МРНТИ 27.39.29
УДК 517.988.8

https://doi.org/10.51889/9231.2022.81.55.003

А.Е. Игенберлина[1], Ж.А. Кеулимжаева[2]*

[1]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилёва, г.Нур-Султан, Казахстан
[2] Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина, г.Нур-Султан, Казахстан
**e-mail: zh.keulimzhayeva@mail.ru*

ДВОИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ УОЛША

Аннотация

В теории ортогональных рядов, наряду с тригонометрическими системами, широко используются системы Хаара, Уолша и их обобщения. Классическая теория рядов Фурье имеет дело с разложением функций по синусоидальным гармоникам. В отличие от этих непрерывных гармоник, функции Уолша представляют собой «прямоугольные» волны. Оказалось, что в некоторых случаях они предпочтительнее синусоидальных волн. Изучение классических функциональных пространств основано на приближении функций тригонометрическими полиномами, а в данной работе рассмотрены функциональные пространства с точки зрения приближения функций частичными суммами Фурье-Уолша на двоичной группе: устанавливается связь между двоичным интегральным модулем непрерывности и наилучшими приближениями функции многих переменных полиномами Уолша. Кроме этого, дана интегральная оценка частичных сумм кратного ряда Фурье-Уолша и изучена связь между отклонениями таких сумм кратного ряда от функции и групповым модулем непрерывности. В одномерном случае двоичные модули непрерывности рассмотрены в монографии Голубова Б.И. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения.

Ключевые слова: интеграл, непрерывность, полином, полином Уолша, двоичная свёртка, модуль непрерывности, двоичный интервал.

Аңдатпа
А.Е. Игенберлина[1], Ж.А. Кеулимжаева[2]*
[1]Л.Н. Гумилёв атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан
[2]Сәкен Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

ЕКІЛІК ИНТЕГРАЛДЫҚ ҮЗІЛІССІЗДІК МОДУЛІ ЖӘНЕ КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ УОЛШ ПОЛИНОМДАРЫ АРҚЫЛЫ ЕҢ ЖАҚЫН ЖУЫҚТАУЛАРЫ

Ортогоналдық қатарлар теориясында тригонометриялық жүйелермен қатар Хаар және Уолш жүйелері мен олардың жалпылаулары кеңінен қолданылады. Фурье қатарының классикалық теориясы синусоидалды гармоника бойынша функциялардың жіктелуімен айналысады. Уолш функцияларының осы үзіліссіз гармоникалардан айырмашылығы, олар «тікбұрышты» толқындар болып табылады. Кейбір жағдайларда олар синусоидалды толқындардан артықшылығы бар екендігі белгілі болды. Классикалық функционалдық кеңістіктерді зерттеу функциялардың тригонометриялық көпмүшеліктер арқылы жуықтауына негізделген және бұл жұмыста функционалдық кеңістіктер функциялардың екілік группадағы Фурье-Уолштың дербес қосындыларымен жуықталуы тұрғысынан қарастырылады: көп айнымалы функцияларды Уолш көпмүшеліктерімен ең жақсы жуықтау және екілік интегралдық үзіліссіздік модулі арасында өзара байланыстар орнатылады. Сонымен қатар, Фурье-Уолш еселі қатарларының дербес қосындыларының интегралдық бағалауы келтіріліп, функцияның еселі қатарының мұндай қосындылары мен үзіліссіздіктің группалық модулі арасындағы байланысы зерттеледі. Бір өлшемді жағдайда үзіліссіздіктің екілік модульдері Б.И. Голубовтың "Қатарлар және Уолш түрлендірулері. Теория және қолданылуы" атты монографиясында қарастырылған.

Түйін сөздер: интеграл, үзіліссіздік, көпмүшелік, Уолш полиномы, екілік үйірткі, үзіліссіздік модулі, екілік интервал.

Abstract

THE DYADIC INTEGRAL MODULE OF CONTINUITY AND BEST APPROXIMATIONS OF A FUNCTION OF MULTIPLE VARIABLES BY WALSH POLYNOMIALS.

Igenberlina A[1]., Keulimzhayeva Zh[2]
[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
[2]S. Seifullin Kazakh AgroTechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan

In the theory of orthogonal series, along with trigonometric systems, Haar and Walsh systems and their generalizations are widely used. The classical theory of Fourier series deals with the expansion of functions in sinusoidal harmonics.

