

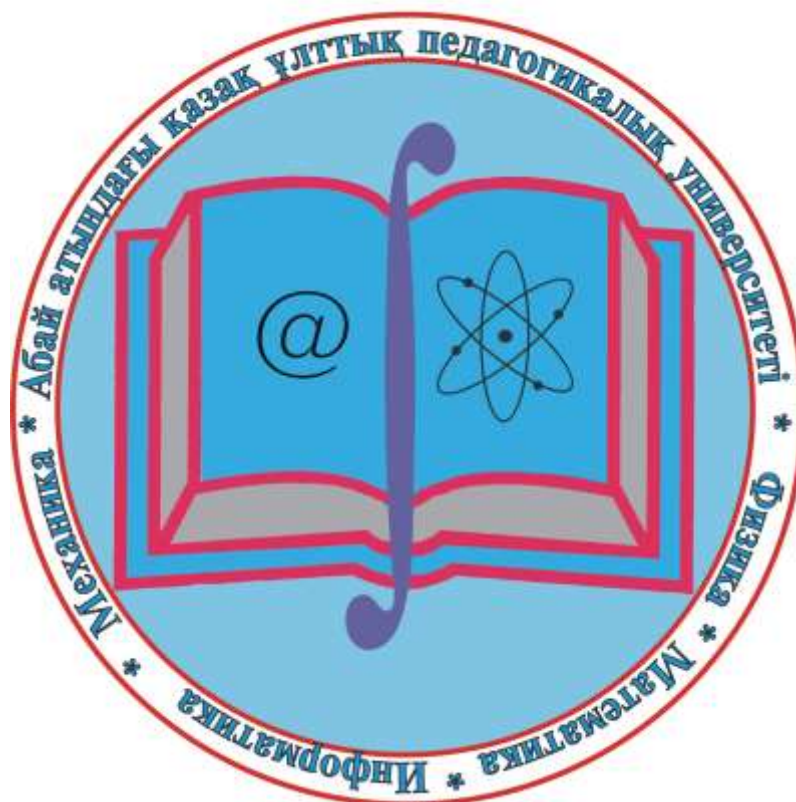


Абай атындағы
Қазак ұлттық педагогикалық университеті

Казахский национальный педагогический
университет имени Абая

Серия «Физико-математические науки» • «Физика-математика ғылымдары» сериясы

ХАБАРШЫ ВЕСТНИК



Алматы

№ 4 (56)

2016

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті	Мазмұны Содержание
ХАБАРШЫ	
“Физика-математика ғылымдары” сериясы № 4 (56)	
Бас редактор ҚРҰҒА академиясы Ғ.У. Уәлиев	
Редакция алқасы:	
Бас ред. орынбасарлары:	
<i>п.ғ.д.</i> Е.Ы. Бидайбеков,	
<i>ф.-м.ғ.к.</i> М.Ж. Бекпатшаев	
жауапты хатшы	
<i>п.ғ.к.</i> Г.А. Абдулкаримова	
мүшелері:	
Dr.-ing. Holm Altenbach (Germany),	
Dr. S.A.Hasan (Pakistan),	
Dr. Yasuhide Fukumoto (Japan),	
PhD.d Shuo-Hung Chang, (Taiwan),	
<i>п.ғ.д., РБА академиясы</i> А.Е. Абылкасымова,	
<i>ф.-м.ғ.д.</i> М.Ә. Бектемесов,	
<i>ф.-м.ғ.д.</i> А.С. Бердышев,	
<i>п.ғ.д.</i> В.В. Гриншкун, (Ресей),	
<i>ф.-м.ғ.к.</i> Ф.Р. Гусманова,	
<i>т.ғ.д.</i> А.Д. Джураев (Узбекистан),	
<i>ф.-м.ғ.д., РҒА корр. мүшесі</i>	
С.И. Кабанихин (Ресей),	
<i>ф.-м.ғ.д.</i> Б.Ә. Қожамқұлов,	
<i>ф.-м.ғ.д. ҚР ҰҚА корр. мүшесі</i> В.Н. Косов,	
<i>ф.-м.ғ.д.</i> Қ.К. Коксалов,	
<i>т.ғ.д.</i> М.К. Құлбек,	
<i>п.ғ.д., РБА академиясы</i> М.П. Лапчик, (Ресей),	
<i>ф.-м.ғ.д.</i> Қ.М. Мұқашев,	
<i>ф.-м.ғ.д.</i> С.Т. Мұхамбетжанов,	
<i>т.ғ.д.</i> Г.Я. Пановко (Ресей),	
<i>п.ғ.д.</i> Б.Д. Сыдықов,	
<i>ф.-м.ғ.д., ҚРҰҒА академиясы</i> Н.Ж. Такибаев,	
<i>ф.-м.ғ.д.</i> К.Б. Тлебаев,	
<i>т.ғ.д.</i> А.К. Тулешов,	
<i>ф.-м.ғ.д.</i> З.Г. Уалиев,	
<i>ф.-м.ғ.д., ҚР ҰҚА корр. мүшесі</i> Л.М. Чечин,	
<i>ф.-м.ғ.к.</i> Е.Б. Шалбаев,	
<i>т.ғ.к.</i> Ш.И. Хамраев	
<p>© Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, 2016</p> <p>Қазақстан Республикасының Ақпарат министрлігінде тіркелген № 4824 – Ж - 15.03.2004 (Журнал бір жылда 4 рет шығады) 2000 жылдан бастап шығады</p> <p>Редакторлары: Ф.Р. Гусманова, Г.А. Абдулкаримова</p> <p>Компьютерлік беттеу: Г.А. Абдулкаримова Ф.Р. Гусманова</p> <p>Басуға 23.12.2016 ж. қол қойылды Таралымы 300 дана Көлемі 15.10 е.б.т. Пішімі 60x84 1/8.</p> <p>050010, Алматы қаласы, Достық даңғылы, 13 Абай атындағы ҚазҰПУ “ЖШС Palitra Press” типографиясында баспадан өткен Алматы қаласы, Хамиди көшесі, 4а</p>	
	К юбилею Г.У. Уалиева 4
	МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚИТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
	Е.Ж. Айдос Функция шегін үзіліссіздік ұғымы арқылы анықтау әдісі 6
	С.Е. Айтжанов, М. Кайыржан, Б.А. Мырзахмедова, К.К. Шамшиденов Сынзқты емес айнымалы көрсеткішті параболалық теңдеудің оң жағын қалпына келтіру есебі 11
	Н.Атахан, Н. Асет Сингулярлы ауытқыған интегралды дифференциалдық теңдеулердің шеттік есептер шешімінің асимптотикалық бағалауы 18
	Н.К. Аширбаев, А.Б. Иманбетова, Р.Б. Бекмолдаева, J. Vanaś О решениях нелинейного интегрального уравнения Эрдели-Кобера 22
	Ж.Д. Байшемиров, А.Б. Жанбырбаев, Т. Фархадов Численное исследование изменения смачиваемости поверхностно-активными веществами 27
	М.Ж. Бекпатшаев О некорректной задаче со случайными ошибками в данных 34
	А.С. Бердышев, Б.Д. Кадиркулов, А. Асхатулы Обратная задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка с дробной производной 38
	Е.Ы. Бидайбеков, Н.Т. Ошанова, Р.Қ. Төребекова Әл Фәрәби бойынша музыка теориясының арифметикалық негіздерін оқып-зерттеудің қажеттілігі 44
	A. Birgebayev The role of proof of differential operators' separability in understanding the environment 50
	Б.С. Дариев, Д.В. Лебедев, В.А. Перепелкин Реализация численной модели двумерного эллиптического уравнения в системе фрагментированного программирования LUNA 56
	Л.Қ. Жапсарбаева Екінші ретті эллипстік жүйенің шешімдерінің L_p кеңістігінде коэрцитивті бағалаулары 63
	З.С. Карсыбаева Представление промежуточной производной через производную более высокого порядка и функцию 67
	Г.Н. Нугманова, Ж.Х. Жунусова Представление Лакса для интегрируемого уравнения ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованным потенциалом 74
	Д.Н. Нургабыл Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной задачи с неограниченными граничными условиями 78

<p align="center">Казахский национальный педагогический университет имени Абая ВЕСТНИК серия “Физико-математические науки” № 4 (56)</p> <p align="center">Главный редактор <i>Академик НАН РК Г.У. Уалиев</i></p> <p align="center">Редакционная коллегия: зам.главного редактора: <i>д.п.н. Е.Ы. Бидайбеков,</i> <i>к.ф.-м.н. М.Ж. Бекпатшаев</i> ответ.секретарь <i>к.п.н. Г.А. Абдулкаримова</i></p> <p align="center">члены: <i>Dr.-ing. Holm Altenbach (Germany),</i> <i>Dr. S.A.Hasan (Pakistan),</i> <i>Dr. Yasuhide Fukumoto (Japan),</i> <i>Phd.d Shuo-Hung Chang, (Taiwan),</i> <i>д.п.н., академик РАО А.Е. Абылкасымова,</i> <i>д.ф.-м.н. М.А. Бектемесов,</i> <i>д.ф.-м.н. А.С.Бердышев,</i> <i>д.п.н. В.В. Гриншкун (Россия),</i> <i>к.ф.-м.н. Ф.Р. Гусманова,</i> <i>д.т.н. А.Д.Джураев(Узбекистан),</i> <i>д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН С.И. Кабанихин (Россия),</i> <i>д.ф.-м.н. Б.А. Кожамкулов,</i> <i>д.ф.-м.н., чл.-кор. НАН РК В.Н. Косов,</i> <i>д. ф.-м.н. К.К. Коксалов,</i> <i>д.т.н. М.К. Кулбек,ов,</i> <i>д.п.н., академик РАО М.П. Лапчик (Россия),</i> <i>д.ф.-м.н. Қ.М. Мукашев,</i> <i>д.ф.-м.н. С.Т. Мухамбетжанов,</i> <i>д.т.н. Г.Я. Пановко (Россия),</i> <i>д.п.н. Б.Д. Сыдыков,</i> <i>д.ф.-м.н., академик НАН РК Н.Ж. Такибаев,</i> <i>д.ф.-м.н. К.Б. Тлебаев,</i> <i>д.т.н. А.К. Тулешов,</i> <i>д.ф.-м.н. З.Г. Уалиев,</i> <i>д.ф.-м.н., чл.-кор. НАН РК Л.М. Чечин,</i> <i>к.ф.-м.н. Е.Б. Шалбаев,</i> <i>к.т.н.Ш.И. Хамраев</i></p>	<p>Ж.М. Нурмухамедова, Л.Д. Жумалиева, Д.М. Нурбаева, Л.Ж. Жансентова Мектептерде және педагогикалық жоғары оқу орындарында математиканы оқытудың кейбір мәселелері 85</p> <p>Б.С. Ханжарова, А.Б. Кокажаева Знакомство школьников с топологическими свойствами фигур как фактор формирования устойчивого интереса к геометрии 91</p> <p>Х. Хомпыш Идентификация правой части нелинейного уравнения Кельвина-Фойгта 96</p> <p>К. Шияпов О совместном движении двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде 103</p> <p>Н.Р. Юничева, М.Б. Аханова Построение множества решений системы интервальных алгебраических уравнений в задаче синтеза систем управления объектами с неточными данными 109</p> <p align="center">ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ</p> <p>М.С. Алмембетова, Г.М. Мамерова, М.Б. Елгондина Построение поверхностей нулевых скоростей обобщенной задачи двух неподвижных центров с применением системы Mathematica 117</p> <p>К. Бисембаев, А. Кожабай Свободные колебания виброзащищаемых тел на трех опорах качения со спрямленными поверхностями 122</p> <p>Е.К. Жаменкеев Суға толық батырылған сутурбинасы қалағына әсер етуші гидравликалық теңәсерлі күш моментін анықтау 128</p> <p>Қ.Н. Жұмаділлаев, Ж.О. Джакупова, А.К. Джумадиллаева Графиктермен жұмыс барысында оқушылардың ғылыми танымдық көзқарасын қалыптастыру 133</p> <p>Т.Т. Кайым, В.Ф. Грибанов, А.Т. Каимов, С.Т. Каимов Математическая модель стохастических процессов высокоэффективного надежного разрушения грунта (россыпи, торф) инновационным отвалом ульдозера со съёмным режущим ножом 139</p> <p>Л.Г. Касенова Виртуальный лабораторный практикум по физике как одна из форм формирования информационной компетентности студентов 145</p> <p>В.Н. Косов, С.А. Красиков, Д.У. Кульжанов Экспериментальное исследование смешения бинарной газовой смеси во встречный поток третьего компонента различной интенсивности в режиме развитой конвекции 152</p> <p>М.К. Кулбек, Ш.И. Хамраев Моделирование и вычислительные эксперименты по изучению кинетики диффузионных физико-химических процессов в полифазных керамических образцах ... 156</p> <p>М. Құлбекұлы Екінші текті фазалық түрленулер теориясының өзекті мәселелері 160</p>
<p align="center">©Казахский национальный педагогический университет им. Абая, 2016</p>	
<p align="center">Зарегистрирован в Министерстве информации Республики Казахстан, № 4824 - Ж - 15.03.2004 (периодичность—4 номера в год) Выходит с 2000 года</p>	
<p align="center">Редакторы:Ф.Р. Гусманова, Г.А. Абдулкаримова</p>	
<p align="center">Компьютерная верстка: Г.А. Абдулкаримова Ф.Р. Гусманова</p>	
<p align="center">Подписано в печать 23.12.2016 г. Формат 60x84 1/8. Об 15.10 уч.-изд.л. Тираж 300 экз.</p>	
<p align="center">050010, г.Алматы, пр.Достык, 13, КазНПУ им.Абая <i>Отпечатано в типографии</i> <i>“TOO Palitra Press”</i> <i>г.Алматы, ул.Хамиди 4а</i></p>	

	<p>С.К. Тлеуенов, М.К. Жукенов Метод матрицанта. единое описание волновых процессов в средах с взаимной трансформацией упругих и электромагнитных полей 164</p> <p>З.Г. Уалиев, Г. Уалиев, Н.Р. Хужаев, Г.К. Избасарова Математическое моделирование механических систем 169</p> <p style="text-align: center;">ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚИТУ ӘДІСТЕМЕСІ. БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ. ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ</p> <p>А.Т. Бектемесов, А.Ж. Бурлибаев Моделді тексеру әдісінің қолдану аумақтары және қарапайым үлестірілген алгоритмдердің верификация үшін күрделілігі 173</p> <p>М.А. Бектемесов, М.А. Скиба, А.Р. Турганбаева Значимость e-портфолио в контексте результатов социологического исследования 178</p> <p>N.A. Vaimukhanov, A.U. Pyrkova Corporate networks protection by using difficult replacement ciphers 183</p> <p>Ж.С. Қажиақпарова, Д.К. Ташенова Вейвлет-түрлендірулері – бейнені сығудың әдісі 187</p> <p>Н.Н. Керімбаев, Б.Ә. Мәдиева QRS-кешенін нөлді қиып өту санына негізделген алгоритм арқылы анықтау 192</p> <p>С.А. Кудубаева, Г.К. Калакова, С.Б. Берік Пороговая обработка изображений рук человека для распознавания жестов 196</p> <p>Е.Ө. Медеуов, Б.Ф. Бостанов, И.Т. Сәлғожа Әл Фарабидің есептерін шештіру арқылы оқушылардың АКТ – құзырлылықтарын қалыптастыру 202</p> <p>Ж.К. Нурбекова, Н.К. Токжигитова Студенттердің визуалды программалау бойынша қабілеттерін мульти-критериалды бақылау кезеңдері 206</p> <p>С.З. Сапақова, Н.Ш. Қабылханова, Ү. Анарбек Алматы қаласы бойынша урбанизация процесін моделдейтін ақпараттық жүйе құру 212</p> <p>А.Ж. Сқақова Қашықтықтан оқытудағы халықаралық серіктестік 219</p> <p>А.Р. Турганбаева, Ф.Р. Гусманова, М.А. Скиба E-портфолионы қамтитын ақпараттық ресурстарға қойылатын талаптар 224</p> <p>И.М. Уалиева, Д.А. Аязбаев Жүректің өткізгіш жүйесін board жинағымен бақылау 229</p> <p>К.З. Халықова Педагогикалық жоғары оқу орындарында программалау тілдерін қатарынан оқытуды жүзеге асыру 233</p>
--	---

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ӨОЖ 217.5

Е.Ж. Айдос

ФУНКЦИЯ ШЕГІН ҮЗІЛІССІЗДІК ҰҒЫМЫ АРҚЫЛЫ АНЫҚТАУ ӘДІСІ

(Алматы қ., Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті)

Аңдатпа. Мақалада функция шегі бұрынғыдан өзгеше әдіспен анықталады. Функцияның анықталу жиыны мен мәндер жиыны нақты сандар мен таңбасы көрсетілген меншіксіз элементтер жиындарының бірігуінен құралады. Алдымен функцияның геометриялық бейнесі арқылы үзіліссіздік ұғымы енгізіледі. Функция шегін анықтауға қажетті мысалдар талданады. Содан кейін функция шегі үзіліссіздік ұғымының көмегімен анықталады.

Түйін сөздер: Шек, үзіліссіздік, геометриялық бейне, ақырсыздық.

1. Кіріспе

Математикалық анализ курсының оқытудың қалыптасқан құрылымы мынадай схемадан тұрады: шек \rightarrow үзіліссіздік \rightarrow туынды $\rightarrow \dots$, яғни, алдымен функция шегі ұғымы енгізіледі, одан соң шек арқылы функцияның үзіліссіздігі, туындысы және т.с.с. ұғымдар анықталады. Әдетте, функция шегінің анықтамасы тізбек тілінде (Гейне бойынша анықтама) немесе $\varepsilon - \delta$ тілінде (Коши бойынша анықтама) тұжырымдалады. және бұл анықтамалардың абстракттілік жақтары басым болғандықтан оқушы оларды бірден түсініп кете алмайтынын көріп жүрміз. Біздің ойымызша, егер математикалық анализ курсының ұғымдарын анықтау ретін келесі схема бойынша құратын болсақ: үзіліссіздік \rightarrow шек \rightarrow туынды $\rightarrow \dots$, онда оның көптеген ұтымды нәтижелерін алуға болар еді. Атап айтқанда, оқушы функция шегінің анықтамасын абстрактті түрде қабылдаса, ол функцияның үзіліссіздігі ұғымын, оның геометриялық көрнекті бейнесі бойынша жеңіл түсінер еді; ал функция үзіліссіздігінің анықтамасынан шек ұғымына өту қиындық тудырмайды және, бұл жағдайда, функция шегінің мән-мағынасы да айқындала түседі; уақыт факторы бойынша да, біз көрсеткен оқыту әдісі, функция шегін оқытудың бұрынғы әдісіне қарағанда, бірнеше есе ұтымды. Біз, шектер теориясына тереңдеп бармастан, мақаламызда функция шегін анықтау әдісінің жоғарыда аталған құрылымын көрсету мақсатын ғана көздейміз.

2. Символдар, белгілеулер және қажетті ұғымдар

«Нүкте» деп, ақырлы (нақты) x_0 санын немесе $-\infty, +\infty, \infty$ элементтерінің бірін айтамыз. Функцияның анықталу және мәндер жиындары нақты сандар мен таңбасы бар $-\infty, +\infty$ элементтердің жиындарының бірігуінен құралған: $\bar{R} = \{x : x \in R\} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Сонымен бірге, келесі белгілерді де қолданамыз [1], 15 б. ($\varepsilon > 0$):

1) $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ аралығы a нақты санының ε маңайы деп аталады да $O_\varepsilon(a), U_\varepsilon(a)$, т.с.с. символдармен белгіленеді: $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$;

2) Егер $a = +\infty$ болса, онда $O_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty) = \{x \in R : x > \varepsilon\} \cup \{+\infty\}$;

3) Егер $a = -\infty$ болса, онда $O_\varepsilon(-\infty) = [-\infty, -\varepsilon) = \{x \in R : x < -\varepsilon\} \cup \{-\infty\}$.

Сонымен бірге математикада ақырсыздық (меншіксіз сан) деп аталатын ∞ символы да пайдаланылады. Таңбасы көрсетілмеген ақырсыздыққа қатысты реттік қатыс орындалмайды. Оның ε маңайы келесі түрде жазылады:

4) $O_\varepsilon(\infty) = [-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty] = \{x \in R : |x| > \varepsilon\} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

5) a нүктенің **оң жақ маңайы** және оның белгіленуі:

$$O_\varepsilon(a+0) = [a, a+\varepsilon) = \{x \in R : a \leq x < a+\varepsilon\} = \{x \in R : 0 \leq x-a < \varepsilon\};$$

6) a нүктенің **сол жақ маңайы** және оның белгіленуі:

$$O_\varepsilon(a-0) = (a-\varepsilon, a] = \{x \in R : a-\varepsilon < x \leq a\} = \{x \in R : -\varepsilon < x-a \leq 0\};$$

Егер a нүктенің маңайынан осы нүктенің өзі алынып тасталса, онда ол a нүктенің **тесік маңайы** деп аталады да $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$, $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$, т.с.с. белгіленеді. Жоғарыда көрсетілген алты маңайға сәйкес алты тесік маңай бар:

1') $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a) = \{x \in R : 0 < |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$;

2') $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty) = \{x \in R : x > \varepsilon\}$;

3') $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\varepsilon) = \{x \in R : x < -\varepsilon\}$;

4') $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty) = \{x \in R : |x| > \varepsilon\}$.

5') a нақты нүктенің **оң жақ тесік маңайы**:

$$\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a+0) = (a, a+\varepsilon) = \{x \in R : a < x < a+\varepsilon\} = \{x \in R : 0 < x-a < \varepsilon\};$$

6') a нақты нүктенің **сол жақ тесік маңайы**:

$$\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a-0) = (a-\varepsilon, a) = \{x \in R : a-\varepsilon < x < a\} = \{x \in R : -\varepsilon < x-a < 0\}.$$

Берілген Δ аралығының нүктелерінде нақты санға немесе $+\infty$, $-\infty$ ақырсыз элементтерінің біріне тең болатын функция туралы «функция Δ аралығында кең мағынада анықталған» дейміз. Мысалы, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x \neq 3, \\ -\infty, & x = 3 \end{cases}$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығында кең

мағынада анықталған.

3. Функцияның үзіліссіздігі мен шек ұғымдары

Функцияның x_0 нүктедегі шегін табу үшін, оның үзіліссіз немесе үзіліс нүкте болуына назар аударылады. Егер ол нүктеде функция үзіліссіз болса, онда үзіліссіздік анықтамасы арқылы шек оңай табылады: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Ал, егер x_0 нүктесінде функция анықталмаған болса, онда түрлі әдістерді қолдана отырып, бастапқы функцияны x_0 нүктесінде үзіліссіз және шегі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ болатын φ функциясына ауыстырады. Содан соң φ функциясының үзіліссіздігін пайдаланып оның астына шекке өтеді:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = \alpha. \quad (1)$$

Осы айтылғандарға қатысты мына жағдайға аса назар аудару қажет. Егер f функциясының x_0 нүктеде шегі бар болса, онда x_0 - функцияның үзіліссіз немесе жөнделетін үзіліс нүктесі (олай болмаған жағдайда, функцияның x_0 нүктеде шегі жоқ).

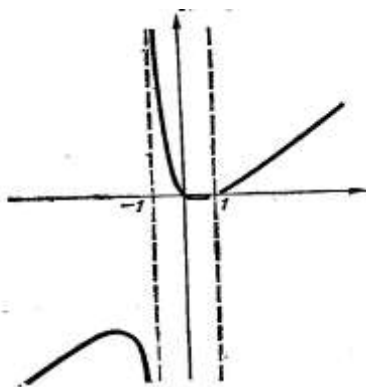
МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Бұдан, егер f функциясы x_0 нүктеде анықталмаған, бірақ оның осы нүктеде шегі бар болса, онда x_0 - функцияның жөнделетін үзіліс нүктесі болатынын көреміз. Олай болса, егер f функциясын x_0 нүктеде ((1) қараңыз) $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \alpha, & x = x_0, \end{cases}$ түрінде анықтасак, онда ол x_0 нүктеде үзіліссіз функцияға айналады. Біз осында келтіретін функция шегінің анықтамасы да осы айтылғандарға негізделген. Бұл әдістің мән-мағынасын ашатын мысалды қарастырайық.

Мысалы, $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$ функциясы $x_0 = 1$ нүктеде анықталмаған, бірақ бұл нүктеде оның 0-ге тең шегі бар (1-сурет). Сондықтан, оны $x_0 = 1$ нүктеде нөлге тең болатын етіп анықтасак, онда осы нүктеде үзіліссіз $\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$ функциясын

аламыз (2-суретті қараңыз). Алынған функция $\bar{f}(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \varphi(x)$ тең және ол $x_0 = 1$ нүктеде үзіліссіз болғандықтан, оның үзіліссіздігін пайдаланып

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0 \text{ аламыз.}$$

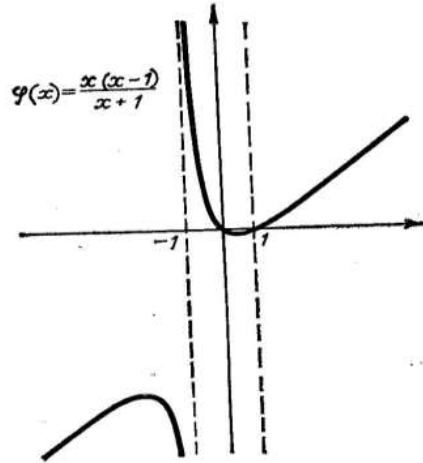


1-сурет

Әрине, бұл көрсетілген әдіс барлық жағдайда іске аса бермейді. Мысалы, жоғарыда қарастырған функция $x_1 = -1$ нүктеде де анықталмаған. Бірақ, ешбір әдіспен функцияны осы нүктеде үзіліссіз болатындай етіп анықтай алмаймыз. Бұл, функцияның нүктедегі шегі жоқ жағдайы, яғни, x аргументі $x_1 = -1$ нүктеге ұмтылғанда функция ұмтылатындай ешбір сан немесе элемент табылмайды.

Функцияның басқа үзіліс нүктелері үшін де осында көрсетілгендей етіп функция сызбасы арқылы оның үзіліссіз немесе үзілісті болатынын оқушыға түсіндіре аламыз. Содан соң функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің аналитикалық анықтамасына өтуге болады. Функция үзіліссіздігінің анықтамасының бірнеше түрлері бар. Біз, мысалы, келесі анықтаманы келтірейік.

f функциясы x_0 нүктесінің $U(x_0)$ маңайында анықталсын (2п. қараңыз).



2-сурет

Анықтама. Егер $y_0 = f(x_0)$ нүктесінің кез келген $U_\varepsilon(y_0)$ маңайы үшін $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(y_0)$ енгізуі орындалатындай x_0 нүктесінің $U_\delta(x_0) \subset U(x_0)$ маңайы табылса, онда f функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз деп аталады.

Нүкте маңайының қанша түрі бар болса (2п. қараңыз), оларға сәйкес сонша үзіліссіздік анықтамасын тұжырымдауға болады. Мысалы, егер y_0 нүктесі үшін $+\infty$ элементін алсақ, онда оған сәйкес маңай $U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty]$ түрінде беріледі.

Ал, үзіліс нүктелерінің басқа түрлеріне қатысты (функция шегінің жоқ жағдайлары), осында көрсетілген әдіске сай, функцияның біржақты үзіліссіздігі (берілген нүктеге қатысты оң жақты немесе сол жақты үзіліссіздік) ұғымдарын қарастыруға болады.

Мысалы, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$ функциясы $x_0 = 0$ нүктеде кең мағынада үзіліссіз

([2]) болатынын көрсетейік. Шынында да, егер $y_0 = +\infty$ нүктесінің кез келген $U_\varepsilon(+\infty) = \left\{ f(x) : \varepsilon < \frac{1}{x^2} \leq +\infty \right\}$ маңайы берілсе, онда $U_\delta(0) = \{x : 0 < |x| < \delta\}$, $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, маңайының кез келген нүктелері үшін $0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \frac{1}{x^2} = f(x) < +\infty$ аламыз. Ал $x=0$ нүктесі үшін функцияның берілу шартына сәйкес $f(0) = +\infty$. Олай болса, $f(U_\delta(0)) \subset U_\varepsilon(+\infty)$.

Енді функцияның шегінің анықтамасына көшеміз.

Анықтама. Егер f функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз болса, онда $\alpha = f(x_0)$, $\alpha \in [-\infty; +\infty]$ саны (немесе элементі) оның x_0 нүктедегі шегі деп аталады; ал егерде f функциясы x_0 нүктеде үзіліссіз болмаса, бірақ оны осы нүктеде

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \beta, & x = x_0, \end{cases} \quad \beta \in [-\infty; +\infty]$ түрінде үзіліссіз функция болатындай етіп

анықтауға болатын болса, онда β саны (немесе элементі) f функциясың x_0 нүктедегі шегі деп аталады. f функциясың x_0 нүктедегі γ шегін келесі символдардың бірімен белгілейді: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \gamma$, или $f(x) \rightarrow \gamma, x \rightarrow x_0$.

Жоғарыда атап көрсеткеніміздей, функцияның шегі анықтамасындағы шарт бойынша, x_0 – функцияның үзіліссіз немесе жөнделетін үзіліс нүктесі болады. Осы жағдайды назарға ала отырып, функцияның нүктедегі шегінің анықтамасын келесі түрде тұжырымдауға болады.

Анықтама. f функциясы x_0 нүктесінің қандай да бір $\overset{\circ}{U}(x_0)$ тесік маңайында анықталсын (2п. қараңыз). Егер λ нүктесінің кез келген $U_\varepsilon(\lambda)$ маңайы үшін x_0 нүктесінің $f\left(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right) \subset U_\varepsilon(\lambda)$ енгізуі орындалатындай $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \subset \overset{\circ}{U}(x_0)$ маңайы бар болса, онда λ саны (немесе элементі) f функциясының x_0 нүктедегі шегі деп аталады.

2п. көрсетілгендей, нүктенің 6 түрлі маңайлары мен 6 түрлі тесік маңайларының комбинациялары функция шегінің анықтамаларының 36 нұсқаларын тудырады. Бірақ біздің мақсатымыз, функция шегі ұғымын функцияның үзіліссіздігі арқылы анықтау әдісін көрсету болғандықтан, функция шегі анықтамасының жоғарыда көрсетілген нұсқасымен ғана шектелеміз.

1. Айдос Е.Ж., Жоғары математика 2, Оқулық, 532 б., Бастау, 2016.
2. Айдос Е.Ж., Гладкие кривые, представленные недифференцируемыми функциями // Математика в высшем образовании, №10 (2012), с.8-15.

Аннотация. В статье предел функции определяется другим от прежнего методом. Множества определения и значения функции состоят из объединения множеств конечных чисел и бесконечных элементов со знаками. Сначала через геометрический образ функции вводится понятие непрерывности. Анализируется пример, необходимый для определения предела функции. Предел функции определяется с помощью понятия непрерывности.

Ключевые слова: Предел, непрерывность, геометрический образ, бесконечность.

Annotation. In the article, limit of the function is determined by a different method. Many definitions and meanings of functions consist of the union of sets of finite and infinite numbers of elements with signs. First, through the geometric image of the function the concept of continuity is introduced. We analyze the sample required to determine the limit of a function. The limit of the function is determined using the concept of continuity.

Keywords: Limit, непрерывность, geometrical character, endlessness.

ӨОЖ 517.956

С.Е. Айтжанов, М. Кайыржан*, Б.А. Мырзахмедова*, К.К. Шамшиденов*

СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС АЙНЫМАЛЫ КӨРСЕТКІШТІ ПАРАБОЛАЛЫҚ
ТЕҢДЕУДІҢ ОҢ ЖАҒЫН ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ ЕСЕБІ

(Алматы қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, *- магистрант)

Аңдатпа. Интегралдық қосымша шартпен қойылған сызықты емес параболалық теңдеудің оң жағын қалпына келтірудің кері есебі зерттеледі. Қойылған есептің бірімәнді шешілетіндігі дәлелденеді. Тізбектей жуықтаулар әдісі көмегімен кері есептің шешімінің бар және оның жалғыз екендігі дәлелденеді. Жуықтатылған шешімдер тізбегі құрастырылған, алынған априорлық баға көмегімен тұрғызылған тізбектің бастапқы шешімге әлді жинақтылығы дәлелденген. Жалпыланған шешімнің жалғыздығының дәлелдеуі алынған априорлық бағаға негізделген.

Түйін сөздер: Кері есеп, сызықты емес теңдеу, интегралдық шарт

$Q_T = \Omega \times (0, T)$ цилиндрде сызықты емес параболалық теңдеу үшін қойылған кері есебін қарастырайық

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \Delta u - a(x, t, u) |u|^{\sigma(x, t) - 2} u + f(t) \lambda(x, t), \quad (1)$$

шектік шартын

$$\Gamma_T = \partial \Omega \times [0, T] \text{-те, } u = 0, \quad (2)$$

бастапқы шартын

$$\Omega \text{- да, } u(x, t) = \varphi(x) \quad (3)$$

және интегралдық қосымша шартын

$$\int_{\Omega} u(x, t) \cdot K(x, t) dx = e(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

қанағаттандыратын $u(x, t)$ және $f(x)$ функцияларын анықтау керек, мұндағы $a = a(x, t, u)$ -кез келген, $r \in R$ болғанда $(x, t, r) \in \overline{Q_T} \times R$ үшін анықталған $((x, t)$ бойынша өлшенетін және r бойынша барлық дерлік $(x, t) \in Q_T$ үшін үзіліссіз болатын) Каратеодори функциясы,

$$\begin{cases} \forall (x, t, r) \in \overline{Q_T} \times R, \\ 0 < a_0 \leq a(x, t, r) \leq a_1 < \infty, \\ \left| \frac{\partial a(x, t, u)}{\partial u} \right| \leq a_2 < \infty, \end{cases}$$

$\sigma = \sigma(x, t)$ функциясы Q_T -де анықталған σ^- және σ^+ тұрақтылары арқылы берілген

$$\forall P = (x, t) \in \overline{Q_T}, 1 \leq \sigma^- \leq \sigma(P) \leq \sigma^+ < \infty$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын өлшемді функция деп болжанады. $\lambda(x, t), \varphi(x), K(x, t)$ және $e(t)$ функциялары берілген.

Сызықты емес тұрақты көрсеткішті туындататын параболалық теңдеудің шешімінің бар және жалғыздығы мәселесіне [1-5] жұмыстары арналған. Сызықты емес тұрақты көрсеткішті параболалық және эллиптикалық теңдеулер электрореологиялық сұйықтықтарды математикалық сипаттаулар барысында пайда болады [6], [7]. Сызықты

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

емес тұрақты көрсеткішті туындататын параболалық және эллиптикалық теңдеулерді зерттеулер [8-11] жұмыстарда қарастырылған.

Ізделінді коэффициенттердің немесе бастапқы функцияның не уақыттық айнымалыларынан, не кеңістіктік айнымалылардан тәуелсіздігі жағдайындағы параболалық теңдеулер үшін коэффициентті немесе бастапқы функцияны анықтаудың кері есептері [12-21] жұмыстарда қарастырылған.

(1)-(4) кері есебін берілген немесе күтілетін $e(t)$ энергияға жетуге қажетті $f(t)$ дәл басқару есебі деп қарастыруға болады.

Анықтама 1. Егер $u(x, t) \in L_\infty(Q_T) \cap L_2\left(0, T; W_2^1(\Omega)\right)$, $u_1 \in L_2\left(0, T; W_2^{-1}(\Omega)\right)$ және $f(t) \in L_\infty(0, T)$ және кез келген $\xi(x, t) \in L_\infty(Q_T)$, $\xi(x, t) \in L_{\sigma(x,t)}(Q_T)$, $\xi(x, t) \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap W_2^1(Q_T)$, $\xi(x, T) = 0$, функциялары келесі интегралдық тепе-теңдіктерді қанағаттандырсын

$$e'(t) = \int_{\Omega} K_t u dx + \mu \int_{\Omega} u \cdot \Delta K dx - \int_{\Omega} a(x, t, u) |u|^{\sigma(x,t)-2} u \cdot K dx + f(t) \int_0^1 \lambda \cdot K dx, \quad (5)$$

$$\int_{Q_T} \left[-u \cdot \xi_t + \mu \nabla u \cdot \nabla \xi + a(x, t, u) |u|^{\sigma(x,t)-2} u \cdot \xi \right] dx dt = \int_{Q_T} f(t) \lambda \cdot \xi dx dt + \int_{\Omega} \varphi(x) \xi(x, 0) dx, \quad (6)$$

онда $u(x, t)$ және $f(t)$ функциялары (1)-(4) кері есебінің жалпыланған шешімі деп аталады, мұндағы

$$K(x, t) \in C^1\left(0, T; W_2^0(\Omega)\right) \cap C\left(0, T; W_2^2(\Omega)\right), e(t) \in W_2^1(\Omega), \lambda(x, t) \in C(\bar{Q}_T), \quad (7)$$

$$\varphi(x) \in L_2(\Omega), \int_{\Omega} K \cdot \lambda dx \neq 0, t \in [0, T]$$

$V(Q_T) := L_\infty(Q_T) \cap L_2\left(0, T; W_2^1(\Omega)\right)$ арқылы белгілейміз.

Теорема 1. (7) шарты орындалсын, онда (1)-(4) кері есебінің жалпыланған жалғыз $u(x, t) \in V(Q_T)$, $f(t) \in L_2(0, T)$ шешімі болады.

Дәлелдеуі тізбектеп жуықтау әдісі арқылы келесі түрде жүргізіледі. Нөлдік жуықтау ретінде $u^0 = \varphi(x)$ алып (немесе $u^0 = 0$) келесі қатынастар арқылы барлық $m = 1, 2, \dots$ үшін (u^m, f^m) анықтаймыз

$$f^m(t) = \left(\int_0^1 \lambda \cdot K dx \right)^{-1} \left(e'(t) - \int_{\Omega} u^{m-1} K_t dx - \mu \int_{\Omega} u^{m-1} \cdot \Delta K dx + \right. \quad (8)$$

$$\left. + \int_{\Omega} a(x, t, u^{m-1}) |u^{m-1}|^{\sigma(x,t)-2} u^{m-1} \cdot K dx \right),$$

$$\frac{\partial u^m}{\partial t} = \mu \Delta u^m - a(x, t, u^m) |u^m|^{\sigma(x,t)-2} u^m + f^m(t) \lambda(x, t), \quad (9)$$

$$\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T] \text{-те, } u^m = 0, \quad (10)$$

$$u^m|_{t=0} = \varphi(x). \quad (11)$$

Анықтама 2. (9)-(11) есебінің жалпылама шешімі деп кез келген $\xi(x, t) \in L_\infty(Q_T)$, $\xi(x, t) \in L_{\sigma(x,t)}(Q_T)$, $\xi(x, t) \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap W_2^1(Q_T)$, $\xi(x, T) = 0$, үшін келесі интегралдық тепе-теңдікті қанағаттандыратын $u(x, t) \in V(Q_T)$ функциясын айтамыз:

$$\int_{Q_T} [-u \cdot \xi_t + \mu \nabla u \cdot \nabla \xi + a(x, t, u) |u|^{\sigma(x,t)-2} u \cdot \xi] dx dt = \int_{Q_T} f(t) \lambda \cdot \xi dx dt + \int_{\Omega} \varphi(x) \xi(x, 0) dx, \quad (12)$$

мұндағы $\vec{\lambda} \in C(\bar{Q}_T)$, $K(x, t) \in C^1(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap C(0, T; W_2^2(\Omega))$, $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$, $f^m \in L_\infty(0, T)$.

$f^m(t)$ белгілі деп болжайық, олар айқын түрде $u^{m-1}(x, t)$ арқылы өрнектелетіндіктен, оларды (9) қоямыз да, (9)-(11) есебінің шешілетіндігін зерттейміз, (9)-(11) есебінің жалпылама түрі [8], [9] зерттелген.

Осылайша, $\{u^m, f^m\}$ тізбегі дұрыс анықталған. $\{u^m, f^m\}$ тізбектерінің Коши тізбектері екендіктерін дәлелдейік, онда $V(Q_T) \times L_2(0, T)$ кеңістіктері толық болғандықтан, (u, f) функциялар жұбының $\{u^m, f^m\}$ тізбегі үшін шекті екендігі, яғни $m \rightarrow \infty$ үшін (u^m, f^m) болатындығы шығады, яғни (u, f) (1)-(5) есебінің ізделінді әлсіз шешімі болады.

$\Phi^{m+1}(t) = f^{m+1}(t) - f^m(t)$, $D^{m+1} = u^{m+1} - u^m$ айырымдарын енгізіп, (8) және (9)-(11):

$$\Phi^{m+1} = \left(\int_{\Omega} \lambda \cdot K dx \right)^{-1} \left(-\mu \int_{\Omega} D^m \cdot \Delta K dx - \int_{\Omega} D^m \cdot K_t dx + \int_{\Omega} (a(x, t, u^m) |u^m|^{\sigma-2} u^m - a(x, t, u^{m-1}) |u^{m-1}|^{\sigma-2} u^{m-1}) K dx \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial D^{m+1}}{\partial t} = \mu \Delta D^{m+1} - (a(x, t, u^{m+1}) |u^{m+1}|^{\sigma-2} u^{m+1} - a(x, t, u^m) |u^m|^{\sigma-2} u^m) + \Phi^{m+1} \lambda, \quad (14)$$

$$D^{m+1}|_{\Gamma} = 0, \quad D^{m+1}|_{t=0} = 0. \quad (15)$$

(13) өрнектің оң жақ бөлігін бағалайық:

$$\begin{aligned} |\Phi^{m+1}(t)| &= \left| \left(\int_{\Omega} \lambda \cdot K dx \right)^{-1} \left(-\mu \int_{\Omega} D^m \cdot \Delta K dx - \int_{\Omega} D^m \cdot K_t dx + \int_{\Omega} (a(x, t, u^m) |u^m|^{\sigma-2} u^m - a(x, t, u^{m-1}) |u^{m-1}|^{\sigma-2} u^{m-1}) K dx \right) \right| \leq \\ &\leq c_0 \left(\mu \int_{\Omega} |D^m| \cdot |\Delta K| dx + \int_{\Omega} |D^m| \cdot |K_t| dx + \int_{\Omega} |a(x, t, u^m) |u^m|^{\sigma-2} u^m - a(x, t, u^{m-1}) |u^{m-1}|^{\sigma-2} u^{m-1}| \cdot |K| dx \right) \leq \\ &\leq c_0 \left(\mu \|\Delta K\|_{\frac{2k}{2k-1}, \Omega} + \|K_t\|_{\frac{2k}{2k-1}, \Omega} + c_1 \|K\|_{\frac{2k}{2k-1}, \Omega} \right) \|D^m\|_{2k, \Omega}, \end{aligned}$$

мұндағы $c_1 = \sup \{ a(x, t, u^m) |u^m|^{\sigma(x,t)-2}; a(x, t, u^{m-1}) |u^{m-1}|^{\sigma(x,t)-2} \}$.

