z + \frac{bb_z c^k}{c^{k+1}}\right) + \\
&+ h_3 F_{\underset{y}{0}} F_{\underset{xz}{0}}\left(\frac{aa_z c^k}{c^{k+1}} + bb_z\right) = F_{\underset{x}{0}} F_{\underset{y}{0}} bb_z o(h_3) + F_{\underset{x}{0}} F_{\underset{y}{0}} aa_z o(h_3)\left(aa_z + bb_z\right)\times \\
&\times\left(F_{\underset{y}{0}} F_{\underset{xz}{0}} - F_{\underset{x}{0}} F_{\underset{yz}{0}}\right) - h_3 F_{\underset{x}{0}} F_{\underset{yz}{0}} bb_z o(h_3) + h_3 F_{\underset{y}{0}} F_{\underset{xz}{0}} aa_z o(h_3) = \\
&= F_{\underset{x}{0}} F_{\underset{y}{0}}\left(aa_z + bb_z\right) o(h_3) + \left(aa_z + bb_z\right)\left(F^{k}_{\underset{y}{0}} F^{k+1}_{\underset{x}{0}} - F^{k}_{\underset{x}{0}} F^{k+1}_{\underset{y}{0}}\right) - \\
&- \left(F^{k}_{\underset{x}{0}} F^{k+1}_{\underset{y}{0}} + F^{k}_{\underset{x}{0}} F^{k}_{\underset{y}{0}}\right) bb_z o(h_3) + \left(F^{k}_{\underset{y}{0}} F^{k+1}_{\underset{x}{0}} - F^{k}_{\underset{y}{0}} F^{k}_{\underset{x}{0}}\right) aa_z o(h_3)
\end{aligned}$$

екендігін аламыз.

$|nm| \le (n^2 + m^2)/2$ теңсіздігін пайдаланып

$$\begin{aligned}
S_6 \le \frac{1}{2}\Bigg\{&\left[\left(F^{k}_{\underset{x}{0}}\right)^2 + \left(F^{k}_{\underset{y}{0}}\right)^2\right]\left(aa_z + bb_z\right) o(h_3) + \\
&+ \left[\left(F^{k}_{\underset{x}{0}}\right)^2 + \left(F^{k+1}_{\underset{y}{0}}\right)^2\right]\left(aa_z + bb_z\right) + \\
&+ \left[\left(F^{k}_{\underset{x}{0}}\right)^2 + \left(F^{k+1}_{\underset{y}{0}}\right)^2 + \left(F^{k}_{\underset{x}{0}}\right)^2 + \left(F^{k}_{\underset{y}{0}}\right)^2\right] bb_z o(h_3) + \\
&+ \left[\left(F^{k}_{\underset{y}{0}}\right)^2 + \left(F^{k+1}_{\underset{x}{0}}\right)^2 + \left(F^{k}_{\underset{y}{0}}\right)^2 + \left(F^{k}_{\underset{x}{0}}\right)^2\right] aa_z o(h_3)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{16}$$

бағалауын аламыз.

$\left(ab_z - a_z b\right) - \left|\dfrac{c_z}{c}\right| \ge \alpha > 0$ екенін ескере отырып, $\left|F_{\underset{xz}{0}}\right| \le c_2$, $\left|F_{\underset{yz}{0}}\right| \le c_2$ шарттары мен $|nm| \le (n^2 + m^2)/2$ теңсіздігін пайдаланып

$$S_5 \le F_{0_x}^2 (a_z b + abc_z) o(h_3) + F_{0_y}^2 (ab_z - abc_z) o(h_3) +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\left[\left(F_{0_x}^k\right)^2 + \left(F_{0_y}^{k+1}\right)^2\right](a_z b + abc_z) o(h_3) +\right.$$
$$+\left[\left(F_{0_y}^k\right)^2 + \left(F_{0_y}^{k+1}\right)^2\right](ab_z + abc_z) +$$
$$+\left[\left(F_{0_x}^k\right)^2 + \left(F_{0_y}^{k+1}\right)^2\right] b^2 c_z o(h_3) +$$
$$\left.+\left[\left(F_{0_y}^k\right)^2 + \left(F_{0_x}^{k+1}\right)^2\right] a^2 c_z o(h_3)\right\} + c_2 h_3^2 \qquad (17)$$