Unlike these continuous harmonics, Walsh functions are "square" waves. It turned out that in some cases they are preferable to sinusoidal waves. The study of classical function spaces is based on the approximation of functions by trigonometric polynomials, and in this paper, functional spaces are considered from the point of view of approximation of functions by partial Fourier-Walsh sums on a dyadic group: a connection is established between the dyadic integral modulus of continuity and the best approximations of a function of many variables by Walsh polynomials. In addition, an integral estimate of the partial sums of the multiple Fourier-Walsh series is given and the relationship between the deviations of such sums of the multiple series from the function and the group modulus of continuity is studied. In the one-dimensional case, dyadic modules of continuity are considered in the monograph by Golubov B.I. «Walsh series and transformations. Theory and applications».

Keywords: integral, continuity, polynomial, Walsh polynomial, dyadic convolution, modulus of continuity, dyadic interval.

§1. Основные понятия и вспомогательные леммы

Ортонормированная система Уолша, построенная впервые в 1923 году американским ученым Дж. Уолшем [1] и далее развитая Н.Файном [2], [3], нашла широкое применение в гармоническом анализе, теории функций и функционального анализа, теории вероятностей. Известно и практическое применение этой теории в решении задач теории кодирования, разработке фильтров и в теории распознавания образов, о чем подробно изложено в монографиях [4], [5], [6], [7]. Системам Уолша и ее обобщениям посвящены работы В.И. Голубова, А.В. Ефимова, В.А. Скворцова [8]; Ф. Шиппа, В. Вейда, Н.Я. Симона [9]; Г.Н. Агаева, Н.Я. Виленкина, Г.М. Джафарли, А.И. Рубинштейна [10].

Пусть $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_k)\in R_k$, $\bar{n}=(n_1,n_2,...,n_k)$, $n_i\in N$, $i=1,2,...,k$, $\{w_{n_i}(x_i)\}$ - система Уолша по переменной x_i. Тогда кратную систему Уолша определим следующим образом:

$$w_{\bar{n}}(\bar{x})=\prod_{i=1}^{k}w_{n_i}(x_i).$$

Из определения следует, что функции Уолша постоянны на некоторых двоичных полуинтервалах. Полуинтервалы вида:

$$\Delta_m^{(n)}=\left[\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}\right),\quad 0\le m\le 2^n-1,\ \ n=0,1,2,\dots .$$

в дальнейшем будем называть двоичными интервалами $n-$го ранга. Они задают разбиение полуинтервала $[0,1)$:

$$[0,1)=\bigcup_{m=0}^{2^n-1}\Delta_m^{(n)},$$

при этом $\Delta_0^{(0)}\equiv[0,1)$. Произвольный интервал ранга n обозначим через $\Delta^{(n)}$.

Пусть $\Delta^j(x),\ j=0,1,2,...,$ - двоичный интервал $j-$го ранга, содержащий $x\in[0,1)$. Обозначим через $Q_k=Q_k^0=\{\bar{x}:0\le x_i\le 1,\ \ i=1...,k\}$ - к-мерный единичный куб,

$$Q_{\bar{m},k}^j(\bar{x})=\Delta_{m_1}^j(x_1)\times\Delta_{m_2}^j(x_2)\times...\times\Delta_{m_k}^j(x_k)=$$

$=\left\{\bar{x}\in Q_k:\ \dfrac{m_i}{2^j}\le x_i<\dfrac{m_i+1}{2^j},\ \ 0\le m_i\le 2^j-1,\ \ j=0,1,2,...;\ \ i=1,...,k\right\}$ - к-мерный, куб $j-$го ранга, содержащий точку $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_k)$;

$$Q_{0,k}^j(\bar{x})=\left\{\bar{x}\in Q_k:\ \ 0\le x_i\le\frac{1}{2^j},\ \ j=0,1,2,...;\ \ i=1,...,k\right\};$$

Q_k^j - произвольный к-мерный куб $j-$го ранга, а Φ_j - характеристическая функция множества Q_k^j.

Ясно, что:

$\mu\left(Q_{m,k}^j\right)=\mu\left(\Delta_m^j\right)^k=\left(\dfrac{1}{2^j}\right)^k$, где μ обозначает меру Лебега множества.