Сондан кейін, $k \rightarrow \infty$ болғандағы шегіне көше отырып

$$\|\Phi^{m+1}(t)\|_{L_\infty(0,T)} \leq c_0 \left(\mu \int_{\Omega} |\Delta K| dx + \int_{\Omega} |K_t| dx + c_1 \int_{\Omega} |K| dx \right) \|D^m\|_{\infty, Q_T} \leq c_2 \|D^m\|_{\infty, Q_T} \quad (16)$$

бағасын аламыз. (14) $(D^{m+1})^{2k-1}$ -ге көбейтіп және Ω бойынша интегралдап,

$$\int_{\Omega} D_t^{m+1} (D^{m+1})^{2k-1} dx = \mu \int_{\Omega} \Delta D^{m+1} (D^{m+1})^{2k-1} dx - \\ - \int_{\Omega} (a(x,t,u^{m+1}) |u^{m+1}|^{\sigma-2} u^{m+1} - a(x,t,u^m) |u^m|^{\sigma-2} u^m) (D^{m+1})^{2k-1} dx + \Phi^{m+1}(t) \int_{\Omega} \lambda (D^{m+1})^{2k-1} dx$$

немесе

$$\frac{1}{2k} \cdot \frac{d}{dt} \left(\|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k} \right) + \mu(2k-1) \int_{\Omega} |\nabla D^{m+1}|^2 (D^{m+1})^{2(k-1)} dx = - \\ - \int_{\Omega} (a(x,t,u^{m+1}) |u^{m+1}|^{\sigma-2} u^{m+1} - a(x,t,u^m) |u^m|^{\sigma-2} u^m) (D^{m+1})^{2k-1} dx + \\ + \Phi^{m+1}(t) \int_{\Omega} \lambda (D^{m+1})^{2k-1} dx \quad (17)$$

аламыз. Оң жағын бағалайық

$$\left| \int_{\Omega} (a(x,t,u^{m+1}) |u^{m+1}|^{\sigma-2} u^{m+1} - a(x,t,u^m) |u^m|^{\sigma-2} u^m) (D^{m+1})^{2k-1} dx \right| \leq \\ \leq c_3 \int_{\Omega} |D^{m+1}| \cdot |D^{m+1}|^{2k-1} dx = c_3 \|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k},$$

мұндағы $c_3 = \sup \{ a(x,t,u^{m+1}) |u^{m+1}|^{\sigma(x,t)-2}; a(x,t,u^m) |u^m|^{\sigma(x,t)-2} \}$

$$\left| \int_{\Omega} \lambda \cdot (D^{m+1})^{2k-1} dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |\lambda|^{2k} dx \right)^{\frac{1}{2k}} \left(\int_{\Omega} |D^{m+1}|^{2k} dx \right)^{\frac{2k-1}{2k}} = \|\lambda\|_{2k,\Omega} \|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k-1}.$$

Алынған бағалауларды (17) қоямыз

$$\frac{1}{2k} \cdot \frac{d}{dt} \left(\|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k} \right) + \mu(2k-1) \int_{\Omega} |\nabla D^{m+1}|^2 (D^{m+1})^{2(k-1)} dx \leq \\ \leq c_3 \|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k} + |\Phi^{m+1}(t)| \cdot \|\lambda\|_{2k,\Omega} \|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k-1},$$

теңсіздіктің сол жағының екінші оң қосылғышын алып тастаймыз да, теңсіздікті күшейтеміз

$$\frac{1}{2k} \cdot \frac{d}{dt} \left(\|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k} \right) \leq c_3 \|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k} + |\Phi^{m+1}(t)| \cdot \|\lambda\|_{2k,\Omega} \|D^{m+1}\|_{2k,\Omega}^{2k-1}$$

немесе

$$\frac{d}{dt} \|D^{m+1}\|_{2k,\Omega} \leq c_3 \|D^{m+1}\|_{2k,\Omega} + |\Phi^{m+1}(t)| \cdot \|\lambda\|_{2k,\Omega}$$

осы теңсіздіктен

$$\|D^{m+1}\|_{2k,\Omega} \leq e^{c_3 t} \cdot \int_0^t e^{-c_3 s} |\Phi^{m+1}(s)| \cdot \|\lambda\|_{2k,\Omega} ds.$$

Алынған теңсіздікте $k \rightarrow \infty$ шегіне көшу арқылы

$$\|D^{m+1}\|_{\infty, Q_T} \leq \frac{e^{c_3 T} - 1}{c_3} \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \|\Phi^{m+1}\|_{L^\infty(0, T)} \quad (18)$$

аламыз. (16) мен (18)-ді бірге қарастыру арқылы

$$\|\Phi^{m+1}(t)\|_{L^\infty(0, T)} \leq c_2 \frac{e^{c_3 T} - 1}{c_3} \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \|\Phi^m\|_{L^\infty(0, T)}, \quad (19)$$

$$\|D^{m+1}\|_{\infty, Q_T} \leq c_2 \frac{e^{c_3 T} - 1}{c_3} \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \|D^m\|_{\infty, Q_T} \quad (20)$$

бағасының дұрыстығын анықтаймыз. $k = 1$ бағалауда (17) теңсіздігі

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|D^{m+1}\|_{2, \Omega}^2 + \mu \int_{\Omega} |\nabla D^{m+1}|^2 dx = - \\ - \int_{\Omega} (a(x, t, u^{m+1}) |u^{m+1}|^{\sigma-2} u^{m+1} - a(x, t, u^m) |u^m|^{\sigma-2} u^m) D^{m+1} dx + \Phi^{m+1}(t) \int_{\Omega} \lambda \cdot D^{m+1} dx, \end{aligned} \quad (21)$$

түріне енеді. (17)-нің оң жақтарын бағалау арқылы және оны (17)-ге қою арқылы келесі дифференциалдық теңсіздікті аламыз:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|D^{m+1}\|_{2, \Omega}^2 + \mu \int_{\Omega} |\nabla D^{m+1}|^2 dx \leq c_3 \|D^{m+1}\|_{2, \Omega}^2 + |\Phi^{m+1}(t)| \cdot \|\lambda\| \cdot \|D^{m+1}\|_{2, \Omega}, \quad (22)$$

осы жерден келесі бағалауды аламыз

$$\begin{aligned} \|D^{m+1}\|_{2, \Omega} \leq \frac{e^{c_3 T} - 1}{c_3} \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \|\Phi^{m+1}\|_{L^\infty(0, T)} \leq c_2 \frac{e^{c_3 T} - 1}{c_3} \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \|D^m\|_{\infty, Q_T}, \\ \mu \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla D^{m+1}|^2 dx dt \leq \frac{c_2^2 (e^{c_3 T} - 1)^2}{c_3} \left(1 + \frac{\|\lambda\|_{\infty, Q_T}}{c_3} \right) \|\lambda\|_{\infty, Q_T}^2 \|D^m\|_{\infty, Q_T}^2, \\ \|\nabla D^{m+1}\|_{2, Q_T} \leq \frac{c_2 (e^{c_3 T} - 1)}{\sqrt{\mu c_3}} \sqrt{1 + \frac{\|\lambda\|_{\infty, Q_T}}{c_3}} \cdot \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \|D^m\|_{\infty, Q_T}. \end{aligned} \quad (23)$$

(20) және (23)-тен

$$\|D^{m+1}\|_{V(Q_T)} \leq c_2 \frac{e^{c_3 T} - 1}{c_3} \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \left(1 + \frac{\sqrt{c_3 + \|\lambda\|_{\infty, Q_T}}}{\sqrt{\mu}} \right) \|D^m\|_{V(Q_T)}. \quad (24)$$

Айталық

$$c_2 \frac{e^{c_3 T} - 1}{c_3} \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \leq q_1 < 1, \quad (25)$$

$$c_2 \frac{e^{c_3 T} - 1}{c_3} \|\lambda\|_{\infty, Q_T} \left(1 + \frac{\sqrt{c_3 + \|\lambda\|_{\infty, Q_T}}}{\sqrt{\mu}} \right) \leq q_2 < 1$$

орындалсын. Онда (19) және (24) бағалаулары келесі түрге келеді

$$\|\Phi^{m+1}(t)\|_{L^\infty(0, T)} \leq q_1 \|\Phi^m\|_{L^\infty(0, T)}, \quad (26)$$

$$\|D^{m+1}\|_{V(Q_T)} \leq q_2 \|D^m\|_{V(Q_T)}. \quad (27)$$

Сәйкесінше, (26), (27) бағаларымен (25) орындалғанда $\{(v^m, f^m)\}$ -дың сәйкес $V(Q_T) \times L^\infty(0, T)$ кеңістіктерінде Коши теңсіздігі болатындығы шығады. Жоғарыда

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

келтірілген тұжырымдары бойынша (v, f) функцияларының $V(Q_T) \times L_\infty(0, T)$ -тен алатын

$$V(Q_T) \text{ кеңістігінде } u^m \rightarrow u$$

$$L_\infty(0, T) \text{ кеңістігінде } f^m \rightarrow f$$

болатын жалғыз жұбы болатындығы шығады. (8) және (12) қатынастарында $m \rightarrow \infty$ шегіне ауысу арқылы (v^m, f^m) қатты ұқсас болғандықтан біз $Q_T = \Omega \times (0, T)$.-дегі (1)-(4) кері есебі үшін (v, f) жалпыланған шешімін аламыз.

Кері есептің жалғыздығы $\{(u^m, f^m)\}$ тізбегінің іргелілігінен шығады. Алынған (26) және (27) бағалауларының көмегімен оңай дәлелдеуге болады. Айталық, Q_T цилиндрде екі шешім (u_k, f_k) , $k=1,2$ болсын, онда (25) – (27) қатынастарынан

$$(1 - q_1) \|f_1 - f_2\|_{L_\infty(0, T)} \leq 0 \text{ және } (1 - q_2) \|u_1 - u_2\|_{V(Q_T)} \leq 0.$$

Бұл қатыстардан екі шешімнің сәйкестігі шығады $u_1 \equiv u_2$, $f_1 \equiv f_2$.

1. Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи математических наук. –1987. –Т.42, № 2. –С. 135-176.
2. Калашников А. С. О некоторых задачах нелинейной теории теплопроводности с данными, содержащими малый параметр в экспонентах // ЖВМ и МФ. –1995. –Т. 35, № 7. –С. 1077-1094.
3. Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Non-Linear PDEs and Fluid Mechanics. -Boston: Birkhäuser, 2002. - (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications; Vol. 48).
4. Aronson D. G. The porous medium equation // Nonlinear Diffusion Problems, Lect. 2nd 1985 Sess. C.I.M.E., Montecatini Terme / Italy 1985. -Berlin: Springer, 1986. -(Lect. Notes Math.; Vol. 1224). –P. 1-46.
5. Chasseigne E., Vazquez J. L. Theory of extended solutions for fast-diffusion equations in optimal classes of data. Radiation from Singularities // Arch. Ration. Mech. Anal. –2002. –Vol. 164, no. 2. –P. 133-187.
6. Ruzicka M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Berlin: Springer-Verlag., 2000. (Lecture Notes in Math.; Vol. 1748).
7. Acerbi A., Mignione G., Seregin G. Regularity results for a class of parabolic systems related to a class of non-newtonian fluids // Ann. Inst. H. Poincaré. –2004.–Vol. 21, no. 6. –P. 25-60.
8. Антонцев С.Н., Шмарев С.И. Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности // Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 4, с. 3—19.
9. Antontsev S. N., Shmarev S. A model porous medium equation with variable exponents of nonlinearity: Existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.—2005.—Vol. 60, no. 3 (A).—P. 515—545.
10. Жиков В.В. К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях // Функциональный анализ и его приложения. -2009. -Т.43, вып. 2. -С.19-38.
11. M.Bendahmane, P.Wittbold, A.Zimmermann Renormalized solutions for a nonlinear parabolic equation with variable exponents and L_1 -data // Journal of Differential Equations. -2010. -Vol.249. -P.1483-1515.

12. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel Dekker: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. 2000, № 231.
13. Cannon J.R., Lin S.Y. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral.Math. Soc. Ser. B – 1991. – Vol. 33. – P. 149-163.
14. Cannon, J.R. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // Inverse Problems. – 1998. – Vol. 4. – P. 35-45.
15. Lorenzi A. An introduction to identification problems via functional analysis, VSP: Utrecht-Boston-Koln-Tokyo: Inverse and ill-posed problems series. 2001. 245 p.
16. Isakov V. “Inverse Problems for Partial Differential Equations”, 2-nd Edition, Springer-Verlag, New York, 2006.
17. Savateev E. G. and Riganti R. Inverse problem for the nonlinear heat equation with the final overdetermination // Math. Comput. Modelling. –1995. –Vol.22, no. 1. –P. 29–43.
18. Abylkairov U.U. The inverse problem of integral observation for general parabolic equation // Mathematical Journal MI RK. - 2003. - Т.3, №4 (10). - P.5-12.
19. Abylkayrov U. U., Aitzhanov S. E. and Zhapsarbayeva L. K. Solvability of the Inverse Problem for a Heat Convection System with Integral Condition of Overdetermination // Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, № 49, 2403 - 2421, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.5295>.
20. Abylkairov U. U., Aitzhanov S. E. Inverse problem for non-stationary system of magnetohydrodynamics // Boundary Value Problems. -2015:173 doi:10.1186/s13661-015-0438-x.
21. Abylkairov U. U., Aitzhanov S. E. Reconstruction of source function for parabolic equations with variable exponents // AIP Conference Proceedings 1676, 020040 (2015); doi: 10.1063/1.4930466.

Аннотация. *Исследуется обратная задача восстановления правой части для нелинейного параболического уравнения с интегральным переопределением. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи. Методом последовательных приближений доказана теорема существования и единственность решения обратной задачи. Построена последовательность приближенных решений, с помощью полученной априорной оценки, доказана сильная сходимость построенной последовательности к искомому решению. Доказательство единственности обобщенного решения основана на полученной априорной оценке.*

Ключевые слова: *Обратная задача, нелинейная задача, интегральное условие.*

Abstract. *This work investigates the inverse problem of reconstructing the right part for the nonlinear parabolic equation with the integral redefinition. There is the proof of unique solvability of the given problem. Theorem of existence and uniqueness of solutions of the inverse problem are proved by the method of successive approximations. There are constructed the sequence of approximate solutions that with using a priori estimates are prove the strong convergence of the sequence to the solution. The proof of the uniqueness of a generalized solution are based on the received a priori estimates.*

Keywords: *Inverse problem, nonlinear problem, integral condition.*

ӘОЖ 517.948.34

Н. Атахан*, Н. Асет

СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ
ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ШЕШІМІНІҢ
АСИМПТОТИКАЛЫҚ БАҒАЛАУЫ

(Алматы қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
 Назарбаев Зияткерлік мектебі, *- докторант PhD)

Аңдатпа. Мақалада берілген теңдеуге сәйкес біртекті дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі, бастапқы және шекаралық функциялары құрылып, олардың асимптотикалық бағалаулары алынған. Бұл функциялардың көмегімен қарастырылып отырған шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласы алынған. Осы сингулярлы ауытқыған шекаралық есепке сәйкес өзгертілген ауытқымаған шекаралық есеп құрылды. Берілген сингулярлы ауытқыған шекаралық есеп шешімінің өзгертілген ауытқымаған шекаралық есеп шешіміне ұмтылатыны көрсетілді.

Түйін сөздер: сингулярлы ауытқу, интегралды-дифференциалдық теңдеулер, кіші параметр, бастапқы секіріс.

Сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y'''(t, \varepsilon) + A(t)y''(t, \varepsilon) + B(t)y'(t, \varepsilon) + C(t)y(t, \varepsilon) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^2 H_i(t, x) y^{(i)}(x, \varepsilon) dx \quad (1)$$

теңдеуге қойылған келесі түрдегі шекаралық шарттармен қарастырайық:

$$\begin{aligned} l_1 y &\equiv \sum_{j=0}^2 \alpha_{1j} y^{(j)}(0, \varepsilon) = a_1, \\ l_2 y &\equiv \sum_{j=0}^1 \alpha_{2j} y^{(j)}(0, \varepsilon) = a_2, \\ l_3 y &\equiv \sum_{j=0}^2 \beta_j y^{(j)}(1, \varepsilon) = b, \end{aligned} \quad (2)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, $a_i, i = \overline{1,2}$; b – белгілі тұрақты шамалар.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $A(t), B(t), C(t), F(t)$, функциялары $0 \leq t \leq 1$ аралығында, ал $H_i(t, x), i = \overline{0,2}$ функциялары $D = (0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1)$ облысында үзіліссіз дифференциалданады.

II. $A(t) \geq \bar{\gamma} = \text{const} > 0, 0 \leq t \leq 1$.

III. $\alpha_{12} \neq 0$

(1)-ші теңдеуге сәйкес біртекті сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y''' + A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = 0 \quad (3)$$

Егер I, II. шарттары орындалса, онда (3) теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесі

$y_i(t, \varepsilon), i = \overline{1,3}$ $\varepsilon \rightarrow 0$ кезде асимптотикалық сипаты келесі түрде анықталады [1]:

$$\begin{cases} y_i^{(j)}(t, \varepsilon) = y_{i0}^{(j)}(t) + O(\varepsilon), & i=1,2; j = \overline{0,2} \\ y_3^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \cdot (\mu^j(t) y_{30}(t) + O(\varepsilon)), & j = \overline{0,2} \end{cases} \quad (4)$$

мұндағы $\mu(t) = -A_1(t) < 0$, $y_{i0}(t), i=1, 2$ келесі есептің шешімі

$$L_0 y_{i0} \equiv A(t) y_{i0}'' + B(t) y_{i0}' + C(t) y_{i0} = 0, \quad y_{i0}^{(j)}(0) = \begin{cases} 1, & j = i-1, \\ 0, & j \neq i-1. \end{cases} \quad i=1,2, \quad j = 0,1,$$

$$y_{30}(t) = \left(\frac{A(0)}{B(0)}\right)^{n-1} \exp\left(\int_0^t \frac{B(x)}{A(x)} dx\right)$$

мұндағы

Анықтама. $K(t, s, \varepsilon)$, $0 \leq s \leq t \leq 1$ функциясын Коши функциясы дейміз, егер де ол келесі есептің шешімі болса:

$$L_\varepsilon K(t, s, \varepsilon) = 0, \quad K^{(j)}(s, s, \varepsilon) = 0, \quad j = \overline{0,1}, \quad K''(s, s, \varepsilon) = 1$$

$K(t, s, \varepsilon)$, $0 \leq s \leq t \leq 1$ Коши функциясы үшін мына төмендегі асимптотикалық бағалауды алуға болады:

$$\left| K^{(j)}(t, s, \varepsilon) \right| \leq N \varepsilon, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad \left| K^{(n-1)}(t, s, \varepsilon) \right| \leq N \left(\varepsilon + \exp\left(-\frac{\gamma(t-s)}{\varepsilon}\right) \right) \quad (5)$$

мұндағы $C > 0 - \varepsilon$ - нан тәуелсіз тұрақты.

Егер $\Phi_k(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1,3}$ функциялары келесі есептің

$$\begin{cases} L_\varepsilon \Phi_k(t, \varepsilon) = 0, & k = \overline{1,3}, \\ l_i \Phi_k(t, \varepsilon) = \delta_{ik}, & i = \overline{1,3} \end{cases}$$

шешімі болса, ондаолар (1), (2) есептің шекаралық функциялары деп аталады.

$\Phi_k(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1,3}$ шекаралық функциялары $[0, 1]$ кесіндісінде бар жалғыз және мына төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$\Phi_k(t, \varepsilon) = \frac{\Delta_k(t, \varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \quad k = \overline{1,3}, \quad (6)$$

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} l_1 y_1(t, \varepsilon) & l_1 y_2(t, \varepsilon) & l_1 y_3(t, \varepsilon) \\ l_2 y_1(t, \varepsilon) & l_2 y_2(t, \varepsilon) & l_2 y_3(t, \varepsilon) \\ l_3 y_1(t, \varepsilon) & l_3 y_2(t, \varepsilon) & l_3 y_3(t, \varepsilon) \end{vmatrix}$$

ал $\Delta_k(t, \varepsilon) - \Delta(\varepsilon)$ анықтауышынан оның k - ші жатық жолын $L_\varepsilon y = 0$ теңдеуінің

$y_1(t, \varepsilon)$, $y_2(t, \varepsilon)$, $y_3(t, \varepsilon)$ іргелі шешімдер жүйесіне алмастырғаннан алынатын анықтауыш.

$\Delta(\varepsilon)$ анықтауышы үшін келесі асимптотикалық сипат орыналады:

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\alpha_{12} \mu^2(0) \bar{\Delta} + O(\varepsilon)), \quad (7)$$

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} l_2 y_{10} & \dots & l_2 y_{20} \\ l_3 y_{10} & \dots & l_3 y_{20} \end{vmatrix}$$

IV. $\bar{\Delta} \neq 0$

Енді (6), (2), (4), (7) формулаларды ескере отырып, $\Phi_k^{(j)}(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1,3}$ $j = \overline{0,2}$ шекаралық функцияларының $\varepsilon \rightarrow 0$ ұмтылғанда асимптотикалық бағалауын аламыз:

$$\left| \Phi_1^{(j)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \left(\varepsilon + \varepsilon^{2-j} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right) \right), \quad j = \overline{0,2}, \quad (8)$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

$$|\Phi_k^{(j)}(t, \varepsilon)| \leq C \left(1 + \varepsilon^{2-j} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right) \right), \quad j = \overline{0,2}; \quad k = \overline{2,3}$$

мұндағы $C > 0 - \varepsilon$ - нан тәуелсіз тұрақты.

V. $\lambda = 1$ саны $H(t, s, \varepsilon)$ өзегінің меншікті мәні болмасын.

$$H(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \sum_{i=0}^2 H_i(t, x) K^{(i)}(x, s, \varepsilon) dx$$

Теорема 1. Егер I-V шарттар орындалса, онда (1), (2) шекаралық есебінің шешімі $[0, 1]$ кесіндісінде бар, жалғыз және келесі формуласымен өрнектеледі:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^3 C_k Q_k(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \quad (9)$$

мұндағы $Q_k(t, \varepsilon) = \Phi_k(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_k(s, \varepsilon) ds$, $P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 K(t, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds$

$$\bar{\varphi}_k(t, \varepsilon) = \varphi_k(t, \varepsilon) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) \varphi_k(s, \varepsilon) ds, \quad k = \overline{1,3} \quad \bar{F}(t, \varepsilon) \equiv F(t) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) F(s) ds \quad (10)$$

$$\varphi_k(t, \varepsilon) = \int_0^1 \sum_{i=0}^2 H_i(t, x) \Phi_k^{(i)}(x, \varepsilon) dx, \quad k = \overline{1,3},$$

ал $R(t, s, \varepsilon) - H(t, s, \varepsilon)$ өзегінің резольвентасы.

$C_i, i = \overline{1,3}$ тұрақтыларын анықтау үшін (9) формулаға (2) шекаралық шартты қолданып, келесі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} C_1 l_1 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 l_1 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 l_1 Q_3(t, \varepsilon) + l_1 P(t, \varepsilon) = a_1 \\ C_1 l_2 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 l_2 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 l_2 Q_3(t, \varepsilon) + l_2 P(t, \varepsilon) = a_2 \\ C_1 l_3 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 l_3 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 l_3 Q_3(t, \varepsilon) + l_3 P(t, \varepsilon) = b \end{cases} \quad (11)$$

Бұдан $C_1 = a_1$, $C_2 = a_2$, және

$$l_3 Q_1(t, \varepsilon) = l_3 \left[\Phi_1(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_1(s, \varepsilon) ds \right] = \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_1(s, \varepsilon) ds$$

$$l_3 Q_2(t, \varepsilon) = l_3 \left[\Phi_2(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_2(s, \varepsilon) ds \right] = \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_2(s, \varepsilon) ds$$

$$l_3 Q_3(t, \varepsilon) = l_3 \left[\Phi_3(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_3(s, \varepsilon) ds \right] = 1 + \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_3(s, \varepsilon) ds$$

$$l_3 P(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds$$

$$C_3 = \frac{b - a_1 \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_1(s, \varepsilon) ds - a_2 \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_2(s, \varepsilon) ds - \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^2 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds}{1 + \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^2 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_3(s, \varepsilon) ds}$$

$$\delta(\varepsilon) = 1 + \sum_{j=0}^2 \frac{\beta_j}{\varepsilon} \int_0^2 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_3(s, \varepsilon) ds$$

VI. $\delta(\varepsilon) \neq 0$ шарты орындалсын.

Теорема 2. Егер I-VI шарттар орындалса, онда сингулярлы ауытқыған (1), (2) есептің $y(t, \varepsilon)$ шешімі және оның туындылары үшін $0 \leq t \leq 1$ кесіндісінде $\varepsilon \rightarrow 0$ кезде келесі асимптотикалық бағалау дұрыс болады:

$$\begin{aligned} |y(t, \varepsilon)| &\leq C \left[\varepsilon |a_1| + |a_2| + |b| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right], \\ |y'(t, \varepsilon)| &\leq C \left[\varepsilon |a_1| + |a_2| + |b| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| + \exp(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}) \cdot \left(|a_1| + |a_2| + |b| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) \right], \\ |y''(t, \varepsilon)| &\leq C \left[\varepsilon |a_1| + |a_2| + |b| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| + \exp(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}) \cdot \left(|a_1| + |a_2| + |b| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

2 теоремадан $y^{(i)}(0, \varepsilon) = O(1)$, $i = \overline{0, 2}$, $y'''(0, \varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon})$, $\varepsilon \rightarrow 0$ екендігі көрінеді. Олай болса,

анықтама бойынша, бұл дегеніңіз (1), (2) шекаралық есебінің $t=0$ нүктесінде екінші ретті бастапқы секіріске ие болады деген сөз. осындай мәселені интегралды дифференциалдық тендеулер үшін зерттелген [2], [3], [4], [5].

Келесі өзгертілген ауытқымаған интегралды дифференциалдық

$$L_0 \bar{y}(t) \equiv A(t) \bar{y}''(t) + B(t) \bar{y}'(t) + C(t) \bar{y} = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^2 H_i(t, x) \bar{y}^{(i)}(x) dx \quad (13)$$

тендеуін төмендегі шекаралық шарттармен қарастырайық:

$$l_2 \bar{y}(t) = \sum_{j=0}^1 \alpha_j y^{(j)}(0) = a_2, \quad l_3 \bar{y}(t) = \sum_{j=0}^2 \beta_j y^{(j)}(1) = b \quad (14)$$

Теорема 3. Егер I-VI шарттар орындалса, ондасингулярлы ауытқыған (1), (2) есептің $y(t, \varepsilon)$ шешімімен ауытқымаған (13), (14) есептің шешімі $\bar{y}(t)$ арасындағы айырымды $\varepsilon \rightarrow 0$ кезде келесі түрде асимптотикалық бағалауын аламыз:

$$\left| y^{(i)}(t, \varepsilon) - \bar{y}^{(i)}(t) \right| \leq C\varepsilon, \quad i = 0, 1, \quad \left| y''(t, \varepsilon) - \bar{y}''(t) \right| \leq C \left[\varepsilon + \exp(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}) \right], \quad (15)$$

мұндағы $C > 0 - \varepsilon$ - нан тәуелсіз тұрақты.

(15) бағалаудан $y(t, \varepsilon)$, $y'(t, \varepsilon)$, $y''(t, \varepsilon)$ шешімі үшін келесі шектік көшу орындалады:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(i)}(t, \varepsilon) &= \bar{y}^{(i)}(t), \quad i = 0, 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y''(t, \varepsilon) &= \bar{y}''(t), \quad 0 < t \leq 1. \end{aligned}$$

1. Дауылбаев М.К. Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. Учебное пособие. Алматы, 2009 г. Изд-во «Қазақуниверситеті», 190 с.
2. Касымов К.А. Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. Алматы: Изд-во Санат, 1997. 195 с.
3. Kasymov K.A., Nurgabyly D.N. (2003) Asymptotic Behavior of Solutions of Linear Singularly Perturbed General Separated Boundary-Value Problems with Initial Jump.

Ukrainian Methmathical Journal. Vol. 55, No.11, pp. 1777-1792.

4. Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Москва – Минск, 1999. – Т. 35, № 6. – С. 822 – 830.
5. Дауылбаев М.К., Атахан Н. //Асимптотические оценки решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. //Материалы международной научно-практической конференции "Информационные технологии: инновации в науке и образовании". Актобе 2015. С. 147-150.

Аннотация. В работе построена фундаментальная система решений, начальные и граничные функции сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения, получены их асимптотические оценки. С помощью начальных и граничных функции получена явная аналитическая формула решений. Построена измененная невозмущенная краевая задача, показано сходимость решения сингулярно возмущенной краевой задачи к решению измененной невозмущенной краевой задачи.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, интегро-дифференциальное уравнение, малый параметр, начальный скачок.

Abstract. In this paper we construct a fundamental system of solutions, initial and boundary functions singularly perturbed homogeneous differential equation, obtained their asymptotic estimates. By using initial and boundary functions we have analytical formula of solutions. Changed unperturbed boundary value problem is constructed. Solution of the given singular perturbed boundary value problem tends to the solution of the changed unperturbed boundary value problem.

Keywords: singularly perturbation, integro-differential equations, small parameter, initial jump.

УДК 517.958

Н.К. Аширбаев¹, А.Б. Иманбетова¹, Р.Б. Бекмолдаева¹, J. Vanaš²

О РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭРДЕЛИ-КОБЕРА

(¹ г. Шымкент, Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова,

² Department of Mathematics, Rzeszow University of Technology, Poland)

Аннотация. В статье рассмотрены некоторые классы интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса в классическом банаховом пространстве. Интегральное уравнение Эрдели-Кобера рассматривается как частный случай интегрального уравнения типа Вольтерра-Стилтьеса. Приведены результаты исследования о разрешимости нелинейных интегральных уравнений Эрдели-Кобера. Полученный результат исследования описан в виде теоремы. Доказана теорема о существовании решений нелинейного интегрального уравнения Эрдели-Кобера.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, интегральное уравнение Эрдели-Кобера, интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса, принцип Шаудера, решение интегрального уравнения Эрдели-Кобера.

Нами были изучены разрешимость нелинейных интегральных уравнений Эрдели-Кобера [1-2]. Подход для изучения нелинейных интегральных уравнений Эрдели-Кобера зависит от рассмотрения некоторого класса интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса такого типа, что упомянутые интегральные уравнения оказываются частными

случаями интегральных уравнений типа Вольтерра-Стилтьеса. Такой подход позволяет проводить исследования в более удобном виде и получить более общие результаты.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса:

$$x(t) = a(t) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{\alpha-1} f(t, s, x(s)) d_s g(t, s), \quad (1)$$

где $g(t, s) = t^{\alpha m} - (t^m - s^m)^\alpha$, $(t, s) \in \Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq 1\}$. В исследованиях будем придерживаться сформулированных ниже гипотез [3]:

(I) $a \in C(I)$, где $C(I)$ - классическое банаховое пространство, $I = [0, 1]$ - единичный отрезок;

(II) Функция $g(t, s) = g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на треугольнике $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq 1\}$, где \mathbb{R} - множество действительных чисел;

(III) Функция $s \rightarrow g(t, s)$ с ограниченным изменением на отрезке $[0, t]$, для каждого фиксированного $t \in I$;

(IV) Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t_1, t_2 \in I$ таких, что $t_1 < t_2$ и $t_2 - t_1 \leq \delta$ выполняется неравенство:

$$\bigvee_{s=0}^{t_1} [g(t_2, s) - g(t_1, s)] \leq \varepsilon; \quad (2)$$

(V) $g(t, 0) = 0$ для любого $t \in I$;

(VI) $f : \Delta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такая, что $|f(t, s, x)| \leq \phi(|x|)$ для всех $(t, s) \in \Delta$ и для каждого $x \in \mathbb{R}$, где $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ - неубывающая функция, где \mathbb{R}_+ - множество действительных чисел интервала $[0, \infty)$.

Для функции $g = g(t, s)$ налагаются следующие условия [3]:

Лемма 1. Пусть g удовлетворяет предположениям (II) - (V). Тогда функция

$$q \rightarrow \bigvee_{s=0}^q g(t, s) \quad (3)$$

непрерывна на отрезке $[0, t]$ для любого фиксированного $t \in I$.

Лемма 2. Пусть предположения (II) - (IV) выполнены. Тогда для произвольно фиксированного числа $t_2 \in I (t_2 > 0)$ и для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что если $t_1 \in I, t_1 < t_2$ и $t_2 - t_1 \leq \delta$, то

$$\bigvee_{s=t_1}^{t_2} g(t_2, s) \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Лемма 3. При предположениях (II) - (IV), функция

$$t \rightarrow \bigvee_{s=0}^t g(t, s) \quad (5)$$

непрерывна на отрезке I .

Кроме того, на основании леммы 3 можем заключить, что существует положительная постоянная K такая, что

$$K = \sup \left\{ \bigvee_{s=0}^t g(t, s) : t \in I \right\}. \quad (6)$$

На основании вышеизложенного сформулируем последнее предположение:

(VII) Существует положительное решение r_0 неравенства

$$\|a\| + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} K \phi(r) \leq r. \quad (7)$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Основной результат работы, которое мы получили заключается в следующей сформулированной ниже теореме.

Теорема 1. В предположениях (I) - (VII) существует по крайней мере одно решение (1), принадлежащее шару B_{r_0} пространства $C(I)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор F , определенный на пространстве $C(I)$ следующим образом:

$$(Fx)(t) = a(t) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^p f(t, s, x(s)) d_s g(t, s) \quad (8)$$

для $x \in C(I)$ и произвольно фиксированного $t \in I$.

Тогда, принимая во внимание, введенные предположения мы заключаем, что функция Fx определена.

Для доказательства теоремы введем две функции $M = M(\varepsilon)$ и $N = N(\varepsilon)$, определенные следующим образом:

$$M(\varepsilon) = \sup \left\{ \int_{s=0}^{t_1} [g(t_2, s) - g(t_1, s)] : t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2, t_2 - t_1 \leq \varepsilon \right\},$$

$$N(\varepsilon) = \sup \left\{ \int_{s=t_1}^{t_2} g(t_2, s) : t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2, t_2 - t_1 \leq \varepsilon \right\}. \quad (9)$$

Заметим, что в силу предположения (IV) и леммы 2, легко сделать вывод, что $M(\varepsilon) \rightarrow 0$ и $N(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теперь, выберем произвольно функцию $x \in C(I)$ и число $\varepsilon > 0$. Далее, фиксируем $t_1, t_2 \in I$ такие, что $|t_2 - t_1| \leq \varepsilon$. Без потери общности можно считать, что $t_1 < t_2$. Тогда, имея в виду наши предположения и леммы 1 и 2 [4], мы имеем

$$\begin{aligned} & |(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)| \leq |a(t_2) - a(t_1)| \\ & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_2} s^p f(t_2, s, x(s)) d_s g(t_2, s) - \int_0^{t_1} s^p f(t_1, s, x(s)) d_s g(t_1, s) \right| \\ & \leq \omega(a, \varepsilon) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_2} s^p f(t_2, s, x(s)) d_s g(t_2, s) - \int_0^{t_2} s^p f(t_1, s, x(s)) d_s g(t_2, s) \right| \\ & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_2} s^p f(t_1, s, x(s)) d_s g(t_2, s) - \int_0^{t_1} s^p f(t_1, s, x(s)) d_s g(t_2, s) \right| \\ & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} s^p f(t_1, s, x(s)) d_s g(t_2, s) - \int_0^{t_1} s^p f(t_1, s, x(s)) d_s g(t_1, s) \right| \\ & \leq \omega(a, \varepsilon) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_2} s^p [f(t_2, s, x(s)) - f(t_1, s, x(s))] d_s g(t_2, s) \right| \\ & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{t_1}^{t_2} s^p f(t_1, s, x(s)) d_s g(t_2, s) \right| + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} s^p f(t_1, s, x(s)) d_s [g(t_2, s) - g(t_1, s)] \right| \\ & \leq \omega(a, \varepsilon) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} s^p |f(t_2, s, x(s)) - f(t_1, s, x(s))| d_s \left(\int_{q=0}^s g(t_2, q) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} s^p |f(t_1, s, x(s))| d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t_2, q) \right) \\
 & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} s^p |f(t_1, s, x(s))| d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} [g(t_2, q) - g(t_1, q)] \right) \\
 & \leq \omega(a, \varepsilon) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} s^p \omega_{\|x\|}^1(f, \varepsilon) d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t_2, q) \right) \\
 & + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} s^p \phi(\|x(s)\|) d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t_2, q) \right) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} s^p \phi(\|x(s)\|) d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} [g(t_2, q) - g(t_1, q)] \right) \\
 & \leq \omega(a, \varepsilon) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \omega_{\|x\|}^1(f, \varepsilon) \int_0^{t_2} d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t_2, q) \right) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi(\|x\|) \int_{t_1}^{t_2} d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t_2, q) \right) \\
 & \quad + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi(\|x\|) \int_0^{t_1} d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} [g(t_2, q) - g(t_1, q)] \right) \\
 & = \omega(a, \varepsilon) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \omega_{\|x\|}^1(f, \varepsilon) \overset{t_2}{V}_{s=0} g(t_2, s) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi(\|x\|) \overset{t_2}{V}_{s=t_1} g(t_2, s) + \\
 & \quad + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi(\|x\|) \overset{t_1}{V}_{s=0} [g(t_2, s) - g(t_1, s)] \\
 & \leq \omega(a, \varepsilon) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left[K \omega_{\|x\|}^1(f, \varepsilon) + \phi(\|x\|) N(\varepsilon) + \phi(\|x\|) M(\varepsilon) \right], \tag{10}
 \end{aligned}$$

где мы обозначили:

$$\omega_r^1(f, \varepsilon) = \sup \left\{ |f(t_2, s, x) - f(t_1, s, x)| : t_1 t_2 \in I, |t_2 - t_1| \leq \varepsilon, x \in [-r, r] \right\}. \tag{11}$$

Кроме того, заметим, что в силу равномерной непрерывности функции f на множестве $\Delta \times [-\|x\|, \|x\|]$ мы заключаем, что $\omega_{\|x\|}^1(f, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Более того, ссылаясь на предположение (I) и свойства функций $M(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$, определенных (9), мы заключаем, что функция Fx непрерывна на отрезке I . Это означает, что оператор F преобразует $C(I)$ в себя.

Теперь покажем, что оператор F непрерывен на пространстве $C(I)$.

Для этого зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$ и возьмем $x, y \in C(I)$ так, что $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Тогда, в силу лемм 1 и 2 [4], для произвольно фиксированного $t \in I$ получаем

$$\begin{aligned}
 |(Fx)(t) - (Fy)(t)| & \leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t s^p f(t, s, x(s)) d_s g(t, s) - \int_0^t s^p f(t, s, y(s)) d_s g(t, s) \right| \\
 & \leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^p |f(t, s, x(s)) - f(t, s, y(s))| d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t, q) \right) \tag{12}
 \end{aligned}$$

Обозначая через P число

$$P = \|x\| + \varepsilon \tag{13}$$

и вводя обозначение

$$\omega_p(f, \varepsilon) = \sup \left\{ |f(t, s, x) - f(t, s, y)| : (t, s) \in \Delta, x, y \in [-P, P], |x - y| \leq \varepsilon \right\} \tag{14}$$

получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} |(Fx)(t) - (F_x)(t)| &\leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \omega_p(f, \varepsilon) \int_0^t s^p d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t, q) \right) \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \omega_p(f, \varepsilon) \int_0^t d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t, q) \right) \leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \omega_p(f, \varepsilon) \overset{t}{V}_{s=0} g(t, s) \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} K \omega_p(f, \varepsilon). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь, применяя тот факт, что функция f равномерно непрерывна на множестве $\Delta \times [-P; P]$, можно сделать вывод, что $\omega_p(f, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Комбинируя этот факт с оценкой (14), получаем, что оператор F непрерывен на пространстве $C(I)$. Далее, зафиксируем произвольно $x \in C(I)$. Тогда, рассуждая, как и выше, для $t \in I$, мы получаем

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq |a(t)| + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t s^p f(t, s, x(s)) d_s g(t, s) \right| \\ &\leq \|a\| + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^p |f(t, s, x(s))| d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t, q) \right) \\ &< \|a\| + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi(\|x\|) \int_0^t d_s \left(\overset{s}{V}_{q=0} g(t, q) \right) \leq \|a\| + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \phi(\|x\|) \overset{t}{V}_{s=0} g(t, s) \leq \|a\| + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} K \phi(\|x\|). \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь, ссылаясь на предположение (VII), мы заключаем, что существует число $r_0 > 0$ такое, что оператор F преобразует шар B_{r_0} в себя.

Далее выберем число $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольные числа $t_1, t_2 \in I$ таким образом, что $t_1 < t_2$ и $t_2 - t_1 \leq \varepsilon$. Тогда для произвольного фиксированного элемента $x \in B_{r_0}$, с учетом оценки (10), получим

$$|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)| \leq \omega(a, \varepsilon) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left[K \omega_{r_0}^1 + \phi(r_0) N(\varepsilon) + \phi(r_0) M(\varepsilon) \right]. \quad (17)$$

Затем, на основе свойств функций $\varepsilon \rightarrow \omega(a, \varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow \omega_{r_0}^1(f, \varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow M(\varepsilon)$ и $\varepsilon \rightarrow N(\varepsilon)$ из (16) и критерия Арцела - Асколи относительной компактности в пространстве $C(I)$, заключаем, что подмножество $F(B_{r_0})$ шара B_{r_0} относительно компактно в пространстве $C(I)$. Таким образом, применяя принцип Шаудера неподвижной точки, заключаем, что оператор F имеет по крайней мере одну неподвижную точку, принадлежащую шару B_{r_0} . Очевидно, что функция $x = x(t)$ является решением уравнения (1).

1. Erdelyi A. On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms// The Quarterly Journal of Mathematics, 1940. –Vol. 11. –P. 293–303.
2. Erdelyi A. and Kober H. Some remarks on Hankel transforms// The Quarterly Journal of Mathematics, 1940. –Vol. –P. 212–221.
3. Banas J. and Zajac T. A new approach to the theory of functional integral equations of fractional order // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011. –Vol. 375. – P.375–387.
4. Аширбаев Н.К., Нысанов Е.А., Бекмолдаева Р.Б., Banas J. Нелинейное интегральное уравнение Вольтерра – Стильтеса и его частные случаи // Вестник КазНПУ им.Абая, серия «физико-математические науки». – 2015. –№3. –С. 26-32.

Аңдатпа. Бұл мақалада классикалық Банах кеңістігіндегі Вольтерр-Стилтьес типті сызықты емес интегралдық теңдеулер қарастырылды. Эрдели-Кобер интегралдық теңдеуі Вольтерр-Стилтьес типті сызықты емес интегралдық теңдеудің дербес жағдайы ретінде қарастырылды. Эрдели-Кобер сызықты емес интегралдық теңдеуінің кемінде бір шешімінің бар болуы зерттелді. Зерттеу нәтижесі теорема түрінде қорытылды. Эрдели-Кобер сызықты емес интегралдық теңдеуінің шешімі туралы теореманың дәлелденуі келтірілді.

Түйін сөздер: сызықты емес интегралдық теңдеулер, Эрдели-Кобер интегралдық теңдеуі, Вольтерр-Стилтьес интегралдық теңдеуі, Шаудер принципі, Эрдели-Кобер интегралдық теңдеуінің шешімі.

Abstract. We have considered some classes of integral equations of the Volterra-Stieltjes in classical Banach space. Integral equation Erdelyi-Kober is considered as a special case of an integral equation of Volterra-Stieltjes. We present the results of the study. The result of research is described in the form of a theorem. We give the proof of the theorem.

Keywords: nonlinear integral equation, integral equation of Erdelyi-Kober, integral equation of Volterra-Stieltjes, Schauder principle, the solution of the integral equation Erdelyi-Kober.

УДК 517.9

Ж.Д. Байшемиров^{1,2}, А.Б. Жанбырбаев^{1,2}, Т. Фархадов^{1,2}

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СМАЧИВАЕМОСТИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫМИ ВЕЩЕСТВАМИ

(г. Алматы, ¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая,

²Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК)

Аннотация. В данной работе рассматривается многокомпонентная многофазная модель вытеснения с использованием технологии «Щелочь–ПАВ–Полимер». Эта модель описывает синергетические эффекты в виде функции межфазного натяжения, сопротивления потоку пены в зависимости от концентрации ПАВ и нефти, капиллярного давления, проницаемости. Уравнениями баланса являются уравнение сохранения массы для каждого химического компонента, уравнение давления водной фазы и уравнение сохранения энергии. Основными моделируемыми физическими переменными и явлениями являются плотность, вязкость, зависящая от скорости дисперсии, молекулярная диффузия, адсорбция, межфазное натяжение, относительная проницаемость, капиллярное давление. Мобилизация фазы описывается через захваченную насыщенность фазы и зависимостью относительной проницаемости от числа захвата.

Ключевые слова: многокомпонентная многофазная модель, проницаемость, поверхностно-активные вещества, концентрация, насыщенность.

Изменение смачиваемости моделируется с изменениями относительной фазовой проницаемости. Относительные фазовые проницаемости вычисляются показательной функцией. Считается, что относительные фазовые проницаемости являются однозначными функциями только соответствующих насыщенностей. Последнее предположение подтверждается экспериментальными данными, измеренными для смеси ПАВ/нефть/рассол в керне песчаника Береа [1, 2]:

$$k_{ri} = k_{ri}^0 \bar{S}_i^{n_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

где l - обозначает фазу вода/нефть/микроэмульсия; k_{rl}^0 является относительной проницаемостью фазы l в конечной точке; n_l - показатель относительной проницаемости фазы l ; и \bar{S}_l - нормированная насыщенность фазы l , вычисляемой следующим образом:

$$\bar{S}_l = \frac{S_l - S_{lr}}{1 - \sum_{l=1}^3 S_{lr}}, \quad (l = 1, 2, 3)$$

где S_l - насыщенность фазы l ; а S_{lr} - остаточная насыщенность фазы l . Как упоминалось ранее, в дополнение к эффекту изменения смачиваемости, поверхностно-активные вещества также уменьшают межфазное натяжение между нефтяной и водной фазами и помогают мобилизации нефти. Этот эффект моделируется посредством безразмерного числа, называемого числом захвата, который является комбинацией капиллярного числа и числа связи, и может адекватно моделировать совместное влияние вязких, капиллярных сил и силы тяжести в трех измерениях [3, 4]. Поскольку поверхностно-активные вещества входят в блок сетки, они уменьшают поверхностное натяжение, и в результате, число захвата возрастает.

Детали математической модели изменения смачиваемости поверхностно-активными веществами в трещиноватых коллекторах описаны в работе [5].

Проверка адекватности математической модели *химических методов увеличения нефтеотдачи* с использованием поверхностно-активных веществ.

Для проверки модели смачиваемости и ее реализации в симуляторе химического заводнения, были использованы лабораторные эксперименты впитывания щелочных/ПАВ, проведенные Хирасаки и Чжан [6]. Эксперименты проводились с пластовым рассолом, сырой нефтью и основными образцами доломитового пласта с поля Йетса [7]. Свойства керна и жидкости приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Свойства керна, использованные для эксперимента впитывания

Параметры	Значение	Параметры	Значение
Диаметр (дюйм)	1.5	Время в морской воде (дни)	8
Длина (дюйм)	3	Добыча в морской воде (% ООП)	0
Пористость(%)	24	ПАВ	CS-330+TDA-4PO
Проницаемость (мД)	122	Концентрация ПАВ (wt %)	0.025+0.025
Морская вода	5.815 г/л NaCl	Na ₂ CO ₃ (M)	0.3
Вязкостьсыройнефти (сП)	19	ВремяПАВ (дни)	138
Начальнаянефтенасыщенность	0.68	ДобычаПАВ (% ООП)	44
Выдержка	80°C 24 ч	Остаточная нефтенасыщенность	0.38

Проба керна была заводнена нефтью до достижения остаточной водонасыщенности и выдержана в течение 24 часов при 80°C. Нефтеотдача была измерена путем помещения нефтенасыщенного керна в камеру теста впитывания, заводненную пластовым рассолом или щелочным/ПАВ раствором. Раствор ПАВ представляет собой смесь 0,025% веса CS-330 (C12-ЗЕО-сульфат) и 0,025% веса TDA-4PO-сульфата (C13-4PO-сульфат) с добавленным 0,3 молярным карбонатом натрия для уменьшения адсорбции ПАВ. Щелочность карбоната натрия также служит причиной

образования ПАВ (мыло) на месте, реагируя с нефтенowymi кислотами в сырой нефти Йетса.

3D численная модель была создана для моделирования эксперимента и проверки достоверности модели смачиваемости. Однородная декартова сетка с $7 \times 7 \times 7$ блоками была создана, чтобы моделировать и породу, и жидкость в ячейке, окружающей керном. В центральной $5 \times 5 \times 5$ части сетки были заданы петрофизические свойства, представляющие породу (таблица 2), а в остальных блоках были заданы свойства, представляющие ячейки впитывания (т.е., пористость 1,0, проницаемость 1000 Д, и нулевое капиллярное давление). Начальная концентрация поверхностно-активного вещества для модели впитывания, в которой темно-серая область (нулевая начальная концентрация ПАВ) состоит из сеточных блоков, содержащих породу, а белая область (начальная концентрация ПАВ 0,05%) состоит из сеточных блоков, которые не содержат породу, также показана на рисунке 1. Пористость, проницаемость и начальная нефтенасыщенность приведены в таблице 1, и параметры относительной фазовой проницаемости и капиллярного давления блоков сетки, содержащих породу, даны в таблице 2. Трудность этой модели следует из факта, что она не имеет каких-либо скважин, чтобы создать поток, конвективные потоки чрезвычайно маленькие, и есть резкие изменения свойств между блоками сетки, содержащих и не содержащих породу. Вертикальное поперечное сечение через центр модели показано на рисунке 1.

Таблица 2 - Параметры относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления (моделирование ячейки пропитывание)

Параметры	Нефтесмачиваемая		Водосмачиваемая	
	Нефть	Вода	Нефть	Вода
Остаточная насыщенность	0.38	0.32	0.38	0.32
Относительная фазовая проницаемость в конечной точке	0.59	0.23	1	0.15
Степень относительной фазовой проницаемости	3.3	2.9	2	2
T	1,865	59,074	59,074	1,865
C_{PC}	-5		5	
E_{PC}	2		2	
Коэффициент масштабирования смачиваемости(ω)	0.5			

Вначале модель была запущена для определения нефтеотдачи на основе предположения, что смачиваемость не изменится от исходных нефтесмачиваемых условий. Она моделирует только эффект поверхностно-активного вещества и мыла на сокращение межфазного натяжения и мобилизации нефти. Концентрация поверхностно-активного вещества в блоках сетки, содержащих гидрофобный керн, вначале увеличивает (прежде всего, из-за эффективной молекулярной диффузии) и влияет на начало добычи нефти из керна, но с очень небольшим влиянием на суммарное извлечение нефти. Коэффициент эффективной молекулярной диффузии/дисперсии, равной $6,5 \times 10^{-5}$ м²/день, был использован для моделирования. На основе опубликованных данных Лама и Шехтера [8], ожидаемая величина коэффициента молекулярной диффузии ПАВ на несколько порядков меньше, чем в использованной модели. Поэтому, значение, представленное здесь, может быть описано как значение коэффициента псевдо-диффузии/дисперсии. После того, как концентрация поверхностно-активного вещества в сеточном блоке превышает критической

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

концентрации мицеллы, формируется микроэмульсия, межфазное натяжение уменьшается, и капиллярное давление снижается.

