МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

МРНТИ 27.39.19
УДК 517.98

https://doi.org/10.51889/5008.2022.53.73.001

А.Т. Бесжанова[1*], *А.М. Темирханова*[1]

[1]*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан*
[*]*e-mail: beszhanova@mail.ru*

ВЕСОВАЯ ОЦЕНКА ОПЕРАТОРА ТИПА ГИЛЬБЕРТА СТИЛТЬЕСА ПРИ $1<q<p<\infty$

Аннотация

В теории матричных операторов большое значение имеют точные оценки их норм в различных пространствах последовательностей. В настоящее время, нахождения точных значений норм дискретного оператора, даже, в классических пространствах последовательностей Лебега, вообще говоря, является открытой проблемой и не всегда можно найти необходимые и достаточные условия выполнения различных весовых оценок для некоторых классов матричных операторов. Поэтому установление весовых оценок для некоторых классов матричных операторов, двухсторонних оценок норм являются актуальными задачами современной теории дискретных операторов. В работе рассматривается задача нахождения необходимых и достаточных условий для выполнения дискретного неравенства типа Гильберта-Стилтьеса при $1<q<p<\infty$. Кроме того, представлен альтернативный способ доказательства дискретного неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования.

Ключевые слова: Неравенство типа Харди, ограниченность оператора, весовые пространства Лебега, оператор типа Гильберта-Стилтьеса.

Аңдатпа

А.Т. Бесжанова[1], *А.М. Темирханова*[1]
[1] *Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан*

$1<q<p<\infty$ ЖАҒДАЙДАҒЫ ГИЛЬБЕРТ- СТИЛТЬЕС ОПЕРАТОРЫНЫҢ САЛМАҚТЫ БАҒАЛАУЫ

Матрицалық операторлар теориясында олардың әртүрлі тізбекті кеңістіктеріндегі нормаларын нақты бағалаудың маңызы зор. Қазіргі уақытта дискретті оператор нормаларының дәл мәндерін табу, тіпті классикалық Лебег тізбектері кеңістігінде де, жалпы алғанда, ашық мәселе болып табылады және кейбір матрицалық операторлар кластары үшін әртүрлі салмақтық бағалауларды орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын табу әрқашан мүмкін емес. Сондықтан матрицалық операторлардың кейбір кластары үшін салмақтық бағалауларды орнату, нормалардың екі жақты бағалауларын алу қазіргі заманғы дискретті операторлар теориясының өзекті мәселелері болып табылады. Бұл жұмыста $1<q<p<\infty$ жағдайындағы Гильберт-Стилтьес типті дискретті теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттарын табу мәселесін қарастырамыз. Сонымен қатар, қосындылау шектері айнымалы болатын Харди типті теңсіздікті дәлелдеудің балама жолы ұсынылған.

Түйін сөздер: Харди типті теңсіздік, оператордың шенелгендігі, Лебег салмақты кеңістіктері, Гильберт-Стилтьес типті операторы.

Abstract

A WEIGHTED ESTIMATE OF THE HILBERT STIELTJES TYPE OPERATOR FOR $1<q<p<\infty$

Beszhanova A.T. [1], *Temirkhanova A.M.* [1]
[1] *Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

In the theory of matrix operators, the sharp estimates of their norms in various spaces of sequences are of great importance. At present, finding the exact values of the norms of a discrete operator, even in the classical spaces of Lebesgue sequences, is an open problem and it is not always possible to find necessary and sufficient conditions for fulfillment various weighted estimates for some classes of matrix operators. Therefore, the establishment of weighted estimates for certain classes of matrix operators, two-sided estimates of norms are actual problems of the modern theory of discrete operators. In this paper we consider the problem of finding necessary and sufficient conditions for the fulfillment of a discrete Hilbert-Stieltjes type inequality when $1<q<p<\infty$. Moreover, an alternative proof of a discrete Hardy-type inequality with variable limits of summation is presented.