бағалауын аламыз.
(11) формуланы ескере отырып

$$F_{0_y} F_{0_{xz}} = \left[F_{0_y} F_z\right]_{0_x} - F_{0_x 0_y} F_z - \frac{h_1^2}{2}\left[F_{0_{yx}} F_{zx}\right]_{\bar{x}},$$

$$-F_{0_x} F_{0_{yz}} = -\left[F_{0_x} F_z\right]_{0_y} + F_{0_x 0_y} F_z + \frac{h_2^2}{2}\left[F_{0_{xy}} F_{zy}\right]_{\bar{y}}.$$

өрнектерін аламыз.
Сонда

$$S_7 = \left[\left(-F_{0_x} b + F_{0_y} a\right)\left(F_{0_x} a + F_{0_y} b\right)\right]_z - F_{0_x} F_{0_{yz}} + F_{0_y} F_{0_{xz}} =$$
$$= \left[\left(-F_{0_x} b + F_{0_y} a\right)\left(F_{0_x} a + F_{0_y} b\right)\right]_z + \left[F_{0_y} F_z\right]_{0_x} -$$
$$-\left[F_{0_x} F_z\right]_{0_y} - \frac{h_1^2}{2}\left[F_{0_{yx}} F_{zx}\right]_{\bar{x}} + \frac{h_2^2}{2}\left[F_{0_{xy}} F_{zy}\right]_{\bar{y}}. \qquad (18)$$

Енді S_8 өрнегін түрлендіріп, бағалаймыз:

$$S_8 = h_3 F_{0_x}^2 ab_z \frac{c_z}{c} + h_3 F_{0_x}^k F_{0_x}^{k+1} ab_z \frac{c_z}{c} - h_3 F_{0_x}^2 ab_z \frac{c_z}{c} - h_3 aa_z \frac{c_z}{c} +$$
$$+ h_3 F_{0_x} F_{0_y} bb_z \frac{c_z}{c} - h_3 F_{0_x}^k F_{0_y}^{k+1} aa_z \frac{c_z}{c} + h_3 F_{0_x} F_{0_y} aa_z \frac{c_z}{c} + h_3 F_{0_y}^k F_{0_x}^{k+1} bb_z \frac{c_z}{c} -$$
$$- h_3 F_{0_y} F_{0_x} bb_z \frac{c_z}{c} - h_3 F_{0_y}^2 a_z b \frac{c_z}{c} - h_3 F_{0_y}^k F_{0_y}^{k+1} a_z b \frac{c_z}{c} + h_3 F_{0_y}^2 a_z b \frac{c_z}{c}.$$

Енді $|nm| \le (n^2 + m^2)/2$ теңсіздігін пайдаланып

$$S_8 \le \frac{h_3}{2}\left\{\left[\left(F_{0_x}^k\right)^2 + \left(F_{0_x}^{k+1}\right)^2\right] ab_z \frac{c_z}{c} + \left[\left(F_{0_x}^k\right)^2 + \left(F_{0_y}^{k+1}\right)^2\right] aa_z \frac{c_z}{c} +\right.$$
$$\left.+\left[\left(F_{0_y}^k\right)^2 + \left(F_{0_x}^{k+1}\right)^2\right] bb_z \frac{c_z}{c} + \left[\left(F_{0_y}^k\right)^2 + \left(F_{0_y}^{k+1}\right)^2\right] a_z b \frac{c_z}{c}\right\}. \qquad (19)$$

бағалауын аламыз.
a,b,c функцияларын жеткілікті тегіс шектеулі деп санап және (14) -(19) өрнектерін ескере отырып, (13) формуласынан

$$\frac{1}{2}\left[(ab_z - a_z b)\text{-}\left|\frac{c_z}{c}\right|\right]\times\left[\left(F^k_{\underset{x}{0}}\right)^2+\left(F^{k+1}_{\underset{x}{0}}\right)^2+\left(F^k_{\underset{y}{0}}\right)^2+\left(F^{k+1}_{\underset{y}{0}}\right)^2\right]\le$$

$$\le\frac{h_3}{2}K\left[\left(F^k_{\underset{x}{0}}\right)^2+\left(F^{k+1}_{\underset{x}{0}}\right)^2+\left(F^k_{\underset{y}{0}}\right)^2+\left(F^{k+1}_{\underset{y}{0}}\right)^2\right]+R^k_{i,j}+c_2h_3^2, \quad (20)$$