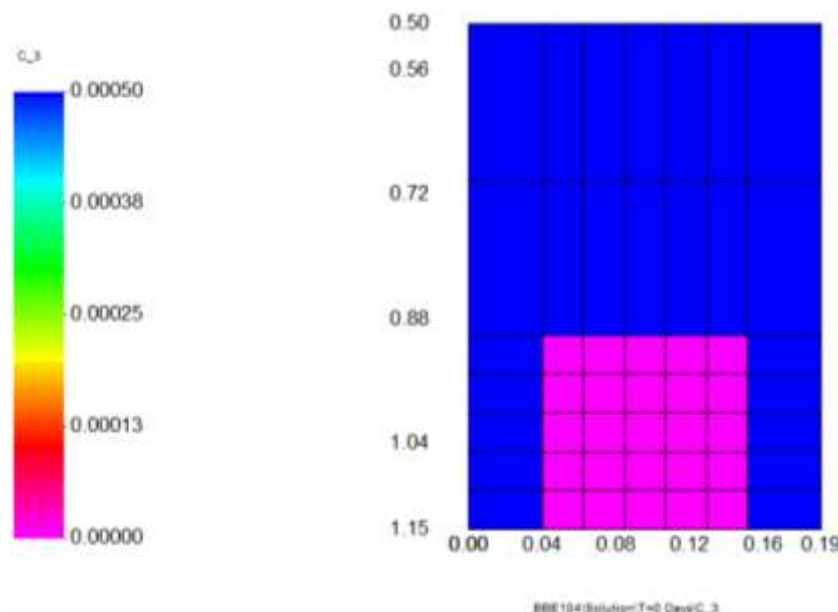


Рисунок 1. Начальная концентрация поверхностно-активного вещества (объемная доля) для экспериментальной модели впитывания

Этот процесс позволяет медленного впитывания раствора поверхностно-активного вещества и вытеснения нефти. Согласно полученным численным результатам, максимальная добыча нефти - приблизительно 24% ООП со временем отклика, по крайней мере, на порядок медленнее по сравнению с экспериментальными результатами. На основании этого результата ясно, что дополнительные механизмы могут применяться для увеличения нефтеотдачи.

Далее, симулятор был использован для моделирования комбинированных эффектов сокращения межфазного натяжения и изменения смачиваемости, оказанный раствором ПАВ/щелочь, на нефтеотдачу. Предполагалось, что измененное состояние смачиваемости - водосмачиваемость с параметрами относительной фазовой проницаемости и капиллярного давления, как показано в таблице 2. В качестве коэффициента интерполяции для этого моделирования была взята постоянная величина, равная 0,5. Получено довольно хорошее сравнение модельной и экспериментальной нефтеотдачи. Распределение концентрации поверхностно-активного вещества и нефтенасыщенности приведены на рисунках 2 и 3, соответственно, после 10 дней впитывания.

Для численного исследования изменения смачиваемости поверхностно-активными веществами была рассмотрена тестовая задача в трещиноватом коллекторе на вычислительной сетке с количеством узлов $31 \times 11 \times 3$ (см. Рис. 4). Проводились численные расчеты с 4 трещинами в направлении x , 2 трещинами в направлении y и 2 трещинами в направлении z . Результаты этой модели приведены на рисунках 5-7 для диапазона 0-4 PV для соответствующих переменных в виде интегральных кривых.

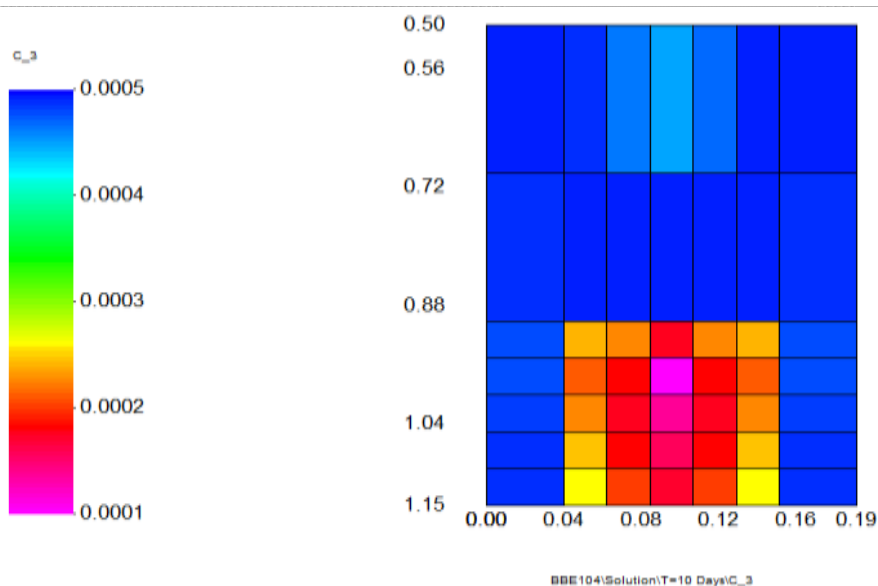


Рисунок 2. Концентрация поверхностно-активного вещества (объемная доля) после 10 дней впитывания

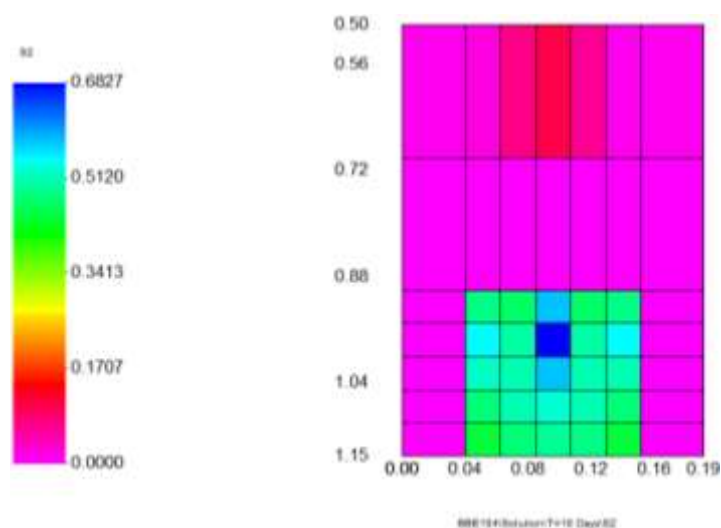


Рисунок 3. Распределение нефтенасыщенности после 10 дней впитывания

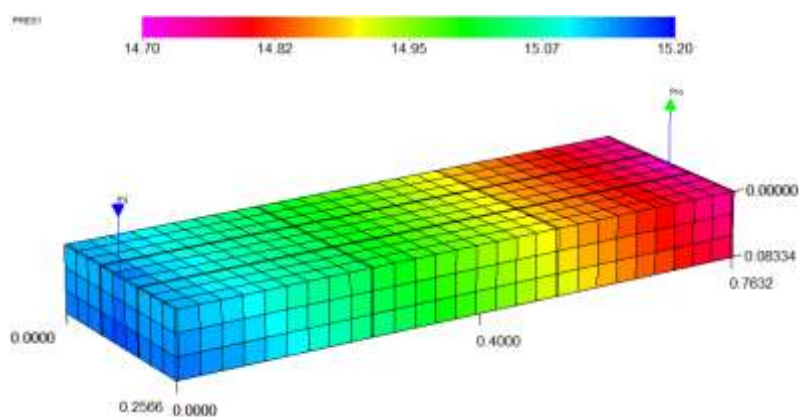


Рисунок 4. Область вычисления с распределением давления

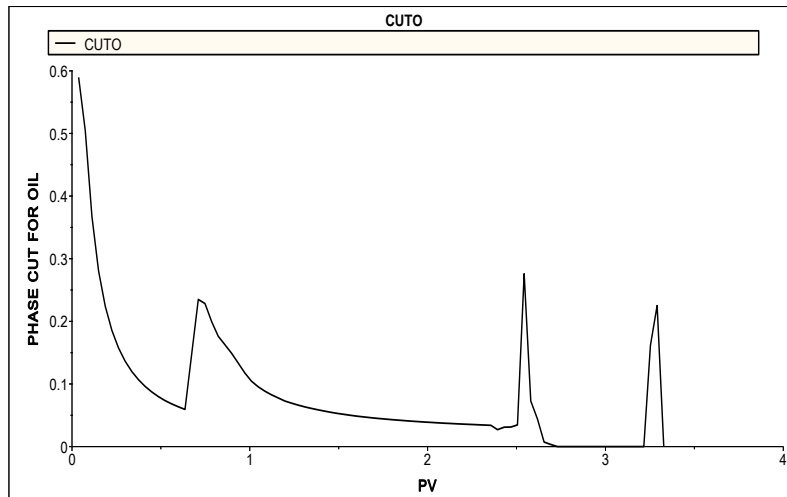


Рисунок 5. Зависимость интенсивности нефтедобычи от суммарного нагнетенного объема пор

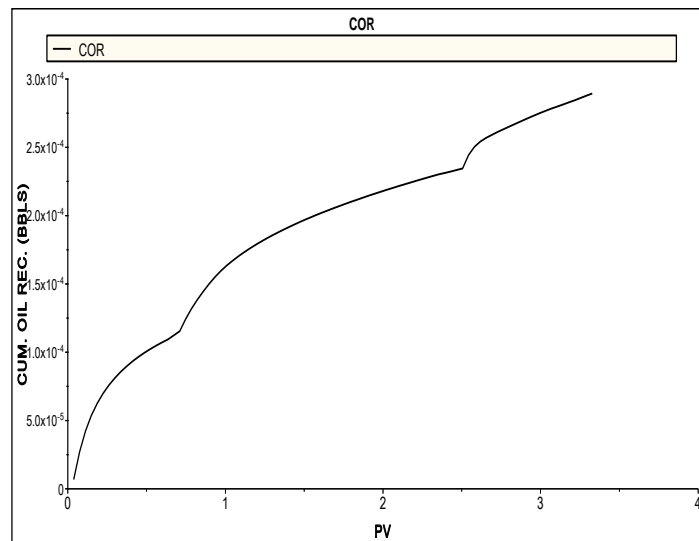


Рисунок 6. Зависимость накопленной нефтеотдачи от суммарного нагнетенного объема пор

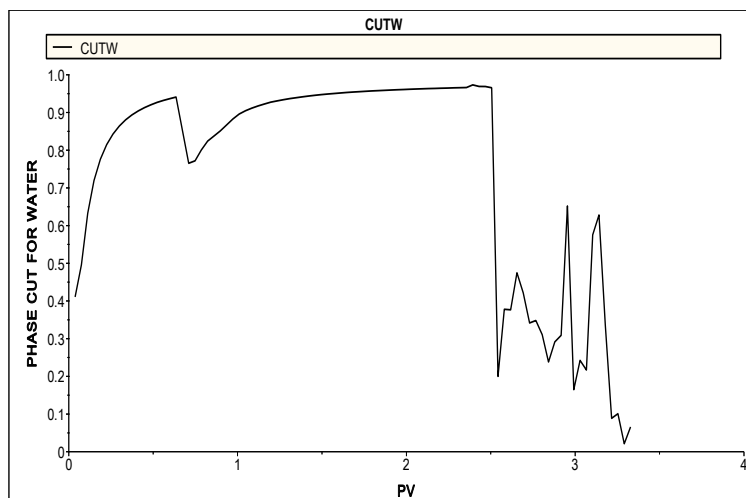


Рисунок 7. Зависимость обводненности от суммарного нагнетенного объема пор

Результат дает гораздо лучшее согласие с лабораторными данными по сравнению с результатом, полученным для случая без изменения смачиваемости. Моделирование с изменением смачиваемости имеет более быстрый эффект на нефтедобычу и более высокую суммарную нефтеотдачу [9]. Этот результат получается из-за увеличения относительной проницаемости нефти и изменения капиллярного давления от отрицательного до положительного в процессе изменения смачиваемости. Поэтому, раствор ПАВ впитывается в сеточные блоки, содержащие породу, и вытесняет больше нефти, прежде чем снижение межфазного натяжения уменьшит капиллярное давление до нуля.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК: грант №0128/ГФ4.

1. Delshad, Mojdeh, Mohammad Delshad, G. A. Pope and L.W. Lake. 1987. "Two- and Three-Phase Relative Permeabilities of Micellar Fluids," SPE Formation Evaluation., Sept.
2. Delshad, Mohammad. 1990. "Trapping of Micellar Fluids in Berea Sandstone," Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin.
3. Jin, M. 1995. "A Study of Nonaqueous Phase Liquid Characterization and Surfactant Remediation," Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin.
4. Delshad, Mojdeh, Pope G.A., Sepehrnoori K. A Compositional Simulator for Modeling Surfactant Enhanced Aquifer Remediation. Journal of Contaminant Hydrology, №23, 1996. –p.303-327.
5. Delshad M., Pope G.A., Sepehrnoori K. UTCHEM Version-9.0, Technical Documentation, Center for Petroleum and Geosystems Engineering. The University of Texas at Austin, Texas, July 2000.
6. Hirasaki G., Zhang D.L. Surface Chemistry of Oil Recovery From Fractured, Oil-Wet, Carbonate Formation. SPE J. 9 (2), 2004. –p.151–162.
7. Yang, H.D. and Wadleigh, E.E. 2000. "Dilute Surfactant IOR—Design Improvement for Massive, Fractured Carbonate Applications." paper SPE 59009 presented at The SPE International Petroleum Conference and Exhibition in Mexico, Villahermosa, Mexico, February 1–3.
8. Lam, A. and Schechter, R.S. 1987. "The Theory of Diffusion in Microemulsion." J. of Colloid and Interface Science 120 (1): 56–63.
9. Бердышев А.С., Бекбауов Б.Е., Байшемиров Ж.Д. Численное исследование полимерного заводнения с использованием последовательного неявного метода решения химической композиционной модели. // Вестник КазНПУ имени Абая. Серия физико-математических наук. №2(50). 2015г. – С.37-43.

***Аңдатпа.** Мақалада «сілті– беттік белсенді заттектер ПАВ–Полимер» технологиясын пайдалану арқылы ығыстырудың көпкомпонентті көпфазалы моделінің құрылымы қарастырылады. Бұл модель фаза аралық шиелініс функция түріндегі синергетикалық әсерлерді, ББЗ (беттік- белсенді заттар) және мұнай концентрациясына байланысты көбік ағынына кедергісін, капиллярлық қысымы мен өткізгіштігін сипаттайды. Баланс теңдеуі әрбір химиялық компоненттің массасының сақталу теңдеуі, су фазасы қысымы теңдеуі мен энергияның сақталуы теңдеуі болып табылады. Физикалық айнымалылар мен құбылыстардың негізгі үлгі ретінде тығыздығы, тұтқырлығы, дисперсия жылдамдығына тәуелділігі, молекулярлық диффузия, адсорбция, фаза аралық шиелінісі, салыстырмалы өткізгіштігі, капиллярлық қысым болып табылады. Фаза мобилизациясы қамтылған қаныққан фазалар және оладың санынан салыстырмалы өткізгіштігіне тәуелділігімен сипатталады.*

***Түйін сөздер:** көпкомпонентті көпфазалы модель, өткізгіштігі, беттік- белсенді заттар, концентрация, қаныққандық.*

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Abstract. This paper the model of multicomponent multiphase displacement using "alkali-surfactant-polymer" technology. This model describes the synergistic effects as a function of the interfacial tension, the flow resistance of the foam depending on the concentration of surfactant and oil pressure capillary permeability. Balance equation is the equation of conservation of mass for each chemical component, the aqueous phase pressure equation and the equation of conservation of energy. The main simulated physical variables and phenomena are the density, viscosity, depending on the rate of dispersion, molecular diffusion, adsorption, interfacial tension, relative permeability, capillary pressure. Mobilization phase described by captured saturation phase and the dependence of the relative permeability of the number of seizure.

Keywords: multicomponent multiphase model, permeability, surfactants, concentration, saturation.

УДК 37.014

М.Ж. Бекпатшаев

О НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОШИБКАМИ В ДАННЫХ

(г.Алматы, Казахский национальный педагогический университет имени Абая)

Аннотация. При решении некорректных задач существенным является выделение некоторого компакта из более расширенного пространства по тем или иным свойствам исходного решения. В данной работе рассмотрен случай определения множества из конечного набора выпуклых тел по значению функционала на решении операторного уравнения $Ax = y$, где x – искомый, а y – данный элемент сепарабельных гильбертовых пространств X и Y соответственно, $A: X \rightarrow Y$ линейный ограниченный оператор, характеризующий измерительный процесс. В статье изложена теорема о существовании оптимальной решающей процедуры решения этой задачи.

Ключевые слова: некорректная задача, решающая процедура, случайная ошибка, функция риска.

Как известно [1 – 4], при решении некорректных задач существенным является выделение некоторого компакта из более расширенного пространства по тем или иным свойствам исходного решения. В данной работе рассмотрен случай определения множества из конечного набора выпуклых тел по значению функционала на решении операторного уравнения

$$Ax = y, \quad (1)$$

где x – искомый, а y – данный элемент сепарабельных гильбертовых пространств X и Y соответственно, $A: X \rightarrow Y$ линейный ограниченный оператор, характеризующий измерительный процесс (оператор рассеивания [7]).

Пусть вместе точного значения элемента $X \in Y$ имеется его приближенное значение

$$\tilde{y} = y + \xi \quad (2)$$

Здесь ξ – реализация слабой случайной величины с Пуассоновской мерой μ_ξ с нулевым средним

$$\mathcal{M}[\xi, u] = \int_Y [z, u] \mu_\xi(dz) \equiv 0$$

и ограниченным корреляционным оператором $R: Y \rightarrow Y$.

$$[Ru, v] M[\xi, u][\xi, v] = \int_Y [y, u][y, v] \mu_\xi(dy),$$

в измеримом сепарабельном гильбертовом пространстве (Y, β_0) для всех $u, v \in Y$, где $\beta_0 - \delta$ – алгебра, порожденная цилиндрическими множествами Y . И пусть

$$R_{an}(A) \in R_{an}(R^{1/2}). \quad (3)$$

Тогда в силу (3) существует распределение μ_ξ , $x \in X$, абсолютно непрерывное относительно μ_ξ , причем

$$[d\mu_a / d\mu_\xi](y) - q(x, y) = \exp\left([R^{-1}Ax_1y]_Y - \frac{1}{2}[R^{-1}Ax, Ax]_Y\right).$$

Пусть дана последовательность выпуклых множеств $\{W_i\}_{i=1}^n$, $W_j \in X$, $W_i \cap W_j = \emptyset$, $(i, j) \in I_n = \{(i, j), i < j, j = 1, 2, \dots, n\}$ с непустым ядром.

Определим функционал $Q: X \rightarrow Z$, где $z = \{z \in R^n, z = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$, $\sum_{i=1}^n z_i = 1$, рассмотрим для простоты, когда $z = \{z_i, i = 1, 2, \dots, n, z_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}$, т.е. z_i – единичный вектор, и назовем z пространством решений.

Постановка задачи. Требуется найти приближенное значение функционала $G: X \rightarrow Z$ на решении уравнения (1) при приближенно заданной правой части уиз (2) и при указанных выше условиях. Здесь

$$Q_x = z_i, 0 < i \leq n, x \in W, \dots$$

где $z_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, т.е. построить решающую процедуру определения приближенного решения.

О п р е д е л е н и е. Решающей процедурой для задачи назовем любое измеримое отображение $d: Y \rightarrow z$. И функцией риска $\mathfrak{R}(x, d)$ для решающей процедуры будем называть функцию

$$\mathfrak{R}(x, d) = M |Q_x - d(Ax + \xi)|_z. \quad (4)$$

Качество решающей процедуры (РП) $d: Y \rightarrow z$, как известно (4), характеризуется функционалом погрешности

$$\mathfrak{K} = \inf_{d \in D} \mathfrak{R}(d) = \inf_{d \in D} \sup_{d \in X} \mathfrak{R}(x, d), \quad (5)$$

где D – множество допустимых РП.

Обозначим через $\{Y_i\}, i = 1, 2, 3, \dots, n$, последовательность множеств $\{A[W_i]_{i=1}^n\}$. Из условия (3) и выпуклости тел $\{W_i\}_{i=1}^n$ следует выпуклость множеств $\{R^{-1/2}[Y_i]_{i=1}^n\}$, причем существуют такие числа $\rho = \rho(x_{i_1 j_1}, x_{j_1 i_1}) > 0$, что

$$\rho = \inf \left\{ \|R^{-1/2}Ax_1 - R^{-1/2}Ax_2\|_Y, x_n \in W_{i_n}, k = 1, 2 \right\}, \quad (6)$$

где $x_{i_1 j_1} \in W, \dots, x_{i_1 j_1} \in W_{ij}; (i_1 j_1) \in I_n$ (см. [8]).

Отсюда из (6) и выпуклости тел $R^{-1/2}[Y_i], R^{-1/2}[Y_i], (i, j) \in I_n$, по теореме о разделимости выпуклых множеств, следует существование гиперплоскости

$$[\varphi_Y, R^{-1/2}y_i] < [\varphi_Y, R^{-1/2}y] < [\varphi_Y, R^{-1/2}y^\rho], \quad (7)$$

где $\varphi_Y \in Y, \|\varphi_Y\| = 1, y_i \in R^{-1/2}[Y_i], y_j^\rho \in Y_j(\rho, R)$ – открытая ρ окрестность множества $R^{-1/2}[Y_j], (i, j) \in I_n$.

Из левой части неравенства (7) следует, что если точку $x_{i_1 j_1} \in R^{-1/2}[Y_i], i = 1, \dots, 1$ взять из этой гиперплоскости, то эта точка $x_{i_1 j_1}$ не противоречит условию (6). Тогда

$$[\varphi_Y, R^{-1/2}y_i] \leq [\varphi_Y, R^{-1/2}Ax_{i_1 j_1}], \quad (8)$$

где $y_i \in Y, i = 1, 2, 3, \dots, n - 1, (i_1, j_1) \in I_n$. Из (8)

$$R^{-1/2}Ax_{j_1 i_1} = R^{-1/2}Ax_{i_1 j_1} + \rho(x_{i_1 j_1}, x_{j_1 i_1}) \varphi_Y. \quad (9)$$

Отсюда, подставляя (9) в правую часть неравенства (7), получим

$$[\varphi_Y, R^{-1/2}y_j] \geq \rho(x_{i_1 j_1}, x_{j_1 i_1}) + [\varphi_Y, R^{-1/2}Ax_{i_1 j_1}], \quad (10)$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

где $y_i \in Y_j, j = 2, 3, \dots, n, (i_1, j_1) \in I_n$.

Пусть $d : Y \rightarrow Z$ - решающая процедура для задачи (1)-(3). Определим ее функцию риска $\mathfrak{R}(x, d)$:

$$\mathfrak{R}(x, d) = \int |Qx - d(Ax_1z)|q(x_1z)dz$$

$$d(Ax_1z) \neq Qx \quad (11)$$

Из (11), (4), (6) следует оценка

$$\mathfrak{R}(x, d) = \int |Qx_{i_1j_1} - d(Ax_{i_1j_1}dz)q(x, z)dz = d(Ax_{i_1j_1}dz) \neq Qx_{i_1j_1}|$$

$$= \int |Qx_{i_1j_1} - Qx_{j_1i_1}|q(x, z)dz, (i_1, j_1) \in I_n,$$

$$\{\mathfrak{R}(x_{i_1j_1}, d) > R(x_{i_1j_1}, d), (i_1, j_1) \in I_n\}$$

где $x_{i_1j_1} \in W_{i_1}, x_{j_1i_1} \in W_{j_1}$ из (6). После замены переменных в интеграле, используя оценки (8), (10), получим

$$\mathfrak{R}(x, d) \leq \int |Qx_{i_1j_1} - Qx_{j_1i_1}|q(x_{i_1j_1}, z)dz,$$

$$\{\mathfrak{R}(x_{i_1j_1}, d) > R(x_{i_1j_1}, d), 1, 2, 3, \dots, n, i_1 = 1, 2, \dots, n\}$$

т.е.

$$\mathfrak{R}(x, d) \leq \mathfrak{R}(x_{i_1j_1}, d), i_1 \neq j_1, \quad (12)$$

для всех $x \in X$, таким образом,

$$\sup_{x \in X} \mathfrak{R}(x, d) = \mathfrak{R}(x_{i_1j_1}, d), \quad (13)$$

где (i_1, j_1) определяются из (6).

Обозначим через $P_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, оператор проектирования множества $W_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, соответственно, причем

$$P_{i_1}[W_{i_1}] = \{x_{i_1j_1}, \frac{j_1}{i_1}, j_1 = 1, 2, 3, \dots, n\}, \quad (14)$$

где $x_{i_1j_1}$ определяется из (6) и $x_{i_1j_1} \in W_{i_1}, i_1 = 1, 2, 3, \dots, n$.

Пусть $d_{i_1}: Y \rightarrow Z$ - решающая процедура, такая, что

$$d_{i_1}(\tilde{y}) = Qx_{i_1j_1} \equiv Z_{i_1}, x_{i_1j_1} \in W_{i_1},$$

$i_1 = 1, 2, 3, \dots, n, i_1 \neq j_1$. Учитывая (13), имеем

$$\mathfrak{R}(d_{i_1}) = \mathfrak{R}(x_{i_1j_1}, d) = \min_{j_1 \neq i_1} \mathfrak{R}(x_{i_1j_1}, d),$$

$i_1 = 1, 2, 3, \dots, n$ - соответствующий $x_{i_1j_1} \in W_{i_1}$. Тогда погрешность (РП) $d : Y \rightarrow Z$

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\mathfrak{R}}(d_{\text{опт}}) = \min_{1 \leq i_1 \leq n} \mathfrak{R}(d_{i_1}). \quad (15)$$

Итак, определяя оператор проектирования $P_i, i = 1, 2, \dots, n$. из (14), мы пришли к следующему утверждению.

Теорема. Оптимальная РП, $d_{\text{опт}}: Y \rightarrow Z$, в смысле функционала погрешности (5) $\mathfrak{R} = \tilde{\mathfrak{R}}(.)$ для задачи (1) – (3) однозначно определяется оператором проектирования $P_i, P_i : W_i \rightarrow \{x_{ij_1}, j_1 \neq i, j_1 = 1, 2, 3, \dots, n\}$ тел $\{W_i\}$ в множество точек $\{x_{i_1j_1} \in W_{i_1}\}$, где $x_{i_1j_1}$ из (6), $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Причем погрешность этой РП имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \min_{1 \leq i_1 \leq n} \min_{j_1 \neq i_1} \mathfrak{R}(x_{i_1j_1}, d_{i_1}), \quad (16)$$

где $x_{i_1j_1} \in P_{i_1}[W_{i_1}], i_1 \neq j_1, j_1 = 1, 2, 3, \dots, n$.

Также в работе получены оценки некоторых функционалов от случайной функции определенной на конечном отрезке и по этим результатам проведен эксперимент. Предполагается что значение точной кусочно-постоянной функции принимает одно из двух значений 0 или 1. На основе теории статистических решающих функции

рассматривается математическая модель полученной априорной информации о решении поставленной задачи. Введены понятия решающей процедуры, функции риска и функционала погрешности для решающей процедуры. В результате статистической обработки для каждого эксперимента построена оптимальная, в смысле введенного функционала погрешности, решающая процедура. Рассматривались различные виды априорной информации. Для каждого случая построена своя решающая процедура и упорядочены по точности полученного решения. Получены зависимости приближенного решения от объема выборки, дисперсии и других параметров эксперимента. Построена закономерность изменения функции риска при различных выборках в зависимости от этих параметров. Результат работы подтвердил, что при увеличении объема выборки, или какой-либо другой априорной информации, или при уменьшении дисперсии ошибок решающая процедура является состоятельным. Практика показала, что в некоторых случаях увеличение или уменьшение каких-либо параметров связано с пределами компьютерной точности. Рассмотрены различные комбинации полученной априорной информации и выделена среди этих случаев наилучшая. По итогам расчета получено, что при медианной выборке решающая процедура является наилучшей.

1. Федотов А.М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука Сиб. отд-ние, 1982. 189 с.
2. Федотов А.М. Информационный поход к некорректным задачам. Емкость множества корректности // Вопросы корректности обратных задач математической физики. Новосибирск, 1982. С. 131-142.
3. Бекпатшаев М. Ж. Определение выпуклых тел по данным молотулового рассеивания. // Численный анализ обратных задач дифракции. Красноярск, 1989, с. 17-22.
4. Бекпатшаев М.Ж. О компенсации электромагнитного поля дополнительными источниками. // Математико-информационные технологии в образовании и науке. Алматы, 1996. с. 3-10.

Аңдатпа. Есептерді шығару кезінде шешімнің кейбір қасиеттері бойынша кеңейтілген кеңістіктен шектелген компактты бөліп алу маңыздылығы туындап отыр. Бұл жұмыста келесі $Ax=y$, операторлық теңдеуді шешу кезінде шектелген дөңес денелердің тізбегінен жиынды анықтау жағдайы қарастырылған, бұл жерде x – X кеңістігіндегі белгісіз шешім, y – Y сепарабельді гильберт кеңістігінің берілген элементі, $A: X \rightarrow Y$ өлшеу үдерісін сипаттайтын шектелген сызықтық оператор. Басылымның қорытынды мазмұнында оптимальді шешу процедурасының бар екендігі туралы теорема дәлелденген.

Түйін сөздер: кері есептер, есептеу процедуралары, кездейсоқ қате, қауіп-қатер функциясы

Abstract. When making ill-posed problems it is essential to select some of compact out of the expanded space for various properties of the original decision. In this paper we consider the case definition of the set of a finite set of convex bodies by the value of the functional on the solution of operator equation $Ax = y$, where x -the desired, and in – the element of separable Hilbert spaces X and Y , respectively, $A: X \rightarrow Y$ a bounded linear operator characterizing the measurement process. The article described an existence theorem for optimal decision procedures for solving this problem.

Keywords: incorrect problem. Decision procedure, the random error, the risk function

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА
ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

(г. Алматы, ¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
г. Ташкент, ²Ташкентский государственный институт востоковедения,
г. Алматы, ³«Научно-исследовательский институт математики и механики»
при КазНУ им. аль-Фараби)

Аннотация. В настоящей работе для уравнений смешанного типа четвёртого порядка с дробной производной изучается обратная краевая задача. Наряду с решением задачи, также нужно определить правую часть уравнения, которую зависит от переменной x . Применяя метод разделения переменных, доказаны теоремы о единственности и существования классического решения этой задачи. Установлено, существенность условий наложенных на данные задачи. Приведены примеры, при нарушении условий, сформулированная однородная задача имеет нетривиальное решение.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, обратные задачи, оператор дробного дифференцирования Капуто, функция Миттаг-Леффлера, метод Фурье, ряд Фурье.

1. Введение и постановка задачи.

Математическое моделирование многих процессов происходящих в реальном мире приводит к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики [1].

Обратные задачи возникают в самых разных областях человеческой деятельности таких, как физика (обратные задачи квантовой теории рассеяния), геофизика (обратные задачи электроразведки, сейсмологии, теории потенциала), биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т.п [2].

К настоящему времени наиболее полные результаты получены в основном по исследованию прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа с производными второго порядка [3,4].

В то же время обратные задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка с дробными производными мало изучены [5].

Отметим, что нелокальные задачи типа Самарского исследованы в работах [6, 7].

Пусть $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, -p < t < q\}$, $\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (t < 0)$, где $p, q > 0$. В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu(x, t) = f(x), \quad (1)$$

где

$$Lu(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + {}_c D_{0+}^\alpha u, & t > 0, \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & t < 0. \end{cases}$$

Здесь ${}_c D_{0+}^\alpha u$ - оператор дробного дифференцирования по t порядка $\alpha \in (0, 1]$ в смысле Капуто [8, стр. 92]

$${}_c D_{0t}^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau, t > 0.$$

Задача. Требуется найти пару функций $\{u(x,t), f(x)\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,1}(\bar{\Omega})$, $f(x) \in C[0,1]$;

2) удовлетворяют уравнению (1) в области $\Omega^+ \cup \Omega^-$;

3) $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$u(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, u_x(1,t) = u_x(0,t), u_{xxx}(1,t) = u_{xxx}(0,t), -p \leq t \leq q, \quad (2)$$

$$u(x,-p) = \psi(x), u(x,q) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1; \quad (3)$$

4) $u(x,t)$ удовлетворяет условию склеивания

$${}_c D_{0t}^\alpha u(x,+0) = \frac{\partial u(x,-0)}{\partial t}, 0 < x < 1. \quad (4)$$

2. Единственность и существование решения задачи.

Решение задачи будем искать в виде разложения по специально выбранному базису из системы функций

$$X_0(x) = 2x, X_{n1}(x) = 2 \sin 2\pi nx, X_{n2}(x) = \frac{e^{2\pi nx} - e^{2\pi n(1-x)}}{e^{2\pi n} - 1} + \cos 2\pi nx. \quad (5)$$

В работе [7] показано, что система (5) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, существует биортогональная с ней система функций

$$Y_0(x) = 1, Y_{n1}(x) = \frac{e^{2\pi nx} + e^{2\pi n(1-x)}}{e^{2\pi n} - 1} + \sin 2\pi nx, Y_{n2}(x) = 2 \cos 2\pi nx,$$

которая также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$

Решение задачи будем искать в виде рядов Фурье

$$u(x,t) = \begin{cases} v_0(t)X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_{n1}(t) \cdot X_{n1}(x) + v_{n2}(t) \cdot X_{n2}(x)), & (x,t) \in \Omega^+, \\ w_0(t)X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (w_{n1}(t) \cdot X_{n1}(x) + w_{n2}(t) \cdot X_{n2}(x)), & (x,t) \in \Omega^-. \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = f_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n1} \cdot X_{n1}(x) + f_{n2} \cdot X_{n2}(x)), \quad (7)$$

разложенные по системе функций (5). Здесь $v_0(t), w_0(t), v_{ni}(t), w_{ni}(t), i=1,2$ – неизвестные функции, f_0, f_{n1}, f_{n2} – неизвестные коэффициенты.

Подставляя (6) и (7) в уравнение (1), для нахождения $v_0(t), w_0(t), f_0, v_{ni}(t), w_{ni}(t), f_{ni}, i=1,2$ получим

$${}_c D_{0t}^\alpha v_0(t) = f_0, {}_c D_{0t}^\alpha v_{ni}(t) + \lambda_n^4 v_{ni}(t) = f_{ni}, \lambda_n = 2\pi n, i=1,2,$$

$$w_0''(t) = f_0, w_{ni}'' + \lambda_n^4 w_{ni}(t) = f_{ni}, i=1,2,$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

решениями которых являются

$$v_0(t) = A_0 + \frac{f_0}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \quad (8)$$

$$v_{ni}(t) = A_{ni} E_{\alpha,1}(-\lambda_n^4 t^\alpha) + f_{ni} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n^4 t^\alpha), \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$w_0(t) = B_0 t + D_0 + \frac{1}{2} f_0 t^2, \quad (10)$$

$$w_{ni}(t) = B_{ni} \sin \lambda_n^2 t + D_{ni} \cos \lambda_n^2 t + \frac{f_{ni}}{\lambda_n^4} (1 - \cos \lambda_n^2 t), \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Здесь $A_0, B_0, D_0, f_0, A_{ni}, B_{ni}, D_{ni}, f_{ni}, i = 1, 2$ неизвестные коэффициенты, $E_{\alpha,\beta}(z)$ - функция типа Миттаг - Леффлера [8, стр.42],

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z),$$

которая при $\alpha \in (0, 2), \gamma \leq |\arg z| \leq \pi, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in (\pi\alpha / 2; \min\{\pi; \pi\alpha\})$ удовлетворяет оценке

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{M}{1 + |z|}, \quad (12)$$

где M – постоянная, не зависящая от аргумента z [9, стр 136];

Для нахождения этих неизвестных коэффициентов используем непрерывность решения в области $\bar{\Omega}$, а также условия (3) и (4) задачи. Отсюда имеем

$$v_0(0) = w_0(0), {}_C D_{0+}^\alpha v_0(0) = w'_0(0), v_{ni}(0) = w_{ni}(0), {}_C D_{0+}^\alpha v_{ni}(0) = w'_{ni}(0), \quad i = 1, 2,$$

$$v_0(p) = \varphi_0, w_0(-p) = \psi_0, v_{ni}(p) = \varphi_{ni}, w_{ni}(-p) = \psi_{ni}, \quad i = 1, 2,$$

где $\varphi_0, \psi_0, \varphi_{ni}, \psi_{ni}, i = 1, 2$ – соответственно коэффициенты разложения функции $\varphi(x), \psi(x)$ в ряд, т.е.

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) Y_0(x) dx, \quad \varphi_{ni} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{ni}(x) dx, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x) Y_0(x) dx, \quad \psi_{ni} = \int_0^1 \psi(x) X_{ni}(x) dx, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Тогда относительно неизвестных $A_0, B_0, D_0, f_0, A_{ni}, B_{ni}, D_{ni}, f_{ni}, i = 1, 2$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} D_0 = A_0, B_0 = f_0, A_0 + \frac{f_0}{\Gamma(\alpha + 1)} = \varphi_0, \frac{1}{2} p^2 f_0 - p B_0 + D_0 = \psi_0, \\ D_{ni} = A_{ni}, f_{ni} - \lambda_n^4 A_{ni} = \lambda_n^2 B_{ni}, A_{ni} E_{\alpha,1}(-\lambda_n^4 q^\alpha) + f_{ni} q^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n^4 q^\alpha) = \varphi_{ni}, \\ \cos \lambda_n^2 p \cdot D_{ni} - \sin \lambda_n^2 p \cdot B_{ni} + \frac{1}{\lambda_n^4} (1 - \cos \lambda_n^2 p) f_n = \psi_{ni}. \end{cases} \quad (15)$$

В результате находим

$$A_0 = D_0 = \varphi_0 + \frac{2q^\alpha}{\Delta_0}(\varphi_0 - \psi_0), f_0 = B_0 = \frac{2\Gamma(\alpha + 1)}{\Delta_0}(\psi_0 - \varphi_0),$$

$$A_{ni} = D_{ni} = \varphi_{ni} + \frac{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_n^4 q^\alpha)}{\Delta_n}(\psi_{ni} - \varphi_{ni}), B_{ni} = \frac{\lambda_n^2}{\Delta_n}(\varphi_{ni} - \psi_{ni})$$

$$f_{ni} = \lambda_n^4 \varphi_{ni} + \frac{\lambda_n^4 E_{\alpha,1}(-\lambda_n^4 q^\alpha)}{\Delta_n}(\varphi_{ni} - \psi_{ni}), i = 1, 2, \quad (16)$$

где

$$\Delta_n = \begin{cases} \Gamma(\alpha + 1)p^2 - 2\Gamma(\alpha + 1)p - 2q^\alpha, n = 0 \\ \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 p + \cos \lambda_n^2 p - E_{\alpha,1}(-\lambda_n^4 q^\alpha), n \in N \end{cases}$$

Подставляя найденные значения в (8)- (11) имеем

$$v_0(t) = \varphi_0 + \frac{2(q^\alpha - t^\alpha)}{\Delta_0}(\varphi_0 - \psi_0), w_0(t) = \varphi_0 + \frac{2q^\alpha - \Gamma(\alpha + 1)(2t + t^2)}{\Delta_0}(\varphi_0 - \psi_0), \quad (17)$$

$$v_{ni}(t) = \varphi_{ni} + \frac{E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha) - E_\alpha(-\lambda_n^4 t^\alpha)}{\Delta_n}(\varphi_{ni} - \psi_{ni}), i = 1, 2, \quad (18)$$

$$w_{ni}(t) = \varphi_{ni} + \frac{\lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 t - \cos \lambda_n^2 t + E_{\alpha,1}(-\lambda_n^4 q^\alpha)}{\Delta_n}(\varphi_{ni} - \psi_{ni}), i = 1, 2. \quad (19)$$

Таким образом, получили формальное решение задачи в виде (6) и (7), где $v_0(t), w_0(t), f_0, v_{ni}(t), w_{ni}(t), f_{ni}, i = 1, 2$ определяются по формулам (16-19).

Имеет место

Теорема. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:
 $\varphi(x), \psi(x) \in C^6[0, 1], \varphi^{(7)}(x), \psi^{(7)}(x) \in L_2(0, 1),$

$$\varphi(0) = \varphi^{IV}(0) = 0, \varphi''(1) = \varphi^{VI}(1) = 0, \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \Big|_{x=1}, k = 1, 3, 5$$

$$\psi(0) = \psi^{IV}(0) = 0, \psi''(1) = \psi^{VI}(1) = 0, \frac{d^k \psi(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} = \frac{d^k \psi(x)}{dx^k} \Big|_{x=1}, k = 1, 3, 5,$$

и выполнена условие $\Delta_n \neq 0$, то существует единственное решение задачи, определяемые формулами (6) - (7).

Доказательство. При условии $\Delta_n \neq 0$ единственность решения задачи легко следует из представлений (6) - (7), а также из полноты системы (5). Поэтому переходим доказательству существования решения задачи.

Несложно проверить, что функции $u(x, t), f(x)$ определяемые формулами (6) - (7) удовлетворяют уравнению (1) и условиям (2)-(4). Остаётся доказать правомерность этих действий. Для этого покажем сходимость рядов (6) - (7) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 (v_{n1}(t) X_{n1}(x) + v_{n2}(t) X_{n2}(x)), \sum_{n=1}^{\infty} ({}_C D_{0t}^\alpha v_{n1}(t) X_{n1}(x) + {}_C D_{0t}^\alpha v_{n2}(t) X_{n2}(x)),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 (w_{n1}(t)X_{n1}(x) + w_{n2}(t)X_{n2}(x)), \sum_{n=1}^{\infty} (w_{n1}''(t)X_{n1}(x) + w_{n2}''(t)X_{n2}(x)), \quad (20)$$

Рассмотрим первый ряд из (20). По условию $\Delta_n \neq 0$, значит существует $\delta > 0$ такая, что $|\Delta_n| \geq \delta > 0$. Отсюда, учитывая (12), а также оценку $|X_{ni}(x)| < C, i=1,2$, получим, что

$$|w_{n1}(t)X_{n1}(x) + w_{n2}(t)X_{n2}(x)| \leq C\lambda_n^2 (|\varphi_{n1}| + |\varphi_{n2}| + |\psi_{n1}| + |\psi_{n2}|).$$

Здесь и далее C означает положительные, вообще говоря, разные постоянные.

В силу условий на $\varphi(x), \psi(x)$ из (13), (14) имеем

$$\varphi_{n1} = -\frac{1}{\lambda_n^7} \int_0^1 \frac{d^7 \varphi}{dx^7} \left(\frac{e^{2\pi nx} - e^{2\pi n(1-x)}}{e^{2\pi n} - 1} + \cos 2\pi nx \right) dx = -\frac{1}{\lambda_n^7} \varphi_{n1}^7, \quad (21)$$

$$\psi_{n1} = -\frac{1}{\lambda_n^7} \int_0^1 \frac{d^7 \psi}{dx^7} \left(\frac{e^{2\pi nx} - e^{2\pi n(1-x)}}{e^{2\pi n} - 1} + \cos 2\pi nx \right) dx = -\frac{1}{\lambda_n^7} \psi_{n1}^7 \quad (22)$$

$$\varphi_{n2} = \frac{2}{\lambda_n^7} \int_0^1 \frac{d^7 \psi}{dx^7} \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n^7} \varphi_{n2}^7, \psi_{n2} = \frac{2}{\lambda_n^7} \int_0^1 \frac{d^7 \psi}{dx^7} \sin \lambda_n x dx = \frac{1}{\lambda_n^7} \psi_{n2}^7. \quad (23)$$

Отсюда следует, что данный ряд мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (|\varphi_{n1}^7| + |\varphi_{n2}^7| + |\psi_{n1}^7| + |\psi_{n2}^7|),$$

Далее, применяя неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$, учитывая при этом лемму 5 работы [10] получим абсолютную и равномерную сходимость первого ряда из (20).

Рассмотрим второй ряд в (20). Так как

$$\frac{d^2 w_{ni}(t)}{dt^2} = \frac{\varphi_{ni} - \psi_{ni}}{\Delta_n} (-\lambda_n^6 \sin \lambda_n^2 t + \lambda_n^4 \cos \lambda_n^2 t), i=1,2,$$

$$\left| \frac{d^2 w_{ni}(t)}{dt^2} \right| \leq C \cdot \lambda_n^6 (|\varphi_{ni}| + |\psi_{ni}|), i=1,2,$$

Отсюда и из (21)-(23) получаем абсолютное и равномерное сходимость второго ряда из (20). Сходимость остальных рядов показывается аналогичным образом. Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Множество чисел $p \neq 0, q \neq 0$, удовлетворяющих условию $\Delta_n \neq 0$ не пустое. Например, если $p = \frac{2}{\pi}, q = 1$, тогда

$$\Delta_n = \begin{cases} \frac{4\Gamma(\alpha+1)}{\pi^2} (1-\pi) - 2, n=0 \\ 1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_n^4), n \in N \end{cases}$$

отсюда следует, что $\Delta_n \neq 0$.

Замечание 2. Если условие $\Delta_n \neq 0$ нарушено при $n=k$ и при некоторых значениях p и q , то однородная система (15) имеет ненулевое решение. Тогда однородная

задача (8)-(11) ($\varphi(x) = \psi(x) = 0$) также имеет нетривиальное решение. Например, при значениях

$$A_0 = D_0 = -q^\alpha, B_0 = f_0 = \Gamma(\alpha + 1)$$

функция

$$u(x, t) = \begin{cases} (t^\alpha - q^\alpha) \cdot 2x, t > 0 \\ \left(\frac{1}{2} \Gamma(\alpha + 1) t^2 + \Gamma(\alpha + 1) t - q^\alpha \right) \cdot 2x, t < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \Gamma(\alpha + 1) \cdot 2x$$

является решением однородной задачи.

1. Denisov A.M., Elements of the Theory of Inverse Problems, Utrecht: VSP, 1999, -P.272.
2. Petrov Yu.P., Sizikov V.S. Well- posed, Ill-posed and intermediate problems with Applications, Leiden: Brill Academic Publishers and VSP, 2005, -P. 245.
3. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола – гиперболического типа в прямоугольной области. Известия Вузов. Математика. 2010, № 4, -С. 55-62.
4. Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator, Nonlinear analysis: Theory, Methods and Applications (NATMA), 6 (75), 2012, -P. 3268–3273.
5. Berdyshev A.S., Eshmatov B. E., Kadirkulov B.J. Boundary value problems for fourth-order mixed type equation with fractional derivative // EJDE. - v. 2016, № 36. -P. 1-11.
6. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. //Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 8, -С. 1094-1100.
7. Berdyshev A.S., Cabada A, Kadirkulov B.J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // An Inter. J. Computers and Mathematics with Applications. - Elsevier, 2011. - v. 62. - № 10. - P. 3884-3893.
8. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006. xvi+523 pp.
9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. –М., 1966. –С.672.
10. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов. //Известия ВУЗов СССР, Математика, 1964, №2 (39). -С. 82-93.

Андатпа. Мақалада, кері шектік есебі бөлік туынды төртінші ретті аралас типті теңдеу үшін қарастырылған. Есептің шешімімен қатар, x айнымалысына тәуелді теңдеудің оң жақ бөлігін анықтау қажет. Айнымалы бөлу әдісін қолдану арқылы есеп шешімінің жалғыздығы және классикалық шешімінің бар екендігі туралы теорема дәлелденді. Есепте берілген функцияларға қойылған шарттардың маңызды екендігі анықталған. Есеп шарттары орындалмаған жағдайда біртекті есептің тривиаль болмаған шешімі бар екендігіне мысал келтірілген.

Түйін сөздер: аралас типті теңдеу, кері есептер, Капуто дифференциалды бөліктектік операторы, Миттаг-Леффлер функциясы, Фурье әдісі, Фурье қатары.

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Abstract. In this paper for a mixed-type fourth-order equations with fractional derivative studied an inverse boundary value problem. Along with solution of the problem, it is also needed to identify the right part of the equation, which depends on the variable x . Applying the method of separation of variables we prove theorems of existence and uniqueness of the classical solution of this problem. It is established that there are existence of conditions imposed on the data of the problem. Some examples are considered, when the condition formulated by the homogeneous problem has a nontrivial solution.