Keywords: Hardy-type inequality, boundedness, weighted Lebesgue spaces, Hilbert-Stieltjes type operator.

Введение

Пусть $1<p,q<\infty,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1,\ u=\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательность неотрицательных, $v=\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ - последовательность положительных действительных чисел. Пусть l_{pv} - пространство последовательностей $f=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел, для которых конечна норма $\|f\|_{p,v}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1\le p<\infty$.

В начале XX века было доказано известное неравенство двойного ряда Гильберта следующего вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k g_n}{k+n}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}g_n^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},\quad p>1, \tag{1}$$

где $f_k, g_n\ge 0, \sum_{n=1}^{\infty}f_n^p<\infty, \sum_{n=1}^{\infty}g_n^{p'}<\infty$ и $\dfrac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ наилучшая константа в (1) (см. [1]).

Неравенство (1) эквивалентно неравенству Харди-Гильберта следующего вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k+n}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad f_n\ge 0 \tag{2}$$

выполнение которого означает ограниченность оператора Гильберта:

$$(Hf)_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k+n}$$

из l_p в l_p (см. [2]). Отметим, что аналогичная связь сохраняется между интегральными аналогами неравенств (1) и (2) с наилучшей постоянной $\dfrac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ (см. [1], [2]).

Неравенство (1) и его обобщение сыграли фундаментальную роль в развитии многих разделов математики, и значительное внимание многих авторов было уделено неравенствам двойного ряда Гильберта, его интегральному аналогу, обратным неравенствам, и различным обобщениям. В работах [3], [4] были установлены ограниченность интегрального оператора Стилтьеса следующего вида

$$S_\gamma f(x)=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{(x+t)^{\gamma}}dt,\quad x>0,\quad \gamma>0,$$

в весовых пространствах Лебега и весовые оценки для его дискретного аналога.

$$(Sf)_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{(k+n)^{\gamma}},\ \gamma>0$$

при $1\le p\le q<\infty$ и $1<q<p<\infty$ соответственно. Более того, в работе [5] были получены эквивалентность четырех альтернативных условий выполнения весового интегрального неравенства для оператора Стилтьеса при $1\le p\le q<\infty$. Аналогичный результат для весового интегрального неравенства

Стилтьеса при $0<q<p, 1<p<\infty$ было получено в [6], где, в частности, дано новое доказательство результата Г. Синнамон [4], который также охватывает случай $0<q<1$.

В данной работе мы рассматриваем обобщенное неравенство Гильберта-Стилтьеса следующего вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\left(Tf\right)_n\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|v_n f_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f\in l_{p,v}, \tag{3}$$

где

$$\left(Tf\right)_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\left(b(k)+b(n)\right)^{\gamma}} \tag{4}$$

оператор типа Гильберта-Стилтьеса, $\gamma>0$ и $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$- строго возрастающая последовательность натуральных чисел, таких что $b(1)=1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b(n)=\infty$.

Целью работы является установить необходимое и достаточное условие выполнения весовой оценки (3) для оператора типа Гильберта – Стилтьеса при $1<q<p<\infty$. Отметим, что при $\gamma=1, \; b(n)=n$ и $q=p$ неравенство (3) совпадает с неравенством (2). При $b(n)=n$ оператор T совпадает с дискретным аналогом оператора Стилтьеса.

Оператор (4) для неотрицательной последовательности действительных чисел $f=\{f\}_{i=1}^{\infty}$ можно представить в виде суммы двух дискретных операторов типа Харди с верхним и нижним переменными пределами суммирования следующим образом

$$\left(Tf\right)_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\left(b(k)+b(n)\right)^{\gamma}}\approx\frac{1}{b^{\gamma}(n)}\sum_{k=1}^{b(n)}f_k+\sum_{k=b(n)}^{\infty}\frac{f_k}{b^{\gamma}(k)}=\left(T_1 f\right)_n+\left(T_2 f\right)_n. \tag{5}$$

Тогда выполнение неравенства (3) характеризуется разбиением на два весовых неравенства типа Харди для $f\ge 0$, и, таким образом, мы получаем два различных условия. В работах [7], [8] получены необходимые и достаточные условия выполнения весового неравенства (3) для дискретных операторов типа Харди T_1, T_2 при $\gamma=0$. Случай когда $1<p\le q<\infty$ было доказано в работе [9].