Через

$$D_{\overline{n}}\left(\overline{x}\right)=\prod_{i=1}^{k} D_{n_i}\left(x_i\right)=\prod_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{n_i-1} w_l\left(x_i\right)$$

обозначим кратное ядро Дирихле по системе $\left\{w_{\overline{n}}\left(\overline{x}\right)\right\}$.

Известно, что в одномерном случае имеет место равенство [8]:

$$D_{2^j}(x)=\begin{cases}2^k, & при\;\; x\in\Delta_0^k\\ 0, & при\;\; x\in[0,1)\setminus\Delta_0^k\end{cases}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что для кратного ядра Дирихле $D_{2^j,\ldots,2^j}(\overline{x})$ по системе $\left\{w_{\overline{n}}\left(\overline{x}\right)\right\}$ верна оценка:

$$D_{2^j,\ldots,2^j}(x_1,\ldots,x_k)=\begin{cases}2^{kj}, & при\;\; \overline{x}\in Q_{0,k}^j\\ 0, & при\;\; \overline{x}\in[0,1)^k\setminus Q_{0,k}^j\end{cases}. \tag{1}$$

Пусть $f\left(\overline{x}\right)\in L_p\left(Q_k\right),\ 1<p\le\infty$. Рассмотрим кратный ряд Фурье-Уолша функции $f\left(\overline{x}\right)$

$$f\left(\overline{x}\right)\sim\sum_{\overline{l}=0}^{\infty}c_{\overline{l}}\left(f\right)w_{\overline{l}}\left(\overline{x}\right),\qquad \sum_{\overline{l}=0}^{\infty}=\sum_{l_1}^{\infty}\cdots\sum_{l_k}^{\infty}.,\quad \overline{x}=\left(x_1,\ldots,x_k\right),\ \ \overline{l}=\left(l_1,l_2,\ldots,l_k\right),$$

где $c_{\overline{l}}\left(f\right)=\int\limits_{Q_k}w_{\overline{l}}\left(\overline{x}\right)f\left(\overline{x}\right)d\overline{x}$ - коэффициенты Фурье-Уолша, $d\overline{x}=dx_1...dx_k$.

Прямоугольные частичные суммы ряда Фурье-Уолша порядка $\overline{n}$ обозначим:

$$S_{\overline{n}}f(\overline{x})=\sum_{\overline{l}=0}^{\overline{n}-1}c_{\overline{l}}w_{\overline{l}}(\overline{x})\ =\sum_{l_1=0}^{n_1-1}\sum_{l_2=0}^{n_2-1}\ldots\sum_{l_k=0}^{n_k-1}c_{l_1,\ldots,l_k}w_{l_1}\left(x_1\right)w_{l_2}\left(x_2\right)\ldots w_{l_k}\left(x_k\right).$$

Лемма 1. Пусть $f\left(\overline{x}\right)\in L_1\left(Q_k\right)$, тогда имеет место равенство:

$$S_{2^j,\ldots,2^j}f(\overline{x})=2^{kj}\int\limits_{Q_{\overline{m},k}^j}f(\overline{t})d\overline{t},\ \text{при}\ \ \overline{x}\in Q_{\overline{m},k}^j,$$

где $\overline{t}=(t_1,\ldots,t_k),\ \ d\overline{t}=dt_1...dt_k,\ \ \overline{m}=(m_1,\ldots,m_k),\ \int\limits_{Q_{\overline{m},k}^j}=\int\limits_{\Delta_m^j}\ldots\int\limits_{\Delta_{m_k}^j}$.

Доказательство:

В выражение для частной суммы ряда подставим значение коэффициентов Фурье-Уолша:

$$S_{\overline{n}}f(\overline{x})=\sum_{\overline{l}=0}^{\overline{n}-1}\int\limits_{Q_k}w_{\overline{l}}\left(\overline{t}\right)f\left(\overline{t}\right)w_{\overline{l}}(\overline{x})d\overline{t}=\int\limits_{Q_k}f\left(\overline{t}\right)\left(\sum_{\overline{l}=0}^{\overline{n}-1}w_{\overline{l}}\left(\overline{t}\oplus\overline{x}\right)\right)d\overline{t}.$$