Keywords: equation of mixed type, inverse problems, Caputo fractional differentiation operator, Mittag-Leffler function, Fourier method, Fourier series.

ӘОЖ 37:514:004.738.1 (574)

Е.Ы. Бидайбеков, Н.Т. Ошанова, Р.Қ. Төребекова*

ӘЛ ФӘРӘБИ БОЙЫНША МУЗЫКА ТЕОРИЯСЫНЫҢ АРИФМЕТИКАЛЫҚ НЕГІЗДЕРІН ОҚЫП-ЗЕРТТЕУДІҢ ҚАЖЕТТІЛІГІ

(Алматы қ., Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, * - магистрант)

Аңдатпа. Бұл мақалада қазақ математикасының қалыптасуына елеулі үлес қосқан әл Фәрәбидің музыка теориясының арифметикалық негіздерін оқып-зерттеудің қажеттілігі қарастырылған. Фәрәбидің математикалық мұрасы мен музыка теориясын зерттеген ғалымдардың еңбектері негізге алынды. Фәрәби бойынша арифметиканың негізгі ережелері ұсынылып, музыка теориясына қатысты тұстары келтірілді. Әл Фәрәбидің музыка теориясында кең қолданыс тапқан сандық қатынастарға қолданылатын амалдары жан-жақты қарастырғандығы жайлы айтылған. Музыканың арифметикадан не алғандығын білу үшін қатынастармен орындалатын амалдардың Фәрәби бойынша ережелері ұсынылды.

Түйін сөздер: арифметика, арифметика негіздері, әл Фәрәби мұралары, музыка теориясы.

Фәрәби қазақ елінің біртуар ғалымы, оның ғылымға қосқан үлесі орасан зор, еңбектері бүкіл әлемге әйгілі. Өз заманында мұсылман елдерінің ғалымдарын мойындатып үлгерген, әрбір шығармасы мұраға қалдырылған таусылмайтын байлық. Фәрәбидің математикалық, физикалық еңбектері өте танымал, ал музыка теориясын математикамен байланыстырып, ережелері мен есептеулерін келтіргені таңқаларлық дүние. Оның еңбектерінің арасында музыка теориясы аз зерттелгендіктен, көп талқылаулармен түсінуді талап етіп отыр. Оның еңбектерін оқып-зерттеу, әсіресе музыка теориясының арифметикалық жағын қарастырып, оны мектеп оқушыларына оқыту үлкен жұмыс болып табылады.

Фәрәби бабамыздың асыл ғылыми шығармашылығы дүние жүзі мәдениеті мен ғылыми жаңалықтарына Шығыстың Аристотелі деп танылған. Болашақ ұрпаққа қалдырған ғылыми мұрасы, 160-қа жуық трактаты біздің заманымызға жетті. Әл Фәрәбидің еңбектерінің ішіндегі ең шоқтығы биігі ол - музыка саласы. Фәрәбидің пікірінше, музыканың ғылыми іргетасы тәжірибе-бақылау мен физика-математика ғылымдарының қағидаларынан тұрады.

Фәрәбидің математикалық мұрасы мен музыка теориясын зерттеген А.Көбесов [1], Г.П.Матвиевская [2], О.Матякубов [3] және т.б. ғалымдардың еңбектері, соңғы кездері бабамыздың математикалық мұрасын жан-жақты зерттеп, қазіргі білім беру жүйесіне ендіруді көздеп жүрген Е.Ы.Бидайбековтің [4] ғылыми еңбектері ұсынылып отырған зерттеуге негіз болды.

Зерттеуден алынған нәтижелер орта мектеп оқушыларына арифметиканы, сандық қатынастарды қосымша жете түсінуге мүмкіндік береді. Ал, Фэрәбидің музыканы өзге ғылымдармен, яғни арифметика және алгебрамен байланыстыруы оқушылардың математика пәніне қызығушылығын арттырады, сандық қатынастармен орындалатын амалдардың тағы бір қолданысын танып білуге көмектеседі.

Әл Фэрәбидің музыка теориясына (соның ішінде, арифметикасына) байланысты ұсынған кейбір маңызды ережелерін қарастыру кезінде қазіргі орта мектеп арифметикасына сәйкес екінін байқауға болады. Енді олардың кейбіріне тоқталсақ.

Әл Фэрәбидің музыка теориясы арифметика және алгебрамен тығыз байланысты, оны жасауда ол айқын дәрежеде арифметикалық-алгебралық әдістерді қолданған. «Ғылымдар тізбесінде» ежелгі гректердің дәстүріне ере отырып, ол музыка теориясын математикалық ғылымдар қатарына жатқызады. Әл Фэрәби музыка туралы ғылымның пәнін келесі түрде анықтайды: «Музыка туралы ғылымға келетін болсақ, онда ол әуеннің түрлерін зерттеуден тұрады: олар неден құралады, оларды не үшін құрады, олардың дыбысы еліктірер әсерлі болу үшін олар қандай болу керек. Бұл атпен екі ғылым танылады: біріншіден, музыка туралы практикалық ғылым, екіншіден, музыка туралы теориялық ғылым». Осының негізінде сандар туралы ғылымды практикалық және теориялық арифметикаға бөлгені белгілі. Әл Фэрәби бойынша практикалық арифметика сандарды зерттейді, себебі мәселе санын анықтау керекті саналатын сандарда болып тұр, және т.с.с. Мысалы, адамдардың, жылқылардың, динардың, дирхемдердің және басқа да саналатын заттардың саны. Ал, практикалық арифметикаға қарама-қарсы теориялық арифметика, нақты ұстап сезуге болатын заттарды санауға жататындардан бөлек сандарды абсолюттік тұрғыдан зерттейді, және бұл жердегі сандар сыйпап-сезілетін заттар үшін де, сыйпап-сезуге келмейтін заттар үшін де бірдей жалпы сандар ретінде қолданылады.

Әл Фэрәби, өз кезегінде, теориялық арифметиканы үш бөлімге бөледі:

1) бір-біріне қатысы жоқ, сандардың болмысына сай нәрселердің барлығын (мысалы, тақ және жұп сандар, квадрат сандар, жалпақ, кемел және кемел емес сандар және т.б.) зерттейтін *жеке сандар туралы ілім*;

2) сандарды бір-бірімен салыстырғанда пайда болатын сандардың теңдігі мен теңсіздігі, яғни қандай да бір сан басқа санның бір немесе бірнеше бөлігі болатыны, не еселігі, не оған теңдігі, не одан бір немесе бірнеше бөлікке артық болуы, пропорционалды немесе пропорционал емес, ұқсас немесе ұқсамайтын, өлшемді немесе өлшеусіз болуы сияқты қасиеттерін зерттейтін *тәуелді сандар туралы ілім*. Әл Фэрәби сандардың қатынасы мен пропорциясы туралы ілімді теориялық арифметиканың осы бөліміне жатқызады.

3) сандарды бір-біріне қосқанда, бір саннан бір санды азайтқанда, бір санды басқа санның бірнеше бірлігіне көбейткенде, бір санды басқа санның бірнеше бірлігіне бөлгенде пайда болатын қасиетін зерттейтін *сандарға қолданылатын амалдар туралы ілім*. Ол осының барлығын және осыдан бір-біріне қатынасы кезінде не шығатынын және қандай да бір анықталған сандардан сандардың қалай алынатындығын зерттейді. Жалпы айтқанда, бұл саннан алуға болатын нәрселердің барлығы туралы ғылым.

«Музыканың үлкен кітабы» атты трактатында өзі теориялық арифметиканың пәні болғанымен музыка теориясында әртүрлі қолданыс тапқан сандар қатынасына ерекше тоқталады. Осыған байланысты, өзінің трактатындағы кіріспенің соңғы бөлігінде айтылған әл Фэрәбидің келесі пікірі үлкен қызығушылық тудырады: «Бұл музыка туралы ілімде арифметикадан білу керек нәрсенің барлығы қолданылады. Мұнда жоғарыда көрсетілгендей, тондар мен интервалдардың мәні анықталатындай және оны жеке сандар көмегімен келтірілетіндей етіп қалай қарыстыру керек екендігі, сонымен бірге, бұл

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

мәндерге қатысты сандар көмегімен келтіру үшін қай жағынан қарастыру керек екендігі көрсетілген». Мұнда әл Фэрәбидің бүтін және бөлшек сандар ретінде қолданылатын «жеке сандар» (адад әл-муфрада), «қатысты сандар» (адад әл-мудафа) терминдері қызығушылық тудырады. Осылайша, теориялық және практикалық арифметика бірін-бірі толықтыра отырып, ажырамас бірлікте жүреді.

Әл Фэрәби «Музыканың үлкен кітабының» кіріспесінде музыка теориясын құруда қолданылуы мүмкін сандар туралы ілімнің сұрақтарын атап көрсетеді. Ол оларды арифметикадан алынған қағидалар деп атайды.

Әл Фэрәби сандардың қатынасы екі түрлі болады деп ойлады, яғни қатынастардың теңдігі және теңсіздігі. Ол былай деп жазды: «Егер екі санды салыстырсақ, онда олар тең немесе тең емес болады». Трактатта Әл Фэрәби музыка теориясында кең қолданыс тапқан сандық қатынастарға қолданылатын амалдарды жан-жақты қарастырады. Бұл жайында әл Фэрәби былай деп жазады. «Егер келесі үш есептің қалай шешілетінін түсіндіре алсақ, онда біз музыканың арифметикадан не алғандығының барлығын көрсеттік деп айта аламыз:

1. Сандар қатары бір-бірімен белгілі бір қатынаста болады. Бізге қатынастары өзінде бүкіл қатынастарды қамтитын сондай екі санды табу керек.

2. Екі сан бір-біріне белгілі қатынаста орналасқан. Бізге осы қатынасты бастапқы қатынаста сақтайтын ортақ сандарды табу керек.

3. Берілген қатынастағы екі сандар, олардың қосындысын бастапқы қатынастан алуға болатындай, өздерінің арасында ортақ мүшеге ие. Бізге қалдық қатынасты беретін санды табу керек, яғни қосындымен салыстырғандағы бастапқы қатынастың қалдығын табу керек.

Бірінші есепті шешу – екі санның қосындысын табу. Екінші есептің шешімі бір қатынасты біреше қатынасқа бөлу, ал үшінші есеп бір қатынасты басқа қатынастан азайту жолымен табылады. Осылайша, Фэрәби сандық қатынастармен орындалатын үш амалды орнатады – қосу, бөлу (жіктеу) және қатынастарды азайту. Осы жерде ол музыка теориясына байланысты пайда болған көрсетілген үш есептің шешімінің қарапайым әдісін ұсынады. Сонымен қатар, әл Фэрәби осы мақсатқа қажет болатын ғана сандық қатынастардың түрін қарастырумен шектеледі. Мұндағы, қосу, бөлу және азайту деп ол дәстүр бойынша сәйкес көбейту, жіктеу және бөлу амалдары деп түсінеді. Фэрәби музыка теориясын құру үшін қажетті осы мәліметтердің көмекші сипаттамаларына байланысты пайда болған қосу, бөлу (жіктеу) және қатынастарды азайту ережелерін дәлелдеусіз келтіреді. Оның қосу ережесі екі жағдайға ажыратылады: 1) қосылатын қатынастар бір-біріне тең; 2) қосылатын қатынастар бір-біріне тең емес. Бірінші жағдайға қатысты ол былай жазады: Егер сөз бір қатынасты екінші қатынасқа екеуі де тең болғанда қосу туралы болса, онда біз ол қатынасты ең қарапайым түрінде аламыз. Екі мүшесінің әрбірін өз-өзіне көбейтеміз. Алынған көбейтінділер бір-біріне ізделініп отырған қатынаста болады.

Оны былай жазуға болады:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} = \frac{A \cdot A}{B \cdot B} = \frac{A^2}{B^2}$$

Көрсетілген ереже келесі мысалмен келтіріледі: «Егер де, мысалы, $1 + \frac{1}{3}$ қатынасын $1 + \frac{1}{3}$ қатынасына (бұл қатынастардың әрқайсысының ең қарапайым мүшелері 4 пен 3-ке тең) қосқымыз келсе, онда соңғыларын өз-өзіне көбейтеміз. Сонда осы екі сан сәйкесінше 16 мен 9 сандарын береді. Осы сандардың қатынасы ізделініп отырған қатынас болады.»

Берілген мысалда

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

әл Фэрәби бұл ережені қосындылардың кез келген қажетті саны үшін жалпылайды. Ол осыған ұқсас ережені қосылатын қатынастар бір-біріне тең емес жағдай үшін де келтіреді: егер қосылатын қатынастар өзара тең болмаса, онда олар не тізбектес немесе тізбектес емес болады. Мысалы, $1 + \frac{1}{2}$ және $1 + \frac{1}{3}$ қатынастары тізбектес. $1 + \frac{1}{2}$ және $1 + \frac{1}{4}$ қатынастары тізбектес емес.

Егер қосылатын қатынастар тізбектес болса, онда олардың әрқайсысының ең қарапайым сандарын алып, қатынастардың біріндегі ең кіші сан бір уақытта басқа қатынаста ең үлкені болатынын байқаймыз. Осылайша, біз үш тізбектес – екі шеткі және бір ортаңғы сандар аламыз. Ең үлкен санның ең кішісіне қатынасы қатынастың қосындысы болады.

Әл Фэрәби «тізбектес» деп келесі түрдегі қатынастарды атайды

$$1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+2}, \dots,$$

оларды қосу келесіден құралады

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{n} \quad \text{немесе}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} = \frac{n+3}{n+1}$$

Ары қарай әл Фэрәби «Қосуға тиісті екі қатынас та тең емес және тізбектес емес болғанда, онда келесі түрде келтіреміз: олардың ең қарапайым мүшелерін аламыз. Олар бізге төрт сан береді. Олардың ең үлкені ең үлкен шеткі мәнді, ең кішкентайы – шеткі мәндердің ең кішісін білдіреді. Екі аралық сан, яғни ортаңғы сандар: бірі ең үлкен шеткі санға, екіншісі ең шеткі кіші санға жақын. Егер ең үлкен санға жақын санды кіші санға, ал кіші санға жақын санды ең үлкен санға көбейтетін болсақ, онда алынған екі сан да ізделінді қатынаста болады» - деп жазады.

Шамасы, әл Фэрәби «тізбектес емес» қатынас деп келесі түрдегі қатынастарды санайды:

$$1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n+2}, 1 + \frac{1}{n+4} \quad \text{және т.б.,}$$

оларды қосу шынында да көрсетілген ережемен орындалады. Мысалы, $1 + \frac{1}{n}$ мен

$1 + \frac{1}{n+4}$ қатынастарын қосу кезінде төрт сан алынады: $n, n+1, n+4, n+5$. Оларды көрсетілген ереже бойынша қос-қостан көбейтіп, ізделінді қатынас болатын төмендегі қатынасты аламыз

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+4}\right) = \frac{(n+1)(n+5)}{n(n+4)}.$$

Осылайша, әл Фэрәбидің қатынастарды қосу амалы, мағынасы бойынша, бүгінгі бөлшектерді көбейту ережесімен сәйкес келеді.

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Жоғарыда атап өткендей, әл Фэрәби бойынша қатынастарды бөлу - берілген қатынасты олардың қосындысы бастапқы қатынасқа тең болатындай бірнеше өзге қатынастарға бөлу. Бұл музыка теориясының негізінде пайда болған арнайы амал, яғни: ол квартаның интервалдарын өзгермелі (модулирующие) мүшелерге жіктеу кезінде арифметикалық аппарат ретінде қолданылды.

Қатынастарды бөлу үшін әл Фэрәби келесі ережені ұсынады: Егер біз бір қатынасты бірнеше басқа қатынастарға бөлгіміз келсе, онда біз мүшелері өзара бірдей шамаға немесе әртүрлі шамаға айырмашылықта болатын қатынастар қатарын құрамыз. Бірінші жағдайда төменде көрсетілгендей жасаймыз: берілген қатынастың қарапайым мүшелері бізге жүргізу қажет болатын бөлулер санына тең санға көбейтіледі. Осылайша, біз бөлуге тиісті қатынастың жаңа шеткі мүшелері болатын екі сан аламыз. Аралық сандар бір-бірінен ізделінді қатынастағы аралықта болады. Әл Фэрәби бұл ережені келесі мысалмен келтіреді: біз өзімізге $\frac{4}{3}$ қатынасын қарапайым мүшелері бір-бірінен тең шамаға ерекшеленетін басқа үш қатынасқа бөлу мақсатын қойған болайық. 3 және 4 саны, яғни берілген қатынастың мүшелері 3-ке көбейтіледі. 12 және 9 шығады. Бұл сандардың арасына екі ортаңғы сандар орналасады, яғни 11 мен 10. Осылайша, біз үш қатынас аламыз: $1 + \frac{1}{11}$, $1 + \frac{1}{10}$ және $1 + \frac{1}{9}$ және төрт мүшесін аламыз.

Жалпылама түрде бұл ережені былай жазуға болады: $\frac{n+d}{n}$ қатынасы берілген болсын, оны k қатынастарға бөлу керек.

Көрсетілген ереже бойынша:

$$\frac{n+d}{n} = \frac{k(n+d)}{kn} = \frac{kn+kd}{kn+d(k-1)} \cdot \frac{kn+d(k-1)}{kn+d(k-2)} \dots \frac{kn+2d}{kn+d} \cdot \frac{kn+d}{kn}$$

Мұнда, мағынасы бойынша, әл Фэрәби шеткі мүшелері $k(n+d)$, kn және айырмасы $d = (n+d) - n$ болатын арифметикалық прогрессияны құрайтын k сандарды табуға сүйенеді.

Келтірілген мысалда $k=3$ - шеткі мүшелері сәйкес 12 мен 9-ға, айырмасы $d = 4 - 3 = 1$ тең, сондықтан

$$\frac{4}{3} = \frac{12}{9} = \frac{12}{11} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{10}{9}$$

Бұл мысал кездейсоқ таңдалынған жоқ, себебі берілген жағдайда жіктеуге тек қана музыкада «жиі кездесетін» қатынастар ғана қатысады.

Әл Фэрәби басқа жағдай үшін де ереже ұсынады, онда бір қатынасты мүшелері бір-бірінен бірдей емес санға айырмашылықта болатын бірнеше басқа қатынастарға бөлуге тура келеді. Ол үшін әл Фэрәби бірінші берілген қатынасты көрсетілген әдіс бойынша мүшелері бір-бірінен бірдей санға айырмашылықта болатын басқа бірнеше қатынастарға бөлуді ұсынады, ары қарай осы алынған қатынастар өз кезегінде дәл осындай түрде бөлінеді. әл Фэрәби сандық қатынастарды жіктеудің басқа да түрлері болатынын ескереді.

Қатынастарды азайтуды әл Фэрәби қатынастарды қосуға кері амал ретінде қарастырады. Ол мағынасы бойынша қазіргі бөлшектерді бөлу ережесіне ұқсас ережені ұсынады: «Егер бізге бір қатынастан екінші қатынастан алу керек болса, онда келесі ережені қолданамыз: екі қатынастан да ең қарапайым мүшелерін аламыз, бірінші қатынастың ең кіші мүшесін екінші қатынастың ең үлкен мүшесіне көбейтеміз, одан кейін соңғысының ең кіші мүшесіне бірінші қатынастың ең үлкен мүшесін көбейтеміз. Осы екі амалдың нәтижесінде бір-бірімен қалдық қатынаста болатын екі сан алынады.

Оны былай жазуға болады:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}.$$

Көрсетілген ереже келесі мысалмен келтіріледі: егер, бізге $1 + \frac{1}{3}$ қатынасын $1 + \frac{1}{2}$ қатынасынан алу керек болса, онда біз осы екі қатынастың қарапайым мүшелері сәйкес: 4 пен 3, 3 пен 2 болатынын байқаймыз. 3-ті, яғни $1 + \frac{1}{2}$ қатынасының ең үлкен мүшесін 3-ке, яғни $1 + \frac{1}{3}$ қатынасының ең кіші мүшесіне көбейтеміз, содан кейін 2-ні 4-ке көбейтеміз. Осы екі амалдың нәтижесінде екі сан аламыз, яғни 9 және 8, олардың қатынасы, яғни $1 + \frac{1}{8}$ ізделінді қатынас, яғни қалдық болады.

Берілген мысалда:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) : \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{9}{8}$$

Фәрәби әртүрлі музыкалық интервалдарды, түрлер, топтарды алу кезінде осы қатынастармен орындалатын барлық амалдарды шебер қолданады, сонымен қатар ол көпсанды, өте қиын болып табылатын арифметикалық-есептеуіштік сипаттағы мәселелерді шешеді. Мұнда ол өзін шебер практик-есептеуіш ретінде танытады. Соның бір мысалы, квартаны кіші интервалдарға бөлу – музыканың математикалық теориясының негізгі есептерінің бірі болып табылады. Әл Фәрәби де бұл сұраққа көп көңіл бөлді. Ол осы есепті, яғни квартаны бөлу есебін шешудің өзіндік эксперименттік-математикалық әдісін ұсынды. Осы әдіспен квартаны сәйкес келетін түрлерге бөлу кезінде Фәрәби әртүрлі сандық қатынастарға көптеген амалдарды қолданады, олардың нәтижелерін бірнеше кесте түрінде келтіреді.

Әл Фәрәби музыка теориясы үшін сол уақыт математиктерінің арасында қалыптасып кеткен дәстүріне ере отырып, алынған сандық қатынастарды, яғни бөлшектерді, барынша негізгі бөлшектер арқылы көрсетуге тырысатынын айта кеткен жөн. Дегенмен әл Фәрәбиде негізгі бөлшектердің барлық түрлері кездеседі.

Қорытындылай келе, бізге әл Фәрәбидің арифметикалық мазмұндағы барлық шығармалары белгілі болмаса да, жоғарыда келтірілген бізге белгілі еңбектеріне талдау әдіснамалық жағынан, сонымен қатар теориялық және практикалық арифметиканың нақты сұрақтары жағынан үлкен жетістіктерін атап өтуге мүмкіндік береді. Арифметикаға байланысты жасаған еңбектері қазіргі мектеп арифметикасымен ұштасып жатқандықтан үлкен қолданысқа ие болады, білім алушы жастар оның ұсынған дүниелері мен қазіргі оқулықтағы мәліметтерді салыстыра отырып арифметиканы жете түсінуге жағдай жасайды.

Әл Фәрәбидің музыка теориясы тарихшы-философ ғалымдармен, музыка саласының мамандарымен мың жылдың көлемінде және қазіргі күнде қарастырылып жатқанымен оның математикалық, арифметикалық жағы аз зерттелген. Демек, әл Фәрәби бойынша музыка теориясының арифметикалық негіздерін оқытудың қажеттілігі әлі де көп зерттеулерді талап етеді.

1. Көбесов А. Математическое наследие ал-Фараби. Алма-Ата: Наука, 1974.
2. Матвиевская Г.П., Б.А.Розенфельд. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды. Книга 1. Москва: Наука, 1983
3. Матякубов О. Фараби об основах музыки Востока. Ташкент: Фан, 1986

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

4. Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Бостанов Б.Ф., Джанабердиева С.А. Эл Фарабидің математикалық мұралары заманауи білім беру аясында // ВЕСТНИК КазНУ, Серия философия. Серия культурология. Серия политология, №2/1 (51), Алматы, «Қазақ университеті», 2015, С 443-447.
5. Аль-Фараби, Математические трактаты. – Алма-Ата, 1972.
6. Аль-Фараби. Трактаты о музыке и поэзии: пер. с араб. Алма-Ата, 1993.

Аннотация. В данной статье рассматриваются необходимость обучения и исследования арифметической основы теории музыки аль Фараби. В основу взяты работы ученых исследовавших наследие математики и теории музыки аль Фараби. Предложены основные правила из арифметики по аль Фараби, приведены стороны относящиеся к теорию музыки. Говориться о всестороннем рассмотрении приемов применяемые на численные отношения, которые детально применялись в теории музыки аль Фараби. Предложены правила решения задач с отношениями позволяющие узнать, что позаимствовала музыка из арифметики.

Ключевые слова: арифметика, основы арифметики, наследие аль Фараби, теория музыки.

Abstract. This article discusses the need for training and study of arithmetic foundations of music theory al-Farabi. In the basis of the work of scientists who studied the heritage of mathematics and music theory al-Farabi. The proposed basic rules of arithmetic by al-Farabi, given the parties relating to music theory. The saying of a comprehensive review of techniques used in numerical relations that details used in the theory of music al-Farabi. Proposed rules to solve problems with relationships indicating that borrowed music from arithmetic.

Keywords: arithmetic, arithmetic basics, legacy of al Farabi, music theory.

UDC 51(07)372.851

A. Birgebayev

THE ROLE OF PROOF OF DIFFERENTIAL OPERATORS' SEPARABILITY IN UNDERSTANDING THE ENVIRONMENT

(Almaty, Kazakh national pedagogical university named after Abai)

Abstract. The present scientific paper examines differential equation as a model of certain physical phenomena. It determines the reasons for existence, uniqueness and correctness of formulated problems for the studied model. It demonstrates the manner in which the given problem was formulated for corresponding differential operator in functional space. The present paper discusses the role of the considered problems in understanding of the environment.

Keywords: Differential operator, functional, functional space, hyperbolic and parabolic equations.

The majority of physical laws of nature can be formulated in terms of equations with partial differential coefficients and ordinary derivatives.

In this connection it is worth mentioning Sturm Liouville equation, Maxwell's equation, Newton's heat transfer law, Navier–Stokes equation and Schrodinger equation in quantum mechanics. All these equations describe physical phenomena using derivatives of space and time. The specified equations contain derivatives, which characterize very important physical values, such as velocity, acceleration, friction, flow, current, etc. Thus, there is a differential equation that must be correspondingly determined. Among problems included into the

differential equations there is a class of problems having the only one available solution and depending on certain initial conditions. These problems are the most important ones.

It may appear natural, but nevertheless, assumed model needs their proof. Proof of correctness is the first approval of a mathematical model. Its essence consists in the following: if there is no contradiction in the model (solution available), then the model unambiguously characterizes physical processes (unique solution), and the model weakly depends on the physical values measurement errors (the solution continuously depends on the task's data).

The definition of the correctness of the statement of problems was first given J. Hadamard in the beginning of the last century. According to this definition the statement of problem shall be considered correct, if the following conditions are met: the solution exists, the solution of the problem is unique and the solution of the problem continuously depends on the initial conditions. First condition requires repeated uncertainty of the problem. The second conditions requires determining sufficiency of data essential for solution of the problem, while the third condition is connected with the following terms. If the problem is connected with the description of physical phenomena, but the problem data cannot be treated as absolutely accurate, then we may only guess that we know the only some approximants. Thus, in the absence of a continuous dependence on data, the solution of this problem does not comply with the relevant physical arrangement.

The aforementioned correctness conditions need to be defined. Particularly, in the theory of boundary value problems and solutions, that data are considered as elements of certain functional spaces, while the correctness of conditions is formed in the following manner:

1) Solutions exists for any data and normalized vector spaces (C^{∞} , L_p , W_p^1 ...) determined in the internal enclosed spaces;

2) The solution of the problem is unique in one of the specified spaces;

3) In the space considered for infinitesimal variation of data (provided that the data shall exist in such space) there is an infinitesimal variation of solutions in such space. Existence of solutions and continuous data dependence on the initial conditions proves the problem was stated correctly.

With respect to elliptical equations the boundary conditions used for determining the solutions of stated problems within the boundary regions are correct. In solving hyperbolic and parabolic equations the prescribed boundary regions of Cauchy problems and mixed problems are also correct. When considering levels of physical processes complying with the mathematical problems the Cauchy data means the condition of field was determined in the initial immediate time.

Let us consider the requirements to the problems connected with differential equations at the level of the functional analysis theory.

The linear operator in functional spaces is identified as the general state of the concept of linear transformations in finite-dimensional spaces (function, matrix, etc.). In this connection it is worth mentioning that complete definition of the operator \hat{A} requires determination of its definition range first, i.e., the value $\hat{A}\tilde{\sigma}$ shall be defined for the set of elements x in the space H . Operators of unequal spaces are identified as different operators. The definition range represents the linear set belonging to the plane H . If the operator is linear and $\hat{A}\tilde{\sigma}$ is defined for each $\tilde{\sigma} \in S$, then we can define single-valued $\hat{A}\sigma$ for each combination, which shall make σ elements in the set S considering from its linearity. However, all operators cannot be linear in the same direction.

Formal definition of the linear operator: the internal set $D(A)$, which is called the definition range of the linear operator A or in the transformation plane H is determined with linear mapping with respect to internal set $R(A)$ which is called the range space. The linear variety shall be the definition range and the range of values. The operator A is considered

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

bounded, if we find a constant \hat{E} , then the following condition is met $\|Au\| \leq K\|u\|$ for any $u \in D(A)$ the considered norm of operator in plane shall be the smallest among constant numbers \hat{E} .

If the set of values of operator A is the set real numbers $R(A)$ then it shall be defined as a functional. The functional is the special case of operators. Study of the functions dependence on the real variables is based on the concept of limit (lim) in the set of real numbers. Therefore, introduction of the limit concept in the considered set is absolutely natural. Thus, introduction of this concept of limit in certain set allows us to define the concept of space. In general, the concept of space in science has different values. In terms of philosophy it is considered as a form of matter, in geometry it is understood as three-dimensional space $-R_3$, determined using relevant axiomatic statements. In the majority of cases we consider the i - dimensional space, which is located higher then used three-dimensional spaces. Thus, time, velocity, acceleration and several other variables shall be added to the coordinates of points. This results in abstract description of three-dimensional space R_3 on i - dimensional and infinite-dimensional space and study of their properties. These spaces include metric and measurable spaces, as well as Hilbert, Banach, Sobolev spaces and etc.

Functional analysis was formed as the mathematical discipline in the beginning of the XX century. Owing to rampant development it became one of the most important directions in mathematical science, which is used in many branches of mathematics, including several parts of applied mathematics. It has appeared as a result of description of mathematical methods and concepts known and used in mathematical disciplines. This description was created from amongst crossover to the highest levels of the mathematical abstraction peculiar to modern mathematical methods. Consideration of a number of mathematical, physical and technical problems from the perspective of abstract view in many cases affords an opportunity for better determination of its basic patterns, the most correct revelation of general in methods of its solution, even if the problems have different contents.

At present it is impossible to assume solution of equations of complex physical processes, differential equations of mathematical physics, approximate computations of summarized spaces and other important issues without functional-analytic approaches.

Issues considered in the given problem may have relevance to different mathematical problems with the stated content. However, if we do not take into account their real content, then using the mathematical abstraction the considered issues are united into one or two problems.

If we inherently assume that X is the set consisting of the $\tilde{\theta}$ elements (elements, number, function, vector, matrix and etc.), the T shall be the operator reflecting the set X of itself, i.e., $Tx \in X$. Then in the equality

$$Tx = \theta \quad (1)$$

Zero element θ ($\theta \in X$) remains in the set X , while the operator T searches for the element where $x_0 \in X$ transforming the zero element - θ . This problem can be explained with the following system of linear equations:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = r_j, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Inherently, using the following symbols $Tx = \hat{A} \tilde{\theta} - r$, where

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$$

(2) Solution of the system $T \tilde{\partial}_0 = \theta$, results in search of elements – $\tilde{\partial}_0$ (where $\theta=(0,0\dots 0)$) fulfilling conditions.

A kind of that,

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{v=1}^n a_{jv} y_v, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

The problem that requires determination of solutions to the system of linear differential equations or determination of the eigenvalue of the Sturm Liouville problem with boundary conditions results in the following solution of equation:

$$TX = \lambda X \tag{3},$$

Where λ is the real number, i.e., using the operator T we determine the element – X changeable in collinear element.

With respect to the problems (1) - (3) several problems are provided, while the main of which are the following

- I the problem with existing solution
- II the problem with the unique solution
- III the choice of methods for determining direct and approximate solutions
- IV the problem of stability of solutions
- V the problem for identification of errors in determination of direct and approximate solutions

Consideration of differential equations with supplementary conditions allows determination of the operator A. It correspondingly arranges set of functions located in supplementary conditions to each solution in space $u \in E$.

Having considered the function f in this total as an element of the functional space F we find the solution of differential equation

$$Au=f \tag{4}$$

as an equivalent of solution of fulfilled conditions $u \in E$ of operator's equation

Containment of an image of element of any $\in E$ function, i.e., operator A in the set of values is both necessary and sufficient for the availability of the solutions of the equation (4). Thus, the set of data (values) of the problem is fully characterized with determination of the space E, being the space of solutions.

Existence of backward operator A^{-1} will be the guarantor of the solutions availability for the equation (4) and determination of the uniqueness.

$$u=A^{-1}f \tag{5}$$

In the given case, please bear in mind that the basic purpose of the mathematical problem's solution is the determination of the mathematical description. In addition, the problem data have certainly been obtained from the aforementioned experiment, and thus, they cannot be measured precisely, on the other words, the problem data usually contain erroneous measurements. Additional requirements, determining physical data, in which minor changes of the solution corresponds to minor changes in the problem data, should be applied to problems, describing real physical processes using the mathematical models. Generally, when considering equation with operators, minor deviations from the initial values can be considered as the

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

availability of the solution stability. Let us summarize the mentioned above using the relevant mathematical term.

Let the u serve as the solution of equation (4). Let the operator influences from the normalized space E on the normalized space F . Solution of equation (4) $f \in F$ is called stable and minor deviation of the right-hand side, if the number $\delta > 0$ will be determined from any number $\varepsilon > 0$, and the following conditions $\|f - \bar{f}\|_F < \delta$ and condition

$$\|u - \bar{u}\|_E < \varepsilon; \bar{u} \in E, \text{ are also met for the following equation } Au=f, A\bar{u} = \bar{f}.$$

Availability of the solution (4), uniqueness and stability of the solution to minor deviations of data is called the stability of mathematical problem.

In this connection let us give more precise formulation of the present notion Let the operator influences from the normalized space E on the normalized space F .

$$A : E \xrightarrow{A} F$$

If the operator meets the requirements mentioned below, the problem of equation (4) is called correctly constructed problem in the paired space E, F .

- 1) Any solution for $f \in F$ exists, and it is located in the space E ;
- 2) Solution of the problem in the space E will be unique;
- 3) For any element $f \in F$ the solution of the problem is stable.

Notes: the problem may be correct in one paired space and incorrect in another paired space. For example, in case of extension of the space F the solution of any $f \in F$ may possibly result in complementary decision.

Let us give an example of incorrectly constructed problem (this example belongs to Hadamard, who had introduced the concept of correctness).

Let us consider the potential equation (Laplace's equation) in plane:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \tag{6}$$

Let us consider a Cauchy problem along the x -axis. For this purpose we shall use the band $0 < y < \delta$ as the zone of the search for solutions, where δ means any positive number.

Let us mark the band $\Omega = \{y, 0 < y < \delta\}$. Let us consider y as the non-osculating direction.

Let assume that the conditions of Cauchy problem are the following:

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \frac{du}{dy}|_{y=0} = 0 (-\infty < x < \infty) \tag{7}$$

With respect to the unique function $\varphi(x)$ of the determined data, let us consider this function as the confined function on a continuous axis and on the axis of all numbers. Then we may take continuous confined function in the band $C(\Omega) - \Omega$ as the area for determination of operators of the boundary problem (6), (7), then take the set of functions in the space $C(\Omega)$

with continuous second derivative and satisfying the condition $\frac{du}{dy}|_{y=0} = 0$. Let us prove the

correctness of the problem statement (6), (7) in the paired space E, F . We may easily prove the uniqueness of the problem solution. This implies accordance with the solution $u \equiv 0$ of function $\varphi(x \equiv 0)$. Let us give slight deviation of function $\varphi(x)$ in the sense of measurement of the space F , and thus, for the equation (6) according to Cauchy data:

$$u|_{y=0} = \frac{\cos nx}{n}, \frac{du}{dy}|_{y=0} = 0 \tag{8}$$

Let us consider the Cauchy problem: where n – is sufficiently great natural number.

Solution of the new problem $u(x, y) = \frac{\cos nx \operatorname{ch} ny}{n}$, may be checked by putting it into equation (6), (8). It will be understood that

$$\|\varphi\|_F = \left\| \frac{\cos nx}{n} \right\|_F = \max_{-\infty < x < \infty} \left| \frac{\cos nx}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

Among other things,

$$\|u\|_F = \max_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leq y \leq \delta}} \left| \frac{\cos nx \operatorname{ch} ny}{n} \right| = \frac{\operatorname{ch} n\delta}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

In the other words, slight deviation of data in the sense of measurement of the space F corresponds to the same large deviation in the sense of measurement of the space E . Thus, considered Cauchy problem is incorrect in the paired space for the potential equation (Laplace's equation).

Thus, we can prove the existence of the solution for the boundary problems formulated using the differential equations considered in the normalized space. In connection with application of functional analysis methods (Riesz theorem, Titchmarsh's methods, and etc.) classical statement of problems has been replaced with the universal laws. Computed solution is universal and specifies functional spaces for determination of this solution.

Thus, in the solution of boundary problems accordingly formulated for the differential equations, let us consider $Lu \equiv f$ of the differential operator, determined in the appropriate normalized space H . In this connection the solution of the specified classical boundary problems will be determined as follows:

- 1) Determination of the operator L^{-1} ;
- 2) Boundedness in the space H of the operator L^{-1} ;
- 3) Fulfillment of conditions $\|L^{-1} f\|_h \leq c \|f\|_h$;
- 4) Of the L operator's separability;

If the differential operator 1), 2) will be linear, then the proof of availability of the uniqueness of the equation's solution becomes obvious;

3) In addition, it is worth mentioning a coercitive valuation, which express the continuous dependence on the initial conditions, i.e. determines stability; and 4) allows determining smoothness of differential equations' solutions.

Pioneer researches in this sphere have been conducted by Everett V.M. and Geertz M.[1] for singular differential operators. Thereafter, these studies have been continued in scientific researches performed by Otelbaev M. [3], Boymotov K.H. [2], Muratbekov M.B. [4], Birgebaev A. [5] and many others.

Thus, the purpose of formulated problems and their solution is to validate correctness and feasibility of the studied model for the surrounding phenomena using relevant mathematical fictions.

A possibility of proving existence, uniqueness and stability of solutions of formulated problems gives us an objective confidence that the scientific researches have been conducted in the right direction. It is very difficult to appraise its significance, as examination of such issues first requires complete understanding and correct formulation of the relevant problem. The study of separability of differential operators will provide future teachers of mathematics with information on the environment and will definitely shape their worldview and lead to understanding of the specified problems, allowing them solving relevant problems formulated in the normalized space of the mathematical model.

1. Everitt W.N., Yiertz M. On some properties of the power-ties of a formally self-adjoints differential expressions. Proc. London Math. Soc., 24(3), 1972, 756-768.
2. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости.-Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 5, с. 1009-1011.
3. Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов.-Докл.; АН СССР, 1977, т. 234, № 3, с. 540-543.
4. Муратбеков М.Б. Теоремы разделимости и спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов с нерегулярными коэффициентами. //Автореферат док.дис. физ.-мат. наук Алматы, 1994-30с.
5. Биргебаев А. Элементы теорем вложения и теории разделимости. - Уч. пос. - КазНПУ им.Абая, Алматы-2008, 88 стр.

Аңдатпа. Жұмыста дифференциалдық теңдеу белгілі бір құбылыстың моделі ретінде қарастырылған. Сол модель үшін қойылған есептің жалғыздығы және корректілігінің маңысы айқындалады. Сонымен қатар проблеманың функционалдық кеңістіктегі сәйкес дифференциалдық оператор үшін қалай қойылғаны қарастырылады. Зерттеліп отырған есептің қоршаған ортаны танудағы ролі қарастырылған.

Түйін сөздер: Дифференциалдық оператор, гиперболалық және параболалық теңдеулер, функционал, функционалдық кеңістік.

Аннотация. В работе рассматривается дифференциальное уравнение как модель некоторых физических явлений. Определяется смысл существования единственности и корректности поставленной задачи для изучаемой модели. Показывается, как поставлена данная проблема для соответствующего дифференциального оператора в функциональных пространствах. Обсуждается роль исследуемых задач в познании окружающего мира.

Ключевые слова: Дифференциальный оператор, функционал, функциональное пространство, гиперболическое и параболическое уравнения.

УДК 517.958:004

Б.С. Дармбаев¹, Д.В. Лебедев¹, В.А. Перепелкин²

РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ФРАГМЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ LUNA

(¹г. Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, ²г. Новосибирск, Россия, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН)

Аннотация. При численном моделировании явлений методами конечных разностей на современном суперкомпьютерном оборудовании требует построения сложных программ, адаптирующихся к вычислителю и ходу моделирования для обеспечения эффективности проводимых вычислений. В работе проводится сравнительный анализ двух параллельных программ, реализующих попеременно-треугольный метод для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате. Первая реализация построена «традиционным» способом — с использованием интерфейса передачи сообщений MPI, а вторая — с помощью системы LuNA, автоматизирующей конструирование численных программ для мультикомпьютеров. Сравняются масштабируемость и эффективность распараллеливания программ.

Ключевые слова: Фрагментированное программирование, LuNA, численное решение, MPI, параллельная программа, попеременно-треугольный метод.

Введение. Численное моделирование методами конечных разностей с использованием суперкомпьютеров всё чаще наталкивается на вопросы эффективности

алгоритмов и реализующих их параллельных программ. Для реализации моделей с большим количеством точек необходимо использовать алгоритмы, допускающие эффективную (по ресурсам, времени и т.п.) и масштабируемую параллельную реализацию. В частности, плохой масштабируемостью обладают программы, использующие централизованное управление и/или хранение данных, передачу данных на далёкое расстояние (в смысле сетевой топологии).

Примером алгоритма, допускающего эффективную и масштабируемую реализацию, является попеременно-треугольный метод с чебышевским набором параметров. Он является быстро сходящимся двухслойным итерационным методом, применяемым для решения разностных эллиптических уравнений, возникающих при аппроксимации эллиптических уравнений второго порядка.

Тем не менее, параллельная реализация такого рода алгоритмов является сложной задачей системного параллельного программирования, т.к. в программе требуется обеспечить синхронизацию отдельных вычислительных процессов, передачу данных по сети, и т.п.

Для снижения трудоёмкости разработки подобных параллельных программ применяют инструменты, частично автоматизирующие их конструирование. К таким системам относятся LuNA [1], PaRSEC [2,3], Charm++ [4].

Целью настоящей работы является сравнительное исследование свойств параллельных программ, реализующих попеременно-треугольный метод, применяемый для решения модельного двумерного эллиптического уравнения. Сравниваются две параллельные программы, одна из которых получена с помощью традиционного подхода (на базе интерфейса передачи сообщений MPI), а другая — с использованием системы фрагментированного программирования LuNA.

В первом разделе статьи приводятся необходимые определения и описание системы LuNA. Во втором разделе описывается постановка задачи, прикладной алгоритм и схема его параллельной реализации. В третьем разделе приводятся результаты численных экспериментов и сравнительный анализ их производительности

Система фрагментированного программирования LuNA. В системах автоматизации конструирования параллельных программ используются модели вычислений, отличные от распространённой модели взаимодействующих последовательных процессах, используемой, в частности, в стандарте MPI (Message Passing Interface). Это связано с тем, что различные модели вычислений обладают разными свойствами. Например, динамическая миграция MPI-процесса с одного узла на другой как способ выравнивания нагрузки практически невозможна из-за необходимости переносить всю память процесса по сети, возможных открытых дескрипторов файлов и тому подобных проблем, которые возникают из модели вычислений, используемой в MPI.

В системе LuNA используется модель вычислений, называемая фрагментированной программой (ФП). В этой модели данные задачи представляются как множество отдельных единиц, называемых фрагментами данных (ФД). ФД иммутабельны и являются переменными единственного присваивания. Значения ФД могут иметь как базовый тип (целочисленный, вещественный, и т.п.), так и составной (фрагмент сетки, вектор, и т.п.).

Вычисления задачи задаются множеством процессов, каждый из которых связывается с набором входных и выходных ФД и вычисляет значения выходных ФД из значений входных. ФВ не имеет побочных эффектов.

Вычислительный процесс состоит в том, что ФВ, для которых известны значения всех их входных ФД и неизвестны значения выходных, исполняются, что приводит к

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

вычислению новых ФД. Как следствие, новые ФВ могут быть исполнены, и т.д. Вычислительный процесс заканчивается, когда ни один ФВ не может быть исполнен, либо значения всех требуемых ФД (выходных ФД программы) получены.

Такая модель вычисления обладает рядом преимуществ с точки зрения упрощения создания параллельных программ с требуемыми свойствами.

1) На практике ФВ реализуются как вызовы обычных последовательных процедур, что позволяет, по сути, ограничиться последовательным программированием при разработке параллельной программы. Также это позволяет переиспользовать накопленный багаж последовательных программ.

2) ФП не привязана к конфигурации мультимпьютера. ФД может быть размещён в памяти любого узла, передан по сети на другой узел. ФВ может быть исполнен на любом узле при условии, что все его входные ФД на момент исполнения имеются в памяти этого узла, а под выходные ФД имеется достаточно свободного места. Это позволяет автоматически распределять ФД и ФВ по узлам мультимпьютера по мере исполнения программы, обеспечивая, тем самым, равномерную нагрузку на вычислитель.

3) Программисту не требуется синхронизовать процессы, отслеживать готовность данных или освободить память — эти функции берёт на себя исполнительная система.

В итоге, программист может разрабатывать параллельные программы не испытывая трудности, свойственные параллельному программированию.

Модель обладает также и недостатками, которые сводятся к тому, что эффективная реализация ФП является сложной оптимизационной задачей. На практике это означает относительно невысокую эффективность исполнения ФП. Высокой эффективности удаётся достичь либо для ограниченного класса приложений, либо путём дополнительной ручной оптимизации исполнения ФП (для чего в системе LuNA имеются соответствующие средства).

Постановка задачи. Рассматривается решение модельного двумерного эллиптического уравнения. Данные уравнения охватывают широкий класс прикладных задач. Для решения разностных эллиптических уравнений, возникающих при аппроксимации эллиптических уравнений второго порядка, часто используют двухслойные итерационные методы. Одним из быстро сходящихся двухслойных итерационных методов является попеременно-треугольный метод с чебышевским набором параметров, предложенный А. А. Самарским [6]. Для параллельной и фрагментированной реализации был выбран параллельный вариант попеременно-треугольного метода для решения эллиптических уравнений на решетке процессоров [7].

Будем рассматривать задачу Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \text{ при } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \quad (1)$$

и начальными условиями

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \quad (2)$$

Правая часть f выбиралась из условия, что бы точным решением задачи (1) была функция $u = 32x(1-x)(1-y)$.

Для численного решения задачи (1) применялся попеременно-треугольный метод (ПТМ) с чебышевским набором параметров τ_k . Для числа итераций в этом методе справедлива оценка $n_0(\varepsilon) = O(\sqrt{N} \ln(2/\varepsilon))$, где ε - требуемая относительная погрешность, N - число узлов разностной сетки в одном пространственном направлении.

В ПТМ разностный оператор аппроксимирующий исходную задачу представляется в виде

$$B = (D + \omega_0 R_1) D^{-1} (D + \omega_0 R_2),$$

где

$$R_1 + R_2 = R, \quad R_1^* = R_2, \quad R > 0, \quad D = D^* > 0.$$

Будем предполагать, что $A = A^* > 0$, оператор A энергетический эквивалент оператору R :

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R,$$

а отношение c_2/c_1 не слишком велико.