Из вышесказанного следует, что для получения основного результата статьи (см. Теорему 1), прежде всего, необходимо установить критерии выполнения дискретных весовых оценок неравенства типа Харди (см. теоремы 2 и 3) для операторов T_1, T_2 с переменными пределами суммирования следующих видов

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=1}^{b(n)}f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|v_k f_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f\in l_{pv}, \tag{6}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=b(n)}^{\infty}f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|v_k f_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f\in l_{pv}, \tag{7}$$

которые также имеют важные независимые значения. Отметим, что метод доказательства достаточности неравенств (6) и (7) отличается от доказательства работ [7] и [8].

Методы исследования

Здесь мы применяем метод локализации, т.е. метод разбиения на «пачки» последовательности значений матричного оператора в каждой точке, позволяющий удобно оценить суммы по пачкам, благодаря которому достигаются основные результаты. Также в ходе оценки использовались различные классические неравенства.

Приведем необходимые утверждения используемые в доказательстве основных результатов:

Лемма А. [10] Пусть $\gamma > 0$ и $1 \le n < N \le \infty$. Тогда для любой последовательности $h_k \ge 0$

$$\left(\sum_{k=n}^{N} h_k\right)^{\gamma} \approx \sum_{k=n}^{N}\left(\sum_{i=n}^{k} h_i\right)^{\gamma-1} h_k, \tag{8}$$

$$\left(\sum_{k=n}^{N} h_k\right)^{\gamma} \approx \sum_{k=n}^{N}\left(\sum_{i=k}^{N} h_i\right)^{\gamma-1} h_k. \tag{9}$$

Лемма В. [7] Пусть $1 < q < p < \infty$. Тогда

$$\widetilde{B}_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{k=1}^{b(n)} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} =: B_1$$

Замечание. В дальнейшем символ $M << K$ означает, что $M \le cK$, где константа $c > 0$ зависит только от несущественных параметров. Если $M << K << M$, то $M \approx K$. Также предположим, что $\sum_{i=k}^{m} = 0$, если $m < k$.

Основные результаты. Обозначим через $\sigma(s) := \{n \in N : b(n) \le s\}$. Отметим, что $\sigma(s) \ne \varnothing$, т.к. по крайней мере $1 \in \sigma(s)$. Пусть $s \in N$. Для $\forall s \in N$ положим $b^{-1}(s) := \max\{\sigma(s)\}$. Тогда $b^{-1}(b(s)) = s,\ b(b^{-1}(s)) \le s$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Тогда неравенство (3) выполняется тогда и только тогда, когда* $F = F_1 + F_2 < \infty$, *где*

$$F_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty} \frac{u_j^q}{b^{\gamma}(j)}\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty,$$

$$F_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{v_j^{-p'}}{b^{\gamma}(j)}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(k)} u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Кроме того, $F \approx C$, *где C – наименьшая константа в (3).*

Прежде чем доказать Теорему 1, установим критерии выполнения неравенств (6) и (7).

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Тогда неравенство (6) выполняется тогда и только тогда, когда*

$$B_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty, \tag{10}$$

Кроме того, $B_1 \approx C$, *где C – наименьшая константа в (6).*

Доказательство. Необходимость. Пусть неравенство (6) выполняется для $\forall f \in l_{pv}$. Покажем что $B_1 < \infty$. Пусть $m \ge 1$ и рассмотрим тестовую последовательность следующего вида:

$$\widetilde{f}_k = \left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m} u_j^q\right)^{\frac{1}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_k^{-p'} \text{ при } 1 \le k \le m \text{ и } \widetilde{f}_k = 0 \text{ при } k > m.$$