Из определения ядра Дирихле и инвариантности интеграла относительно сдвига получим:

$$S_{\overline{n}}f(\overline{x})=\int\limits_{Q_k}f\left(\overline{t}\right)D_{\overline{n}}\left(\overline{x}\oplus\overline{t}\right)d\overline{t}=\int\limits_{Q_k}f\left(\overline{x}\oplus\overline{t}\right)D_{\overline{n}}\left(\overline{t}\right)d\overline{t}.$$

В частности, для частичных сумм с $n_i=2^j,\ \ i=1,2,\ldots,k$ можно записать

$$S_{2^j,\ldots,2^j}f(\overline{x})=\int\limits_{Q_k}D_{2^j,\ldots,2^j}\left(\overline{t}\right)f\left(\overline{x}\oplus\overline{t}\right)d\overline{t}=2^{kj}\int\limits_{Q_{0,k}^j}f(\overline{x}\oplus\overline{t})d\overline{t}. \tag{2}$$

Далее, если $\overline{x}\in Q_{\overline{m},k}^j$, то при $\overline{t}\in Q_{0,k}^j$ выполняется [8]: $\overline{x}\oplus\overline{t}\in Q_{\overline{m},k}^j$.

Следовательно**,**

$$S_{2^j,\ldots,2^j}f(\overline{x})=2^{kj}\int\limits_{Q_{\overline{m},k}^j}f(\overline{t})d\overline{t},\ \text{при}\ \overline{x}\in Q_{\overline{m},k}^j,\ \text{где}\ \overline{t}=(t_1,\ldots,t_k),\ \ d\overline{t}=dt_1...dt_k.$$

Определение 1.

Двоичным интегральным модулем непрерывности функции $f \in L_p\left(Q^k\right)$, $1 \le p < \infty$ называется следующая величина

$$\omega_p\left(f, \delta_1, ..., \delta_k\right) = \sup_{0 \le h_i < \delta_i} \left\| f\left(\bar{x} \oplus \bar{h}\right) - f\left(\bar{x}\right) \right\|_p,$$

а для $f \in C[0,1]^k$ двоичным модулем непрерывности называется величина

$$\omega\left(f, \delta_1, ..., \delta_k\right) = \sup_{0 \le h_i < \delta_i} \left\| f\left(\bar{x} \oplus \bar{h}\right) - f\left(\bar{x}\right) \right\|_{C[0,1]^k},$$

где $\bar{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$; $\bar{h} = \left(h_1, h_2, ..., h_k\right)$; $i = 1, 2, ..., k.$

Здесь, в отличие от классических определений, сдвиг берётся относительно операции $\oplus$. Наилучшее приближение функции $f \in L_p\left(Q^k\right)$ полиномами по системе Уолша, порядок которых не превышает $2^{n_1} \cdot 2^{n_2} \cdot ... \cdot 2^{n_k}$ обозначим следующим образом:

$$E_p(2^{n_1}, ..., 2^{n_k}, f) = \inf_{\left\{a_{j_1, ..., j_k}\right\}} \left\| f\left(\bar{x}\right) - \sum_{j_1=0}^{2^{n_1}-1} ... \sum_{j_k=0}^{2^{n_k}-1} a_{j_1, ..., j_k} w_{j_1}\left(x_1\right) ... w_{j_k}\left(x_k\right) \right\|_p.$$

§2. Постановка задачи и формулировка основных утверждений

Известно, что в одномерном случае между групповым модулем непрерывности функции $f \in L_p[0,1)$ и её наилучшими приближениями полиномами по системе Уолша в метрике $L_p[0,1)$ справедливы неравенства, доказанные Watari C. [11]:

$$E_p\left(2^n, f\right) \le \omega_p\left(2^{-n}, f\right) \le 2\, E_p\left(2^n, f\right).$$

Основной целью данной работы является распространение указанных неравенств на кратный случай. В одномерном случае двоичные модули непрерывности рассмотрены в монографии Голубова Б.И. [8].