теңсіздігін аламыз, мұндағы

$$R^k_{i,j}=\left[F_{\underset{x}{0}}F_z\right]_{\underset{y}{0}}-\left[F_{\underset{y}{0}}F_z\right]_{\underset{x}{0}}-\left[\left(F_{\underset{x}{0}}a+F_{\underset{y}{0}}b\right)\left(-F_{\underset{x}{0}}b+F_{\underset{y}{0}}a\right)\right]_z+\frac{h_1^2}{2}\left[F_{zx}F_{\underset{yx}{0}}\right]_{\bar{x}}-\frac{h_2^2}{2}\left[F_{zy}F_{\underset{xy}{0}}\right]_{\bar{y}}.$$

Айталық,

$$\left[(ab_z - a_z b)\text{-}\left|\frac{c_z}{c}\right|\right]\ge\alpha>0,\quad N_j>9,\quad j=1,2,\quad Kh_3<\frac{\alpha}{2},$$

яғни $h_3=\dfrac{l}{N_3}$ болғандықтан, $N_3>\dfrac{2Kl}{\alpha}$ болады, мұнда α, K тұрақты шамалар.

Сонда, (20) теңсіздігінен

$$\sum_{\Omega_h^\varepsilon}\left(F^2_{\underset{x}{0}}+F^2_{\underset{y}{0}}\right)h_1h_2h_3\le\frac{2}{\alpha}\sum_{\Omega_h^\varepsilon}R^k_{i,j}+c_2h_3^2 \quad (21)$$

екендігін аламыз.

(7)-(8) шарттарын және $|nm|\le(n^2+m^2)/2$ теңсіздігін пайдаланып, (21) теңсіздігінен (12) бағалауын аламыз. Сонымен, теорема дәлелденді.

Қорытынды

Осы жұмыста алынған гиперболалық-параболалық теңдеу үшін шекаралық есептің шектеулі - айырымдық аналогының шартты орнықтылық бағалауы геотомография, медициналық томография, дефектоскопия есептерін сандық шешу әдістерінің жинақтылығын негіздеуде қолданылады және акустика мен сейсмобарлаудың көп өлшемді кері есептерін шешуде үлкен практикалық маңызы бар.

Жұмыс ҚР ҒЖБМ АР 19678469 жобасын гранттық қаржыландыру есебінен орындалды.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Бердышев А. С. «О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе–Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения», Сибирский математический журнал. – 2005. – Т. 46. – №. 3. – С. 500-510.

2 Ashyralyev A., Ozdemir Y. «Stability of difference schemes for hyperbolic-parabolic equations», Computers & Mathematics with Applications. – 2005. – Т. 50. – №. 8-9. – С. 1443-1476.

3 Ashyralyev A., Yurtsever H. A. «A note on the second order of accuracy difference schemes for hyperbolic–parabolic equations», Applied Mathematics and Computation. – 2005. – Т. 165. – №. 3. – С. 517-537.

4 Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y. (1977). Solutions of ill-posed problems. VH Winston & Sons.

5 Ivanov, V. K., Vasin, V. V., & Tanana, V. P. (2013). Theory of linear ill-posed problems and its applications. De Gruyter, doi: 10.1515/9783110944822

6 Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G., & Shishatski_, S. P. (1986). Ill-posed problems of mathematical physics and analysis (Vol. 64). American Mathematical Soc.

7 Лаврентьев М. М., Романов В. Г., «О трех линеаризированных обратных задачах для гиперболических уравнений», Докл. АН СССР, 1966. -Т. 171. - 6. - С. 1279-1281.

8 Романов В. Г. О некоторых классах единственности решения задач интегральной геометрии //Математические заметки. – 1974. – Т. 16. – №. 4. – С. 657-668.

9 Романов В. Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых //Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – №. 5. – С. 1206-1208.

10 Amirov, A. K. (2014). Integral geometry and inverse problems for kinetic equations. De Gruyter, doi: 10.1515/9783110940947.

11 Amirov, A., Yildiz, M., & Ustaoglu, Z. (2009). Solvability of a problem of integral geometry via an inverse problem for a transport-like equation and a numerical method. Inverse Problems, 25(9), 095002. doi: 10.1088/0266-5611/25/9/095002.

12 Мухометов Р. Г. О задаче интегральной геометрии //Математические проблемы геофизики. Новосибирск. – 1975. – Т. 6. – С. 212-252.