Тогда

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{pv}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}v_k^p\tilde{f}_k^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m}u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

Подставляя $\tilde{f}_k$ в левую часть неравенства (6), применяя (8) и поменяв порядок суммирования получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=1}^{b(n)}\tilde{f}_k\right)^q>>\sum_{n=1}^{m}u_n^q\sum_{k=1}^{b(n)}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=1}^{k}\tilde{f}_i\right)^{q-1}\approx\sum_{k=1}^{b(m)}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=1}^{k}\tilde{f}_i\right)^{q-1}\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m}u_n^q=$$

$$=\sum_{k=1}^{b(m)}\tilde{f}_k\left(\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m}u_n^q\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=b^{-1}(i)}^{m}u_j^q\right)^{\frac{1}{p-q}}\left(\sum_{s=1}^{i}v_s^{-p'}\right)^{\frac{q-1}{p-q}}v_i^{-p'}\right)^{q-1}>>$$

$$>>\sum_{k=1}^{b(m)}\tilde{f}_k\left(\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m}u_n^q\right)\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m}u_j^q\right)^{\frac{q-1}{p-q}}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}\right)^{q-1}=\sum_{k=1}^{b(m)}\tilde{f}_k\left(\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m}u_n^q\right)^{\frac{p-1}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}v_i^{-p'}\right)^{\frac{(p-1)(q-1)}{p-q}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{b(m)}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m}u_j^q\right)^{\frac{1}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q-1}{p-q}}v_k^{-p'}\left(\sum_{n=b^{-1}(k)}^{m}u_n^q\right)^{\frac{p-1}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}v_i^{-p'}\right)^{\frac{(p-1)(q-1)}{p-q}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{b(m)}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{m}u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v_k^{-p'}\quad,\ \forall m\in N. \tag{12}$$

Из (6), (11) и (12) следует что

$$B_1<<C<\infty. \tag{13}$$

Достаточность. Пусть $f\geq 0$. Для $i\geq 1$ определим следующее множество

$$\Omega_i=\left\{k\in Z:2^k\leq\left(Pf\right)_i=\sum_{k=1}^{b(i)}f_k\right\},\quad k_i=\max\Omega_i. \tag{14}$$

Тогда

$$2^{k_i}\leq\left(Pf\right)_i<2^{k_i+1},\ i\geq 1. \tag{15}$$

Пусть $m_1=1$ и $M_1=\left\{i\in N:k_i=k_1=k_{m_1}\right\}$. Предположим, что m_2 такой, что $\sup M_1+1=m_2$ Очевидно, $m_2>m_1$ и если множество M_1 ограничено сверху то $m_2<\infty$ и $m_2-1=\max M_1=\sup M_1$. Пусть определен $1=m_1<m_2<...<m_s<\infty,\ s\geq 1$.

Для определения m_{s+1} предположим, что $m_{s+1}=\sup M_s+1$, где $M_s=\left\{i\in N:k_i=k_{m_s}\right\}$. Пусть $N_0=\left\{s\in N:m_s<\infty\right\}$. Далее мы предполагаем $k_{m_s}=n_s,\ s\in N_0$. По определению m_s и из (15) следует, что при $s\in N_0$

$$2^{n_s}\leq\left(Pf\right)_i<2^{n_s+1},\ \ m_s\leq i\leq m_{s+1}-1 \tag{16}$$

и

$$N=\bigcup_{s\in N_0}\left[m_s,m_{s+1}\right),\quad N=\bigcup_{s\in N_0}\left[b(m_s),b(m_{s+1})\right),$$

где $\left[m_s,m_{s+1}\right)\cap\left[m_l,m_{l+1}\right)=\varnothing$, $\left[b(m_s),b(m_{s+1})\right)\cap\left[b(m_l),b(m_{l+1})\right)=\varnothing,\ s\neq l$.