В качестве априорной информации в ПТМ используются δ и Δ из неравенств

$$\delta D \leq R, \quad R_1 D^{-1} R_2 \leq 0.25 \Delta R.$$

Доказано [6], что оптимальным значением ω_0 является

$$\omega_0 = 2/\sqrt{\delta \Delta},$$

а для числа итерации при чебышёвском наборе параметров τ_k и оптимальном значении ω_0 справедлива оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\Delta}{\delta}} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$$

При этом значении n имеет место следующая оценка $\|y^n - u\|_F \leq \|y^0 - u\|_F$, где $F = A, B$ или $AB^{-1}A$. В ПТМ оператор D задаваемый диагональной матрицей, выбирается из условия минимума числа итераций.

В настоящей работе в качестве оператора R используется $R = -\Lambda$, где

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$$

В классическом варианте ПТМ используются следующие разностные операторы: $D = E$, $R_1 y = y_{\bar{x}_1}/h_1 + y_{\bar{x}_2}/h_2$, $R_2 y = y_{x_1}/h_1 + y_{x_2}/h_2$. При таком выборе операторов значения параметров определяются следующим образом:

$\delta = \sum_{\alpha=1}^2 4h_{\alpha}^{-2} \sin^2(\pi h_{\alpha}/2l_{\alpha})$, $\Delta = \sum_{\alpha=1}^2 4h_{\alpha}^{-2}$ где l_{α}, h_{α} - размер расчетной области и шаг разностной сетки в направлении α .

Для нахождения y^{k+1} ([6]) будем использовать следующий алгоритм

Шаг 1. $r^k = Ay^k - f$.

Шаг 2. $(E + \omega_0 R_1) \bar{w}^k = r^k$.

Шаг 3. $(E + \omega_0 R_2) w^k = \bar{w}^k$.

Шаг 4. $y^{k+1} = y^k - \tau_{k+1} w^k$

В качестве τ_{k+1} используется чебышёвский набор параметров.

Параллельный вариант попеременно-треугольного метода на решетке процессоров. В качестве параллельного варианта ПТМ использовался алгоритм, предложенный в [7]. Его особенность заключается в том, что операторы R_1 и R_2 представляются в виде суммы двух операторов.

$$R_1 = R_1^1 + R_1^2, \quad R_2 = R_2^1 + R_2^2$$

где

$$R_1^{\alpha} y = \begin{cases} y_{\bar{x}_{\alpha}}/h_{\alpha}, & i_{\alpha} = N_{i_{\alpha}} 2n_{\alpha} + 1, \dots, N_{i_{\alpha}} (2n_{\alpha} + 1) - 1, n_{\alpha} = 0, 1, \dots, M_{1\alpha}, \\ -y_{x_{\alpha}}/h_{\alpha}, & i_{\alpha} = N_{i_{\alpha}} (2n_{\alpha} + 1) + 1, \dots, N_{i_{\alpha}} (2n_{\alpha} + 2) - 1, n_{\alpha} = 0, 1, \dots, M_{2\alpha}, \\ -y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}} - y/h_{\alpha}^2, & i_{\alpha} = N_{i_{\alpha}} 2n_{\alpha}, \quad n_{\alpha} = 1, \dots, M_{1\alpha}, \\ y/h_{\alpha}^2, & i_{\alpha} = N_{i_{\alpha}} (2n_{\alpha} + 1), \quad n_{\alpha} = 0, 1, \dots, M_{2\alpha} \end{cases}$$

$$R_2^{\alpha} y = \begin{cases} -y_{x_{\alpha}}/h_{\alpha}, & i_{\alpha} = N_{i_{\alpha}} 2n_{\alpha} + 1, \dots, N_{i_{\alpha}} (2n_{\alpha} + 1) - 1, n_{\alpha} = 0, 1, \dots, M_{1\alpha}, \\ y_{\bar{x}_{\alpha}}/h_{\alpha}, & i_{\alpha} = N_{i_{\alpha}} (2n_{\alpha} + 1) + 1, \dots, N_{i_{\alpha}} (2n_{\alpha} + 2) - 1, n_{\alpha} = 0, 1, \dots, M_{2\alpha}, \\ y/h_{\alpha}^2, & i_{\alpha} = N_{i_{\alpha}} 2n_{\alpha}, \quad n_{\alpha} = 1, \dots, M_{1\alpha}, \\ -y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}} - y/h_{\alpha}^2, & i_{\alpha} = N_{i_{\alpha}} (2n_{\alpha} + 1), \quad n_{\alpha} = 0, 1, \dots, M_{2\alpha} \end{cases}$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

где $N_{i\alpha} = N_\alpha / N_{k\alpha}$, $M_{1\alpha} = M_{2\alpha} = 0.5(N_{k\alpha} - 2)$ при $N_{k\alpha}$ четном, $M_{1\alpha} = 0.5(N_{k\alpha} - 1)$, $M_{2\alpha} = 0.5(N_{k\alpha} - 3)$ при $N_{k\alpha}$ нечетном, $N_{k\alpha} \geq 3$, $\alpha = 1, 2$.
Очевидно, что $R_1 + R_2 = R = -\Lambda > 0$.

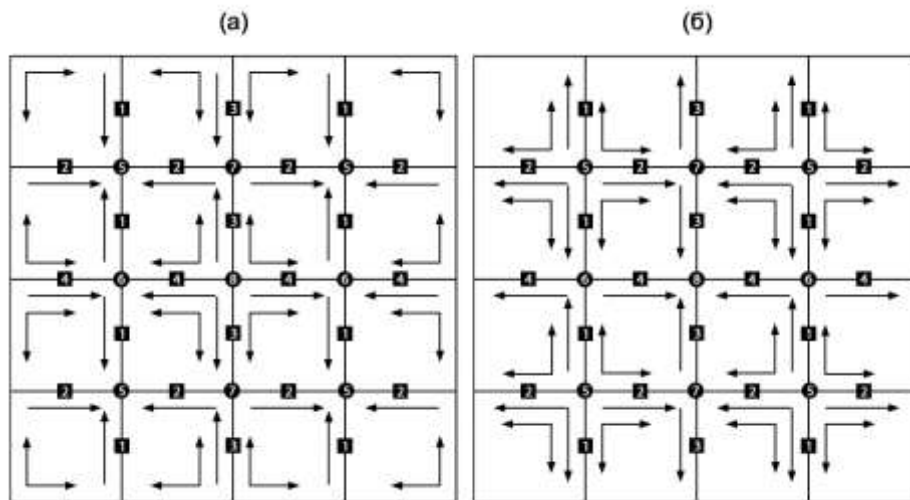


Рисунок 1. Схема вычислений для параллельного алгоритма ПТМ

Расчет на каждой итерации состоит из четырех этапов, аналогичных классическому ПТМ.

Первый этап может выполняться независимо на каждом процессоре, если определены значения y^k , соответствующей подобласти, и значения приграничных точек из соседних подобластей.

$$r^k = Ay^k - f$$

Второй и третий этап вычислений показаны на рисунке 1 (а) и (б) соответственно и происходит по следующей схеме.

Второй этап вычислений начинается с точки 8, затем этого расчет продолжается на линиях 3 и 4 в направлениях, указанных стрелками. Далее расчет происходит во внутренних точках геометрических подобластей. После расчета во внутренних точках расчет происходит в точках 6, 7 и на линиях 1, 2 в направлениях, указанных стрелками и завершается в точках 5. Для вычислений в точках 6, 7 и на линиях 1, 2 и в точке 5 необходимо произвести обмен информацией между соседними процессорами.

$$\bar{w}^k = (D + \omega_0 R_1)^{-1} r^k$$

Параллельная реализация третьего этапа вычислений происходит аналогично (Рисунок 1(б)). Расчет начинается в точках 5, далее происходит на линиях 7, 2, затем - во внутренних точках подобластей, далее - в точках 6, 7 и на линиях 3, 4 и завершается в точке 8. Осуществляется необходимый обмен информацией между соседними процессорами.

$$w^k = (D + \omega_0 R_2)^{-1} D \bar{w}^k.$$

Следует отметить, что в каждом процессоре значения w^k в приграничных точках соседних подобластей либо пересылаются в процессе расчета, либо могут быть непосредственно вычислены (за исключением ряда угловых точек). Такой подход сократит количество пересылок. Поэтому на четвертом этапе в каждом процессоре y^{k+1} может быть вычислено во внутренних точках подобласти, точках внутренних границ и в прилежащих к внутренним границам точках, находящихся в соседних подобластях.

$$y^{k+1} = y^k - \tau_{k+1} w^k.$$

Вычисления на всех этапах происходят на каждой итерации k до сходимости метода.

Тестирование. Были реализованы последовательная, параллельная, с использованием стандарта MPI, и фрагментированная программы. Тестирование проводилось для различного количества точек по пространственным координатам и разного количества процессоров для параллельной реализации. Последовательная, параллельная и LuNA программы запускались на кластере ССКЦ. Параллельная программа запускалась по 8 процессов на узел. LuNA программа запускалась в режиме 8 потоков на узел. Количество узлов менялось в зависимости от декомпозиции области. Целью тестирования являлось определение эффективности различных реализаций рассматриваемого численного алгоритма. Результаты тестирования приведены на рисунке 2.

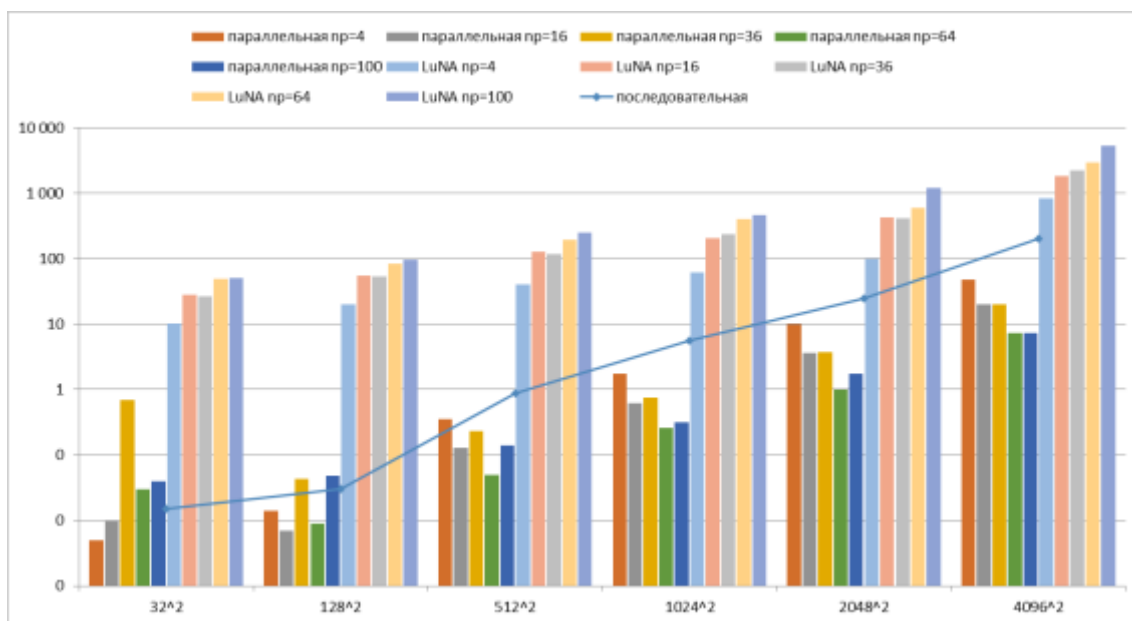


Рисунок 2. Время расчета (в сек.) в зависимости от числа точек сетки

Из рисунка 2 видно, что параллельная реализация алгоритма является самой быстрой в зависимости от количества процессоров. На размере задачи 32×32 самое маленькое время счета у параллельной реализации, которая запускалась на 4 процессорах. С увеличением размера задачи при запуске параллельной реализации на разном количестве процессоров минимальное время расчета достигается на большем количестве процессоров. Так при размере задачи 128×128 минимальное время расчета при количестве процессоров, равном 16. Также при увеличении количества процессоров без изменения размера области время расчета увеличивается. Это связано с тем что время счета уменьшается, но при этом больше времени тратится на передачу данных.

Можно сделать вывод, что при увеличении размерности задачи для более быстрого счета необходимо увеличивать и количество процессоров.

Заключение. Были исследованы эффективность и масштабируемость двух параллельных программ, реализующих попеременно-треугольный метод для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате. Исследование показало, что MPI-программа обладает более высокой эффективностью и масштабируемостью, чем LuNA-программа. LuNA-программа оказалась проще в разработке и отладке за счёт

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

отсутствия необходимости программировать привязку к вычислителю (распределение подзадач по узлам кластера и т.п.).

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 5029/ГФ4.

1. V.E. Malyshkin, V.A. Perepelkin. LuNA Fragmented Programming System, Main Functions and Peculiarities of Run-Time Subsystem // Proceedings of the 11th International Conference on Parallel Computing Technologies, LNCS 6873. – P. 53-61, Springer, 2011.
2. G. Bosilca, A. Bouteiller, A. Danalis, M. Faverge, T. Herault, J. Dongarra. PaRSEC: exploiting heterogeneity to enhance scalability // IEEE Comput Sci Eng. – 2013. – 15(6):36-45 p.
3. G. Bosilca, A. Bouteiller, A. Danalis, M. Faverge, A. Haidar, T. Herault, J. Kurzak, J. Langou, P. Lemarinier, H. Ltaeif, P. Luszczek, A. YarKhan, J. Dongarra. Flexible Development of Dense Linear Algebra Algorithms on Massively Parallel Architectures with DPLASMA // Proceedings of the Workshops of the 25th IEEE International Symposium on Parallel and Distributed Processing (IPDPS 2011 Workshops), IEEE, Anchorage, Alaska, USA, – 2011. – P. 1432-1441.
4. Charm++. <http://charm.cs.uiuc.edu>
5. NAMD: Scalable molecular dynamics library. <http://www.ks.uiuc.edu/Research/namd>.
6. А.А. Самарский. Теория разностных систем. – М.: Наука, 1989.
7. О.Ю. Милюкова, Б.Н. Четверушкин. Параллельный вариант попеременно-треугольного метода, // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998, – Т. 38(2). – С. 228–238.

***Аңдатпа.** Берілген құбылыстарды заманауи суперкомпьютерлерде айырымдық әдістер арқылы сандық модельдеу жүргізілетін есептеулердің тиімділігін арттыру үшін есептеуішке және моделдеудің қадамдарына бейімделетін күрделі бағдарламаларды құруды талап етеді. Берілген жұмыста бірлік шаршыда Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебін шешу үшін айырымды үшбұрыш әдісін жүзеге асыратын екі параллелді бағдарламаларды салыстырмалы талдау келтіріледі. Біріншісі, хабарламаларды жіберу интерфейсін қолданатын MPI «дәстүрлі» әдісі арқылы, ал екіншісі, мультикомпьютерлерге арналған сандық бағдарламаларды құрастыруды автоматтандыратын LuNA жүйесі арқылы жүзеге асырады. Бағдарламалардың параллелденуінің көлемділігі мен тиімділігі салыстырылады.*

***Түйін сөздер:** Фрагменттелген бағдарламалау, LuNA, сандық шешім, MPI, параллелдік бағдарлама, айнымалы үшбұрышты әдіс.*

***Abstract.** In the numerical simulation of phenomena of finite difference methods on modern supercomputers requires the construction of complex programs, adapting to the calculator and modelling course to ensure the effectiveness of the calculations. The paper presents a comparative analysis of two parallel programs implementing the alternating triangular method for solving the Dirichlet problem for the Poisson equation in the unit square. The first implementation is based "traditional" way - by using the MPI message passing interface, and the second - with the help of LuNA system that automates the design of numerical programs for multicomputers. We compare the scalability and efficiency of parallelizing programs.*

***Keywords:** Fragmented programming, LuNA, numerical solution, MPI, parallel program, alternating triangular method.*

ӘОЖ 517.95

Л.Қ. Жапсарбаева

ЕКІНШІ РЕТТІ ЭЛЛИПСТІК ЖҮЙЕНІҢ ШЕШІМДЕРІНІҢ L_p КЕҢІСТІГІНДЕ КОЭРЦИТИВТІ БАҒАЛАУЛАРЫ

(Алматы қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті)

***Аңдатпа.** Бұл жұмыс кіші мүшесі шектеусіз екінші ретті сингулярлы эллипстік жүйенің коэрцитивті шешілуін Лебег кеңістігінде зерттеуге арналған. Система өзіне тән арнайы қиындықтары туындайтын гильберттік емес кеңістікте қарастырылады. Кіші мүшесі шектеусіз екінші ретті сингулярлы эллипстік жүйенің шешімінің коэрцитивтік бағалаулары Лебег кеңістігінің нормасында тағайындалған. Алынған шарттар жеткілікті шарттар болып табылады. Дәлелденген теорема мысалмен жабдықталған.*

***Түйін сөздер:** Эллипстік теңдеу; коэрцитивті бағалаулары; мультипликатор; Фурье түрлендірулері.*

1. Кіріспе

Екінші ретті эллипстік теңдеуді

$$B_x U + Q_\lambda(X)U = F(X), \quad (1)$$

R^2 жазықтығында қарастырайық, мұндағы

$$B_x = \alpha I \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - I \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$Q_\lambda(X) = \begin{pmatrix} \lambda + a(x, y) & 0 \\ 0 & \lambda + a(x, y) \end{pmatrix} = Q(X) + \lambda I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = (u, v), \quad F = (f, g), \quad X = (x, y),$$

$a(x, y) \geq 1$ – үзліссіз функция, ал $\alpha, \beta_1, \beta_2, \lambda$ – келесі шарттарды қанағаттандыратын тұрақтылар

$$\lambda \geq 0,$$

$$\beta_1 \beta_2 > 0, \quad -2 < \alpha < \frac{-\beta_1 \beta_2}{2}. \quad (2)$$

Айталық $a(X)$ функциясы төмендегі шарттарды қанағаттандырсын:

$$\sup_{|X-T| \leq 1} \frac{a(X)}{a(T)} \leq C < \infty, \quad (3)$$

$$|a(X) - a(T)| \leq M |a(T)|^\theta |X - T|^\sigma, \quad \text{при } |X - T| \leq 1, \quad (4)$$

мұндағы $\sigma \in (0, 1]$, $2\theta - \sigma - 2 < 0$, M, C – тұрақты сандар.

Бұл жұмыс кіші мүшесі шектеусіз екінші ретті сингулярлы эллипстік жүйенің коэрцитивті шешілуін $L_p = L_p(R^2, R^2)$, $1 < p < \infty$ кеңістігінде зерттеуге арналған. Коэрцитивтік бағалаулардың бар болуы дифференциалдық оператордың спектралдық қасиеттерін зерттеуге дифференциалдық функциялардың салмақты кеңістіктерінің енгізу теориясындағы белгілі фактілерді қолдануға мүмкіндік береді. Шешімнің коэрцитивтік бағалаулар әдісі сингулярлы

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

эллиптік теңдеулердің әр түрлі кластары үшін [1-9] жұмыстарында негізделді және дамытылды. Жалпы екінші ретті Бицадзе типтес жүйелер үшін коэрцитивтік бағалаулар К.Н.Оспановтың [10-12] жұмыстарында алынды. Жалпыланған Коши-Риман жүйесі үшін L_p кеңістігінде коэрцитивті шешілуі [13] жұмысында зерттелді.

2. Негізгі нәтиже

Келесі тұжырымда (1) теңдеудің шешімдерінің тегістігінің жеткілікті шарттары – шешімнің екінші ретке дейінгі жалпылымы туындыларының, сонымен қатар $a(x, y)U$ түріндегі көбейтінділерінің де L_p кеңістігіне тиістілігі алынған. Бұл теорема жұмыстың негізгі нәтижесі болып табылады.

Теорема 1. *Айталық $1 < p < \infty$ болсын, $a(X) \geq 1$ функциясы (3), (4) шарттарды қанағаттандырсын. Сонда L_p -кеңістігінде (1) теңдеуінің $U(X)$ шешімдері үшін төмендегі теңсіздік орындалады*

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|_p^p + \left\| \frac{\partial U}{\partial y} \right\|_p^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\|_p^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right\|_p^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\|_p^p + \|a(X)U\|_p^p \leq C(\|F\|_p^p + \|U\|_p^p), \quad (5)$$

мұндағы C тұрақтысы $U(X)$ мен $F(x)$ -тан тәуелсіз.

Теореманы дәлелдеуге қажетті кейбір көмекші тұжырымдарды келтірейік.

Теорема 2. [14] *Айталық $1 < p < \infty$. $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n \neq 0$ болған жағдайда $\varphi = \varphi(\xi)$*

($\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$) үзліссіз шенелген және $\frac{\partial^n \varphi}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n}$ туындылары бар функция болсын, демек оның барлық алдыңғы туындылары да үзліссіз болады. Сонымен қатар

$$\max_{0 \leq \alpha_j \leq 1} \sup_{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n \neq 0} |\xi^\alpha D^\alpha \varphi(\xi)| = M < \infty$$

деп ұйғаралық. $\varphi(\xi) = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ функциясының α ретті туындыларын $D^\alpha \varphi(\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}}$ деп белгілейік. Айталық $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, мұндағы

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – бүтін теріс емес және $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ болатындай сандар. Сонда L_p -да φ мультипликатор болып табылады және кез-келген $f \in C_0^\infty(R^n)$ функция үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\|f\|_p \leq c(p, n)M \|f\|_p.$$

Лемма 1. [14] *$1 < p < \infty$ болған жағдайда $W_p^k(R^n)$ кеңістігінің нормасы келесі нормаға эквивалент болып табылады*

$$\|f\|_{L_p^k(R^n)} \equiv \|F^{-1} (1 + |\xi|^2)^k F f\|_p.$$

мұндағы F, F^{-1} – тура және кері Фурье түрлендірулері.

Теорема 1-дің дәлелдеуі. Белгілі теңсіздікті

$\|B_x U\|_p^p \leq C_0 (\|Q_\lambda(X)U\|_p^p + \|F\|_p^p)$ пайдаланып, алатынымыз

$$\|B_x U\|_p^p \leq C_1 \|F\|_p^p.$$

Енді төмендегі матрицаның

$$A(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + (-\alpha\xi^2 + \eta^2)^2 + 2(-\alpha\xi^2 + \eta^2) - \beta_1\beta_2\xi^2\eta^2} \begin{pmatrix} -\alpha\xi^2 + \eta^2 + 1 & \beta_1\xi\eta \\ \beta_2\xi\eta & -\alpha\xi^2 + \eta^2 + 1 \end{pmatrix}$$

әрбір элементі L_p кеңістігінде мультипликатор болады [14]. Алдын-ала келесі белгілеулерді енгіземіз

$$A(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} A_{11}(\xi, \eta) & A_{12}(\xi, \eta) \\ A_{21}(\xi, \eta) & A_{22}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = (1 + \xi^2 + \eta^2) Q_1^{-1}(\xi, \eta),$$

$$Q_1(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} -\alpha\xi^2 + \eta^2 + 1 & -\beta_1\xi\eta \\ -\beta_2\xi\eta & -\alpha\xi^2 + \eta^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Бұл матрицаның (2) шарт бойынша кері матрицасы $Q_1^{-1}(\xi, \eta)$ бар болады, өйткені

$$\det Q_1(\xi, \eta) = (-\alpha\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - \beta_1\beta_2\xi^2\eta^2 \geq (-\alpha\xi^2 + 1)^2 + 1.$$

Енді $A(\xi, \eta)$ матрицасының Теорема 2-нің шарттарын қанағаттандыратынын көрсетелік. Шынында да

$$\sup_{\xi \in R} \frac{\partial A_{11}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \leq \sup_{\xi \in R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{(\xi^2 + \eta^2 + 1)(-\alpha\xi^2 + \eta^2 + 1)}{1 + (-\alpha\xi^2 + \eta^2)^2 + 2(-\alpha\xi^2 + \eta^2) - \beta_1\beta_2\xi^2\eta^2} \right) \leq \tilde{C}_0$$

$$\sup_{\xi \in R} \frac{\partial A_{12}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \leq \tilde{C}_0, \sup_{\xi \in R} \xi \frac{\partial A_{12}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \leq \tilde{C}_1 \text{ және } \sup_{\xi \in R} \xi \frac{\partial A_{12}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \leq \tilde{C}_3.$$

Осылайша келесі туындылардың да жоғарыдан шектелгендігін көрсете аламыз

$$\sup_{\eta \in R} \frac{\partial A_{ij}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \leq C, \sup_{\eta \in R} \eta \frac{\partial A_{ij}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \leq C_1, i, j = 1, 2.$$

Енді Лемма 1-ді қолданып, алатынымыз

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial U}{\partial y} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\|_{L_p}^p \leq$$

$$\leq C_0 \|F^{-1} (1 + \xi^2 + \eta^2) F U\|_{L_p}^p.$$

Қарапайым түрлендірулер жүргізе отырып және

$\|F^{-1} Q_1(\xi, \eta) F U\|_{L_p}^p$ мен $\|B_x U\|_{L_p}^p + \|U\|_{L_p}^p$ нормаларының эквиваленттілігін ескере отырып, келесі бағалауларды аламыз

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial U}{\partial y} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\|_{L_p}^p \leq$$

$$\leq C_1 \|F^{-1} (1 + \xi^2 + \eta^2) Q_1^{-1}(\xi, \eta) F F^{-1} Q_1(\xi, \eta) F U\|_{L_p}^p \leq$$

$$\leq C_2 \|F^{-1} A(\xi, \eta) F U\|_{p \rightarrow p} \|F^{-1} Q_1(\xi, \eta) F U\|_{L_p}^p \leq$$

$$\leq C_3 \|F^{-1} Q_1(\xi, \eta) F U\|_{L_p}^p \leq C_4 (\|B_x U\|_{L_p}^p + \|U\|_{L_p}^p) \leq$$

$$\leq \tilde{C} \left(\|B_x U\|_{L_p}^p + \|Q_\lambda(X)U\|_{L_p}^p + \|U\|_{L_p}^p \right) \leq \tilde{C}_1 \left(\|F\|_{L_p}^p + \|U\|_{L_p}^p \right).$$

Теорема дәлелденді.

Мысал. L_p кеңістігінде келесі жүйені қарастыралық

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (\lambda + e^{|x+y|} + 1)u = f, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + e^{|x+y|} + 1)v = g. \end{cases}$$

1 және [15]-дағы теоремалар бойынша бұл жүйенің кез-келген $F \in L_p$ үшін жалғыз шешімі $U = (u, v) \in L_p$ бар болады. Сонымен қатар бұл жүйе үшін L_p кеңістігінің нормасы бойынша (5) түріндегі коэрцитивті бағалаулар орындалады. 1 және [15]-дағы теоремаларының шарттары $a(x, y) = |x + y|^2 + 1$ болған кезде де қанағаттандырылады.

1. Everitt W.N. Giertz M. On some properties of the powers of a formally self-adjoint differential expression // Proc. London Math. Soc. №24(3). 1972. -P.149-170.
2. Everitt W.N. Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math. Soc. №23(3). 1971. -P.301-324.
3. Отелбаев М. К методу Титчмарша оценки резольвенты // АН СССР. №4(221). 1973. -С.787-768.
4. Отелбаев М. О суммируемости с весом решения уравнения Штурма-Лиувилля //Матем. заметки. №6(16). 1974.-С.969-980.
5. Отелбаев М. О делимости эллиптических операторов //Докл. АН СССР. №3(243). 1977. -С.540-543.
6. Отелбаев М. О гладкости решений дифференциальных уравнений //Известия АН КазССР, сер. Физ.-мат. №5. 1977. -С.45-48.
7. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы делимости эллиптических уравнений //Тр. Матем. Ин-та АН СССР. №161. 1983.-С.195-217.
8. Бойматов К.Х. Теория делимости для оператора Штурма-Лиувилля // Матем. заметки. №3(14). 1973. -С.349-359.
9. Бойматов К.Х. Теоремы делимости //ДАН СССР. 1975.-Т.223, № 3. -С. 521-524.
10. Оспанов К.Н. Коэрцитивные оценки для сингулярной системы А.В.Бицадзе // Матем. журнал РК. №1 (15). 2005. -С.85-93
11. Оспанов К.Н. О коэрцитивной разрешимости сингулярной системы второго порядка // Труды межд. конф. «Современные проблемы математики». –Астана, 2002. -С.111-113.
12. Оспанов К.Н. Об условиях коэрцитивной разрешимости сингулярной системы второго порядка смешанного типа // Материалы межд. Росс.-Каз.симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». -Нальчик-Эльбрус. 2004. -С.138-140.
13. Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость обобщенной системы Коши-Римана в пространстве $L_p(E)$ // Украинский математический журнал. №11. 1996. -С.1564-1569.
14. Мынбаев К.Т. Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. -М.: Наука, 1988. -288с.

15. Жапсарбаева Л.Қ. Лебег кеңістігінде кіші мүшесі шектеуіз екінші ретті сингулярлы эллипстік жүйенің шешімінің бар болуы //Хабаршы ҚазҰПУ. №1 (49). 2015.-С.46-52.

Аннотация. Работа посвящена исследованию коэрцитивной разрешимости сингулярной эллиптической системы второго порядка с неограниченным младшим членом в пространстве Лебега. Система изучается в негильбертовом пространстве, в котором возникают специфические сложности. Установлены коэрцитивные оценки решения сингулярной эллиптической системы с неограниченным младшим коэффициентом в норме пространства Лебега. Полученные условия являются достаточными. Теорема снабжена примером.

Ключевые слова: Эллиптическое уравнение; коэрцитивные оценки; мультипликаторы; преобразования Фурье.

Abstract. The work is devoted to study the coercive solvability of second-order singular elliptic system with an unbounded lowest term in Lebesgue space. The system is studied in nonhilbert space, where there are specific complexity. The coercive estimates of solutions of singular elliptic system with an unbounded younger coefficient are established. Conditions that established in the theorem are sufficient. The theorem is provided with an example.

Keywords: Elliptic equation; coercive estimates; multiplier; Fourier transformations.

УДК 517.9

З.С. Карсыбаева

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНУЮ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И ФУНКЦИЮ

(г. Астана, Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева)

Аннотация: В статье получены результаты по представлению промежуточной производной через производную более высокого порядка и функцию. Используется ряд Тейлора для выражения промежуточных производных через саму функцию и её высшую производную. С помощью точек, равномерно разбросанных по заданному единичному кубу, создаём линейную систему из n уравнений с n неизвестными. Решение этой системы с помощью метода Крамера создаёт возможность оценки промежуточной производной $f^{(j)}(x) \in C[0,1], j = 1, 2, \dots, n-1$. При этом для оценка определителя полученной линейной системы получена преобразованием его с помощью определителя Вандермонда.

В результате получено неравенство $|f^{(j)}(x_0)| \leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f^{(n)}(t)| dt \right\}$, которое необходимо для доказательства оценок, приводимых в утверждениях.

Ключевые слова: Функция, производная, ряд Тейлора, метод Крамера.

Рассмотрим на конечном отрезке $[0,1]$ функцию $f(x)$, имеющую непрерывные производные до n -го порядка включительно

$$f^{(j)}(x) \in C[0,1], j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Для функции $f(x)$ имеет место формула Тейлора

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(x_0) \frac{(x-x_0)^j}{j!} + R_n(x, x_0), \quad 0 < x, x_0 < 1. \quad (1)$$

В формуле Тейлора (1) остаток $R_n(x, x_0)$ при этих условиях можно представить в виде $R_n(x, x_0) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$.

Прямоугольник $\{0 < x, x_0 < 1\}$ обозначим Δ .

Разделим отрезок $[0;1]$ на $2n$ равных частичных отрезков: $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2n}$. Выберем точки x_k на каждом частичном отрезке Δ_{2k} с четным индексом:

$$\Delta_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть G обозначает n -мерный куб точек,

$$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \Delta_{2k}, k = 1, 2, \dots, n, \Delta_{2k} \in [0, 1]\}$$

В формуле Тейлора (1) остаток $R_n(x, x_0)$ перенесем в левую часть:

$$f(x) - R(x, x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(x_0) \frac{(x-x_0)^j}{j!},$$

затем подставим вместо x последовательно числа x_1, x_2, \dots, x_n .

Получим в результате n линейных уравнений относительно n неизвестных

$$f^{(j)}(x_0), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Запишем полученное в виде системы из n линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(x_0) \frac{(x_k - x_0)^j}{j!} = f(x_k) - R(x_k, x_0) \quad (2)$$

Итак (2) представляет собой систему линейных уравнений с n неизвестными $f^{(j)}(x_0), j = 0, 1, \dots, n-1$. Определитель системы (2) имеет вид

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)^2/2! & \dots & (x_1 - x_0)^{n-1}/(n-1)! \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)^2/2! & \dots & (x_2 - x_0)^{n-1}/(n-1)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)^2/2! & \dots & (x_n - x_0)^{n-1}/(n-1)! \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$W = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} (x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0) \frac{(x_k - x_0)^j}{j!}, \quad W = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \frac{(x_k - x_0)^j}{j!},$$

где α_{jk} равны алгебраическим дополнениям элементов $\frac{(x_k - x_0)^j}{j!}$ в определителе $W, j = 0, 1, \dots, n-1$.

Решение системы (2) найдем по формуле Крамера. Тогда из (2) и (3) следует, что

$$f^{(j)}(x_0) = \frac{1}{W} \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} (f(x_k) - R(x_k, x_0)) \quad (4)$$

Определитель W системы (2) можно оценить с помощью определителя Вандермонда, для этого понадобится тождественно преобразовать определитель W .

Рассмотрим определитель Вандермонда

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}; V = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

В этом определителе подставим вместо a_i выражение $x_i - x_0$, тогда получим при $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)^2 & \dots & (x_1 - x_0)^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)^2 & \dots & (x_2 - x_0)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)^2 & \dots & (x_n - x_0)^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Рассмотрим определитель (3)

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)^2/2! & \dots & (x_1 - x_0)^{n-1}/(n-1)! \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)^2/2! & \dots & (x_2 - x_0)^{n-1}/(n-1)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)^2/2! & \dots & (x_n - x_0)^{n-1}/(n-1)! \end{vmatrix},$$

Преобразуем (3) к следующему виду

$$W = \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3!} \dots \frac{1}{(n-1)!} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)^2 & \dots & (x_1 - x_0)^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)^2 & \dots & (x_2 - x_0)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)^2 & \dots & (x_n - x_0)^{n-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2!3! \dots (n-1)!} \cdot \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Оценим W , учитывая, что $|x_i - x_j| > \frac{1}{2n}$ при $i \neq j, x_i \in \Delta_{2i}, i = 1, 2, \dots, n$.

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \dots (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})$$

$$\left| \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \right| = \prod_{1 \leq j < i \leq n} |x_i - x_j| \geq \left(\frac{1}{2n} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (5)$$

В произведении (5) количество множителей подсчитано по формуле $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{1 + (n-1)}{2} (n-1) = \frac{1}{2} n(n-1)$

$$|W| = \left| \frac{1}{2!3! \dots (n-1)!} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \right| \geq \frac{1}{2!3! \dots (n-1)!} \left(\frac{1}{2n} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Из этой оценки определителя W следует, что $\left| \frac{1}{W} \right| < 2!3! \dots (n-1)! (2n)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ и

$$\left| \frac{1}{W} \right| < 2!3! \dots (n-1)! (2n)^{\frac{n(n-1)}{2}}. \text{ И так } \left| \frac{1}{W} \right| < C(n).$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Выведем решение нашей системы по формуле Крамера для решения системы линейных уравнений при $n=3$. Согласно формуле Крамера имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f(x_1) - R(x, x_0) & x_1 - x_0 & \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \\ f(x_2) - R(x, x_0) & x_2 - x_0 & \frac{(x_2 - x_0)^2}{2} \\ f(x_3) - R(x, x_0) & x_3 - x_0 & \frac{(x_3 - x_0)^2}{2} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & f(x_1) - R(x, x_0) & \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \\ 1 & f(x_2) - R(x, x_0) & \frac{(x_2 - x_0)^2}{2} \\ 1 & f(x_3) - R(x, x_0) & \frac{(x_3 - x_0)^2}{2} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_0 & f(x_1) - R(x, x_0) \\ 1 & x_2 - x_0 & f(x_2) - R(x, x_0) \\ 1 & x_3 - x_0 & f(x_3) - R(x, x_0) \end{vmatrix}.$$

Получили, что $f(x_0) = \frac{1}{W} \Delta_1, f'(x_0) = \frac{1}{W} \Delta_2, f''(x_0) = \frac{1}{W} \Delta_3$. Вычислим W с помощью определителя Вандермонда:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_0 & \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \\ 1 & x_2 - x_0 & \frac{(x_2 - x_0)^2}{2} \\ 1 & x_3 - x_0 & \frac{(x_3 - x_0)^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{144} \Rightarrow \frac{1}{W} \leq 144$$

Оценим неизвестные нашей системы по модулю:

$$|f^{(j)}(x_0)| \leq 144 \sum_{i=1}^3 (|f(x_i)| + |R(x_i, x_0)|) \quad (6)$$

Вернемся к общему случаю. Мы рассматриваем систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(x_0) \frac{(x_k - x_0)^j}{j!} = f(x_k) - R(x_k, x_0), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Неизвестные $f^{(j)}(x_0)$ вычислены по формуле Крамера: $f^{(j)}(x_0) = \frac{1}{W} \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} (f(x_k) - R(x_k, x_0))$, где α_{jk} - алгебраические дополнения элемента $\frac{(x_k - x_0)^j}{j!}$ из определителя W ; $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Наша цель дать оценку неизвестным $|f^{(j)}(x_0)|$.

$$|f^{(j)}(x_0)| \leq \frac{1}{W} \sum_{k=1}^n |\alpha_{jk}| |f(x_k) - R(x_k, x_0)| \quad (7)$$

Через G обозначен n -мерный куб точек $(x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \Delta_{2k}, k = 1, 2, \dots, n$. Доказано, что $\left| \frac{1}{W} \right| < C(n)$, где константа $C(n)$ зависит от наивысшего порядка

производной функции $f(x)$, при которой $f^{(j)} \in C[0;1], j = 0, 1, \dots, n$.

Для дальнейших оценок $|f^{(j)}(x_0)|$ проинтегрируем левую и правую части неравенства (7) по области G :

$$|f^{(j)}(x_0)| \leq \frac{1}{W} \sum_{k=1}^n |\alpha_{jk}| |f(x_k) - R(x_k, x_0)|, \left| \frac{1}{W} \right| < 2!3!\dots(n-1)!(2n)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left| \frac{1}{W} \right| < C(n).$$

$$\int_G |f^{(j)}(x_0)| dx_1 dx_2 \dots dx_n = |f^{(j)}(x_0)| \int_G dx_1 dx_2 \dots dx_n = |f^{(j)}(x_0)| \int_{\Delta_2} dx_1 \int_{\Delta_4} dx_2 \dots \int_{\Delta_{2n}} dx_n =$$

$$= f^{(j)}(x_0) \left(\frac{1}{2n}\right)^n \leq C(n) \int_G \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} (|f(x_k)| + |R(x_k, x_0)|) dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{jk} \leq \max_k \alpha_{jk} \\ C(n) \max_k \alpha_{jk} = C(n, j) \end{array} \right| \leq C(n, j) \int_G \sum_{k=1}^n (|f(x_k)| + |R(x_k, x_0)|) dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq$$

$$\leq C(n, j) \sum_{k=1}^n \int_G |f(x_k)| dx_1 dx_2 \dots dx_n + \sum_{k=1}^n \int_G |R(x_k, x_0)| dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Итак, соберём начало и конец в цепочке преобразований и получим неравенство

$$\left| f^{(j)}(x_0) \right| \left(\frac{1}{2n}\right)^n \leq C(n, j) \left(\sum_{k=1}^n \int_G |f(x_k)| dx_1 dx_2 \dots dx_n + \sum_{k=1}^n \int_G |R(x_k, x_0)| dx_1 dx_2 \dots dx_n \right)$$

в котором константу $\left(\frac{1}{2n}\right)^n$ перенесём из левой части в правую, умножив обе части неравенства на константу $(2n)^n$:

$$\left| f^{(j)}(x_0) \right| \leq (2n)^n C(n, j) \left(\sum_{k=1}^n \int_G |f(x_k)| dx_1 dx_2 \dots dx_n + \sum_{k=1}^n \int_G |R(x_k, x_0)| dx_1 dx_2 \dots dx_n \right)$$

Продолжим оценку с помощью дальнейших преобразований: воспользуемся тем, что сумму $\sum_{k=1}^n \int_G |f(x_k)| dx_1 dx_2 \dots dx_n$ можно заменить выражением

$$\int_{\Delta_2} |f(x_1)| dx_1 \int_{\Delta_4} dx_2 \dots \int_{\Delta_{2n}} dx_n + \int_{\Delta_2} dx_1 \int_{\Delta_4} |f(x_2)| dx_2 \int_{\Delta_6} dx_3 \dots \int_{\Delta_{2n}} dx_n + \dots$$

$$\dots + \int_{\Delta_2} dx_1 \int_{\Delta_4} dx_2 \dots \int_{\Delta_{2n}} |f(x_n)| dx_n$$

аналогично заменим и вторую сумму.

$$\left| f^{(j)}(x_0) \right| \leq (2n)^n C(n, j) \left\{ \int_{\Delta_2} |f(x_1)| dx_1 \int_{\Delta_4} dx_2 \dots \int_{\Delta_{2n}} dx_n + \int_{\Delta_2} dx_1 \int_{\Delta_4} |f(x_2)| dx_2 \int_{\Delta_6} dx_3 \dots \int_{\Delta_{2n}} dx_n + \dots \dots + \int_{\Delta_2} dx_1 \int_{\Delta_4} dx_2 \dots \int_{\Delta_{2n}} |f(x_n)| dx_n + \left\{ \sum_{k=1}^n \int_G |R(x_k, x_0)| dx_1 dx_2 \dots dx_n \right\} \right\}$$

$$\left| f^{(j)}(x_0) \right| \leq (2n)^n C(n, j) \left\{ \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_{2k}} |f(t)| dt + \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_{2k}} |R(t, x_0)| dt \right\}$$

$$\left| f^{(j)}(x_0) \right| \leq 2n C(n, j) \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_{2k}} (|f(t)| + |R(t, x_0)|) dt \right\}$$

$$\left| f^{(j)}(x_0) \right| \leq 2n C(n, j) \left\{ \int_0^1 (|f(t)| + |R(t, x_0)|) dt \right\}.$$

Итак, получено неравенство следующего вида:

$$\left| f^{(j)}(x_0) \right| \leq 2n C(n, j) \left\{ \int_0^1 (|f(t)| + |R(t, x_0)|) dt \right\} \quad (8)$$

где $R_n(t, x_0) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^t (t-x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx$. Остаток в формуле Тейлора записан в форме Коши.

Рассмотрим слагаемое $\int_0^1 R(t, x_0) dt$ в неравенстве (8).

$$\int_0^1 |R(t, x_0)| dt = \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_{x_0}^t (t-x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx \right| dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_0^1 f^{(n)}(x) dx \right| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(x) dx$$

, поскольку $0 \leq x_0, t \leq 1$, то $|t-x| \leq 1$.

В результате неравенство (8) принимает следующий вид:

$$|f^{(j)}(x_0)| \leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 (|f(t)| + |R(t, x_0)|) dt \right\} \leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 |f(t)| dt + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(x) dx \right\},$$

так, как $\frac{1}{(n-1)!} < 1$, то последнее неравенство можно записать в виде:

$$|f^{(j)}(x_0)| \leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f^{(n)}(t)| dt \right\}.$$

Утверждение 1. Существует постоянная $A = A(n, j)$ такая, что для $\forall f \in C^n[0;1]$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(j)}(x)| \leq A(n, j) \|y; W_1^n[0;1]\| \quad (9)$$

Доказательство. Неравенство (9) следует из оценки $|f^{(j)}(x_0)| \leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f^{(n)}(t)| dt \right\}$ в силу того, что точка x_0 в этой оценке является произвольной точкой из $[0,1]$.

Утверждение 2. Существует постоянная $A = A(n, p, j), 1 < p < \infty$ такая, что для $\forall f \in C^n[0;1]$

$$\|f^{(j)}\|_{L_p[0,1]} \leq A(n, p, j) \|y; W_p^n[0;1]\| \quad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим оценку, полученную ранее $|f^{(j)}(x_0)| \leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f^{(n)}(t)| dt \right\}$

Проинтегрируем левую и правую части этой оценки на отрезке $[0,1]$

$$\begin{aligned} |f^{(j)}(x_0)| &\leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 (|f(t)| + |f^{(n)}(t)|) dt \right\} \\ \int_0^1 |f^{(j)}(x)|^p dx &= \|f^{(j)}(x)\|_{L_p[0,1]}^p \leq (A(n, j))^p \int_0^1 \left\{ \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f^{(n)}(x)| dx \right\}^p dt = \\ &= (A(n, j))^p \left\{ \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f^{(n)}(x)| dx \right\}^p \leq \end{aligned}$$

применим неравенство Гёльдера к каждому из интегралов внутри скобки

$$\begin{aligned} &\leq (A(n, j))^p \left\{ \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 dt \right)^{1/p'} + \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 dt \right)^{1/p'} \right\}^p = \\ &= (A(n, j))^p \left\{ \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\}^p = (A(n, j))^p \|y; W_p^n[0;1]\|^p \end{aligned}$$

$$\|f^{(j)}\|_{L_p[0,1]} \leq A(n, p, j) \|y; W_p^n[0;1]\|$$

Доказано неравенство (10).

Утверждение 3. Пусть $1 \leq p < q < \infty$. Тогда $\forall y \in C^n[0,1]$ справедлива оценка $\|y^{(j)}; L_p[0,1]\| \leq A(n, p, q, j) \|y; W_q^n[0;1]\|$, где $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Доказательство. Из утверждения 2 следует, что при $1 < p < \infty \forall y \in C^n[0,1]$,
 $1 < p < q < \infty$,

$$\begin{aligned} \|f^{(j)}; L_p[0,1]\|_{L_p[0,1]} &\leq A(n, p, j) \|y; W_p^n[0,1]\| = A(n, p, j) (\|y; L_p[0,1]\| + \|y^{(n)}; L_p[0,1]\|) \leq \\ &\leq A(n, p, j) (C_1 \|y; L_q[0,1]\| + C_2 \|y^{(n)}; L_q[0,1]\|) \\ \|f^{(j)}; L_p[0,1]\| &\leq A(n, p, j) \max(C_1, C_2) (\|y; L_q[0,1]\| + \|y^{(n)}; L_q[0,1]\|) \\ \|f^{(j)}; L_p[0,1]\| &\leq A_{n,p,q,j} \|y; W_q^n[0,1]\| \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Утверждение 3 доказано.

1. Nikolskii S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems. Springer Science and Business Media, 2012, pp. 420. [in Russian].
2. Timan A.F., Sneddon I.N., Ulam S. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. 2014.
3. Timan A.F. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable: International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics. 2014, 644.

Аңдатпа. Мақалада аралық туындыны реті одан жоғары туынды мен функция арқылы өрнектеу нәтижелері келтірілген. Аралық туындыларды функцияның өзі және одан жоғары ретті туындылар арқылы өрнектеу үшін Тейлор қатары қолданылады. Бірлік куба біркелкі орналасқан нүктелер арқылы n теңдеу мен n белгісізден тұратын жүйе құрылады. Бұл жүйені Крамер әдісі арқылы шешу аралық туындыларын бағалауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар анықтауыштарды бағалау олардың Вандермонд анықтауышы арқылы түрлендіру негізінде жүзеге асырылды. Нәтижесінде тұжырымдардағы бағалауларды алуда қолданылатын $|f^{(j)}(x_0)| \leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f^{(n)}(t)| dt \right\}$ теңсіздігі алынды.