Теорема 1. Если $1 \le p < \infty$, $f \in L_p\left(Q^k\right)$, то имеют место следующие неравенства:

$$\frac{1}{2} \omega_p\left(2^{-n_1}, 2^{-n_2}, ... 2^{-n_k}, f\right) \le \left\| f - S_{2^{n_1}, ..., 2^{n_k}}\left(f\right) \right\|_p \le \omega_p\left(2^{-n_1}, 2^{-n_2}, ... 2^{-n_k}, f\right).$$

Теорема 2. Если $1 \le p < \infty$, $f \in L_p\left(Q^k\right)$, то имеют место следующие неравенства:

$$E_p\left(2^{n_1}, 2^{n_2}, ... 2^{n_k}, f\right) \le \left\| f - S_{2^{n_1}, ..., 2^{n_k}}\left(f\right) \right\|_p \le 2 E_p\left(2^{n_1}, 2^{n_2}, ... 2^{n_k}, f\right). \tag{3}$$

Из теоремы 1 и теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. Если $f \in L_p\left(Q^k\right)$, $1 \le p < \infty$, то имеют место соотношения:

$$\omega_p\left(2^{-n_1}, 2^{-n_2}, ... 2^{-n_k}, f\right) \asymp E_p\left(2^{n_1}, 2^{n_2}, ... 2^{n_k}, f\right) \asymp \left\| f - S_{2^{n_1}, ..., 2^{n_k}}\left(f\right) \right\|_p.$$

Здесь и в дальнейшем запись $\|f\| \asymp \|g\|$ означает, что существуют положительные постоянные c_1, c_2, не зависящие от f и g:

$$c_1 \|g\| \le \|f\| \le c_2 \|g\|.$$

Определение 2. Говорят, что $f\left(x, y\right) \in Lip\left(\alpha, p, W\right)$, если имеет место оценка:

$$\left\| f\left(x \oplus h_1, y \oplus h_2\right) - f\left(x, y\right) \right\|_p = \underline{O}\left(h_1^\alpha + h_2^\alpha\right).$$

Следствие 2. Пусть $0<\alpha+\beta\le 1,\ r\ge 1,\ s\ge 1,\ 1-{}^1\!/_s+{}^1\!/_t={}^1\!/_r$. Тогда, если $f\in Lip(\alpha,r,W)$ и $g\in Lip(\beta,s,W)$, то $(f*g)\in Lip(\alpha+\beta,t,W)$.

§3. Доказательство утверждений

Для краткости доказательство проведём для двумерного случая, то есть $k=2$.

Доказательство теоремы 1: На основании равенства (2) и свойства (1) ядра $D_{2^{n_1},2^{n_2}}(t_1,t_2)$, используя неравенство Гёльдера, имеем:

$$\left\|f-S_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)\right\|_p=\left(\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus t_1,y\oplus t_2)D_{2^{n_1}2^{n_2}}(t_1,t_2)dt_1dt_2\right|^p dxdy\right)^{1/p}\le$$

$$\le\left(\int_0^1\int_0^1\left(\int_0^{2^{-n_1}}\int_0^{2^{-n_2}}\left|f(x,y)-f(x\oplus t_1,y\oplus t_2)\right|D_{2^{n_1}2^{n_2}}(t_1,t_2)dt_1dt_2\right)^p dxdy\right)^{1/p}\le$$

$$\le\int_0^{2^{-n_1}}\int_0^{2^{-n_2}}D_{2^{n_1}2^{n_2}}(t_1,t_2)dt_1dt_2\left(\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-f(x\oplus t_1,y\oplus t_2)\right|^p dxdy\right)^{1/p}\le$$

$$\le\int_0^{2^{-n_1}}\int_0^{2^{-n_2}}D_{2^{n_1}2^{n_2}}(t_1,t_2)\omega_p\left(2^{-n_1},2^{-n_2},f\right)dt_1dt_2=\omega_p\left(2^{-n_1},2^{-n_2},f\right).$$

Пусть теперь $\bar h=(h_1,h_2)$ - произвольный элемент из $\left[0,2^{-n_1}\right)\times\left[0,2^{-n_2}\right)$, а $P\in \mathrm{B}_{2^{n_1+n_2}}$. Тогда для полинома порядка $2^{n_1+n_2}$ по системе Уолша при $0\le h_1<2^{-n_1}$, $0\le h_2<2^{-n_2}$, согласно свойству системы Уолша, выполняется равенство:

$$P(x,y)=P(x\oplus h_1,y\oplus h_2).$$

Поэтому для любого $(x,y)\in G\times G$ справедлива оценка

$$\left\|f(\cdot,\cdot)-f(\cdot\oplus h_1,\cdot\oplus h_2)\right\|_p\le\left\|f(\cdot,\cdot)-P(\cdot,\cdot)\right\|_p+\left\|f(\cdot\oplus h_1,\cdot\oplus h_2)-P(\cdot\oplus h_1,\cdot\oplus h_2)\right\|_p=2\left\|f-P\right\|_p.$$