Отсюда

$$\|Pf\|_{q,u}^q=\sum_{s\in N_0}\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}(Pf)_j^q u_j^q=\sum_{j=m_1}^{m_2-1}(Pf)_j^q u_j^q+\sum_{j=m_2}^{m_3-1}(Pf)_j^q u_j^q+\sum_{s\geq 3}\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}(Pf)_j^q u_j^q. \qquad (17)$$

По отдельности рассмотрим три случая. $s=1$. Используя (16), (9) и неравенство Гелдера получаем

1) $$\sum_{j=m_1}^{m_2-1}(Pf)_j^q u_j^q\leq\sum_{j=m_1}^{m_2-1}\left(2^{n_1+1}\right)^q u_j^q<<2^{qn_1}\sum_{j=m_1}^{m_2-1}u_j^q\leq(Pf)_{m_1}^q\sum_{j=m_1}^{m_2-1}u_j^q\leq\left(\sum_{k=1}^{b(m_1)}f_k\right)^q\sum_{j=m_1}^{\infty}u_j^q\approx$$

$$\approx\left(\sum_{k=1}^{b(m_1)}f_k\right)^q\left(\sum_{j=m_1}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{b(m_1)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\sum_{k=1}^{b(m_1)}f_k^p v_k^p\right)^{\frac{q}{p}}\left(\sum_{j=m_1}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}=$$

$$<<\left(\sum_{j=m_1}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}\left(\sum_{k=1}^{b(m_1)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\|f\|_{p,v}^q\leq\left(\sum_{j=m_1}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{k=1}^{b(j)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}\|f\|_{pv}^q=$$

$$\leq\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{k=1}^{b(j)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}u_j^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}\right)^q\|f\|_{pv}^q=\widetilde{B}_1^q\|f\|_{p,v}^q.$$

Тогда в силу Лемма В получаем

$$\sum_{j=m_1}^{m_2-1}(Pf)_j^q u_j^q<<B_1^q\|f\|_{pv}^q. \qquad (18)$$

2) Для второго случая при $s=2$ используя (16), (9), неравенство Гелдера и Лемму В получаем

$$\sum_{j=m_2}^{m_3-1}(Pf)_j^q u_j^q\leq 2^{(n_2+1)q}\sum_{j=m_2}^{m_3-1}u_j^q<<2^{n_2q}\sum_{j=m_2}^{m_3-1}u_j^q\leq(Pf)_{m_2}^q\sum_{j=m_2}^{m_3-1}u_j^q\leq\left(\sum_{k=1}^{b(m_2)}f_k\right)^q\left(\sum_{j=m_2}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{b(m_2)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\sum_{k=1}^{b(m_2)}f_k^p v_k^p\right)^{\frac{q}{p}}\left(\sum_{j=m_2}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{k=1}^{b(j)}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}}\right)^q\|f\|_{pv}^q\approx B_1^q\|f\|_{pv}^q.$$

3) Для $s\geq 3$ и $s\in N_0$, используя $n_{s-2}+1\leq n_{s-1}$ вытекающее из неравенств $n_{s-2}<n_{s-1}<n$, оценим 2^{n_s-1}:

$$2^{n_s-1}=2^{n_s}-2^{n_s-1}\leq 2^{n_s}-2^{n_{s-2}+1}\leq\sum_{k=1}^{b(m_s)}f_k-\sum_{k=1}^{b(m_{s-1}-1)}f_k\leq\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)}f_k. \qquad (19)$$

Используя (16), (19) и дважды неравенство Гелдера с показателем p, p' и $\frac{p}{q}, \frac{p}{p-q}$ соответственно, неравенство Йенсена и (9) оценим сумму для $s \geq 3$ следующим образом

$$\sum_{s\geq 3}\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}(Pf)_j^q u_j^q \leq \sum_{s\geq 3}\left(2^{n_s+1}\right)^q \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q << \sum_{s\geq 3}\left(2^{n_s-1}\right)^q \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \leq \sum_{s\geq 3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} f_k\right)^q \sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q \leq$$