Түйін сөздер: Функция, туынды, Тейлор қатары, Крамер әдісі.

Abstract. In the paper obtained representation of an intermediate derivative by the derivative of a higher order and function. Use the Taylor series for the expression of the intermediate derivatives in terms of the function itself and its higher derivatives. With the points uniformly scattered on a given unit cube, we create a linear system of n equations in n unknowns. The solution to this system using Cramer's method creates the possibility of an intermediate derivative valuation. At the same time for the evaluation of the determinant of the resulting linear system obtained by converting it using the Vandermonde determinant. The result is a disparity $|f^{(j)}(x_0)| \leq 2nC(n, j) \left\{ \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f^{(n)}(t)| dt \right\}$, which is necessary to prove the estimates given in the statements.

Keywords: function, derivative, Taylor series, Cramer method.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ
ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ
ПОТЕНЦИАЛОМ

(г. Астана, Евразийский национальный университет имени Гумилева;
г. Алматы, Казахский национальный университет имени аль-Фараби)

***Аннотация.** Нелинейные эффекты играют фундаментальную роль во многих явлениях в различных отраслях науки. Такие нелинейные эффекты моделируются нелинейными дифференциальными уравнениями. Некоторые из этих уравнений интегрируемы, и известны как солитонные уравнения. Интегрируемые спиновые системы являются одним из основных разделов интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений и имеют важное значение в математике, в частности, в геометрии кривых и поверхностей. С другой стороны, интегрируемые спиновые системы играют решающую роль в описании нелинейных явлений в магнетиках. В данной статье рассматриваем некоторые интегрируемые уравнения ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами. Изучаем представление Лакса этих уравнений. В частности, для данных уравнений выводим эквивалентные аналоги в виде нелинейных уравнений типа Шредингера. Представляем интегрируемые редукции уравнений ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами. Данные интегрируемые уравнения ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами описывают нелинейные волны в ферромагнетиках с некоторыми дополнительными физическими полями.*

***Ключевые слова:** спиновые системы, эквивалентные аналоги, интегрируемые редукции, самосогласованные потенциалы.*

В математике преобразованием обратного рассеяния является метод решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными. Метод представляет собой нелинейный аналог, а в каком-то смысле обобщения преобразования Фурье, которое само по себе применяется для решения многих линейных уравнений в частных производных. Название "метод обратной задачи рассеяния" происходит от ключевой идеи восстановления временной эволюции потенциала от временной эволюции его данных рассеяния: обратное рассеяние относится к задаче о восстановлении потенциала от его матрицы рассеяния, в отличие от прямого рассеяния задача нахождения матрицы рассеяния от потенциала. Обратное преобразование рассеяния может быть применено ко многим из так называемых точно решаемых моделей, то есть вполне интегрируемых бесконечномерных систем. Впервые он был представлен Клиффорда С.Гарднер, Джон М. Грином, и Мартин Д. Крускала и др. (1967, 1974) для уравнения Кортевега-де Фриза, и вскоре распространяется на нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордона и уравнения цепочки Toda. Позднее данный метод был использован для решения многих других уравнений, таких как уравнение Кадомцева-Петвиашвили, уравнение Ишимори, уравнение Дим, и так далее. Характерным свойством решений, полученных методом обратного рассеяния является существование солитонов, решений, напоминающих как частицы и волны, которые не имеют аналогов для линейных уравнений с частными производными и применяются в нелинейной оптике и в физике плазмы, а его квантовый вариант описывает многочастичную систему с б-образным взаимодействием.

Основным примером интегрируемой спиновой системы является так называемая модель ферромагнетика Гейзенберга, которая выглядит следующим образом [1], [2]

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} \quad (1)$$

где \wedge означает векторное произведение и

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3), \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (2)$$

Матричная форма модели ферромагнетика Гейзенберга выглядит в виде

$$iS_t = \frac{1}{2} [S, S_{xx}], \quad (3)$$

где

$$S = S_i \sigma_i = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь

$$S^2 = I, \quad S^\pm = S_1 = \pm iS_2 \\ , \quad [A, B] = AB - BA$$

и σ_i матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Заметим, что модель ферромагнетика Гейзенберга является лакшманановым эквивалентом [1] нелинейного уравнения Шредингера

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2\varphi = 0. \quad (6)$$

Также напомним, что между моделью ферромагнетика Гейзенберга (1) и нелинейным уравнением Шредингера (6) имеет место калибровочная эквивалентность [2]. Различные типы интегрируемых и неинтегрируемых спиновых систем были предложены в литературе (см., например, [3] - [8]).

(1 + 1) -мерное уравнение М-ХСІХ выглядит следующим образом [3]

$$\mathbf{S}_t + 0,5\epsilon_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \frac{2}{\omega} \mathbf{S} \wedge \mathbf{W} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{W}_x + 2\omega \mathbf{S} \wedge \mathbf{W} = 0, \quad (8)$$

где \wedge означает векторное произведение и

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3), \quad \mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3), \quad (9)$$

здесь α является действительной функцией,

$$\mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1,$$

S_i и W_i некоторые вещественные функции, ω и ϵ_1 вещественные постоянные. В терминах компонент уравнение М-ХСІХ (7) - (8) принимает вид

$$S_{1t} + 0,5\epsilon_1 (S_2 S_{3xx} - S_3 S_{2xx}) + \frac{2}{\omega} (S_2 W_3 - S_3 W_2) = 0, \quad (10)$$

$$S_{2t} + 0,5 \epsilon_1 (S_3 S_{1xx} - S_1 S_{3xx}) + \frac{2}{\omega} (S_3 W_1 - S_1 W_3) = 0, \quad (11)$$

$$S_{3t} + 0,5 \epsilon_1 (S_1 S_{2xx} - S_2 S_{1xx}) + \frac{2}{\omega} (S_1 W_2 - S_2 W_1) = 0, \quad (12)$$

$$W_{1x} + 2\omega (S_2 W_3 - S_3 W_2) = 0, \quad (13)$$

$$W_{2x} + 2\omega (S_3 W_1 - S_1 W_3) = 0, \quad (14)$$

$$W_{3x} + 2\omega (S_1 W_2 - S_2 W_1) = 0. \quad (15)$$

С другой стороны уравнение М-ХСІХ (7)-(8) можно записать как

$$iS_t + 0,25\epsilon_1 [S, S_{xx}] + \frac{1}{\omega} [S, W] = 0, \quad (16)$$

$$iW_x + \omega [S, W] = 0, \quad (17)$$

где

$$S = S_i \sigma_i = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$W = W_i \sigma_i = \begin{pmatrix} W_3 & W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

здесь

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

$S^\pm = S_1 \pm iS_2$, $W^\pm = W_1 \pm iW_2$, $[A, B] = AB - BA$, σ_i являются матрицами Паули.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\Phi_x = U\Phi, \quad (20)$$

$$\Phi_x = V\Phi, \quad (21)$$

Пусть пары Лакса U, V имеют вид [3]-[8]

$$U = -i\lambda S, \quad (22)$$

$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \frac{i}{\lambda + \omega} V_{-1} - \frac{i}{\omega} V_0, \quad (23)$$

где

$$V_2 = -i\epsilon_1 S, \quad (24)$$

$$V_1 = 0.25\epsilon_1 [S, S_x], \quad (25)$$

$$V_{-1} = V_0 = \begin{pmatrix} W_3 & W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

С матрицами U, V уравнение

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (27)$$

эквивалентно уравнению М-ХСІХ (7)-(8). Это означает, что уравнение М-ХСІХ (7)-(8) является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния.

Наша цель в данной работе найти эквивалентный аналог типа Шредингера для уравнения М-ХСІХ. Для этого введем три новые функции φ, ρ and η

$$\varphi = \alpha e^{i\beta}, \quad (28)$$

$$\rho = - \left[2S^- W_3 - (S_3 + 1)W^- + \frac{S^{-2}W^+}{S_3 + 1} \right] e^{i\varsigma}, \quad (29)$$

$$\eta = 2S_3 W_3 + S^- W^+ + S^+ W^-, \quad (30)$$

где

$$\alpha = 0.5(S_{1x}^2 + S_{2x}^2 + S_{3x}^2)^{0.5}, \quad (31)$$

$$\beta = -i \partial_x^{-1} \left[\frac{\text{tr}(S_x S_{xx})}{\text{tr}(S_x^2)} \right], \quad (32)$$

$$\varsigma = \exp \left[i\theta - \frac{1}{2} \partial_x^{-1} \left(\frac{S^+ S_x^- - S_x^+ S^-}{1 + S_3} \right) \right] \quad (33)$$

и $\theta = const$. Не трудно проверить, что эти три новые функции удовлетворяют следующим уравнениям

$$i\varphi_t + \epsilon_1(0.5\varphi_{xx} + |\varphi|^2 \varphi) - 2i\rho = 0, \quad (34)$$

$$p_x - 2i\omega\rho - 2\eta\varphi = 0, \quad (35)$$

$$\eta_x + \varphi^* p + \varphi\rho^* = 0, \quad (36)$$

Это не что иное, как нелинейное уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха. Известно, что уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Представление Лакса выглядит следующим образом, [9] - [10]

$$\Psi_x = A\Psi, \quad (37)$$

$$\Psi_x = B\Psi, \quad (38)$$

где

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0, \quad (39)$$

$$B = \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0 + \frac{i}{(\lambda + \omega)} B_{-1} \quad (40)$$

здесь

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$B_2 = -i\epsilon_1\sigma_3, \quad (42)$$

$$B_1 = \epsilon_1 A_0, \quad (43)$$

$$B_0 = 0.5i\epsilon_1\alpha^2 \sigma_3 + 0.5i\epsilon_1\sigma_3 A_{0x}, \quad (44)$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta & -\rho \\ -\rho^* & -\eta \end{pmatrix} \quad (45)$$

Приведем редукции данного интегрируемого уравнения:

1. Основное киральное уравнение: Предположим $\epsilon_1 = 0$. Тогда уравнение М-ХСІХ сводится к уравнению

$$iS_t + \frac{1}{\omega} [S, W] = 0, \quad (46)$$

$$iW_x + \omega [S, W] = 0. \quad (47)$$

Уравнение (46)-(47) представляет собой основное киральное уравнение. Известно, что данное уравнение является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Соответствующая пара Лакса задается следующим образом

$$U = -i\lambda S, \quad (48)$$

$$V = -\frac{i\lambda}{\omega(\lambda + \omega)} W. \quad (49)$$

2. Уравнение ферромагнетика Гейзенберга: Теперь предположим, что $W = 0$. Тогда уравнение М-ХСІХ сводится к уравнению

$$iS_t + 0.25\epsilon_1 [S, S_{xx}] = 0. \quad (50)$$

Это уравнение ферромагнетика Гейзенберга (1) в пределах до простейших масштабных преобразований.

В заключении отметим, что модели ферромагнетика Гейзенберга играют важную роль в современной теории магнетиков. Они основаны нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Некоторые из этих моделей являются интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния, а именно уравнения являются солитонными уравнениями. В этой статье мы рассмотрели некоторые уравнения (модели) ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами, исследовали представление Лакса данных уравнений. Кроме того, мы нашли эквивалентный аналог типа Шредингера.

1. Lakshmanan M. // Physics Letters A. - 1977. - V. 61, -P. 53.
2. Takhtajian L. // Physics Letters A. - 1977. - V. 64, -P. 235.
3. Myrzakulov R. On some integrable and nonintegrable soliton equations of magnets I-IV // HEPI, Alma-Ata, 1987.
4. Myrzakulov R., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G. N., Lakshmanan M. Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials // Symmetry. - 2015. - V. 7(3), -P. 1352-1375.
5. Zhunussova Zh.. Nonlinear PDE as Immersions // Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics, ISBN 978-3-319-12576-3, - 2015. -P. 289-297.
6. Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Yesmakhanova K., Nugmanova G., Myrzakulov R. Darboux Transformation and Exact Solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. - 2016. - V. 13. -P. 1550134.
7. Zhunussova Zh. Geometrical features of the soliton solution // Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics, ISBN 978-3-319-12576-3, - 2015. -P.671-677.
8. Zhunussova Zh.. About domain wall solution of the integrated spin system // KazNU Bulletin, ser. math., mech., inf. -2014. -V. 81, - № 2. - P.46-51.
9. Burtsev S.P., Gabitov I.R. // Physics Letters A. - 1994. - V. 49, -P. 2065.
10. Porsezian K., Nakkeeran K. Physics Review Letters. - 1995. - V. 74, -P. 2941.

Аңдатпа. Сызықты емес әсерлер ғылымның түрлі салаларында көптеген құбылыстарда негізгі рөл ойнайды. Бұндай сызықты емес әсерлер сызықты емес дифференциалдық теңдеулермен модельденеді. Осы теңдеулердің кейбіреуі интеграцияланатын, және солитон теңдеулері деп аталады. Интеграциялануын сығу жүйелер және қисық беттерді, атап

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

айтқанда геометрия жылы Интегралданатын сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің негізгі бөлімдерінің бірі болып интегралданатын спиндік жүйелер табылады және математикада маңызды өте маңызды, атап айтқанда, беттер мен қисықтар геометриясында. Екінші жағынан интегралданатын спиндік жүйелер сызықты емес құбылыстарды магнетиктерде сипаттауда шешуші рөл атқарады.

Бұл мақалада өзара келісілген потенциалдарды кейбір интегралданатын Гейзенберг ферромагнетик теңдеулері қарастырылады. Осы теңдеулердің Лакс жұбы зерттеледі. Атап айтқанда, осы теңдеулер үшін Шредингер сызықты емес теңдеулер түрінде эквивалентті аналогтар алынған. Өзара келісілген потенциалдарды интегралданатын Гейзенберг ферромагнетик теңдеулерінің редукцияларын келтіреміз. Бұл өзара келісілген потенциалдарды интегралданатын Гейзенберг ферромагнетик теңдеулері кейбір қосымша физикалық өрістері бар ферромагнетиктегі бейсызықты толқындарды сипаттайды.

Түйін сөздер: спиндік жүйе, эквивалентті аналог, интегралданатын редукциялар, Өзара келісілген потенциалдар.

Abstract. Nonlinear effects play a fundamental role in many phenomena in various fields of science. These nonlinear effects are modeled by nonlinear differential equations. Some of these equations are integrable, and are known as soliton equations. Integrable spin systems are one of the main sections of integrable nonlinear differential equations and are important in mathematics, in particular in the geometry of curves and surfaces. On the other hand, integrable spin systems play a critical role in the description of nonlinear phenomena in magnetic. In this paper we study some of the integrable Heisenberg ferromagnet equation with self-consistent potentials. We investigate their Lax representation. In particular, we derive their equivalent counterparts in the form of the nonlinear Schrödinger equation type. We present the integrable reductions of the Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent potentials. These integrable Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent potentials describe nonlinear waves in ferromagnets with some additional physical fields.

Keywords: spin system, equivalent counterpart, integrable reductions, self-consistent potentials.

УДК 517.928.2

Д.Н. Нургабыл

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

(г.Талдықорган, Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова)

Аннотация. В данной статье на основе аналитического представления решения доказывается существование и единственность решения краевой задачи. Рассмотрены вопросы предельного перехода решения возмущенной задачи к решению невозмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Исследованы вопросы существования явления начального скачка. С помощью начальных и граничных функций найдено асимптотическое представление решения возмущенной задачи. При этом найдены формулы начальных скачков, установлены порядки скачков.

Ключевые слова: асимптотические оценки, начальные и граничные функции, краевая задача, начальный скачок, вырожденная задача, предельный переход.

Постановка задачи. Краевые задачи для обыкновенных и интегро - дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при старших производных, рассматривались в [1-4]. В этих работах на основе аналитического

представления решения определены асимптотические оценки, доказываются существование и единственность решения общей краевой задачи.

Следующим естественным обобщением в данном направлении являются исследования решений сингулярно возмущенных краевых задач с неограниченными граничными условиями. Рассмотрению таких задач посвящается данная работа.

Рассмотрим следующее линейное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon y''' + A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t) \quad (1)$$

с краевыми условиями вида:

$$H_1 y(t, \varepsilon) \equiv y(0, \varepsilon) = a_1, \quad H_2 y(t, \varepsilon) \equiv y''(0, \varepsilon) = \frac{a_2}{\varepsilon}, \quad H_3 y(t, \varepsilon) \equiv y(1, \varepsilon) = a_3, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ малый параметр, $a_2 \neq 0$, $a_i, i = 1, 2, 3$ - некие известные постоянные, $A(t), B(t), C(t), F(t)$ - функции, определенные на отрезке $[0, 1]$.

В данной статье на основе аналитического представления решения задачи (1), (2) доказываются существование и единственность искомого решения, формулируется вырожденная задача, доказываются близость решений исходной и вырожденной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$, устанавливается характер роста производной решения задачи (1), (2), условие возникновения явления скачка и асимптотические оценки решения задачи (1), (2).

Предположим, что:

1° Функции $A(t), B(t), C(t) \in C^3(I), F(t) \in C^1(I), I = [0, 1]$

2° Функция $A(t)$ удовлетворяет неравенству: $A(t) \geq \gamma \equiv \text{const} > 0, 0 \leq t \leq 1$;

3° Справедливо неравенство: $\bar{J} = \begin{vmatrix} y_{10}(0) & y_{20}(0) \\ y_{10}(1) & y_{20}(1) \end{vmatrix} \neq 0$,

2. Фундаментальная система решений однородного возмущенного уравнения.

Рассмотрим однородное уравнение

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) \equiv \varepsilon y''(t, \varepsilon) + A(t)y'(t, \varepsilon) + B(t)y(t, \varepsilon) = 0, \quad (3)$$

соответствующее неоднородному уравнению (1).

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1° и 2°. Тогда для $y_i(t, \varepsilon), i = 1, 2, 3$ - фундаментальной системы решений однородного уравнения (3) справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ представления:

$$y_i^{(j)}(t, \varepsilon) = y_{i0}^{(j)}(t) + O(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$y_3^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) y_{30}(t) \mu^j(t) [1 + O(\varepsilon)], \quad j = 0, 1, 2,$$

где $y_{i0}(t), i = 1, 2$ удовлетворяют однородному уравнению

$$L_0 y_{i0}(t) \equiv A(t)y_{i0}'' + B(t)y_{i0}' + C(t)y_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

и краевым условиям:

$$y_{10}(0) = 1, \quad y_{10}'(0) = 0, \quad y_{20}(0) = 0, \quad y_{20}'(0) = 1,$$

$y_{30}(t)$ определяется из задачи: $A(t)y_{30}'(t) + [2A'(t) - B(t)]y_{30}(t) = 0, \quad y_{30}(0) = 1$, в виде

$$y_{30}(t) = \left(\frac{A(0)}{A(t)}\right)^2 \cdot \exp\left(\int_0^t \frac{B(x)}{A(x)} dx\right) \neq 0. \quad (6)$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Ясно, что решения $y_{i0}(t), i = 1, 2$, на отрезке $[0, 1]$ существуют, единственны и образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения (5).

Доказательство леммы непосредственно следует из известной теоремы Шлезингера-Бирхгофа-Нуайона (см. напр. [5]).

Составим определитель Вронского $W(t, \varepsilon)$ для фундаментальной системы решений $y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), y_3(t, \varepsilon)$:

$$W(t, \varepsilon) = \begin{vmatrix} y_1(t, \varepsilon) & y_2(t, \varepsilon) & y_3(t, \varepsilon) \\ y_1'(t, \varepsilon) & y_2'(t, \varepsilon) & y_3'(t, \varepsilon) \\ y_1''(t, \varepsilon) & y_2''(t, \varepsilon) & y_3''(t, \varepsilon) \end{vmatrix}.$$

Раскладывая $W(t, \varepsilon)$ по элементам третьего столбца, замечаем, что третье слагаемое определителя $W(t, \varepsilon)$ является доминирующим при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда на отрезке $0 \leq t \leq 1$, при достаточно малых ε , получаем

$$W(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) y_{30}(t) \mu^2(t) \bar{W}(t) [1 + O(\varepsilon)],$$

где $y_3(t) \neq 0, \mu(t) \neq 0, t \in [0, 1]$ в силу условия 2° и формулы (6), $\bar{W}(t) = \begin{vmatrix} y_{10}(t) & y_{20}(t) \\ y_{10}'(t) & y_{20}'(t) \end{vmatrix} \neq 0$ -

вронскиан фундаментальной системы решений уравнения $L_0 y_{i0}(t) = 0$. Тогда

$$W(t, \varepsilon) \neq 0, t \in [0, 1] \tag{7}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. Построение начальной и граничных функций возмущенной задачи. Так же как и в [6] введем начальную функцию

$$K(t, s, \varepsilon) = \frac{W(t, s, \varepsilon)}{W(s, \varepsilon)}, \tag{8}$$

определяемая из задачи:

$$L_\varepsilon K(t, s, \varepsilon) = 0, K(s, s, \varepsilon) = 0, K_t'(s, s, \varepsilon) = 0, K_t''(s, s, \varepsilon) = 1. \tag{9}$$

где $W(s, \varepsilon)$ - вронскиан фундаментальной системы решений $y_1(s, \varepsilon), y_2(s, \varepsilon), y_3(s, \varepsilon)$ однородного уравнения (3), $W(t, s, \varepsilon)$ - определитель, получаемый из $W(s, \varepsilon)$ с помощью замены третьей строки на фундаментальную систему решений $y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), y_3(t, \varepsilon)$.

Лемма 1. Начальная функция $K(t, s, \varepsilon)$ и её производные по t до второго порядка включительно на отрезке $[0, 1]$ при $s \leq t$ имеют следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ представления:

$$K^{(j)}(t, s, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu(s) \bar{W}(s)} \left[-\bar{W}^{(j)}(t, s) + \varepsilon^{1-j} \frac{y_{30}(t) \mu^j(t)}{y_{30}(s) \mu^2(s)} \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx\right) \bar{W}(s) + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{2-j} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx\right)\right) \right], j = 0, 1, 2, \tag{10}$$

где $\bar{W}(t, s) = \begin{vmatrix} y_{10}(s) & y_{20}(s) \\ y_{10}(t) & y_{20}(t) \end{vmatrix}$.

Теперь, рассмотрим определитель

$$J(\varepsilon) = \begin{vmatrix} y_1(0, \varepsilon) & y_2(0, \varepsilon) & y_3(0, \varepsilon) \\ y_1''(0, \varepsilon) & y_2''(0, \varepsilon) & y_3''(0, \varepsilon) \\ y_1(1, \varepsilon) & y_2(1, \varepsilon) & y_3(1, \varepsilon) \end{vmatrix}.$$

В силу (4) элементы определителя $J(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ представимы в виде:

$$y_i^{(j)}(0, \varepsilon) = y_{i0}^{(j)}(0) + O(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \quad y_i(1, \varepsilon) = y_{i0}(1) + O(\varepsilon), \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

$$y_3(0, \varepsilon) = y_{30}(0)[1 + O(\varepsilon)], \quad y_3''(0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} y_{30}(0) \mu^2(0)[1 + O(\varepsilon)],$$

$$y_3(1, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \mu(x) dx\right) [y_{30}(1) + O(\varepsilon)],$$

Здесь, очевидно, что $y_3(1, \varepsilon) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда определитель $J(\varepsilon)$ в силу (11) при $\varepsilon \rightarrow 0$ представим в виде $J(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} y_{30}(0) \mu^2(0) \bar{J}(1 + O(\varepsilon))$, где $y_{30}(0) = 1$

$\bar{J} = \begin{vmatrix} y_{10}(0) & y_{20}(0) \\ y_{10}(1) & y_{20}(1) \end{vmatrix} \neq 0$. Отсюда при достаточно малых ε согласно условиям 2⁰ и 3⁰ получаем:

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \mu^2(0) \bar{J}(1 + O(\varepsilon)) \neq 0. \quad (12)$$

Определение. Функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ называются граничными функциями краевой задачи (1), (2), если они являются решениями однородного уравнения (5): $L_\varepsilon \Phi_i(t, \varepsilon) = 0$ и удовлетворяют краевым условиям:

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, \varepsilon) = 1, \quad \Phi_2(0, \varepsilon) = 0, \quad \Phi_3(0, \varepsilon) = 0, \\ \Phi_1''(0, \varepsilon) = 0, \quad \Phi_2''(0, \varepsilon) = 1, \quad \Phi_3''(0, \varepsilon) = 0, \\ \Phi_1(1, \varepsilon) = 0, \quad \Phi_2(1, \varepsilon) = 0, \quad \Phi_3(1, \varepsilon) = 1, \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1⁰-3⁰. Тогда граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ на отрезке $[0, 1]$ существуют, единственны и выражаются формулами:

$$\Phi_i(t, \varepsilon) = \frac{J_i(t, \varepsilon)}{J(\varepsilon)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (14)$$

где $J_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ – определитель получаемый из определителя $J(\varepsilon)$ с помощью замены i -ой строки его на фундаментальную систему решений $y_1(t, \varepsilon)$, $y_2(t, \varepsilon)$, $y_3(t, \varepsilon)$.

Доказательство. Непосредственно подстановкой убеждаемся, что функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$ из (14) удовлетворяют уравнению (3) и краевым условиям (13), причем граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$ не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения (3). Тогда из (14) и (12) следует существование и единственность граничных функций $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ для задачи (1), (2).

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Лемма 2. Пусть выполнены условия I^0-3^0 граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ на отрезке $[0, 1]$ имеют следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ представления:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(q)}(t, \varepsilon) &= \frac{\bar{J}_1^{(q)}(t)}{\bar{J}} + \varepsilon^{2-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \frac{y_{30}(t)\mu^q(t)}{y_{30}(0)\mu^2(0)} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{3-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right)\right), \\ \Phi_2^{(q)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^2 \frac{\bar{J}_1^{(q)}(t)}{\bar{J}\mu^2(0)} + \varepsilon^{2-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \frac{y_{30}(t)\mu^q(t)}{y_{30}(0)\mu^2(0)} + O\left(\varepsilon^3 + \varepsilon^{3-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right)\right), \\ \Phi_3^{(q)}(t, \varepsilon) &= \frac{\bar{J}_2^{(q)}(t)}{\bar{J}} + \varepsilon^{2-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \frac{y_{30}(t)\mu^q(t)}{y_{30}(0)\mu^2(0)} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{3-q} \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right)\right), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\bar{J}_2^{(q)}(t)$ -определитель, получаемый из \bar{J} заменой второй строки, строкой $y_{10}^{(q)}(t), y_{20}^{(q)}(t)$; $\bar{J}_1^{(q)}(t)$ - определитель, который получается из \bar{J} заменой первой строки строкой $y_{10}^{(q)}(t), y_{20}^{(q)}(t)$.

4. Построение решений возмущенной и невозмущенной задач. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия I^0-3^0 . Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $y(t, \varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) на отрезке $[0, 1]$ существует, единственно и выражается формулой

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) &= a_1\Phi_1(t, \varepsilon) + \frac{a_2}{\varepsilon}\Phi_2(t, \varepsilon) + a_3\Phi_3(t, \varepsilon) - \\ &- \Phi_3(t, \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 K(1, s, \varepsilon)F(s)ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon)F(s)ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Решение $y(t, \varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) ищем в виде:

$$y(t, \varepsilon) = c_1\Phi_1(t, \varepsilon) + c_2\Phi_2(t, \varepsilon) + c_3\Phi_3(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon)F(s)ds, \tag{17}$$

где $c_i, i = 1, 2, 3$ - неизвестные постоянные. Непосредственной подстановкой (17) в (1) убеждаемся, что функция $y(t, \varepsilon)$ определяемая формулой (16) является решением уравнения (1). Для определения $c_i, i = 1, 2, 3$ подставим (17) в (2). Тогда с учетом краевых условий (13) будем иметь:

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = \frac{a_2}{\varepsilon}, \quad c_3 = a_3 - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon)F(s)ds. \tag{18}$$

Подставляя найденные значения (18) в (17), получим (16). Граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$ и начальная функция $K(t, s, \varepsilon)$ не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения (3). Следовательно, из (14) и (18) следует существование, единственность решения краевой задачи (1), (1). Теорема доказана.

Лемма 3. Пусть справедливы условия 1^0-3^0 . Тогда решение $y(t, \varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) на отрезке $[0,1]$ имеет следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ и равномерные по t оценки:

$$|y^{(j)}(t, \varepsilon)| \leq C \left(|a_1| + |a_2| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| + \varepsilon^{1-j} \cdot \exp\left(\frac{-\gamma \cdot t}{\varepsilon}\right) \right), \quad j = 0,1,2 \quad (19)$$

где $C \geq 0$ -некоторая не зависящая от t и ε постоянная.

Теперь, определим вырожденную задачу. Без предварительного исследования мы не можем сформулировать условия для невозмущенного (вырожденного) уравнения

$$L_0 y \equiv A(t)\bar{y}'' + B(t)\bar{y}' + C(t)\bar{y} = F(t), \quad (20)$$

получаемое из (1) при $\varepsilon = 0$. Такое условие мы можем получить из оценки (19). Действительно, из (19) следует, что предельная функция для $y(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ содержит a_1 и a_3 . Следовательно, краевые условия для решения $\bar{y}(t)$ вырожденного уравнения (16) можно получить из (2) в виде

$$\bar{y}(0) = a_1, \quad \bar{y}(1) = a_3, \quad (21)$$

Решение задачи (20), (21) представимо в виде

$$\bar{y}(t) = a_1 \bar{\Phi}_1(t) + a_3 \bar{\Phi}_2(t) - \bar{\Phi}_2(t) \int_0^1 \bar{K}(1,s) \frac{F(s)}{A(s)} ds + \int_0^t \frac{F(s)}{A(s)} K(t,s) ds, \quad (22)$$

где функции $\bar{\Phi}_k(t) = \frac{\bar{J}_k(t)}{\bar{J}r_0}$, $k = 1,2$, удовлетворяют вырожденному однородному

уравнению $A(t)\bar{y}'' + B(t)\bar{y}' + C(t)\bar{y} = 0$ и краевым условиям $\bar{\Phi}_1(0) = 1$, $\bar{\Phi}_2(0) = 0$, $\bar{\Phi}_1(1) = 0$, $\bar{\Phi}_2(1) = 1$, $\bar{J}_k(t)$ - определитель, получаемый из \bar{J} с помощью замены k -ой строки строкой $y_{10}(t), y_{20}(t)$. Следовательно, функции $\bar{\Phi}_k(t)$, $k = 1,2$, являются граничными функциями вырожденной задачи (20),(21). Следуя выше описанной схеме убеждаемся, что функция $\bar{K}(t,s) = \bar{W}(t,s)/\bar{W}(s)$ является начальной функцией задачи (20), (21).

Очевидно, что функции $\bar{\Phi}_k(t), \bar{K}(t,s)$ не зависят от выбора фундаментальной системы решений $y_{10}(t), y_{20}(t)$ уравнения $A(t)\bar{y}'' + B(t)\bar{y}' + C(t)\bar{y} = 0$.

5. О предельном переходе и начальном скачке. Исследуем вопросы предельного перехода решения возмущенной задачи к решению невозмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1^0-3^0 . Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ для разности между решением $y(t, \varepsilon)$ задачи (1),(2) и решением $\bar{y}(t)$ задачи (20),(21) на отрезке $[0,1]$ справедливы следующие оценки:

$$|y^{(j)}(t, \varepsilon) - \bar{y}^{(j)}(t)| \leq C \left(\varepsilon + \varepsilon^{1-j} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \cdot t}{\varepsilon}\right) \right), \quad j = 0,1,2. \quad (23)$$

Доказательство. Введем функцию $u(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t)$. Тогда задача (1),(2) примет вид:

$$L_\varepsilon u(t, \varepsilon) = -\varepsilon \bar{y}'''(t), \quad u(0, \varepsilon) = 0, \quad u''(0, \varepsilon) = a_2 / \varepsilon - \bar{y}''(0), \quad u(1, \varepsilon) = 0. \quad (24)$$

Применяя к задаче (24) теорему 3, получаем $|u^{(j)}(t, \varepsilon)| \leq C \left(\varepsilon + \varepsilon^{1-j} \exp\left(\frac{-\gamma t}{\varepsilon}\right) \right), j = 0, 1, 2$

что и доказывает оценку (23).

Таким образом, из теоремы 3 следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(j)}(t, \varepsilon) = \bar{y}^{(j)}(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда и из (16) в силу асимптотических формул (10), (15) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y'(0, \varepsilon) - \bar{y}'(0) = \Delta, \quad y''(0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(\Delta + O(\varepsilon)),$$

где $\Delta = \frac{a_2}{\mu(0)}$.

Замечание. Предложенный алгоритм служит основой для построения асимптотических решений некоторых линейных и нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач для уравнений высокого порядка с более сложными дополнительными условиями типа $U_i(y) = 0, i = 1, \dots, n$, где $U_i(y)$ линейная форма от $y^{(j)}(0, \varepsilon), y^{(j)}(1, \varepsilon), j = 0, n-1$.

1. Касымов К.А., Нургабыл Д.Н. Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т.40. – № 4 – С. 597-607
2. Касымов К.А., Нургабыл Д.Н., Уайсов А.Б. Асимптотические оценки решения краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Украинский математический журнал. – 2013. – №5, – С.629-641.
3. Nurgabul D. Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump// Journal of Applied Mathematics. USA. Vol. – 2014 (2014), Article ID 956402
4. Касымов К.А., Дауылбаев М.К., Атахан Н. Асимптотическое поведение решения сингулярно возмущенной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Сер.матем., механ. Алматы, № 3 (2012). -С. 28-347.
5. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. –М.: Наука, 1981. – 399 с.
6. Нургабыл Д.Н. Построение решения сингулярно возмущенной краевой задачи имеющего начальный скачок // Вестник Киргизского государственного Национального университета. 2001. сер.3., вып.6., С.173-177.

Аңдатпа. Бұл мақалада шекаралық есебі шешімінің аналитикалық түрі арқылы шешімнің бар және жалғыздығы дәлелденген. Кішкене параметрі нөлге ұмтылғанда ерекше ауытқыған есеп шешімінің ауытқымаған есеп шешіміне шектік көшуі қарастырылған. Бастапқы секіріс құбылысының бар болуы сұрақтары зерттелген. Бастапқы және шекаралық функциялар арқылы ауытқыған есеп шешімінің асимптотикалық бағамы табылған. Бастапқы секірістің формуласы табылып, оның реті анықталған.

Түйін сөздер: асимптотикалық бағам, бастапқы және шекаралық функциялар, шекаралық есеп, бастапқы секіріс, туындалған есеп, шекке көшу.

Abstract. In this article on the basis of analytical submission of the decision proved existence and uniqueness solution of boundary value problem. Are investigated the issues of the limiting transition solution of the perturbed problem to the solution of the unperturbed problem as the small parameter approaches zero, the existence of the phenomenon of the initial jump. Using initial and boundary

functions are found asymptotical representation of the solution of the perturbed problem. Moreover are found the formula for the initial jumps, installed the orders of the jumps.

Keywords: *asymptotically estimate, initial and boundary functions, boundary value problem, initial jumps, degenerate problem, passage to the limit.*

ӨОЖ 372.851

**Ж.М. Нурмухамедова, Л.Д. Жумалиева*, Д.М. Нурбаева*,
Л.Ж. Жансеитова***

МЕКТЕПТЕРДЕ ЖӘНЕ ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРЫНДАРЫНДА МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДЫҢ КЕЙБІР МӘСЕЛЕЛЕРІ

(Алматы қ., Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, *-докторант PhD)

Аңдатпа. *Мақалада математика пәнін мектепте және педагогикалық жоғары оқу орнында оқытудың негізгі мәселелері, сондай-ақ алған білімдерін іс жүзінде есептерді шешуде қолдану қарастырылған. Сонымен қатар, өз білімін практикада қолданып, оқушыларға педагогикалық сауатты жеткізе алатын маманның кәсіби сапасы зерттеледі. Қойылған дидактикалық мақсатқа сәйкес оқытушыға есептерді іріктеуді іске асыруға көмектесетіндей, есептерге жіктеу жүргізу ұсынылған.*

Түйін сөздер: *математиканы оқыту, мектеп, педагогикалық жоғары оқу орны, математикалық дайындау, алгебра курсы, математикалық анализ, есеп шығаруды үйрету.*

Бірнеше жыл ішінде орта мектеп өз мәртебесін өзгертті, яғни балама оқу орындары пайда болды, лицейлер, гимназиялар, жекелеген пәндерді тереңдетіп оқытатын мамандандырылған мектептер. Бұл өзгерістерге сәйкес мұғалімдердің жұмысына жаңа талаптар қойылды, сондай-ақ жоғары оқу орнында оқыту кезінде кәсіби дайындықты қажет етеді. Жоғары білікті маман ғылым негіздерін меңгеріп ғана қоймай, өз білімін оқушыларға педагогикалық сауатты жеткізе білу керек. Болашақ мұғалімді математикалық дайындау мәселесі әлі күнге дейін өзекті мәселе күйінде қалуда.

Математика - қоршаған ортаны меңгеруді, оқып-үйрену мен түсінуге мүмкіндік береді, теориялық және практикалық мәселелерді зерттеудің әдістерін үйретеді. Барлық уақытта математика ғылыми, техникалық және экономикалық дамуда маңызды рөл атқарады. Қазіргі уақытта, математика рөлінің өсуіне байланысты, өндірістің болашақ экономистердің, бағдарламашылардың, ұйымдастырушылардың көпшілігіне күрделі математикалық дайындық қажет, ол қазіргі заманғы есептеу техникасын қолдануға, теориялық жетістіктерін практикада қолдануға, жаңа проблемаларды математикалық әдістермен кең ауқымды зерттеуге мүмкіндік береді.

Маманның ең маңызды қасиеті, алдында туындайтын мәселені шығармашылық көзқараспен шеше білу деп есептейді зерттеушілер. Бұл жерде шығармашылық көзқарас терминін, қажетті математикалық модель құрып, оны оқып үйрену деп ұғыну керек. Математиканың ішкі дүниесін ескермей, математикалық ұғымдар мен мәнін түсіндірмей математика пәнін оқуды бірқатар қосымшалары мен әдістерін оқытумен ауыстыруға болмайды. Осындай тәсілмен дайындалған мамандар жаңа, нақты құбылыстарды зерттеу

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚИТУ ӘДІСТЕМЕСІ

МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

кезінде дәрменсіз болуы мүмкін, өйткені қажетті математикалық білімсіз және абстрактілі математикалық модельдерді қарастыруға үйренбеген.

Сондықтан, математиканың ішкі логикасын және ақылға қонымды қатаңдылықпен ұсынуды есепке алмай, тек ғана болашақ мамандық студенттеріне ерекшелігіне негізделіп, математика жалпы курсының мазмұны таза прагматикалық көзқарас тұрғысынан анықталуы мүмкін емес [1]. Қазақстанда қазіргі орта білім берудің сатылары: бастауыш (1 – 4 сыныптар), негізгі (5 – 9 сыныптар), жоғарғы (10 – 11 сыныптар) болып табылады.

Мектепте алгебра пәнін оқыту жетінші сыныптан басталады. Алгебра - математиканың ең маңызды салаларының бірі. Ол ғылым мен техниканың тілі болып табылады. Оның көмегімен табиғат пен қоғамда болып жатқан көптеген құбылыстар мен үдерістер болжап және зерттеледі. Алгебра пәні басқа да мектеп пәндерін, ең алдымен, жаратылыстану-математикалық бағыттағы пәндерді оқытуды қамтамасыз етеді, атап айтқанда, физика, информатика, геометрия [2].

Зерттеулерге сәйкес, бүгінгі күні, оқушылардың көзқарасымен алгебра курсы теңдеулер шешу ғылымы ретінде қабылданған. Бірақ XIX-XX ғасырларда оның мазмұны, алгебра математикалық құрылымдардың арнайы типті ғылымы болып күрт өзгерді - ең алдымен, топтар, сақина және өріс. Бұл нысандар мектеп алгебрасының негізі болып табылады, олар анық тұжырымдалған жоқ, тереңде, «көлеңкелі» болып қалуда.

Шын мәнінде, мектеп алгебрасының мазмұны осы алгебралық ұғымдардың қолдануы ғана, пәннің толық мазмұны және оқыту мақсаты деп санауға болмайды. Егер осы ұғымдарды мектеп алгебра курсына қосатын болсақ, онда ол оқушылардың жас сипаттамаларын ескеруіне қайшы болар еді, мектепте осы курсты түсініспеушілік жағдайы туындайды. Бірақ мұғалім оқушының ой-өрісін кеңейту үшін алгебраның нақты бөлімдеріне қатысты кейбір дерексіз ұғымдар туралы айтуы тиіс. Бұл пәнді әрі қарай зерттеу үшін қызығушылық тудырады. Математикалық пәндерді оқыту қазіргі заманғы педагогикалық университетте негізінен анықтамалар, теоремалар мен оларды дәлелдеу, есепті шығару стандартты түрде беруі арқылы жүзеге асады, бұл студенттердің материалды жаттап алуы мен емтихандарда оны қолдануы ғана болып табылады. Сондықтан, математикалық пәндерді оқытуда студенттердің шығармашылығына үлкен көңіл аударылуы тиіс. Болашақ мұғалімдерді дайындау кезінде мұндай алгебраның абстракты ұғымдарын оқыту барысында, (яғни, сақиналар, өрістер) мектеп курсына кездесетін мысалдарды келтіру қажет. Мектеп алгебрасының жеке пән еместігін, тек жоғары оқу орнындағы алгебраның кейбір элементтері қарастырылатынын студенттер ұғыну керек.

Орта мектептің жоғары сатысында оқыту екі бағытта құрылады: қоғамдық – гуманитарлық және жаратылыстану – математикалық. 10 және 11 сыныптарда оқытылатын қиын, бірақ қажетті пәндердің бірі алгебра және анализ бастамасы болып табылады. Оқытудың мақсаты жеке тұлғаның ұлттық және жалпы адамзаттық құндылықтары негізінде жалпы интеллектуалдық дамуының қажетті деңгейіне қол жеткізуге бағытталған, алгебра және анализ бастамасының базистік негіздерін сапалы меңгеру логикалық, абстракциялық және ықтималды ойлау, оларды одан әрі тиімді оқытуда тәжірибелік негіздерін жасауды қалыптастыру болып табылады. Аталған курсты оқып үйрену кезінде алынған білімдер, әр түрлі бағыттар бойынша жоғары оқу орындарына түсетін талапкерлер үшін қажет болып табылады, өйткені математикалық анализ ҰБТ тапсырмаларына кіреді. Сондықтан оқушылар белгілі формулаларды туындыларын алуға немесе интегралдарын есептеуге пайдалану ғана емес, басынан осы бөлімнің математикада және өмірде маңыздылығын түсінуін, негізгі терминдер мен формулаларды, бұл алған білімдерін іс жүзінде қолдана алуды үйренуі маңызды.

Математикалық анализ – бұл жоғары оқу орындағы студенттердің математикалық білім жүйесіндегі негізгі курс, себебі жоғары математиканың көптеген есептерін шешуде осы курста оқылған әдістері мен ережелері пайдаланылады. Бір және көп айнымалы дифференциалдық және интегралдық есептеу функциясы сияқты маңызды математикалық анализ курс бөлімдері негізделген, айнымалы шамаларды зерттеудегі фундаментальды әдістердің бірі шектер теориясы болып табылады. Функциялардың көмегімен табиғат заңдарын, өндірістің түрлі процестерін ғана емес, сонымен қатар қоғамның әлеуметтік заңдарын (мысалы, халық санының өсуін есептеу, көші-қон), адам қызметінің түрлі салаларында тұжырымдауға болады.

Математикалық анализ курсы бірінші курс студенттеріне қиын пән болып табылады, өйткені ойлай білу, кәсіби қызметінде шығармашылыққа және тануға ұмтылуды білдіреді. Мектептегі анализ бастамаларын оқу барысында алған аналитикалық ойлауларын жоғары оқу орнында математикалық анализ курсына кең көлемді және терең оқытуды жалғастыру керек. Алайда, бірінші курс студенттерімен жұмыс тәжірибесіне сүйене отырып, мектепте алған білімдерімен, студенттерге математикалық анализ одан әрі оқытудың бастапқы талаптарының арасында айырмашылықтары бар екенін аңғарамыз.

Математикалық анализ – қиын пән, бірінші курстың студенттері ауыр қабылдайтындай құрамында күрделі конструкциялы ұйғарымдар бар. Мысалы, шегін анықтау, жоғарғы және төменгі шегін, туынды және т. б. Мектеп оқушылары функцияны формула ретінде қабылдайды, оның аргументінің өсуі, функцияның жұп-тақтылығының қасиеттеріне келгенде түсінбеушілік туындайды.

Болашақ мұғалім математикалық анализ негіздерінің маңыздылығын түсіну керек, мұны түсіндіру және оқыту керек. Мектеп деңгейі жоғары математиканы одан әрі оқыту үшін жеткіліксіз, себебі оқушылар неғұрлым тереңдетілген бөлімнен үйренудің қажеттілігін түсіне бермейді, "жоғары математика" пәнін оқуға мотивация жоқ. Математикалық анализ курсына оқу қажеттілігін түсінбесе, оны оқу тиімділігі төмендейді.

Яғни оқытуда мотивация мәселесі өте маңызды. Математикалық модельдер, әр түрлі құбылыстар мен процестердегі өзара байланысты сипаттайтын сандық сипаттамалары, кез келген білім саласындағы зерттеу жүргізу кезінде ажырамас элементі болып табылады. Олардың рөлі компьютерлік деректер өңдеуді кеңейту мүмкіндіктеріне байланысты артып келеді. Мысалы, қызметтің әр түрлі салаларында математиканың енуі, күнделікті тәжірибеде математикалық білімді пайдалануға әсерін тигізеді. Ол қарапайым математикалық есептеулерді ғана пайдалану емес, сондай-ақ жоғары математика элементтерін пайдалану, ықтималдықтар теориясы және анализ (мысалы, акциялар, құлыптау коды, қор және қор ойындар нөмірлерін ұштастыру, есептеу және т.б.). Күнделікті сөйлеуде жиі «тұмауға шалдыққан адамдар саны геометриялық прогрессиямен өсіп келеді» деген сияқты сөйлемдерді естиміз. Бұл мысалдар математикалық білім қазіргі заманғы адамның жалпы мәдениетінің кең ауқымды міндетті элементі болғанының дәлелі [3].

Әрине, математика есептер арқылы оқытылады. Алгебра және математикалық анализді оқытудың ең маңызды аспектісі теориялық білімдерді практикада қолдану болып табылады, яғни есепті шешуге үйрету. Математиканы оқытуда есептің рөлі мен орны тарихи өзгеріссіз қалды. Л. Ф. Магницкийдің "Арифметикасында" (1703 ж.) – есептерге қажет шешімдер "расту" меңзелген. Есеп оқытудың мақсаты болды, яғни типтік есептерді шешу ережелерін білу үшін математиканы үйретті. Бұл есептер негізінен тек қолданбалы сипатта, одан кейін таза тәжірибелік мақсатта қолданылған. Оқыту мақсаттарының өзгеруіне қарай, қоғамның дамуымен негізделіп, есептің рөлі де

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

өзгереді. С.Н. Шохор-Троцкий (1915ж.): “Арифметикалық есептер саналы оқытуда мақсат емес, арифметика оқытудың оқу-әдістемелік құралы болуы тиіс.”-деп жазған. Қазіргі уақытта, математика білім беру саласындағы есептердің рөлі, бір жағынан, түпкі мақсаты осы оқу - оқушылардың белгілі бір жүйені шешу әдістемесі үйренуге жинақталады. Екінші жағынан, оқыту мақсаттарына толыққанды қол жеткізу, оқушылардың математикалық есептер жүйесін шешу көмегімен ғана анықталады. Осылайша, математиканы оқытуда есептерді шешу мақсат ретінде және оқыту құралы ретінде әрекет етеді.