Принимая за Р полином наилучшего приближения порядка $2^{n_1+n_2}$, получим:

$$\left\|f(\cdot,\cdot)-f(\cdot\oplus h_1,\cdot\oplus h_2)\right\|_p\le 2E_p\left(2^{n_1},2^{n_2},f\right)\le 2\left\|f(\cdot,\cdot)-S_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)(\cdot,\cdot)\right\|_p.$$

Поэтому, в силу произвольности $\bar h$

$$\omega_p\left(2^{-n_1},2^{-n_2},f\right)\le 2\left\|f(\cdot,\cdot)-S_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)(\cdot,\cdot)\right\|_p.$$

Лемма 2. Пусть $1\le p<\infty,\quad f\in L_p\left(Q^k\right)$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\left\|S_{2^{n_1},\dots,2^{n_k}}(f)\right\|_p\le\|f\|_p,\quad n_i=0,1,2,\dots;\ i=1,2,\dots,k.$$

Доказательство: Пусть $\dfrac{1}{\mathrm{p}}+\dfrac{1}{q}=1$. Согласно Лемме 1 справедливо равенство:

$$\left\|S_{2^{n_1},...,2^{n_k}}(f)\right\|_p=\left(\int\limits_{Q_k}\left|S_{2^{n_1},...,2^{n_k}}(f)\right|^p\right)^{1/p}=\left\{\sum_{m_1=0}^{2^{n_1}-1}\sum_{m_2=0}^{2^{n_2}-1}...\sum_{m_k=0}^{2^{n_k}-1}\int\limits_{Q^{\bar n}_{\bar m,k}}\left|S_{2^{n_1},...,2^{n_k}}(f)\right|^p d\bar{x}\right\}^{1/p}=$$

$$=\left\{\sum_{m_1=0}^{2^{n_1}-1}\sum_{m_2=0}^{2^{n_2}-1}...\sum_{m_k=0}^{2^{n_k}-1}\left|2^{(n_1+n_2+...+n_k)}\int\limits_{Q^{\bar n}_{\bar m,k}}f(\bar t)d\bar t\right|^p\mu Q^{\bar n}_{\bar m,k}\right\}^{1/p}=2^{\frac{n_1+n_2+...+n_k}{q}}\left\{\sum_{m_1=0}^{2^{n_1}-1}\sum_{m_2=0}^{2^{n_2}-1}...\sum_{m_k=0}^{2^{n_k}-1}\left(\int\limits_{Q^{\bar n}_{\bar m,k}}f(\bar t)d\bar t\right)^p\right\}^{1/p}.$$

Для внутреннего интеграла, используя неравенство Гёльдера, имеем:

$$\left(\int\limits_{Q^{\bar n}_{\bar m,k}}f(\bar t)d\bar t\right)^p\le\int\limits_{Q^{\bar n}_{\bar m,k}}\left|f(\bar t)\right|^p d\bar t\left(\mu Q^{\bar n}_{\bar m,k}\right)^{1/q}=2^{-\frac{n_1+n_2+...+n_k}{q}}\int\limits_{Q^{\bar n}_{\bar m,k}}\left|f(\bar t)\right|^p d\bar t.$$

Следовательно,

$$\left\|S_{2^{n_1},...,2^{n_k}}(f)\right\|_p\le\|f\|_p.$$

В одномерном случае аналогичное утверждение доказано Ульяновым [8].

Доказательство теоремы 2: Левая часть (3) следует из определения наилучшего приближения $E_p\left(2^{n_1},2^{n_2},...2^{n_k},f\right)$. Для доказательства правой части, обозначим через $P_{2^{n_1},...,2^{n_k}}(\bar x)$ полином Уолша наилучшего приближения функции f. Ясно, что:

$$S_{2^{n_1},...,2^{n_k}}\left(P_{2^{n_1},...,2^{n_k}},\bar x\right)=P_{2^{n_1},...,2^{n_k}}(\bar x).$$

Пользуясь неравенством Минковского и Леммой 2, получим:

$$\left\|f-S_{2^{n_1},...,2^{n_k}}(f)\right\|_p=\left\|f-P_{2^{n_1},...,2^{n_k}}-S_{2^{n_1},...,2^{n_k}}\left(f-P_{2^{n_1},...,2^{n_k}}\right)\right\|_p\le$$

$$\le\left\|f-P_{2^{n_1},...,2^{n_k}}\right\|_p+\left\|S_{2^{n_1},...,2^{n_k}}\left(f-P_{2^{n_1},...,2^{n_k}}\right)\right\|_p=2\ E_p\left(2^{n_1},2^{n_2},...2^{n_k},f\right).$$

Теорема доказана.