$$\leq \sum_{s\geq 3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} f_k^p v_k^p\right)^{\frac{q}{p}} \sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q \leq \left(\sum_{s\geq 3}\left(\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}\left(\sum_{s\geq 3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} f_k^p v_k^p\right)^{\frac{q}{p}\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} <<$$

$$\left(\sum_{s\geq 3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{pv}^q \approx \left(\sum_{s\geq 3}\left(\sum_{k=b(m_{s-1})}^{b(m_s)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \sum_{j=m_s}^{\infty} u_j^q\left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{pv}^q \leq$$

$$\leq \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{k=1}^{b(j)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}\right)^q \|f\|_{pv}^q \approx \widetilde{B}_1^q \|f\|_{pv}^q .$$

Отсюда в силу Леммы В получим

$$\sum_{s\geq 3}\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1}(Pf)_j^q u_j^q << B_1^q \|f\|_{pv}^q . \tag{20}$$

Таким образом, из (17), (18) и (20) следует

$$\|Pf\|_{q,u} << B_1 \|f\|_{p,v}, \quad f \geq 0,$$

т.е. справедливо неравенство (6) для $f \in l_{p,v}$ и для наименьшей константы в (6) имеет место оценка $C << B_1$, которая вместе с (13) дает $C \approx B_1$. Теорема 2 доказана.

Для доказательства Теоремы 3 используем следующую Лемму:

Лемма 1. Пусть $1 < q < p < \infty$. Тогда имеет место следующая эквивалентность:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q\left(\sum_{j=1}^{k} u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=b(k)}^{\infty} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \approx \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(k)} u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} .$$

Доказательство.

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j^q\left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{n=b(j)}^{\infty} v_n^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \approx \sum_{j=1}^{\infty} u_j^q\left(\sum_{i=1}^{j} u_{i=1}^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \sum_{n=b(j)}^{\infty} v_n^{-p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{\infty} u_{b^{-1}(\tau)}^q\left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(\tau)} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \sum_{n=\tau}^{\infty} v_n^{-p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \sum_{\tau=1}^{n} u_{b^{-1}(\tau)}^q\left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(\tau)} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \sum_{j=1}^{b^{-1}(n)} u_j^q\left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{b^{-1}(n)} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}} .$$

Теорема 3. *Пусть* $1<q<p<\infty$. *Тогда неравенство (7) выполняется тогда и только тогда, когда*

$$B_2=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{b^{-1}(k)}u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}v_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}<+\infty .$$

Кроме того, $B_2\approx C$, *где* C – *наименьшая константа в (7).*

Доказательство. Необходимость. Пусть неравенство (7) выполняется для $\forall f\in l_{pv}$. Покажем что $B_2<\infty$. Пусть $m\geq 1$ и рассмотрим тестовую последовательность следующего вида:

$$\tilde{f}_k=\left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)}u_n^q\right)^{\frac{1}{p-q}}\left(\sum_{i=k}^{m}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q-1}{p-q}}v_k^{-p'} \text{ при } 1\leq k\leq m \text{ и } \tilde{f}_k=0 \text{ при } k>m.$$

Тогда

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{pv}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}v_k^p\tilde{f}_k^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{b^{-1}(k)}u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{m}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{21}$$

Подставляя $\tilde{f}_k$ в левую часть неравенства (7), применяя (9) и поменяв порядок суммирования получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^q\left(\sum_{k=b(n)}^{\infty}\tilde{f}_k\right)^q\approx\sum_{s=1}^{\infty}u_{b^{-1}(s)}^q\sum_{k=s}^{\infty}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=k}^{\infty}\tilde{f}_i\right)^{q-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=k}^{\infty}\tilde{f}_i\right)^{q-1}\sum_{s=1}^{k}u_{b^{-1}(s)}^q\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{m}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=k}^{m}\tilde{f}_i\right)^{q-1}\sum_{s=1}^{k}u_{b^{-1}(s)}^q=\sum_{k=1}^{m}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=k}^{m}\tilde{f}_i\right)^{q-1}\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)}u_n^q=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=k}^{m}\left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(i)}u_n^q\right)^{\frac{1}{p-q}}\left(\sum_{j=i}^{m}v_j^{-p'}\right)^{\frac{q-1}{p-q}}v_i^{-p'}\right)^{q-1}\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)}u_n^q\geq\sum_{k=1}^{m}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=k}^{m}\left(\sum_{j=i}^{m}v_j^{-p'}\right)^{\frac{q-1}{p-q}}v_i^{-p'}\right)^{q-1}\left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)}u_n^q\right)^{\frac{p-1}{p-q}}\approx$$