Күрделі есептерді шешу орта мектепте оқыту процесінің мазмұнын жетілдіру жолдарымен олардың әдістері, әдістемелер мен оқыту ұйымдастырушылық түрлерін келтірумен байланысты.

Алайда, математикалық білім мазмұнын жетілдіру мәселесі тек қана мектепте оқыған сұрақтар ауқымы бойынша шешу мүмкін емес, яғни математика - деректер, оның негізгі заңдары мен теориялары, зерттелетін объектілерге, процесстер мен құбылыстар туралы ғылыми білім жүйесі. Білімдегі қызмет әдістерін қалыптастыруға, оқу нәтижелерін бағалау және өзін-өзі бағалауға, сайып келгенде, оқу процессін оңтайландыру және оның тиімділігін арттыруға бағытталған, мектептегі математикалық есептердің жүйелер құрылымын қайта құру қажет.

Есептерді шығару алгебра және математикалық анализ оқу курстарында шешуші рөл атқарады. Алған білімді практикалық есептерді шығару үшін қолдану арқылы оқу нәтижесіне толық қол жеткізуге болады. Мұндай жағдайда, есептерді шығару оқытудың құралы мен мақсаты болып табылады. Оқу процессінде білім беру қызметінің оқушылар мен студенттерге математикалық пәндерді оқутудың ең маңызды элементтерінің бірі есептерді шешу болып табылады. Бұл оқу-іс әрекетінің түрі ойлауды дамыту және қалыптастыру құралы ретінде қызмет етеді; ұғымдарды, заңдарды, теорияларды терең меңгеруге ықпал етеді, кәсіптік бағдарды жүзеге асыру үшін жағдай жасайды.

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулығында қолданбалы есептерге байланысты мынадай тапсырмалар берілген:

Мысал. Кітап бетіндегі мәтіннің ауданы 363 см^2 . Кітап бетінің төменгі және жоғарғы жақтарынан 2 см -ден, ал сол жағы мен оң жақтарынан $1,5 \text{ см}$ – ден бос орындар қалдырылған. Кітап бетінің ең кіші ауданын жасау үшін оның бетінің сызықтық өлшемдері қандай болуы керек?

Шешуі. x арқылы баспа мәтіннің енін белгілесек, оның ұзындығы $\frac{363}{x}$ болады (1-сурет). Егер қалдырылған бос орындардың енін ескерсек, кітап бетінің ұзындығы $\frac{363}{x} + 3$, ал ені $x + 4$. Сонда кітап бетінің ауданы мына функция түрінде жазылады:

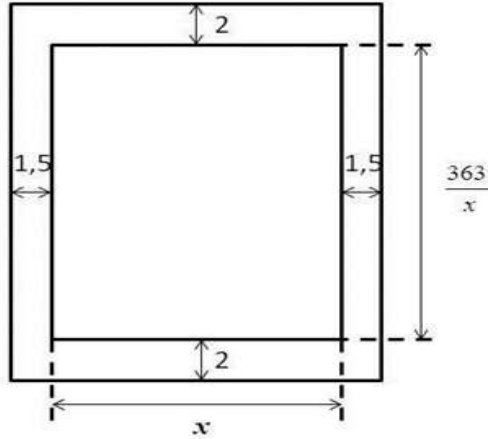
$$f(x) = \left(\frac{363}{x} + 3\right) \cdot (x + 4). \text{ Алгоритм бойынша}$$

$$f'(x) = -\frac{363}{x^2} (x + 4) + \frac{363}{x} + 3 = -\frac{363}{x} - \frac{1452}{x^2} + 3 + \frac{363}{x} = -\frac{1452}{x^2} + 3;$$

$$f'(x) = 0; -\frac{1452}{x^2} + 3 = 0; 3x^2 = 1452, \quad x = \pm 22.$$

Есептің шартын аргументтің $x = 22$ мәні қанағаттандырады. Сонымен, кітап бетінің ұзындығы $\frac{363}{22} + 3 = 19,5$ см, ал ені $22 + 4 = 26$ см-ге тең.

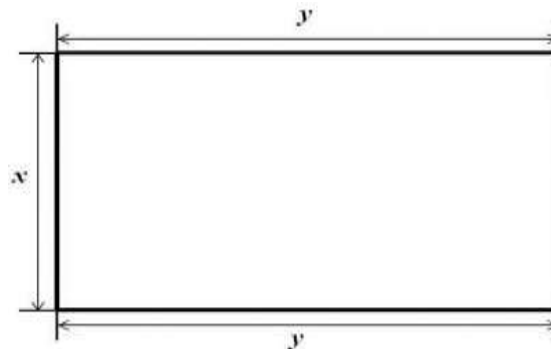
Жауабы: 19,5см; 26см.



1-сурет

Мысал: Ауданы 800 м^2 тіктөртбұрыш пішініді жер телімі үш жағынан қоршалған. Қоршаудың ең кіші ұзындығын табыңыздар.

Шешуі: тіктөртбұрыштың енін x пен, ал ұзындығын y пен белгілеп алайық (2-сурет). Сонда тіктөртбұрыштың ауданы $S = xy$ болады.



2-сурет

$xy = 800$, $y = \frac{800}{x}$. Қоршаудың ұзындығын келесі функциямен өрнектейміз:

$$f(x, y) = 2y + x = 2 \cdot \frac{800}{x} + x = \frac{1600}{x} + x.$$

$$f(x, y) \text{ функциясының ең кіші мәні: } f'(x) = \left(\frac{1600}{x} + x \right)' = -\frac{1600}{x^2} + 1,$$

$$f'(x) = 0, \quad -\frac{1600}{x^2} + 1 = 0, \quad x = \pm 40, \text{ есептің шартына } x = 40 \text{ мәні сәйкес келеді,}$$

$$\text{бұдан } y = \frac{800}{x} = 20.$$

Сонда қоршаудың ең кіші ұзындығы $f(x, y) = 2y + x = 80$.

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Жауабы: 80м.

Қазіргі кезде мектептерде алгебра, алгебра және анализ бастамалары пәндері профессор А. Е. Абылкасымова басшылығымен және ұжымыдық авторлар әзірлеген оқулық бойынша оқытылады. Оқулықтар тарауларға бөлінген, ал тараулар параграфтардан тұрады. Әрбір параграф бұрын өткен материалды жаңа материалмен байланысты жүзеге асыру мақсатында тірек ұғымдардан басталады. Әрбір тақырыпта өздігінен орындауға арналған тапсырмалар ұсынылады. Оқушының саналы түрде материалды қалай меңгергенін тексеру мақсатында, әрбір параграфтың соңында сұрақтар келтіріледі.

Әрбір параграфта күрделілігі үш деңгейлі – А, В, С жаттығулары ұсынылған. Бірінші деңгей (А) жаттығуларын орындау, әрқайсысы үшін міндетті болып есептеледі. Екінші деңгей (В) күрделілігі орта қиындық жаттығулары болып табылады. Күрделілігі үшінші деңгейлі (С) жаттығулары математикаға қызығатын және білімін шығармашылықпен қолдана алатындарға ұсынылады. Оқулықтың тараулары үш айдармен аяқталады: «Өзіңді тексер!», «Тарихи деректер», «Бұл тарауда не білдіңіз?». «Өзіңді тексер!» айдарында тест тапсырмалары берілген, оның шешімі тиісті тарауды қаншалықты меңгергеніңді анықтауға мүмкіндік береді. «Тарихи деректер»- тараудағы материалға байланысты ақпарат болып табылады. «Бұл тарауда не білдіңіз?» айдары оқыған материалдың мағынасын түсініп және оның ең маңыздысын бөлектеуге көмектеседі [3].

Математиканы жүйелі оқу, ең алдымен, жеке тұлғаның жан-жақты дамуы үшін маңызды болып табылатынын, адамда келесі қасиеттерді тәрбиелейтінін білуге және ұғынуға тиіспіз:

- өзінің тұжырымдарын дәлелдеу қабілеті;
- құбылыстардың себебін анықтау және қорытынды жасай білу;
- лаконизм, яғни қысқа және дәл ойларын айта білу;
- ғылыми-зерттеу дағдылары, шынайы қорытуға ұмтылу, шығармашылық ойлау қабілеті;
- өз мақсаттарына жетуде табандылық [4].

Бүкіл адамзаттың өмір сүруінен бастап математика сұранысқа ие, өйткені, қазіргі заманғы қоғамда табысты болу үшін, үнемі өзгеріп жатқан қазіргі заманды бағдарлай білу, дұрыс, тез ойлау үшін, математиканы оқу қажет.

Математиканы оқытуда жетістікке жету, белгілі бір дәрежеде, оқушыларға қандай есептер, қандай ретпен және қандай мөлшерде берілетініне тәуелді болады. Сондықтан да оқыту процессін ұйымдастыруда, оқушылар есептерді шешу процесінде орындайтындай, мұғалім ең алдымен математикалық есептерді іріктеу қажеттілігімен ұштасады, оларды ретке келтіру, талдау керек болады. Қойылған дидактикалық мақсатқа сәйкес мұғалімге есептерді іріктеуді іске асыруға көмектесетіндей, есептерге жіктеу жүргізуді талап етеді.

Жақсы педагогикалық білім бәріне қажет, өйткені ұжымда жұмыс істеу үшін, өз балаларымызды оқыту мен тәрбиелеу үшін психология, педагогика мәселелерін әрқайсымыз меңгергеніміз абзал. Дәл, математикалық пәндерді оқыту кезінде талдай білуге, қорытындылар жасауға, логикалық ойлауға үйретеді.

Еліміздің білім беру жүйесінде әлемдік деңгейге жету үшін жасалынып жатқан іс-шараларды жүзеге асыруда оқытудың әр түрлі әдіс-тәсілдерін қолдана отырып, терең білімді, ізденімпаз, барлық іс-әрекетке белсенді, шығармашылық бағыт ұстанатын, құзіреттілік қабілеті жан-жақты дамыған, сол тұрғыда өз болмысын таныта алатын жеке тұлғаны қалыптастыру болып табылады.

1. Alma E. Abylkasymova, Zhanara M. Nurmukhamedova, Dilara M. Nurbaeva, Lyazzat D. Zhumalieva. "The Turkish Vector" Influence on Teaching the Exact Disciplines in Modern Educational System of Kazakhstan: on the Example of Teaching Algebra and Mathematics // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 4 (2016), pp. 3481-3491
2. Абылкасымова А. Е. Учебная программа по алгебре для 7-9 классов общеобразовательной школы. – Астана, 2013. – 17 стр.
3. Абылкасымова А. Е., Корчевский В. Е., Абдиев А., Жумагулова З. А.. Алгебра 8 класс. Алматы: Мектеп, 2012 г. С. 167
4. Абылкасымова А.Е. Теория и методика обучения математике: дидактико-методические основы. – Алматы: Мектеп, 2013. С. 224

Аннотация. В статье исследованы некоторые проблемы преподавания математики в школе и педагогическом вузе. В работе рассмотрены профессиональные качества, которыми должен владеть учитель математики, чтобы уметь применять свои знания на практике и педагогически грамотно передавать их ученикам. В статье рекомендовано проведение классификации задач, в целях осуществления преподавателем их отбора в соответствии с поставленной дидактической целью.

Ключевые слова: обучение математике, школа, педагогический вуз, математическая подготовка, курс алгебры, математический анализ, обучение решению задач.

Abstract. The article deals with the some problems of mathematics teaching in schools and pedagogical university. The paper deals with the professional quality that must possess a specialist to be able to apply their knowledge in practice and pedagogically competent to transfer their students. In this article the classification problems, which would help the teacher to carry out their selection in accordance with the intended didactic purpose, are recommended.

Keywords: Mathematics-teaching, school, pedagogical higher education, mathematical analysis, training in problem solving.

УДК 372. 8 : 514

Б.С. Ханжарова, А.Б. Кокажаева

ЗНАКОМСТВО ШКОЛЬНИКОВ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ ФИГУР КАК ФАКТОР ФОРМИРОВАНИЯ УСТОЙЧИВОГО ИНТЕРЕСА К ГЕОМЕТРИИ

(г. Алматы, Казахский государственный женский педагогический университет)

Аннотация. Геометрия является одной из основных математических дисциплин, изучаемых в школьном курсе математики. С понятиями фигура, свойства геометрических фигур, преобразования (в том числе топологические преобразования), которые составляют содержание этого предмета учащиеся постоянно сталкиваются при изучении геометрии. Поэтому в статье рассматриваются возможности изучения и применения топологических свойств геометрических фигур школьного курса геометрии.

Ключевые слова: геометрия, фигура, свойства, топология, преобразования, взаимно-однозначное, взаимно-непрерывное.

Топология же – это та отрасль геометрии, которая рассматривает исключительно топологические свойства фигур. Представим, что некоторая фигура должна быть скопирована от руки совершенно малоопытным, но очень добросовестным

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

чертежником, которой невольно искривляет прямые линии, искажает углы, расстояния и площади; тогда на сделанной им копии, хотя метрические и проективные свойства фигур, может быть, и не сохранятся, но топологические свойства все же останутся в неприкосновенности. Топология как раздел геометрии в школьном курсе не представлена. Лишь отдельные задачи скрыто опираются на топологические свойства фигур (например, рассмотренная ниже задача). Однако определенные связи между элементарной геометрией и топологией установить можно. Итак, рассмотрим некоторые вопросы топологии, исходя из понятий, встречающихся в школьном курсе геометрии. Более того, покажем, что стремление выявить наиболее глубокие геометрические свойства фигур необходимо приведет к идеям топологии.

Геометрия, изучаемая в школе, имеет дело почти исключительно со свойствами фигур, связанными с понятиями длины, величины угла, площади и объема. Такие свойства называются метрическими. Лишь очень немногие теоремы и задачи школьного курса геометрии рассматривают свойства иного характера.

Например, рассмотрим следующую задачу. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом десятиугольнике? Если решать эту задачу непосредственно, т.е. проведем в данном многоугольнике все возможные диагонали и попытаемся их пересчитать, то увидим, что это сделать совсем непросто. Еще труднее пересчитать число диагоналей у невыпуклого многоугольника.

Представим, что все диагонали многоугольника – эластичные нитки, прикрепленные в соответствующих вершинах. Тогда каждую диагональ можно было бы поднять в пространство, например, следующим образом: вторую диагональ поднять чуть выше чем первую; третью поднять чуть выше, чем вторую и т.д. При этом диагонали не пересекались бы и их можно без труда пересчитать. От натяжения ниток изменились бы их длины, величины некоторых углов и т.п., а число диагоналей (ниток) осталось бы тем же самым. Но для решения данной задачи такие изменения элементов фигуры значения не имеют. Т.о. мы сталкиваемся с геометрическим свойством, которое не является метрическим.

Следующий пример, мы знаем, что формула Эйлера справедлива для любого простого многогранника. Но эта формула не теряет смысла и значимости также и применительно к иным, гораздо более общим случаям: вместо многогранников элементарной геометрии с плоскими гранями и прямыми ребрами можно взять простые «многогранники», у которых «гранями» являются кривые поверхности, а «ребрами» – кривые линии, или можно нарисовать «грани» и «ребра» на поверхности, например, шара. Больше того, вообразим, что поверхность многогранника или сферы сделана из тонкого слоя резины; тогда формула Эйлера сохраняет силу, как бы ни была деформирована рассматриваемая поверхность – путем изгибаний, сжатий, растяжений и т.д., лишь бы резиновый слой не был порван.

Действительно, формула Эйлера относится только к числу вершин, ребер и граней; длины же, площади, двойные отношения, кривизна и т.п., как и иные понятия элементарной или проективной геометрии, в данном случае никакой роли не играют.

Таким образом, некоторое геометрическое свойство считается тем более существенным, чем устойчивее оно оказывается, то есть чем разнообразнее те преобразования, которые оно выдерживает, оставаясь неизменным. С этой точки зрения проективные свойства оказываются глубже, существеннее метрических.

Понятие геометрического преобразования является одним из основных в школьном курсе геометрии [1]. Свойства фигур, которые сохраняются при данном преобразовании F , называются инвариантами этого преобразования. Например, свойство фигуры быть прямой является инвариантом центральной симметрии.

Рассмотрим известные в школьном курсе геометрии преобразования и их инварианты.

1. *Центральная симметрия.* Инварианты этого преобразования:

- а) свойство фигуры быть прямой;
- б) свойство фигуры быть отрезком;
- в) свойство фигуры быть окружностью;
- г) свойство угла иметь данную величину;
- д) свойство фигуры иметь определенную площадь;
- е) свойство фигуры иметь определенную длину;
- ж) свойство фигуры быть незамкнутой кривой;
- з) свойство фигуры быть замкнутой кривой.

2. *Гомотетия.* Сравнение свойств центральной симметрии и гомотетии показывает, что рассмотренные выше свойства а), б), в), г), ж), з) являются также инвариантами гомотетии, но свойства д), е) при гомотетии не сохраняются.

Из нескольких геометрических свойств фигуры то считается более глубоким, которое оказывается более устойчивым, т.е. то, которое выдерживает большее количество преобразований, оставаясь неизменным. Отсюда следует, что свойство фигуры быть замкнутой (незамкнутой) линией является, очевидно, более глубоким, чем свойство иметь определенную длину. Т.о. возникает вопрос о том, какие из геометрических свойств данной фигуры являются наиболее глубокими. Для ответа на этот вопрос можно данную фигуру подвергнуть большому числу различных преобразований и посмотреть, какие из свойств фигуры являются инвариантами всех этих преобразований. Такие свойства и будут, очевидно, наиболее глубокими геометрическими свойствами данной фигуры.

Поступим несколько иначе. Ведь если некоторое свойство является инвариантом данного преобразования, то оно будет являться инвариантом всех преобразований, которые являются частными случаями данного. Например, преобразование центральной симметрии является частным случаем преобразования гомотетии, Нетрудно убедиться в том, что центральная симметрия-это гомотетия с коэффициентом $k = -1$. Поэтому все инварианты гомотетии будут являться и инвариантами центральной симметрии.

Действительно, рассмотренные выше свойства а), б), в), г), ж), з) являясь инвариантами гомотетии, будут и инвариантами центральной симметрии. Обратное неверно. Так, свойства д), е) являясь инвариантами центральной симметрии, не будут инвариантами гомотетии.

Поэтому, вместо того чтобы подвергать данную фигуру большому числу различных преобразований, можно отыскать более общее преобразование, частными случаями которого являлись бы рассмотренные ранее преобразования. Инварианты этого более общего преобразования будут являться инвариантами всех рассмотренных ранее преобразований. Ответ на поставленный нами вопрос сводится, таким образом, к поиску соответствующего преобразования. Будем исходить из следующих соображений.

Рассмотренные ранее преобразования являются частными случаями искомого. Попытаемся выявить те общие условия, которым удовлетворяет каждое из рассмотренных нами конкретных преобразований, и, таким образом, подойдем к характеристике искомого преобразования. Эти условия найти нетрудно.

Во-первых, рассмотренные преобразования являются взаимно-однозначными, во-вторых, выполняется следующее условие: если зафиксировать произвольную точку X фигуры прообраза и соответствующую ей точку X_1 (образ точки X при одном из известных нам преобразований) и рассмотреть переменную точку Y фигуры прообраза вместе с точкой Y_1 – образом точки Y , то при неограниченном приближении точки Y к

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

точке X точка U_l будет неограниченно приближаться к точке X_l , и обратно, при неограниченном приближении точки U_l к точке X_l точка U будет неограниченно приближаться к точке X .

Преобразование, для которого выполняется такое условие, называется взаимно-непрерывным. Из сказанного выше следует, что искомым преобразованием будет, по-видимому, преобразование, являющееся взаимно-непрерывным и взаимно-однозначным. Преобразование, обладающее такими свойствами, называют *топологическим* [2].

Возникает вопрос о том, нельзя ли, идя по пути обобщения, рассмотреть еще более общие преобразования, которые являются лишь или взаимно-однозначными, или взаимно-непрерывными и т.д. Оказывается, что при преобразованиях более общих, чем топологические, не сохраняется такое фундаментальное геометрическое свойство, как размерность. Так точке приписывается размерность 0, линии – размерность 1, поверхности – размерность 2, пространству – размерность 3.

При топологических преобразованиях сохраняется размерность. Например, трехмерный куб нельзя топологически отобразить на квадрат. То, что размерность является топологическим инвариантом, было впервые доказано Л.Э.Брауэром в 1911 году. То есть, топологические преобразования не сохраняют, вообще говоря, ни длин, ни углов, ни прямолинейности, но сохраняют лишь отношение бесконечной близости.

Таким образом, топологические преобразования являются в некотором смысле наиболее общими преобразованиями, сохраняющими размерность. Инварианты топологических преобразований называются иначе *топологическими свойствами* фигур. Наглядным примером топологического преобразования является деформация резинового листа. Наиболее наглядными примерами топологических преобразований могут служить *деформации*.

Вообразим, что фигура вроде сферы или треугольника сделана из тонкого слоя резины (или нарисована на таковом), и затем если растягивать и крутить резину самыми разнообразными способами, лишь бы не рвать ее и не приводить двух различных точек в состояние физического совпадения. Приведение двух различных точек в состояние физического совпадения нарушило бы условие взаимной однозначности. Разрыв резинового слоя противоречил бы условию взаимной непрерывности. Действительно, рассматривая две точки, лежащие по разные стороны линии разрыва, мы видим, что расстояние между ними может быть неограниченно малым, тогда как после разрыва этого уже не будет.

Фигура в окончательном ее положении – после указанных операций – будет находиться в топологическом соответствии с фигурой в ее первоначальном положении. Треугольник можно деформировать в другой треугольник или в окружность, или в эллипс, и потому названные фигуры обладают совершенно одинаковыми топологическими свойствами. Но никак нельзя деформировать круг в отрезок прямой или поверхность сфера в боковую поверхность цилиндра.

Но, общее понятие топологического преобразования шире, чем понятие деформации. Например, если фигура разрезана до деформации и склеена по тем же линиям после деформации, то в итоге, несомненно, получается некоторое топологическое преобразование первоначальной фигуры, хотя это преобразование может и не быть деформацией. Приведем пример. На плоскости нарисована простая замкнутая кривая (нигде сама себя не пересекающая).

Посмотрим какое свойство этой фигуры сохраняется неизменным даже в том случае, если плоскость будет подвергаться каким угодно деформациям, как будто бы она была сделана из тонкого слоя резины. Длина кривой или площадь ограниченной ею

части плоскости при деформациях не сохраняется. Но у рассматриваемой конфигурации есть и топологическое свойство: простая замкнутая кривая C на плоскости делит плоскость ровно на две области, внутреннюю и внешнюю.

Точнее точки плоскости разбиваются на два класса - A (внешние точки) и B (внутренние точки) - таким образом, что любая пара точек, принадлежащих одному и тому же классу, может быть связана кривой, не имеющей общих точек с C , тогда как всякая кривая, соединяющая какие-нибудь точки разных классов, непременно пересекается с C .

Это утверждение вполне очевидно, например, для случая окружности или эллипса, но уже чуть менее очевидно для многоугольника сложной формы.

Впервые эта теорема была сформулирована Камиллом Жорданом (1838-1922) в его известном труде «Cours d'analyse», из которого целое поколение математиков почерпнула современную концепцию математической строгости [3]. Доказательство, данное самим Жорданом, не было ни кратким, ни простым по своей идее, но как оказалось, оно и не было вполне исчерпывающим, и понадобились значительные усилия, чтобы восполнить его проблемы.

Первые строгие доказательства теоремы Жордана были очень сложными и трудно воспринимались даже людьми с хорошей математической подготовкой. Сравнительно простые доказательства были придуманы лишь недавно. Одно из затруднений заключается в большой общности понятия «простой замкнутой» кривой, значительно более широкого, чем понятие многоугольника или «гладкой» кривой: по определению «простая замкнутая кривая» есть любая кривая, топологически эквивалентная окружности. С другой стороны, необходимо таким терминам, как «внутри» или «вне» дать логические определения, прежде чем строгое доказательство станет возможным.

Проанализировать в их полной общности, возникающие в этой связи отношения и понятия, есть теоретическая задача первостепенного значения, разрешению которой в большой степени служит современная топология. Но, с другой стороны, следует иметь в виду и то обстоятельство, что, занимаясь изучением конкретных явлений в области геометрии, в громадном большинстве случаев неуместно вводить понятия, неограниченная общность которых создает излишние затруднения. Так, возвращаясь к теореме Жордана, существенно то, что для случая таких кривых как, например, для многоугольников или для кривых с непрерывно меняющейся касательной (которые только и встречаются в наиболее важных задачах) – доказательство этой теоремы может быть проведено совсем просто.

Выясним, какие преобразования фигуры, сделанной из очень прочного и эластичного материала нельзя назвать топологическими. Чтобы преобразование было топологическим, необходимо, во-первых, чтобы оно было взаимно-однозначным, то есть не должно быть физического соприкосновения материала, из которого изготовлена модель фигуры, с самим собой.

Во-вторых, преобразование должно быть взаимно-непрерывным, то есть не должно происходить разрывов материала, из которого сделана модель фигуры. Определенные таким образом преобразования и называют деформацией. Например, с помощью деформации окружность можно преобразовать в овал, в треугольник, в квадрат, вообще в произвольный многоугольник без самопересечений, в произвольную замкнутую кривую без самопересечений, но нельзя преобразовать, например, в «восьмерку». Далее, сферу можно деформировать в картофелину, в куб, в форму ненакачанного мяча, в произвольный выпуклый многогранник, но нельзя деформировать, например, в тор.

Топологические свойства фигур представляют величайший интерес во многих математических исследованиях. В известном смысле это самые глубокие, самые

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

основные геометрические свойства, так как они сохраняются при самых «резких» преобразованиях.

Знакомство с этими свойствами школьников наряду с основной задачей обучения математике – обеспечением прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, выявлению и развитию математических способностей.

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 7 – 9 классы. 2-е изд. – М.: 2014. -384 с
2. Мусин А.Т. Дифференциалдық геометрия және топология элементтері: Оқулық. – Алматы, 2014. -312 б.
3. Тимофеева Н. В. Дифференциальная геометрия и элементы топологии в задачах, рисунках и комментариях. Учебное пособие. Ярославский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского, 2006 г - 320 с.

Аңдатпа. Мектеп математика курсында оқылатын пәндердің ішінде геометрия негізгі пәндердің бірі болады. Фигура, геометриялық фигуралардың қасиеттері, түрлендірулер (сонымен қатар, топологиялық түрлендірулер) сияқты ұғымдар оқушылардың геометрияны оқу барысында үнемі кездесіп отырады. Сондықтан, мақалада мектеп оқушыларын геометрия курсындағы фигуралардың топологиялық қасиеттерімен таныстыру жолдары мен оларды пайдалану мүмкіндіктері қарастырылған.

Түйін сөздер: геометрия, фигура, қасиеттері, топология, түрлендіру, өз - ара бір мәнді және өз - ара үзіліссіз қатынастар.

Abstract. Geometry is one of the most important mathematical subjects studied in a school course of mathematics. With concepts a figure, properties of geometrical figures, transformations (including topological transformations) which make the contents of this subject pupils constantly meet when studying geometry. Therefore the possibilities of studying and use of topological properties a school course of geometry are considered.

Keywords: geometry, figure, properties, topology, transformations, mutual unambiguous and mutual continuous compliance.

УДК 517.946

Х. Хомпыш

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА

(г. Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби)

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию однозначной разрешимости одной нелинейной обратной задачи для уравнений движения жидкости Кельвина-Фойгта. Обратная задача состоит в том, что находятся не только скорость и градиент давления, но и сами правые части уравнения. Поставленная обратная задача исследуется в ограниченном цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$ - ограниченная трехмерная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Определен функциональный класс сильного решения обратной задачи. Методом последовательных приближений доказаны существование и единственность в целом по времени сильного обобщенного решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: Обратная задача, Кельвин-Фойгт, сильное решение.

Обратные задачи для дифференциальных уравнений возникают во многих областях науки при попытке описать внутренние характеристики среды, в которой протекают физико-химические процессы, по результатам наблюдений над этими процессами в доступной для измерений области. К настоящему времени появилось значительное количество работ, посвященных исследованию обратных задач с интегральным условием переопределения по времени, а также по пространственным переменным. Однако в подавляющем большинстве исследованы задачи для параболических уравнений.

В настоящей работе рассмотрена одна обратная задача для уравнения Кельвина-Фойгта с интегральным условием переопределения по пространственным переменным. Уравнения Кельвина-Фойгта входит в класс уравнений Соболевского типа. В основном для различных классов уравнений Соболевского типа изучались вопросы существования и несуществования решений, единственности решений, вопросы, связанные с изучением свойств решений. Обратные же задачи, линейные или нелинейные, изучены относительно слабо. В направлении, связанном с направлением настоящей работы, можно отметить статьи [1]-[8]. Подробный обзор различных аспектов постановок и разрешимости обратных задач для уравнений в частных производных дается в книгах [4-6].

В настоящей работе исследуется нелинейная обратная задача восстановления коэффициента правой части для системы уравнений движения жидкости Кельвина-Фойгта [9-12].

Постановка задачи. Пусть Ω - ограниченная область в R^m , $m = 2, 3$, с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$. $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ - ограниченный цилиндр, а $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ - боковая поверхность Q_T .

Рассмотрим следующую обратную задачу определения тройки функций $\{\bar{v}(x, t), \nabla p(x, t), f(t)\}$, удовлетворяющих системе уравнений Кельвина-Фойгта:

$$\bar{v}_t - \nu \Delta \bar{v} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} - \chi \Delta \bar{v}_t + \nabla p = f(t) \bar{g}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

начальному условию

$$\bar{v}(x, 0) = \bar{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

краевому условию

$$\bar{v}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T \quad (4)$$

и условию переопределения

$$\int_{\Omega} \bar{v}(x, t) \bar{u}(x) dx = e(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Здесь функции $\bar{v}_0(x)$, $\bar{u}(x)$, $e(t)$, $\bar{g}(x, t)$ и константы ν , χ заданы.

Замечание. Дополнительная информация в рассматриваемой обратной задаче задается в виде условия интегрального переопределения (5), что с физической точки зрения может, например, означать измерение функции \bar{v} с помощью датчика, производящего усреднение по области пространственных переменных Ω .

Существование и единственность в целом по времени сильного обобщенного решения прямой задачи (1)-(4) с известной правой частью $f_1(x, t) = f(t) \bar{g}(x, t)$ хорошо изучены в работах А.П. Осколкова [9-11]. В частности, в силу [11] существует и единственно решение $(\bar{v}, \nabla p) \in L_{\infty}(0, T; H^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)) \cap W_2^1(0, T; W_2^2(\Omega)) \times L_2(Q_T)$ прямой задачи (1)-(4), причем справедлива следующая оценка

$$\|\bar{v}\|_{L_{\infty}(0, T; H^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega))}^2 + \|\bar{v}\|_{W_2^1(0, T; W_2^2(\Omega))}^2 + \|\nabla p\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq C_1 (\|\bar{v}_0\|_{L_2(\Omega)} + \|F\|_{L_2(Q_T)}). \quad (6)$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Используя известные результаты по прямой задаче (1)-(4), методом последовательных приближения [7] докажем теорему существования и единственности в целом по времени сильного обобщенного решения нелинейной обратной задачи (1)-(5). В работе использованы обозначения функциональных пространств и их нормы, принятые в [13].

Определение. Сильным обобщенным решением обратной задачи (1)-(5) будем называть пару функций $\{\bar{v}(x,t), f(t)\}$, $\bar{v}(x,t) \in L_\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;H^1(\Omega))$, $f(t) \in L^2(0,T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} \{\bar{v}_t \varphi_t + v \bar{v}_x \varphi_x - \bar{v}_k \bar{v} \varphi_{x_k} + \chi \bar{v}_{xt} \varphi_x\} dx dt = \iint_{Q_T} f(t) \bar{g}(x,t) \bar{\varphi}(x,t) dx dt, \quad (7)$$

при любых $\bar{\varphi}(x,t) \in L_\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;H^1(\Omega))$ и условия (3) и (5).

Предположим, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) \in H^1(\Omega), \quad e(t) \in W_2^1(0,T), \quad \bar{g}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \\ G(t) \equiv \int_{\Omega} \bar{u}(x) \bar{g}(x,t) dx \neq 0, \quad \text{ïðå} \quad t \in [0,T] \end{aligned} \quad (8)$$

В задаче (1)-(5) при условии (8) функцию $f(t)$ можно выразить явно. Действительно, умножим уравнение (1) на $\bar{u}(x)$ и проинтегрируем по Ω . Учитывая предположения (8) и условия (2), (4) приходим к соотношению

$$f(t) = \frac{1}{G(t)} \left[e'(t) + \int_{\Omega} (v \nabla \bar{v} \nabla \bar{u} + \chi \nabla \bar{v}_t \nabla \bar{u} + \bar{v}_k \bar{v}_{x_k} \bar{u}) dx \right]. \quad (9)$$

Лемма. Обратная задача (1)-(5) эквивалентна постановке задачи (1)-(4), (9) при достаточно гладком решении (\bar{v}, f) и при совместных данных задачи.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются предположения (8) и $\bar{v}_0 \in H^1(\Omega)$. Тогда существует единственно сильное обобщенное решение $\{\bar{v}, f\}$ обратной задачи (1)-(5).

Доказательство. Доказательство проводится методом последовательных приближений [7]. Возьмем в качестве нулевого приближения $\bar{v}^0 = \bar{v}_0$ и определим (\bar{v}^m, f^m) следующим образом, т.е. сначала определим $f^m(t)$ через соотношения

$$f^m(t) = \frac{1}{G(t)} \left[e'(t) + \int_{\Omega} (v \nabla \bar{v}^{m-1} \nabla \bar{u} + \chi \nabla \bar{v}_t^{m-1} \nabla \bar{u}) dx - \int_{\Omega} \bar{v}_k^{m-1} \bar{v}^{m-1} \bar{u}_{x_k} dx \right]. \quad (10)$$

После этого однозначно определим $\bar{v}^m(x,t)$ [10], как сильное обобщенное решение следующей прямой задачи с известной правой частью $\bar{F}(\bar{\delta}, t) = \bar{g}(\bar{\delta}, t) f^m(t)$:

$$\bar{v}_t^m - v \Delta \bar{v}^m + (\bar{v}^m \nabla) \bar{v}^m - \chi \Delta \bar{v}_t^m + \nabla p^m = f^m(t) \bar{g}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (11)$$

$$\text{div} \bar{v}^m = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (12)$$

$$\bar{v}^m(x,0) = \bar{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

$$\bar{v}^m(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_T, \quad (14)$$

Таким образом, последовательность пар $\{\bar{v}^m, f^m\}$ корректно определена. Действительно, при предположении (7) следует, что $\bar{F}^m(\bar{\delta}, t) \in L_2(Q_T)$. Следовательно, в силу [10, 11], прямая задача (11)-(14) имеет единственное сильное обобщенное решение $\bar{v}^m(x,t) \in L_\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap W_2^1(0,T;H^1(\Omega)) \equiv V_2(Q_T)$ и для него верна оценка (6).

Если мы докажем, что последовательность $\{\bar{v}^m, f^m\}$ является последовательностью Коши, то в силу полноты пространства $V_2(Q_T) \times L_2(0,T)$ следует, что пара функций $\{\bar{v}, f\}$

является предельной для последовательности $\{\bar{v}^m, f^m\}$, т.е. $\{\bar{v}^m, f^m\} \rightarrow \{\bar{v}, f\}$ при $m \rightarrow \infty$, тем самым $\{\bar{v}, f\}$ является искомым сильным обобщенным решением обратной задачи (1)-(5).

Вводим обозначения

$$\bar{V}^{m+1} = \bar{v}^{m+1} - \bar{v}^m, \quad q^{m+1} = p^{m+1} - p^m \quad \text{и} \quad F^{m+1} = f^{m+1} - f^m.$$

Тогда из (10) для разности F^{m+1} получим:

$$F^{m+1}(t) = \frac{1}{G(t)} \left[\int_{\Omega} (\nu \nabla \bar{u} \nabla \bar{V}^m + \chi \nabla \bar{u} \nabla \bar{V}_t^m) - \int_{\Omega} (\bar{v}_k^m \bar{V}^m + \bar{V}_k^m \bar{v}^{m-1}) u_{x_k} dx \right], \quad (15)$$

а из (11)-(14) получим

$$\bar{V}_t^{m+1} - \nu \Delta \bar{V}^{m+1} + (\bar{V}^{m+1} \nabla) \bar{v}^{m+1} + (\bar{v}^m \nabla) \bar{V}^{m+1} - \chi \Delta \bar{V}_t^{m+1} + \nabla q^{m+1} = F^{m+1}(t) \bar{g}(x, t), \quad (16)$$

$$\operatorname{div} \bar{V}^{m+1} = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (17)$$

$$\bar{V}^{m+1}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (18)$$

$$V^{m+1}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T, \quad (19)$$

Постановка (16)-(19) эквивалентна следующему интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} [\bar{V}_t^{m+1} \bar{\varphi} + \nu \bar{V}_x^{m+1} \bar{\varphi}_x + \chi \bar{V}_{xt}^{m+1} \bar{\varphi}_x - (\bar{V}_k^{m+1} \bar{v}^{m+1} + \bar{v}_k^m \bar{V}^{m+1}) \bar{\varphi}_{x_k}] dx = \int_{\Omega} F^{m+1} \bar{g} \bar{\varphi} dx$$

для $m=1,2,3,\dots$ и $\forall \bar{\varphi} \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap J(Q_T)$ с начальным условием (18).

Оценим правую часть (15):

$$\begin{aligned} |F^{m+1}(t)| &= \frac{1}{|G|} \left| \left[\nu \int_{\Omega} \nabla \bar{V}^m \nabla \bar{u} dx + \chi \int_{\Omega} \nabla \bar{V}_t^m \nabla \bar{u} dx - \int_{\Omega} (\bar{v}_k^m \bar{V}^m + \bar{V}_k^m \bar{v}^{m-1}) \bar{u}_{x_k} dx \right] \right| \leq \\ &= \frac{1}{k_0} \left\{ \nu \|\nabla \bar{V}^m\| \cdot \|\nabla \bar{u}\| + \chi \|\nabla \bar{V}_t^m\| \cdot \|\nabla \bar{u}\| + \|\nabla \bar{u}\| \left(\|\bar{v}^m\|_{4,\Omega} \|\bar{V}^m\|_{4,\Omega} + \|\bar{V}^m\|_{4,\Omega} \|\bar{v}^{m-1}\|_{4,\Omega} \right) \right\} \leq \quad (20) \\ &= \frac{1}{k_0} \left\{ \nu \|\nabla \bar{V}^m\| \cdot \|\nabla \bar{u}\| + \chi \|\nabla \bar{V}_t^m\| \cdot \|\nabla \bar{u}\| + \left(\frac{4}{3} \right)^3 \|\nabla \bar{u}\| \cdot \|\bar{v}^m, \bar{v}^{m-1}\|_{\frac{1}{4}} \|\bar{v}_x^m, \bar{v}_x^{m-1}\|_{\frac{3}{4}} \|\bar{V}^m\|_{\frac{1}{4}} \|\nabla \bar{V}^m\|_{\frac{3}{4}} \right\} \leq \\ &= \frac{\|\nabla \bar{u}\|}{k_0} \left\{ \left(\nu + \left(\frac{4}{3} \right)^3 \theta^2(\Omega) \|\bar{v}_x^m, \bar{v}_x^{m-1}\| \right) \|\nabla \bar{V}^m\| + \chi \|\nabla \bar{V}_t^m\| \right\} \leq C_2 \left(\|\nabla \bar{V}^m\| + \chi \|\nabla \bar{V}_t^m\| \right), \end{aligned}$$

где $C_2 = \frac{\|\nabla \bar{u}\|}{k_0} \max \left\{ \nu + \left(\frac{4}{3} \right)^3 \theta^2(\Omega) \|\bar{v}_x^m, \bar{v}_x^{m-1}\|, 1 \right\}$.

Здесь мы использовали неравенство Пуанкаре-Фридрихса [14]

$$\|u\| \leq \theta(\Omega) \|u_x\|, \quad \forall u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$$

а также неравенство (Лемма 2, стр. 20 в [13])

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leq \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \|u\| \cdot \|u_x\|^3, \quad \forall u \in \dot{W}_2^1(\Omega).$$

Возведем в квадрат обе части (20), затем проинтегрируем по τ от 0 до t . В результате получим

$$\int_0^t |F^{m+1}|^2 d\tau \leq 2C_2^2 \int_0^t \left(\|\nabla \bar{V}^m\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla \bar{V}_t^m\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau. \quad (21)$$

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Далее, умножим уравнение (16) на \vec{v}^{m+1} и проинтегрируем по Ω . После применения формулы интегрирования по частям получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\vec{v}^{m+1}\|^2 + \chi \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|^2 \right) + \nu \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|^2 = \int_{\Omega} \vec{v}_k^{m+1} \cdot \vec{v}_{x_k}^{m+1} \vec{v}^{m+1} dx + \int_{\Omega} F^{m+1} \bar{g} \vec{v}^{m+1} dx. \quad (22)$$

Оценим правую часть (22) с помощью неравенства Коши [12] и (14)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \vec{v}_k^{m+1} \cdot \vec{v}_{x_k}^{m+1} \vec{v}^{m+1} dx + \int_{\Omega} F^{m+1} \bar{g} \vec{v}^{m+1} dx \right| &\leq \|\nabla \vec{v}^{m+1}\| \cdot \|\vec{v}^{m+1}\|_{4,\Omega}^2 + |F^{m+1}| \cdot \|\bar{g}\| \cdot \|\vec{v}^{m+1}\| \leq \\ &\left(\frac{64}{27} \theta(\Omega) \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \vec{v}^{m+1}\| \cdot \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|g\|^2 \theta^2(\Omega) \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} |F^{m+1}|^2 \leq \\ &C_3 \left(\|\vec{v}^{m+1}\|^2 + \chi \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|^2 \right) + \frac{\varepsilon_1}{2} |F^{m+1}|^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где $C_3 = \left(\frac{64}{27} \theta(\Omega) \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \vec{v}^{m+1}\| + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|g\|^2 \theta^2(\Omega)$. Подставляя (23) в (21), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\vec{v}^{m+1}\|^2 + \chi \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|^2 \right) + \nu \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|^2 = C_3 \left(\|\vec{v}^{m+1}\|^2 + \chi \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|^2 \right) + \frac{\varepsilon_1}{2} |F^{m+1}|^2.$$

Из последнего соотношения в силу известной леммы Гронуолла приходим к оценке

$$\max_{t \in [0, T]} \left(\|\vec{v}^{m+1}\|^2 + \chi \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 \right) + \nu \|\nabla \vec{v}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 \leq \varepsilon_1 \exp(C_3 t) \int_0^t |F^{m+1}|^2 d\tau \quad (24)$$

Теперь, умножим (16) скалярно на \vec{V}_t^{m+1} в $L_2(\Omega)$. Интегрируя по частям результат, получим равенство

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \vec{V}^{m+1}\|^2 + \|\vec{V}_t^{m+1}\|^2 + \chi \|\nabla \vec{V}_t^{m+1}\|^2 = \int_{\Omega} (\vec{v}_k^{m+1} \cdot \vec{v}^{m+1} + \vec{v}_k^m \vec{v}^{m+1}) \nabla \vec{V}_t^{m+1} dx + \int_{\Omega} F^{m+1} \bar{g} \vec{V}_t^{m+1} dx. \quad (25)$$

Оценим правую часть (25) следующим образом

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} (\vec{v}_k^{m+1} \cdot \vec{v}^{m+1} + \vec{v}_k^m \vec{v}^{m+1}) \nabla \vec{V}_t^{m+1} dx + \int_{\Omega} F^{m+1} \bar{g} \vec{V}_t^{m+1} dx \right| \leq \\ &\|\nabla \vec{V}_t^{m+1}\| \left(\|\vec{v}^{m+1}\|_{4,\Omega} \|\vec{v}^{m+1}\|_{4,\Omega} + \|\vec{v}^{m+1}\|_{4,\Omega} \|\vec{v}^m\|_{4,\Omega} \right) + |F^{m+1}| \cdot \|\bar{g}\| \cdot \|\vec{V}_t^{m+1}\| \leq \\ &\|\nabla \vec{V}_t^{m+1}\| \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{4}} (\theta(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|\nabla \vec{v}^{m+1}, \nabla \vec{v}^m\| \cdot \|\nabla \vec{V}^{m+1}\| + \theta(\Omega) \|\bar{g}\| \cdot |F^{m+1}| \right) \leq \\ &\frac{\varepsilon_2}{2} \|\nabla \vec{V}_t^{m+1}\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{4}} (\theta(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|\nabla \vec{v}^{m+1}, \nabla \vec{v}^m\| \cdot \|\nabla \vec{V}^{m+1}\| + \theta(\Omega) \|\bar{g}\| \cdot |F^{m+1}| \right)^2 \leq \\ &\frac{\varepsilon_2}{2} \|\nabla \vec{V}_t^{m+1}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \theta(\Omega) \|\nabla \vec{v}^{m+1}, \nabla \vec{v}^m\|^2 \cdot \|\nabla \vec{V}^{m+1}\|^2 + \theta^2(\Omega) \|\bar{g}\|^2 \cdot |F^{m+1}|^2 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Далее, выберем ε_2 так, чтобы выполняли $\varepsilon_2 < 2\chi$ и подставим (26) в (25). Используя оценку (24) за норму $\|\nabla \vec{V}^{m+1}\|^2$, проинтегрируем τ от 0 до t . Тогда получим

$$\nu \|\nabla \vec{V}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 + \chi \int_0^t \|\nabla \vec{V}_\tau^{m+1}\|^2 d\tau \leq C_4 \int_0^t |F^{m+1}|^2 d\tau \quad (27)$$

где $C_4 = \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \theta(\Omega) \|\nabla \bar{v}^{m+1}, \nabla \bar{v}^m\|^2 \cdot \frac{\varepsilon_1}{\nu} \exp\{C_3 t\} + \theta^2(\Omega) \|\bar{g}\|^2 \right)$.

Из оценок (24) и (27) получим

$$\int_0^t \left(\|\nabla \bar{V}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla \bar{V}_t^{m+1}\|^2 \right) d\tau \leq \left(C_4 + \frac{\varepsilon_1}{\nu} \exp\{C_3 t\} \right) \int_0^t |F^{m+1}|^2 d\tau \quad (28)$$

Рассматривая вместе (21), (28), заметим, что справедливы оценки

$$\|F^{m+1}\|_{L_2(0,T)}^2 \leq q \|F^m\|_{L_2(0,T)}^2 \quad (29)$$

$$\|\bar{V}^{m+1}\|_{V_2(Q_t)}^2 \leq q \|\bar{V}^m\|_{V_2(Q_t)}^2 \quad (30)$$

для $m=0,1,2,\dots$, где $q = 2C_2^2 \left(C_4 + \frac{\varepsilon_1}{\nu} \exp\{C_3 t\} \right)$.