13 Кабанихин С. И. , Баканов Г. Б. , «Об устойчивости конечно-разностного аналога двумерной задачи интегральной геометрии», Докл. АН СССР, 1987. -Т. 292. - 1. - С. 25-29.

14 Bakanov, G. On the stability of a differential- difference analogue of a two-dimensional problem of integral geometry. Filomat 32:3 (2018), 933–938, doi: 10.2298/FIL1803933B.

15 Bakanov, G. B. (2016, August). On the stability estimation of differential-difference analogue of the integral geometry problem with a weight function. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1759, No. 1, p. 020067). AIP Publishing LLC, doi: 10.1063/1.4959681.

References:

1 Berdyshev, A. S. (2005). O vol'terrovosti nekotoryh zadach s usloviyami tipa Bicadze–Samarskogo dlya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo uravneniya [On the Volterra property of some problems with Bitsadze–Samarskii type conditions for a mixed parabolic-hyperbolic equation]. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal– Siberian Mathematical Journal, 46(3), 500–510[in Russian].

2 Ashyralyev, A., & Ozdemir, Y. (2005). Stability of difference schemes for hyperbolic-parabolic equations. Computers & Mathematics with Applications, 50(8-9), 1443-1476.

3 Ashyralyev, A., & Yurtsever, H. A. (2005). A note on the second order of accuracy difference schemes for hyperbolic–parabolic equations. Applied Mathematics and Computation, 165(3), 517-537.

4 Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y. (1977). Solutions of ill-posed problems. VH Winston & Sons.

5 Ivanov, V. K., Vasin, V. V., & Tanana, V. P. (2013). Theory of linear ill-posed problems and its applications. De Gruyter, doi: 10.1515/9783110944822

6 Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G., & Shishatski_, S. P. (1986). Ill-posed problems of mathematical physics and analysis (Vol. 64). American Mathematical Soc.

7 Lavrent'ev M. M., Romanov V. G. (1966). O trekh linearizirovannykh obratnykh zadachakh dlia giperbolicheskikh uravnenii [Three linearized inverse problems for hyperbolic equations]. Doklady AN SSSR – Reports of the USSR Academy of Sciences, 171 (6), 1279–1281 [in Russian].

8 Romanov, V. G. (1974). O nekotorykh klassakh edinstvennosti resheniia zadach integralnoi geometrii [On some classes of uniqueness of solutions to problems of integral geometry]. Matematicheskie zametki – Math notes, 16 (4), 657–668 [in Russian].

9 Romanov V. G. (1967). O vosstanovlenii funktsii cherez integraly po semeistvu krivykh [Reconstruction of a function in terms of integrals over a family of curves]. Sibirskii matematicheskii zhurnal – Siberian Mathematical Journal, 8 (5), 1206–1208 [in Russian].

10 Amirov, A. K. (2014). Integral geometry and inverse problems for kinetic equations. De Gruyter, doi: 10.1515/9783110940947.

11 Amirov, A., Yildiz, M., & Ustaoglu, Z. (2009). Solvability of a problem of integral geometry via an inverse problem for a transport-like equation and a numerical method. Inverse Problems, 25(9), 095002. doi: 10.1088/0266-5611/25/9/095002.

12 Mukhometov, R. G.(1975) O zadache integralnoi geometrii [On a problem of inegral geometry].Matematicheskie problemy geofiziki. Novosibirsk – Mathematical Problems of Geophyzics. Novosibirsk, 6, 212–252 [in Russian].

13 Kabanikhin, S. I., & Bakanov, G.B. (1987). Ob ustoichivosti konechno-raznostnogo analoga dvumernoi zadachi integralnoi geometrii [On the stability of a finite-difference analogue of a two-dimensional problem of integral geometry C]. Doklady AN SSSR – Reports of the USSR Academy of Sciences, 292 (1), 25–29 [in Russian].

14 Bakanov, G. On the stability of a differential- difference analogue of a two-dimensional problem of integral geometry. Filomat 32:3 (2018), 933–938, doi: 10.2298/FIL1803933B.

15 Bakanov, G. B. (2016, August). On the stability estimation of differential-difference analogue of the integral geometry problem with a weight function. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1759, No. 1, p. 020067). AIP Publishing LLC, doi: 10.1063/1.4959681.