$$\approx\sum_{k=1}^{m}\tilde{f}_k\left(\sum_{i=k}^{m}v_i^{-p'}\right)^{\frac{(p-1)(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)}u_n^q\right)^{\frac{p-1}{p-q}}=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=1}^{b^{-1}(k)}u_n^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=k}^{m}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}v_k^{-p'},\quad\forall m\in N. \tag{22}$$

Из (7), (21) и (22) следует что

$$B_2<<C<\infty . \tag{23}$$

Достаточность. Пусть $f\geq 0$. Для $i\geq 1$ положим

$$\Omega_i=\left\{k\in Z:\sum_{n=b(i)}^{\infty}f_n=(Qf)_i\leq 2^{-k}\right\},\; k_i=\max\Omega_i . \tag{24}$$

$$\text{Тогда } 2^{-(k_i+1)}<(Qf)_i\leq 2^{-k_i},\; i\geq 1. \tag{25}$$

Пусть $m_1=1$ и $M_1=\{i\in N:k_i=k_1=k_{m_1}\}$. Предположим, что m_2 такой, что $\sup M_1+1=m_2$. Очевидно, $m_2>m_1$ и если множество M_1 ограничено сверху то $m_2<\infty$ и $m_2-1=\max M_1=\sup M_1$. Индуктивно определим $1=m_1<m_2<...<m_s<\infty, s\geq 1$. Для определения m_{s+1} предположим, что

$m_{s+1} = \sup M_s + 1$, где $M_s = \{i \in N : k_i = m_s\}$ Пусть $N_0 = \{s \in N : m_s < \infty\}$. Предположим, что $k_{m_s} = n_s,\ s \in N_0$. По определению m_s и из (25) следует, что при $s \in N_0$

$$2^{-(n_s+1)} < (Qf)_i \le 2^{-n_s},\ \ m_s \le i \le m_{s+1} - 1 \tag{26}$$

и

$$N = \bigcup_{s \in N_0} [m_s, m_{s+1}), \quad N = \bigcup_{s \in N_0} [b(m_s), b(m_{s+1})),$$

где $[m_s, m_{s+1}) \cap [m_l, m_{l+1}) = \varnothing$, $[b(m_s), b(m_{s+1})) \cap [b(m_l), b(m_{l+1})) = \varnothing,\ s \ne l$.
Отсюда

$$\|Qf\|_{q,u}^q = \sum_{s \in N_0} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} (Qf)_j^q u_j^q \le \sum_{s \in N_0} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} 2^{-n_s q} u_j^q = 2^{2q} \sum_{s \in N_0} 2^{-(n_s+2)q} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q. \tag{27}$$

Оценим величину $2^{-(n_s+2)}$ используя $n_s + 2 \le n_{s+2}$ который следует из $n_s < n_{s+1} < n_{s+2}$

$$2^{-(n_s+2)} = 2^{-(n_s+1)} - 2^{-(n_s+2)} \le 2^{-(n_s+1)} - 2^{-n_{s+2}} \le (Qf)_{m_{s+1}-1} - (Qf)_{m_{s+2}} =$$

$$= \sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{\infty} f_n - \sum_{n=b(m_{s+2})}^{\infty} f_n \le \sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_n \tag{28}$$