Так как в нашей работе используется двоичная свёртка, для полноты изложения приведём аналог классического неравенства Юнга [12] о свёртках.

Неравенство Юнга. Пусть p,q,r – вещественные числа такие, что:

$$1\le p\le q\le\infty,\ 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}.$$

Пусть $f(x)\in L_p\left(R^+\right)$ и $g(x)\in L_r\left(R^+\right)$ и $J(x)=\int\limits_0^\infty f(y)g(y\oplus x)dy.$ Тогда имеет место оценка:

$$\|J\|_q\le\|g\|_r\|f\|_p. \tag{4}$$

Доказательство: Пусть $1<p<q<\infty,\ r<q.$

Запишем $|fg|$ в виде:

$$|fg|=\left(|f|^p|g|^r\right)^{1/q}|g|^{1-r/q}|f|^{1-p/q}$$

и применим для оценки интеграла под знаком нормы в левой части (4) неравенство Гёльдера для трех функций при

$$p_1 = q,\ \ p_2 = p' = \frac{r}{1-\frac{r}{q}},\ \ p_3 = \frac{p}{1-\frac{p}{q}} \qquad \left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1\right).$$

Тогда:

$$\left|J(x)\right| \le \left(\int_0^\infty \left|f(y)\right|^p \left|g(x\oplus y)\right|^r dy\right)^{1/q} \|g\|_r^{1-r/q} \|f\|_p^{1-p/q}.$$

Следовательно,

$$\left\|J(x)\right\|_q \le \|g\|_r^{1-r/q} \|f\|_p^{1-p/q} \left(\int_0^\infty dx \int_0^\infty \left|f(y)\right|^p \left|g(y\oplus x)\right|^r dy\right)^{1/q} =$$

$$= \|g\|_r^{1-r/q} \|f\|_p^{1-p/q} \left(\int_0^\infty \left|f(y)\right|^p dy \int_0^\infty \left|g(x)\right|^r dx\right)^{1/q} = \|g\|_r \|f\|_p.$$

Доказательство следствия 2: Пусть $P_n, Q_n \in \mathrm{B}_n$, $n=(n_1,n_2)$ такие, что

$$\|f-P_n\|_r = \underline{O}\left(h_1^{\alpha}+h_2^{\alpha}\right),\ \ \|g-Q_n\|_s = \underline{O}\left(h_1^{-\beta}+h_2^{-\beta}\right).$$

Тогда, согласно неравенству Юнга,

$$\left\|(f-P_n)*(g-Q_n)\right\|_t \le \|f-P_n\|_r \|g-Q_n\|_s = \underline{O}\left(h_1^{-(\alpha+\beta)}+h_2^{-(\alpha+\beta)}\right).$$

С другой стороны,

$$\left\|(f-P_n)*(g-Q_n)\right\|_t = \left\|f*g-(P_n*g+f*Q_n-P_n*Q_n)\right\|,$$

а

$$P_n*g+f*Q_n-P_n*Q_n \in \mathrm{B}_n.$$

Отсюда следует, что

$$E_{n_1n_2}^t(f*g) = \underline{O}\left(h_1^{-(\alpha+\beta)}+h_2^{-(\alpha+\beta)}\right),$$

а значит, по Теореме 1

$$(f*g)(x,y)\in Lip(\alpha+\beta,t,W).$$

Следствие доказано.