Используя (28) и неравенство Гелдера из (27) получаем

$$\|Qf\|_{q,u}^q << \sum_{s \in N_0} 2^{-(n_s+2)} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \le \sum_{s \in N_0} \left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_n \right)^q \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \le \sum_{s \in N_0} \left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_n^p v_n^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \right).$$

Применим неравенство Гелдера с показателями $\frac{p}{q}, \frac{p}{p-q}$

$$\|Qf\|_{q,u}^q \le \left(\sum_{s \in N_0} \left(\left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \right) \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\sum_{s \in N_0} \sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} f_n^p v_n^p \right)^{\frac{q}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_{s \in N_0} \left(\sum_{n=b(m_{s+1}-1)}^{b(m_{s+2})} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} u_j^q \left(\sum_{i=m_s}^{j} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_p^q \le$$

$$\le \left(\sum_{s \in N_0} \sum_{j=m_s}^{m_{s+1}-1} \left(\sum_{n=b(j)}^{\infty} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} u_j^q \right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{pv}^q \le$$

$$= \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^q \left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{n=b(j)}^{\infty} v_n^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{qp}} \right)^q \|f\|_{pv}^q. \tag{29}$$

В силу Леммы 1

$$C << B_2 < +\infty. \tag{30}$$

Из (23) и (30) следует что $C \approx B_2$ Используя Теоремы 2 и 3 получаем наш основной результат.

Доказательство Теоремы 1. Из условия (5) следует, что выполнение неравенства (3) равносильно выполнению весовых неравенств типа Харди следующего вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{u_n}{b^{\gamma}(n)}\sum_{k=1}^{b(n)} f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|v_k f_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{pv} \tag{31}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n \sum_{k=b(n)}^{\infty}\frac{f_k}{b^{\gamma}(k)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|v_k f_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{pv} \tag{32}$$

и $C \approx C_1 + C_2$, где C_1, C_2 - наилучшие константы неравенств (31) и (32).
Тогда по теореме 2 и теореме 3 неравенства (31) и (32) выполняются соответственно тогда и только тогда, когда

$$C_1 \approx F_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b^{-1}(k)}^{\infty}\frac{u_j^q}{b^{\gamma}(j)}\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

$$C_2 \approx F_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=b(k)}^{\infty}\left(\frac{v_j}{b^{\gamma}(j)}\right)^{p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

Статья написана при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, Грант № AP09259084 по направлению «Научные исследования в области естественных наук».

Список использованных источников:

1 G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya Inequalities, Chap. 9, Cambridge Univ. Press, London, 1952.

2 Q. Chen, B. Yang. A survey on the study of Hilbert-type inequalities., Journal of Inequalities and Applications 2015 (2015) no. 302.

3 K.F. Andersen Weighted inequalities for the Stieltjes- transformation and Hubert's double series, Proc. Roy.Soc Edinburgh, 1980, A86, No. 1-2, 75-84.

4 G. Sinnamon A note on the Stieltjes transformation, Proc. Roy. Soc Edinburgh, 1988. 110A, 73-78

5 A. Gogatishvili, A. Kufner, L.-E.Persson The weighted Stieltjes inequality and applications, Math.Nachr. 286, No. 7, 659 - 668 (2013)

6 A. Gogatishvili, L-E.Persson, V.D. Stepanov, P. Wall Some scales of equivalent conditions to characterize the Stieltjes inequality: the case q < p, Math. Nachr. 287, No. 2-3, 242-253 (2014)

7 A. Alkhliel. Discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation. I, Bull. PFUR. 2010, no. 4, 56-69 (in Russian).

8 A. Alkhliel. Discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation. II, Bull. PFUR. 2011, no. 1, 5-13 (in Russian).

9 A. Temirkhanova, A.Beszhanova. On a discrete Hilbert-Stieltjes inequality, Kazakh Math.Journal. 2021. Vol. 21, no. 1, 15-24.

10 R. Oinarov, C. A. Okpoti and L-E.Persson, Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case q < p, Math. Inequal. Appl., 10, 4 (2007), 843–861.