Список использованных источников:

1 Walsh J.L. A closed set of normal orthoqonal functions //Amer. J. Math. -1923. -V.45. -P.5-24. https://www.jstor.org/stable/2387224?origin=JSTOR-pdf#metadata_info_tab_contents

2 Fine N.J. On the Walsh functions //Trans.Amer.Math.Soc. -1949. -V.65. -P.372-414. https://doi.org/10.2307/1990619

3 Fine N.J. The generalised Walsh functions //Trans.Amer.Math. Soc. -1950. -V.69. -P.66-67. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1950-0042535-2

4 Гольд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. -М.:Сов. Радио, 1973. http://pselab.ru/Books/Gold_Rader_1973.pdf

5 Федоров Б.Ф., Эльман Р.И. Цифровая голография. -М.:Наука, 1976. https://ps.1lib.vip/book/2452349/f164fc

6 Хармут Х. Передача информации ортогональными функциями. -М.:Связь, 1975. https://ps.1lib.net/book/2390730/53cef0

7 Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. -М.:Сов. Радио, 1980. https://ps.1lib.net/book/2433543/921867

8 Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. -М.:Наука, 1987. -343с. https://ps.1lib.net/book/2409796/68d1ce

9 Shipp F., Wade W.R., Simon P. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. With the collaboration of J. Pál. Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990. https://zbmath.org/?q=an%3A0727.42017

10 Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультипликативные системы функции и гармонический анализ на нульмерных группах. -Баку: ЭМИ. -1981. https://ps.1lib.net/book/573916/adf0fb

11 Watari C., Best approximation by Walsh polynomials. Tohoku Math.J., 15(1963), no. 2, p. 1-5. https://projecteuclid.org/journals/tohoku-mathematical-journal/volume-15/issue-1/Best-approximation-by-Walsh-polynomials/10.2748/tmj/1178243865.full

12 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. -М.:Наука, 1977. -455с. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=6669&option_lang=rus

References:

1 Walsh J.L. A closed set of normal orthoqonal functions //Amer. J. Math. -1923. -V.45. -P.5-24. https://www.jstor.org/stable/2387224?origin=JSTOR-pdf#metadata_info_tab_contents

2 Fine N.J. On the Walsh functions //Trans.Amer.Math.Soc. -1949. -V.65. -P.372-414. https://doi.org/10.2307/1990619

3 Fine N.J. The generalised Walsh functions //Trans.Amer.Math. Soc. -1950. -V.69. -P.66-67. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1950-0042535-2

4 Gol'd B., Reyder CH. Tsifrovaya obrabotka signalov [Digital signal processing]. -M.:Sov. Radio, 1973. (In Russian) http://pselab.ru/Books/Gold_Rader_1973.pdf

5 Fedorov B.F., El'man R.I. Tsifrovaya golografiya [Digital holography]. -M.:Nauka, 1976. (In Russian) https://ps.1lib.vip/book/2452349/f164fc

6 Kharmut KH. Peredacha informatsii ortogonal'nymi funktsiyami [Information transfer by orthogonal functions]. -M.: Svyaz', 1975. (In Russian) https://ps.1lib.net/book/2390730/53cef0

7 Khemming R.V. Tsifrovyye fil'try [Digital filters]. -M.:Sov. Radio, 1980. (In Russian) https://ps.1lib.net/book/2433543/921867

8 Golubov B.I., Yefimov A.V., Skvortsov V.A. Ryady i preobrazovaniya Uolsha. Teoriya i primeneniya [Walsh series and transformations. Theory and applications]. -M.: Nauka, 1987. -343. (In Russian) https://ps.1lib.net/book/2409796/68d1ce

9 Shipp F., Wade W.R., Simon P. Walsh series. *An introduction to dyadic harmonic analysis. With the collaboration of J. Pál.* Adam Hilger, Ltd., Bristol, *1990. https://zbmath.org/?q=an%3A0727.42017*

10 Agayev G.N., Vilenkin N.YA., Dzhafarli G.M., Rubinshteyn A.I. Mul'tiplikativnyye sistemy funktsii i garmonicheskiy analiz na nul'mernykh gruppakh [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups]. -Baku:EMI. -1981. (In Russian) https://ps.1lib.net/book/573916/adf0fb

11 Watari C., Best approximation by Walsh polynomials. Tohoku Math.J., 15(1963), no. 2, p. 1-5. https://projecteuclid.org/journals/tohoku-mathematical-journal/volume-15/issue-1/Best-approximation-by-Walsh-polynomials/10.2748/tmj/1178243865.full

12 Nikol'skiy S.M. Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya [Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. - M.: Nauka, 1977. -455. (In Russian) http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=6669&option_lang=rus