В силу произвольности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и t выбираем их таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$q < 1. \quad (31)$$

Следовательно, при выполнении (31), из (29), (30) и сходимости бесконечной геометрической прогрессии вытекает, что $\{\bar{v}^m, f^m\}$ является последовательностью Коши в пространстве $V_2(Q_{t_1}) \times L_2(0, t_1)$. В силу вышеприведенных рассуждений существует единственная пара функций $\{\bar{v}, f\} \in V_2(Q_{t_1}) \times L_2(0, t_1)$, такая что

$$\bar{v}^m(x, t) \rightarrow \bar{v}(x, t) \text{ в } V_2(Q_{t_1}) \text{ и } f^m(t) \rightarrow f(t) \text{ в } L_2(0, t_1).$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в соотношениях (10)-(14) в силу сильной сходимости \bar{v}^m и f^m , мы получим, что пара предельных функций \bar{v} и f является сильным обобщенным решением обратной задачи (1)-(5) в $Q_{t_1} = \Omega \times (0, t_1]$.

Теперь докажем единственность решения обратной задачи (1)-(5) в Q_{t_1} . Пусть существуют два решения $\{\bar{v}_k, f_k\}$, $k=1,2$ в Q_{t_1} . Тогда в силу соотношений (29), (30) и (31) получим

$$\|f_1 - f_2\|_{L_2(0,t_1)} \leq q \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,t_1)}, \quad \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\|_{V_2(Q_{t_1})} \leq q \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\|_{V_2(Q_{t_1})}.$$

Отсюда следует, что $f_1 \equiv f_2$ и $\bar{v}_1 \equiv \bar{v}_2$.

Итак, мы доказали существование и единственность решения $\{\bar{v}, f\}$ обратной задачи (1)-(5) только в промежутке $(0, t_1)$, $t_1 < T$. Далее, продолжим доказательство теоремы, т.е. приведем доказательство на всем интервале $(0, T)$. У нас константы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, C_i$ и t_1 не зависят от начальной данной функции $\bar{v}_0(x)$, поэтому, если такие t не исчерпывают всего интервала $(0, T)$, то, повторяя рассуждение для $t \in [t_1, t_2]$, где t_1 таково, что $\bar{v}_0(x) \equiv \bar{v}(x, t_1)$, и т.д., мы за конечное число шагов убедимся, что обратная задача (1)-(5) имеет единственное обобщенное решение $\{\bar{v}, f\}$ во всем $Q_T = \Omega \times [0, T]$. Теорема доказана.

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1. Прилепко А.И., Васин И.А. Некоторые обратные начально-краевые задачи для нестационарных линеаризованных уравнений Навье-Стокса. Дифференциальные уравнения. -1989. –Т.25. -№1. –С. 106-117.
2. Прилепко, А.И. Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением//Мат. сбор.-1992.-Т.183, №4. -С. 49–68.
3. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky and I. A. Vasin, Methods for solving inverse problems in mathematical physics, Marcel Dekker, New York, Basel, 2000.
4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи [Текст] /С.И.Кабанихин.– Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457с.
5. Asanov, A., Atamanov E.R. Nonclassical and inverse problems for pseudo-parabolic equations / Токуо, 1997. –152р.
6. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.
7. Абылкаиров У.У. Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения. Математический журнал. –Алматы, -2003. –т. 3. - №4(10). –С. 5-12.
8. Abylkairov U. U., Kh. Khompysh An inverse problem of identifying the coefficient in Kelvin-Voight equations//Applied Mathematical Sciences, Journal for Theory and applications, Vol. 9, 2015, no. 101-104. -P. 5079-5089. Hicari Ltd, www.m-hikari.com <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.57464>
9. Осколков А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров. - Зап.научн.семинаров ЛОМИ АН СССР, 1973, 38, с.98-136.
10. Осколков А.П. Об одной нестационарной квазилинейной системе с малым параметром, регуляризующей систему уравнений Навье-Стокса. -В кн.: "Пробл.матем.анализа". Изд-во ЛГУ, -1973, -В.4. -С.78-87.
11. Звягин В. Г., Турбин М. В. О существовании и единственности слабого решения начально-краевой задачи для модели движения жидкости Фойгта в области с изменяющейся со временем границей// Вестн. ВГУ. Сер. физ. матем. -2007. - № 2. - С. 180–197.
12. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. 1970, 2-ое изд.
13. J.-L.Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod, Paris, 1969.

Аңдатпа. Бұл жұмыс Кельвин-Фойгт сұйығының қозғалыс теңдеуі үшін қойылған сызықты емес кері есептің бірімәнді шешімділігін зерттеуге арналған. Кері есеп болу себебі сұйықтың жылдамдығы мен қысым градиентіне қоса теңдеудің оң жағындағы функцияның өзі қоса ізделінеді. Қойылған бастапқы-шеттік кері есеп шенелген $Q_T = \Omega \times (0, T)$ цилиндрлік облыста қарастырылған, мұндағы $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$ - $\partial\Omega$ жатық шекаралы шенелген үш өлшемді облыс. Жалпылама әлді шешімнің функционалдық класы анықталған. Біртіндеп жуықтау әдісі арқылы қарастырылып отырған есептің жалпылама әлді шешімнің барлық уақыт бойынша бар және жалғыз болуы дәлелденді.

Түйін сөздер: Кері есеп, Кельвин-Фойгт, әлді шешім.

Abstract. This paper devoted to investigate the nonlinear inverse problem for equations of motion of Kelvin-Voight fluids. The inverse problem consists of finding a velocity and a pressure's gradient of fluids and also a right-hand said of the equation. The investigated inverse problem studied in the bounded cylinder $Q_T = \Omega \times [0, T]$, where $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$ is a bounded 3D domain with smooth boundary $\partial\Omega$. The functional space of strong generalized solution is defined. The theorem of existence and uniqueness of global in time of the strong generalized solution to the inverse problem is proved. The existence of the solution is proved by the successive approach method.

Keywords: Inverse problem, Kelvin-Voigt, strong solution

УДК 519.85:532

К. Шияпов

О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ
НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

(г. Алматы, Казахский государственный женский педагогический университет)

Аннотация. Свободная краевая задача, описывающая совместную фильтрацию двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей происходит от теории усреднения. Начнем с математической модели на микроскопическом уровне, которые состоят из стационарной системы Стокса для несжимаемой неоднородной вязкой жидкости, занимающей поровое пространство, стационарные уравнения Ламе для несжимаемой упругой твердого скелета, в сочетании с соответствующие граничные условия на общей границе "твердый скелет - порового пространства", и уравнения переноса для неизвестной плотности жидкости. Далее мы докажем разрешимость этой модели и строго выполним процедуру гомогенизации, как безразмерный размер пор стремится к нулю, в то время как пористое тело геометрически периодическим. в результате, мы докажем разрешимость задачи Маскета для фильтрации вязкоупругого.

Ключевые слова: Проблема Маскета, свободные краевые задачи; фильтрации жидкости; гомогенизация периодических структур; закон Дарси.

Введение. В настоящей публикации мы рассмотрим математические модели, описывающие совместное движение двух несмешивающихся жидкостей в пористых средах. Например, перемещение нефти водой. Существуют различные типы таких моделей, но мы заинтересованы только в некоторых фундаментальных моделях механики сплошных сред (таких как, например, Стокса для медленного движения вязкой жидкости, или уравнения Ламе для смещения упругого твердого тела), или асимптотически близко к выше один. Среди математических моделей совместного движения двух несмешивающихся жидкостей наиболее надёжная задача Маскета, предложенный М. Маскета [1]. Эта модель описывает фильтрацию двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной вязкости и различной плотности, разделенных некоторой неизвестной (свободной) границы. Движение первой жидкости в области $\Omega^+(t)$ с постоянной вязкостью μ^+ и постоянной плотности ρ_f^+ регулируется система фильтрации Дарси

$$\mathbf{v}^+ = -\frac{k}{\mu^+} \nabla p_f^+ + \rho_f^+ \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad (1)$$

для макроскопической скорости \mathbf{v}^+ и макроскопическое давление p_f^+ жидкости.

Соответственно, движение второй жидкости в области $\Omega^-(t)$ с постоянной вязкостью μ^- и постоянной плотности ρ_f^- регулируется системой фильтрации Дарси

$$\mathbf{v}^- = -\frac{k}{\mu^-} \nabla p_f^- + \rho_f^- \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^- = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^-(t), \quad (2)$$

для макроскопической скорости \mathbf{v}^- и макроскопическое давление p_f^- . На общей свободной границей $\Gamma(t) = \partial\Omega^+(t) \cap \partial\Omega^-(t)$ давления и нормальные скорости непрерывны:

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

$$p_f^+ = p_f^-, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (4)$$

где \mathbf{n} есть единичный вектор нормали к границе $\Gamma(t)$ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$ и V_n является скоростью в нормальном направлении границы $\Gamma(t)$ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$. В (1)–(2) k является коэффициентом проницаемости данной физической среды, и \mathbf{F} является безразмерной вектор распределенных массовых сил. Эти данные должны быть известны.

Условие (4) означает, что граница $\Gamma(t)$ представляет собой материал, поверхность – она состоит из того же набора материальных точек во время движения. Это обстоятельство позволяет слабую формулировку проблема Маскета. А именно, мы определяем давление p_f из неоднородная жидкость, как

$$p_f = p_f^+ \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad p_f = p_f^- \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega^-(t),$$

плотность ρ_f как

$$\rho_f = \rho_f^+ \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad \rho_f = \rho_f^- \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega^-(t),$$

вязкость μ как

$$\mu = \mu^+ \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad \mu = \mu^- \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega^-(t),$$

и скорость \mathbf{v} как

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^- \text{ if } \mathbf{x} \in \Omega^-(t).$$

Тогда неизвестные функции \mathbf{v} , p_f , μ и ρ_f удовлетворяют система фильтрации Дарси в форме

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p_f + \rho_f \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5)$$

и уравнения переноса

$$\frac{d\rho_f}{dt} \equiv \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\frac{d\mu}{dt} \equiv \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mu = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \quad (7)$$

Первое уравнение (5) (закон Дарси) понимается в обычном смысле почти всюду в $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, а второе уравнение (уравнение непрерывности) понимается в смысле распределения. Транспортные уравнения понимаются в смысле распределений, если мы будем использовать равенства

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mu = \nabla \cdot (\mathbf{v} \mu), \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho_f).$$

Задача решено однородным граничным условием

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S = \partial \Omega, \quad t > 0, \quad (8)$$

где \mathbf{n} вектор нормали к границе S , и первоначальные условия

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^0(\mathbf{x}), \quad \mu(\mathbf{x}, 0) = \mu_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

с разрывными начальными данными:

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^+ = \text{const} > 0, \quad \mu_0(\mathbf{x}) = \mu^+ = \text{const} > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+$$

и

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^- = \text{const} > 0, \quad \mu_0(\mathbf{x}) = \mu^- = \text{const} > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^-,$$

где $\Gamma(0) = \partial \Omega^- \cap \partial \Omega^+$ достаточно гладкая поверхность.

Таким образом, имеются две настройки одной и той же задачи Маскета. В обоих случаях задача легко сформулировать, но практически невозможно решить. По этой

причине, очень мало известно ни о классической или на слабых решений. Есть только несколько результатов по классической разрешимости локально во времени или глобально во времени, но рядом явных решений, и нет никакого результата на слабой разрешимости (см. [2], [3], [4], [5], [6] и там ссылки).

Целью данной работы является найти более общие математические модели, описывающие тот же физический процесс и асимптотически близки к некоторым фундаментальным моделям механики сплошной среды. Для объяснения идеи мы рассматриваем на данный момент только система фильтрации Дарси, которая отвечает за динамику в задаче Маскета. Хорошо известно, что эта система является асимптотическим пределом системы Стокса для несжимаемой вязкой жидкости, когда безразмерный размер пор стремится к нулю (см. [5], [6], [7], [8]). Но эта система Стокса на микроскопическом уровне является частным случаем ($\alpha_\tau = 0, \alpha_\lambda = \infty$) более общей системы

$$\alpha_\tau \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbf{D}(x, \mathbf{w}) - p\mathbf{l}) + \rho^\varepsilon \mathbf{F}, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (11)$$

для смещения \mathbf{W} и давление p континуум среды ([7], [8], [9], [10]). Микроскопическое система (10), (11) описывает совместное движение вязкой жидкости в поровом пространстве и упругого твердого скелета и понимается в смысле распределений. Грубо говоря, эта система содержит систему Стокса для вязкой жидкости в поровом пространстве, система Ламе для твердого скелета и граничного условия (непрерывность нормальных напряжений) на общей границе "твердый скелет - поровое пространство".

В (10) $\mathbf{D}(x, \mathbf{w})$ является симметричная часть $\nabla \mathbf{w}$, χ^ε является характеристическая функция порового пространства, $\varepsilon = l/L$ безразмерный размер пор,

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho_0}, \quad \rho^\varepsilon = \rho_f \chi^\varepsilon + \rho_s (1 - \chi^\varepsilon),$$

l является средний размер пор, L является характерный размер области в рассмотрение, τ характерное время процесса, ρ_f и ρ_s являются соответствующие средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета коррелирует со средней плотностью воды ρ_0 , g является значение ускорения силы тяжести, μ является вязкость жидкости, и λ упругая постоянная Ламе.

Теоретически микроскопическая система (10), (11) с соответствующими начальными и граничными условиями является одним из наиболее адекватной математической модели, описывающей совместное движение вязкой жидкости в поровом пространстве и упругое твердое скелет. Но эта модель не имеет практического значения, так как необходимо, чтобы решить эту проблему в физической области несколько сотен метров, в то время как коэффициенты колеблются от масштаба нескольких десятков микрон. Эта практическая значимость модели появляется только после гомогенизации. Таким образом, мы должны позволить все безразмерные критерии α_τ, α_μ и α_λ является переменной функции, в зависимости от малого параметра ε , и найти все предельные режимы, как $\varepsilon \rightarrow 0$.

Прежде всего отметим, что в настоящей работе мы рассматриваем только фильтрационные процессы, где характерное время τ процессов составляет несколько месяцев. Затем

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

$$\alpha_\tau \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и мы можем пренебречь членом инерции в динамическом уравнении (10) и переписать его в виде

$$\nabla \cdot (\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbf{D}(x, \mathbf{w}) - p\mathbf{l}) + \rho^\varepsilon \mathbf{F} = 0. \quad (12)$$

Далее заметим, что для почти всех физические процессы $\alpha_\mu : 0$ и α_λ достаточно велико. Тогда асимптотический предел (11), (12) в условиях

$$\alpha_\mu : 0(\varepsilon^2), \quad \alpha_\lambda \rightarrow \infty \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

это система фильтрации Дарси. Будем говорить, что система фильтрации Дарси является *первый уровень приближения* микроскопической системы (11), (12). *второй уровень приближения* из (11), (12) является система Терцаги-Байот из пороупругости ([11], [12]) и соответствует условиям

$$\alpha_\mu : 0(\varepsilon^2), \quad \alpha_\lambda : 0(1),$$

Наконец, даже при достаточно малых α_μ и достаточно больших α_λ мы всегда можем предположить, что

$$0 < \lambda_0, \mu_0 < \infty, \quad (13)$$

где $\lambda_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \alpha_\lambda$, $\mu_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \alpha_\mu$.

После процедуры гомогенизации мы приходим к уравнениям вязкоупругой фильтрации ([7], [9], [10]), которые являются *третий уровень приближения* из (11), (12).

Понятно, что все различные асимптотические модели системы (11), (12) описывают один и тот же физический процесс, но с разной степенью приближения. Выбор модели зависит от целей исследователя.

Тот же метод можно применить к задаче Маскета. На микроскопическом уровне свободная краевая задача состоит из начально – краевой задачи для динамических уравнений (11), (12) для смещения \mathbf{W} и давления p континуума среды, в сочетании с задачей Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \nabla \rho_f &= 0, \quad \rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^{(0)}(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \nabla \mu &= 0, \quad \mu(\mathbf{x}, 0) = \mu_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (14)$$

для вязкости μ и плотность ρ_f неоднородной жидкости в поровом пространстве.

Для того, чтобы все идеи ясно, мы рассмотрим наиболее простой случай, когда проблемы, когда

$$\mu^+ = \mu^- = \mu.$$

Тогда первый уровень приближения микроскопического свободной краевой задачи является задача Маскета, который состоит из динамических уравнений в виде система фильтрации Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}^{(f)} \cdot (\nabla p_f + \rho_f \mathbf{F}), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (15)$$

для скорости \mathbf{V} и давление p_f жидкости с симметричной строго положительно определенной матрицей $\mathbf{B}^{(f)}$, и уравнение переноса (6) для плотности ρ_f . В (15) критерий

$$\mu_1 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} \text{ строго положительна и конечна.}$$

Второй уровень приближения микроскопического свободной краевой задачи (11), (12), (14) мы называем как *Маскета – Терцаги – Байот проблема*, Эта задача состоит из уравнения переноса (6) для плотности жидкости ρ_f и система Терцаги – Байота из пороупругости

$$\mathbf{v} = m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}^{(f)} \cdot (\nabla p_f + \rho_f \mathbf{F}), \quad \nabla \cdot (\mathbf{v} + (1-m) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) = 0, \quad (16)$$

$$\nabla \cdot (\lambda_0 \mathbf{A}_0^s : \mathbf{D}(x, \mathbf{u}) - \frac{1}{m} p_f \mathbf{I}) + \rho \mathbf{F} = 0, \quad (17)$$

для скорости \mathbf{v} и давление p_f жидкости и смещение \mathbf{u} твердого скелета. В (16), (17) m является пористость порового пространства, $\rho = m\rho_f - (1-m)\rho_s$ является плотность смеси твердого скелета и жидкости в порах, \mathbf{A}_0^s является симметричным строго положительно определена постоянный тензор четвертого ранга (определение \mathbf{A}_0^s и $\mathbf{B}^{(f)}$ см. в работе [9] и критерий λ_0 строго конечны и положительны.

Последняя модель имеет подмодели, что соответствует случаю $\mu_1 = \infty$. Это подмоделью состоит из динамической системы

$$\nabla \cdot (\lambda_0 \mathbf{A}_0^s : \mathbf{D}(x, \mathbf{u}) - \frac{1}{m} p_f \mathbf{I}) + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (18)$$

для твердого смещения \mathbf{u} и давление жидкости p_f , и уравнение переноса (6) для плотности жидкости ρ_f , где скорость жидкости определяется $\mathbf{v} = m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$.

Это соотношение формально следует из первого уравнения в (16), если положить их $\mu_1 = \infty$. Мы называем эту проблему, как *проблема Маскета для упругой фильтрации*.

И, наконец, третий уровень приближения микроскопической свободной краевой задачи (11), (12), (14) является *проблема Маскета для фильтрации вязкоупругого*. Эта задача состоит из динамической системы фильтрации вязкоупругой

$$\nabla \cdot (\mathbf{P}^{(0)}(\mathbf{w})) - \nabla p + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{P}^{(0)}(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_0 : \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + \mathbf{A}_1 : \mathbf{D}(x, \mathbf{w}) + \int_0^t \mathbf{A}_2(t-\tau) : \mathbf{D}(x, \mathbf{w}(x, \tau)) d\tau,$$

для смещения \mathbf{w} и давления p смеси жидкой и твердой фаз и уравнения (6) для плотности жидкости ρ_f с $\mathbf{v} = \partial \mathbf{w} / \partial t$. Заметим, что это уравнение транспорта можно переписать в виде уравнения переноса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (20)$$

для плотности ρ смеси.

Для доказательства корректности указанных выше задач со свободными границами на макроскопическом уровне мы должны

1) Доказано существование слабого решения $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon, \rho_f^\varepsilon\}$ к задаче со свободной границей (11), (12), (14) на микроскопическом уровне при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, и

2) выполнить строгую процедуру гомогенизации при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В настоящей работе мы делаем это для задачи Маскета для вязкоупругой фильтрации при условии (13). Основной проблемой здесь является предельная

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

процедура в нелинейном члене $\mathbf{v}^\varepsilon \rho_f^\varepsilon$ ($\mathbf{v}^\varepsilon = \partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t$) в уравнении переноса. Обратите внимание, что плотность жидкости ρ_f^ε ограничена только (и разрывной) функции. Таким образом, мы можем ожидать лишь слабую сходимость последовательности $\{\rho_f^\varepsilon\}$ в $L_2(\Omega_T)$. Таким образом, мы должны доказать сильную сходимость последовательности $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ в $L_2(\Omega_T)$, и этот факт приобретает решающее значение.

Условные обозначения функциональных пространств и нормы существуют такие же, как и в работе [13].

Выводы. В настоящей работе мы показали, как моделировать физические процессы с использованием современных методов математического анализа. Мы начали с свободной краевой задачи для совместного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей на микроскопическом уровне. Теоретически эта математическая модель является наиболее подходящей моделью, описывающей данный физический процесс. Но эта модель не имеет никакого практического значения, потому что мы должны решить эту проблему в физической области несколько сотен метров, в то время как коэффициенты колеблются от физических размеров в некоторых микрон. Практическая ценность модели появляется только после гомогенизации. В свою очередь, гомогенизации имеет по крайней мере три уровня приближения, которые зависят от безразмерных критериев физической задачи. Первый уровень приближения является хорошо - известная проблема Маскета. Второй уровень приближения того же физического процесса является Маскета - задача Байот - Терцаги. И, наконец, третий уровень приближения свободной краевой задачи на микроскопическом уровне является задача Маскета для фильтрации вязкоупругого.

1. M. Muskat, Two-fluid system in porous media. The encroachment of water into an oil sand, *Physics* (1934) 5, pp. 250–264.
2. Fahuaï Yi, Global classical solution of Muskat free boundary problem, *J. Math. Anal. Appl.* (2003) 288, pp. 442–461.
3. E. Radkevich, On the spectrum of the pencil in the Verigin-Muskat problem, *Sbornik: Mathematics* (1995) 80, No. 1, pp. 33–74.
4. M. Siegel, R.E. Caflish, S. Howison, Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem, *Comm. on Pure and Appl. Math.* (2004) LVII, pp. 1–38.
5. A. Meirmanov, R. Zimin, K. Shiyapov, The Muskat problem at the microscopic level for a single capillary, submitted for publication to "Boundary Value Problems" 2015, 2015:71 doi:10.1186/s1366101503344.
6. А.М. Мейрманов, Г.В. Решетова, К.М. Шияпов Движения двух несмешивающихся жидкостей на микроскопическом уровне Вестник КазНПУ им. Абая Сирия «Физико-математические науки»; №2(50),
7. R. Burridge and J. B. Keller, Poroelasticity equations derived from microstructure, *Journal of Acoustic Society of America* (1981) 70, No. 4, pp. 1140–1146.
8. E. Sanchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 129, (Springer-Verlag, 1980).
9. A. Meirmanov, Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media, *Siberian Mathematical Journal* (2007) 48, No. 3, pp. 519–538.
10. G. Nguetseng, Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics. *SIAM J. Math. Anal.* (1990) 21, pp. 1394–1414.
11. M. Biot, General theory of three dimensional consolidation, *Journal of Applied Physics* (1941) 12, pp. 155–164.
12. K. Terzaghi, Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen, *Sitzung berichte. Akademie der*

Wissenschaften, Wien Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse (1923) 132, No. Pa, pp. 104 – 124.

13. J.L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires* (Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969).

Аңдатпа. Еркін шекарадағы шекті есептер орталау теориясы негізінде екі араласпайтын сығылмайтын сұйықтықтардың фильтрациясы сипатталады. Математикалық моделдеуді микроскопиялық деңгейде, яғни арласпайтын сығылмайтын сұйықтықтар үшін тұтқырлық Стокс жүйесінің стационар күйінен бастаймыз. Кеуекті кеңістікте атқаратын сығылмайтын серпімді ортадағы қатты қаңқасының стационарлық Ламе теңдеуінің жалпы шекарасы «кеуекті кеңістіктегі қатты қаңқасы» шекаралық шарттарымен ұштастыра отырып және белгісіз сұйықтықтың тығыздығы үшін қозғалыс теңдеуі анықталады. Бұдан бұл моделдің шешімінің бар екендігін дәлелдейміз және гомогенизациясы процедурасын қатаң сақтаймыз, сонымен кеуектің өлшемсіз мөлшері нөлге ұмтылғанда кеуекті дене осы уақыт мезетінде геометриялық периодты болады. Нәтижесінде Маскет есебінің тұтқырлы серпінді фильтрациясы үшін шешімі бар болатындығы дәлелденеді.

Түйін сөздер: Маскет есебі, еркін шекарадағы шекті есептер; сұйықтың фильтрациясы; периодты құрылымдардың гомогенизациясы; Дарси заңы

Abstract. Free boundary problem describing the collaborative filtering two immiscible incompressible fluids derived from the theory of averaging. Let's start with a mathematical model on the microscopic level, which consist of a stationary system of Stokes equations for an incompressible inhomogeneous viscous fluid occupying the pore space, stationary Lamé equations for an incompressible elastic solid skeleton, in combination with the appropriate boundary conditions on the common border "hard skeleton - pore space" and the transport equation for the unknown fluid density next we prove the solvability of this model, and strictly carry out the homogenization procedure as dimensionless pore size tends to zero, while the porous body geometrically periodic as a result, we prove the solvability of the problem for a filtration Muskat.

Keywords: Muskat problem, free boundary problems; filtration of fluid; homogenization of periodic structures, Darcy's law.

УДК 681.5

Н.Р. Юничева, М.Б. Аханова*

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С НЕТОЧНЫМИ ДАННЫМИ

(г. Алматы, Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК,
Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, *- магистрант)

Аннотация. В статье представлена процедура решения задачи параметрического синтеза управления, которая сведена к разрешимости системы интервальных алгебраических уравнений. Для полученной системы решение найдено в классе «управляемых» решений. Актуальным вопросом в современных исследованиях теории управления объектами с неточными данными является разработка методов и алгоритмов, направленных на уменьшение возрастающих вычислительных затрат при оперировании с интервальными величинами. Для преодоления всех вычислительных трудностей в настоящее время существуют несколько

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

базисных подходов к построению интервальной арифметики и множество их модификаций. Данное обстоятельство связано со специфическими свойствами операций с интервалами, выявленными в процессе исследования.

Ключевые слова: параметрический синтез, объекты с неточными данными, управляемые решения.

Главным и наиболее неприятным на практике свойством интервальной арифметики является сравнительно быстрый рост ширины интервала результата по мере возрастания числа арифметических операций с интервалами. Это послужило причиной появления различных модификаций метода, целью которых являлась, в основном, попытка препятствовать этому явлению. Наиболее известными из них являются: интервальная арифметика с нестандартным вычитанием и делением, обобщенная интервальная арифметика, сегментная математика, центрированная форма и т.д. Эти подходы оказываются эффективными применительно к определенным классам ситуаций.

С другой стороны, немаловажным аспектом для контуров управления в технических и технологических процессах является вопрос исследования их динамических свойств. Актуальность состоит в учете особенностей получаемых динамических моделей, которые отражают реальную ситуацию, когда известны только границы диапазонов изменения параметров объекта. И в том, и другом случаях приходится оперировать с неопределенностями.

В общем случае осложненные условия эксплуатации современных технологических комплексов приводят к необходимости учета в процессе контроля и управления следующих видов неопределенности:

1. Низкая точность оперативной информации, получаемой с объектов управления, возникающая ввиду большой погрешности датчиков замера технологических параметров (расхода, давления и т.д.), их невысокой надежности, отказов каналов связи, большого запаздывания при передаче информации по уровням управления отсутствия возможности замеров параметров во всех точках технологического процесса, необходимых для моделей. Наличие такого вида неопределенности вызывает неточность в задании переменных величин в моделях, начальных и граничных условий.

2. Неточность моделей объектов контроля и управления, вызванная неэквивалентностью решений системных многоуровневых иерархических моделей и используемых на практике отдельных локальных задач.

Неточность моделей может возникать из-за неверно проведенной декомпозиции общей задачи управления, излишней идеализации модели сложного процесса, разрыва существенных связей в технологическом комплексе, линеаризации, дискретизации, замены фактических характеристик оборудования паспортными, нарушения допущений, принятых при выводе уравнений (стационарности, изотермичности, однородности и т.д.). Ввиду большой сложности объекта, существенной нелинейности, трудностей формализации, наличия различных субъективных критериев и ограничений могут применяться нечеткие модели.

3. Нечеткость в процессе принятия решений в многоуровневых иерархических системах, обусловленная тем, что наличие четких (точных) целей и координирующих решений на каждом уровне контроля и управления, и для каждого локального устройства регулирования затрудняет процесс координации и предопределяет длительный итеративный характер согласования решений.

4. Наличие диспетчера в контуре управления и ведение процесса координации в реальной производственной системе на естественном языке, приводит к необходимости учета трудностей представления знаний диспетчера в виде алгоритмов и согласованности полученного ЭВМ решения с его оценкой:

- ненадежность исходной информации, получаемой от диспетчера в режиме принятия решения, неточность оценок, недоопределенность понятий и терминов, неуверенность диспетчеров в своих заключениях;

- нечеткость (неоднозначность) естественного языка (лингвистическая неопределенность) и языка представления правил в системах экспертного типа;

- процедура принятия решения базируется на неполной информации, т.е. нечетких посылках;

- неопределенность проявляется при агрегации правил и моделей, исходящих от разных источников знаний или от диспетчеров различных уровней управления (эти правила и модели могут быть противоречивыми, избыточными и т.п.).

Необходимость работы в этих условиях затрудняет использование стандартных систем автоматизации. Особенно сложным является описание областей допустимых режимов работы оборудования в таких условиях, т.к. задание жестких (четких) ограничений для систем автоматизации приводят в настоящее время к отключению этих систем диспетчером. Поэтому крайне важной представляется возможность использования для описания и формализации областей допустимых режимов работы оборудования теории нечетких множеств.

Ошибки расчета в основном складывается из ошибки исходных данных, ошибки модели и ошибки метода решения (численного метода).

Для многоуровневых иерархических систем управления наблюдается достаточно резкий рост ошибок исходных данных, в зависимости от номера уровня управления, на котором производится расчет. Рост ошибок в данных обусловлен запаздыванием и искажением данных при передаче от уровня к уровню, фильтрацией их на каждом уровне и невозможностью передачи ряда данных с требуемой периодичностью ввиду их большого объема, ограниченной пропускной способностью каналов связи. В принципе возможно осуществить получение на достаточно высоких уровнях управления подробных данных об отдельных технологических процессах или установках, проведения целого ряда дополнительных замеров на объектах, исследования скважин и т.д. Однако чаще всего сбор такой информации организуется для проведения отдельных научно-исследовательских расчетов. Для производственных целей, когда сбор информации необходимо осуществлять в реальном масштабе времени, такой подход будет уже неприемлемым.

Крайне важным является правильный выбор для соответствующего уровня управления модели и объема передаваемых для расчетов данных. Усложнение математической модели, учитывающей большое число измеряемых параметров, приводит к снижению погрешности, вносимой моделью. Однако при большой размерности моделей очень существенной становится составляющая ошибки, вносимая неточностью применяемых аналитических и численных методов. Время решения задачи большой размерности также может стать неприемлемым при ее решении в реальном масштабе времени. Усложнение математической модели требует также увеличения объема данных, передаваемых с нижнего уровня и также приводит к росту соответствующей составляющей ошибки. Поэтому требуется находить разумный компромисс между этими факторами в зависимости от уровня управления.

Естественно, что внедрение в системе управления, аппаратуры передачи информации между уровнями, средств вычислительной техники, межмашинного обмена информацией позволяет значительно снизить уровни погрешностей данных и расчетов для вышестоящих уровней управления.

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

За счет возможностей применения более сложных математических методов на ЭВМ значительно повышается обоснованность и эффективность принимаемых оперативных решений.

Известно, что в сложных системах энергетики соотношение между составляющими ошибки для установившихся режимов составляют:

1. из-за неточности исходных данных - 82-84%,
2. из-за неточности модели - 14-15%,
3. из-за неточности метода - 2-3%.

Ввиду такой большой доли погрешности исходных данных, возникает и погрешность в расчете целевой функции, что приводит к значительной зоне неопределенности при выборе оптимального режима работы системы. Отсюда возникает необходимость разработки методов, учитывающих неопределенность исходных данных при решении задач многоуровневого управления технологическими процессами.

Вопросы принятия решений в условиях больших ошибок во входных данных, в том числе вызванных отказами устройств измерения и передачи данных обсуждаются в целом ряде работ .

Все эти методы можно было бы разделить на две основные группы:

1. Подавление влияния неточной информации с дальнейшим использованием обычных детерминированных алгоритмов.
2. Переход при наличии неточной информации на специальные алгоритмы (стохастические, нечеткие, интервальные).

Для первого направления характерным является применение различных методов фильтрации и сглаживания исходной информации, усреднения и взвешивания данных. Применяются также методы восстановления отсутствующих данных, интерполирования и экстраполирования, робастные алгоритмы.

В настоящий момент постепенно становится ясным, какие подходы, в каких ситуациях и в каких сочетаниях нужно использовать. Весь комплекс новых теорий и методов идет к естественному объединению в общую теорию анализа неопределенностей.

Процесс этот не завершен и из всего многообразия новых теорий и методов оперирования с неопределенностями наибольшее распространение в практических приложениях получили методы теории прикладного интервального анализа.

Своевременность и актуальность прикладного применения теории и методов интервального анализа на современном этапе для решения различных задач теории линейной оптимизации, робастной устойчивости и теории управления сложными объектами подтверждается ежегодными международными научно-практическими симпозиумами и конференциями.

В результате многочисленных и затяжных многочисленных дискуссий между специалистами в работе [1] опубликован неформальный международный стандарт на обозначения в интервальном анализе. Электронная версия этого стандарта доступна в Интернете на всех сайтах, посвященных интервальному вычислению и интервальному анализу.

Из огромного числа публикаций, отражающих результаты по данному направлению исследований можно отметить некоторые работы. Например, задачи линейного программирования при интервальной неопределенности коэффициентов были интенсивно исследованы во многих работах, которые продемонстрировали многообразие формулировок и подходов [2]. Развитию интервальной математики над конечным числом границ интервалов посвящена работа [3]. Решение модельной задачи глобальной оптимизации продемонстрировано в [4]. Интервальные алгоритмы для матриц с плавающей точкой представлены в статье [5].

Учебники [6,7] и учебные пособия [8] также подтверждают актуальность прикладного применения как теории нечетких методов, так и методов интервального анализа.

Главным недостатком существующих методов и алгоритмов построения интервальных систем управления является то, что при построении интервальных систем управления исследователи сталкиваются со значительными вычислительными затратами при возрастании размерности объектов управления.

Поэтому развитие элементов теории автоматического управления интервально-заданными объектами и разработка интервальных методов в управлении, позволяющих уменьшать вычислительные затраты является актуальной задачей.

Основным практическим достоинством аппарата интервальной математики является возможность осуществления прямых арифметических операций с четко-нечеткими интервальными числами, в то время как многочисленные попытки определить такие операции для параметров, заданных, к примеру, своими частотными распределениями, не привели к успешным результатам. Нечетко-интервальную математику можно в определенной степени рассматривать как обобщение математики обычных интервалов [9].

Таким образом, возникает задача управления не единственным объектом, а семейством или множеством объектов. В связи с этим, много внимания уделяется системам управления с неопределенными параметрами, в том числе интервальными. На самом деле интервальная модель динамической системы способна отражать реальную ситуацию, связанную с информацией о значениях ее параметров.

В теории управления объектами с неточными данными сложность решения задачи анализа и параметрического синтеза управления заключается в экспоненциальном росте вычислительных трудностей по мере возрастания размерности объекта управления. Поэтому достаточно острым и актуальным вопросом является разработка методов и алгоритмов, направленных на уменьшение возрастающих вычислительных затрат.

Неоднократно отмечалось, что реальные технические объекты, функционируют в условиях параметрической неопределенности. Неопределенность подобного рода обусловлена наличием неконтролируемых возмущений, действующих на объекты управления, по причине незнания истинных значений параметров объекта управления из-за сложности технологического процесса, а иногда и непредсказуемым изменением их во времени. Почти во всех случаях вышеупомянутая параметрическая неопределенность характеризуется принадлежностью реальных значений параметров технического объекта некоторым интервалам, границы которых априорно известны. Их математические модели могут быть представлены системами интервальных дифференциальных или разностных уравнений с использованием правил и обозначений интервального анализа [10], а класс таких объектов управления принято называть интервально-заданными.

Таким образом, возникает задача управления не единственным объектом, а семейством или множеством объектов.

Как было отмечено, поставленная задача сведена к разрешимости системы линейных интервальных алгебраических включений [11] следующего вида:

$$P \cdot K \subseteq H, \quad (1)$$

Смысл вкладываемый в понятие «решения» интервальной системы включений типа (1) требует специального уточнения, т.к. интервальная неопределенность данных системы может трактоваться двояко, в соответствии с двойственным пониманием самих интервалов. В первом случае, интервал $[x, \bar{x}]$ является множеством всех вещественных

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

чисел от \underline{x} до \bar{x} , а во втором - вмещать в себя хотя бы одно значение между \underline{x} и \bar{x} . С точки зрения математики, это различие выражается употреблением кванторов всеобщности \forall и квантора существования \exists : в первом случае записывается $\forall x \in [\underline{x}, \bar{x}]$, а во втором $\exists x \in [\underline{x}, \bar{x}]$. Что касается параметров системы линейных интервальных уравнений P_{ij} , о которых известна лишь принадлежность некоторым интервалам, то принципиальное различие между двумя типами интервальной неопределенности проявляется как различие между параметрами, которые могут изменяться в пределах указанных им интервалов как следствие внешних непредсказуемых возмущений и параметрами, которыми мы можем варьировать в пределах заданных интервалов по своей воле, т.е. управлять ими.

В интервальном анализе существуют следующие различные определения понятий решения интервальной системы алгебраических интервальных уравнений [10]:

Объединенное множество решений,

$$\Sigma_{\exists\exists}([P],[H]) = \{K \in R^n / (\exists P \in [P])(\exists H \in [H])(PK = H)\}, \quad (2)$$

которое образуется решениями всех систем $PK = H$ с $P \in [P]$ и $H \in [H]$.

Задачу построения множества вида (2) принято называть задачей идентификации.

Допустимое множество решений

$$\Sigma_{\forall\exists}([P],[H]) = \{K \in R^n / (\forall P \in [P])(\exists H \in [H])(PK = H)\}, \quad (3)$$

которое образуется всеми такими векторами $K \in R^n$, что произведение PK попадает в $[H]$ для любой $P \in [P]$.

Задача построения множества вида (3) называется линейной задачей о допусках.

Управляемое множество решений

$$\Sigma_{\exists\forall}([P],[H]) = \{K \in R^n / (\forall H \in [H])(\exists P \in [P])(PK = H)\}, \quad (4)$$

образованное такими векторами $K \in R^n$, что для любого желаемого $H \in [H]$ можно подобрать соответствующую $P \in [P]$ удовлетворяющую $PK = H$.

Задача построения множества вида (4) является задачей управления.

Решение поставленной задачи. В представленной работе задача параметрического синтеза управления, по аналогии с [11,12] сведена к разрешимости системы интервальных алгебраических включений.

Задача отыскания решения полученной системы является NP -трудной. Для упрощения задачи и облегчения вычислительных трудностей выделим из интервального вектора настраиваемых параметров точечный вектор (или вектор середин) и используем его в качестве начального приближения. Решение будем искать в классе «управляемых» решений.

В 1992 году Шарый С.П. ввел понятие «управляемые решения». Данное название объясняется тем фактом, что каждый вектор $H \in H$ может быть достигнут произведением PK в результате подходящего управления или настройки коэффициентов матрицы P в пределах P .

Вектор $K \in R^n$ называется управляющим решением системы $PK = H$, если для каждого $H \in H$ существует матрица $P \in P$, такая, что $PK = H$ или иначе

$$H \subseteq \{PK / P \in P\}$$

Воспользуемся доказательством, приведенным в [13]. Для управляемых решений справедливо следующее математическое описание.

Допустим, что $K \in R^n$ управляемое решение системы $PK = H$, тогда $K \in R^n$ удовлетворяет неравенству

$$|P_c \cdot K - H_c| \leq \Delta |K| - \delta,$$

где $\delta = 1/2(\bar{h} - \underline{h})$ – неотрицательный вектор радиусов.

Доказательство: если вектор $K \in R^n$ есть управляемое решение, то он удовлетворяет вложению, которое влечет

$$P_c \cdot K - \Delta |K| \leq H_c - \delta \leq H_c + \delta \leq P_c \cdot K + \Delta \cdot |K|$$

и

$$-(\Delta \cdot |K| - \delta) \leq P_c \cdot K - H_c \leq \Delta \cdot |K| - \delta.$$

Следовательно,

$$|P_c \cdot K - H_c| \leq \Delta |K| - \delta$$

Таким образом, полученные управляемые решения можно использовать в качестве в качестве начального приближения при построении интервального вектора настраиваемых параметров.

1. В. Kearfott, M. Nakao, S. Neumaier, A. Rump, S.P. Shary, and P. Van Hentenryck. Standardized notation in interval analysis. *Reliable Computing*, 15(1):7–13, 2010.
2. Fiedler M., Nedoma J, Ramik J., Rohn J., Zimmerman K. Linear optimization problems with inexact data M.: Institute of computer researches. 2008. – 288p.
3. S.M. Rump. Interval Arithmetic Over Finitely Many Endpoints. *BIT Numerical Mathematics*, 52(4):1059–1075, 2012
4. S.M. Rump. A Model Problem for Global Optimization. In *Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA)*, volume 1, pages 1–6. IEICE, 2010.
5. K. Ozaki, T. Ogita, S.M. Rump, and S. Oishi. Fast algorithms for floating-point interval matrix multiplication. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(7):1795–1814, 2012.
6. Ярушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. – Москва: Изд-во Финансы и статистика, 2004. – 320с.
7. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. - Тюмень: Издательство ТГУ, 2000. – 352 с.
8. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия - Телеком. 2004. – 452с. .
9. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – ИВТ СО РАН. – Новосибирск: Изд-во XYZ, 2013. - 605 с.
10. Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // Вычислительные технологии, 1995. Т 4. С. 331-356
11. Yunicheva N.R. Questions of the analysis and synthesis of control systems by objects in uncertainty conditions. *Almaty, Printing house «Classics»*. 2011. – 95p.
12. Khlebalin N.A. Modal Control of Plants with Uncertain Interval Parameters, in: *Proc. Intern. Workshop «Control System Syntesis: Theory and Application»*, Novosibirsk, 1991. - P. 168-173.
13. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. М.: Институт компьютерных исследований. 2007. - 467с.

Аңдатпа. Бұл мақалада интервальді тендіктерді шешілуіне негізделген басқару параметрлік синтез есебінің шешу тәртібі берілген. Алынған жүйеге жауап «басқарылатын» шешімдер классында табылды. Объектерді басқару теориясы заманауи кезеңде жүйелерді

МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

басқарудың жаңа концепциялары мен принциптердің дамуы белгісіз шарттарда орындалатыны өзекті тапсырма болып келеді. Қазіргі техникалық объектермен басқарулар жүйелері, параметрлердің және өзара байланыстары үлкен санмен бейнеленіп жатыр, сондай есептер кейде аналитикалық шешу мүмкін емес, және тәжірибелер өткізу үшін есепті ықшамдауға әрдайым болмайды. Сонымен бірге, автоматты басқарулар жүйелердің үлкен бөлігі параметрлік белгісіз шарттарда жұмыс істеп жатыр. Бірақ бұл белгісіздіктер ерекшеліктердің алуантүрлігі сондай жүйелерді талдаудың және синтездің біртұтас теорияны жасау мүмкіндігін бермейді. Осы жүйелер туралы белгілі тек қана олар нақты өстер түйықталған түпкі интервалдарға жат.

Түйін сөздер: параметрлік синтез, нақты мәліметтер бар объектер, басқарылатын шешімдер.

Abstract. The article presents the procedure for solving the task of parametric control synthesis, which is brought to the resolvability of interval algebraic equations. Solution for the obtained system has been found in the class of "controlled" solutions. Current issues in modern research facility management theory with inaccurate data is the development of methods and algorithms to reduce the increasing computational costs when operating with interval values. In order to overcome all the difficulties of computing now, there are several basic approaches to the construction of interval arithmetic and many modifications thereof. This circumstance is due to the specific characteristics of operations at intervals identified in the research process.

Keywords: parametric synthesis, objects with inaccurate data, controlled solutions.

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

УДК 521.1

М.С. Алмембетова*, Г.М. Маемерова*, М.Б. Елгондина

ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НУЛЕВЫХ СКОРОСТЕЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ МАТНЕМАТИСА

(г.Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, *магистрант)

Аннотация. Рассматривается обобщенная задача двух неподвижных центров. Массы тел считаются постоянными. Опираясь на работу Л.Г. Лукьянова найдены точки либрации задачи. Для вычислений использована система компьютерной алгебры Mathematica. С помощью этой системы построены поверхности нулевых скоростей.

Ключевые слова: задача двух тел, точки либрации, поверхности нулевых скоростей.

1 Введение

Над классической задачей двух неподвижных центров работали очень многие известные ученые, такие как Е.П. Аксенов, В.Г. Демин, Л.Г. Лукьянов и т.д. Данная проблема направлена на изучение движения пассивно гравитирующего тела «нулевой» массы, притягиваемого двумя активными «неподвижными» телами [1-3].

2 Постановка задачи

Рассмотрим три тела M_0 , M_1 и M_2 (Рисунок 1) с массами m_0 , m_1 и m_2 , соответственно. Данные тела имеют сферическое распределение массы, следовательно, они рассматриваются как материальные точки, а также удовлетворяют условию $m_2 \ll m_0 \leq m_1$. Следует отметить, что тело M_2 не должно оказывать заметного гравитационного влияния на оставшиеся два тела. Данная задача рассматривается на интервале времени $\Delta t \ll T$, где Δt - интервал времени на котором исследуется интересующее нас движение тела M_2 под действием тяготения тел M_0 и M_1 .

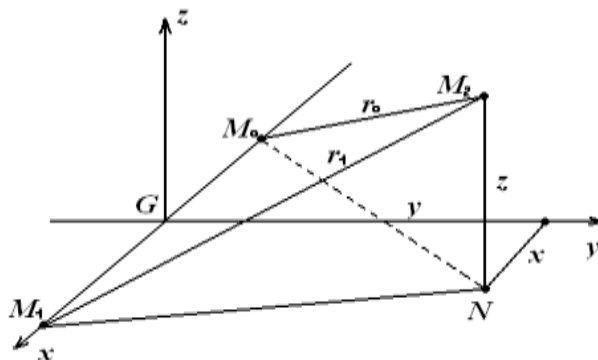


Рисунок 1. Иллюстрация к задаче двух неподвижных центров

Запишем уравнения движения тела M_2 [2]

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1)$$

где

$$U = 2 \frac{\lambda \pm \sigma \mu}{J},$$

$$J = \lambda^2 + \mu^2, \quad r^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{J + r^2 - 1}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{J - r^2 + 1}.$$

Следует отметить, что переход от декартовых координат x, y, z к сферическим λ, μ, ω осуществляется с помощью формул

$$x = \sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \cos \omega,$$

$$y = \sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \sin \omega,$$

$$z = \pm \lambda \mu,$$

$$0 \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq \omega < 2\pi.$$

3 Точки либрации и поверхности нулевых скоростей обобщенной задачи двух неподвижных центров

Известно, что уравнения движения (1) интегрируются в квадратурах [1]. Для исследования точек либраций данной задачи получаем из уравнения (1) систему уравнений [2]

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Так как $\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \left(\frac{x}{\rho} \right)$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \left(\frac{y}{\rho} \right)$ (где $\rho = \sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)}$), то уравнение (2) можно записать в следующей форме

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где частные производные в левых частях уравнения (3) имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{2}{J^3} \sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} \left[-\lambda(\lambda^2 - 3\mu^2) \pm \sigma \mu(3\lambda^2 - \mu^2) \right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{2}{J^3} \left\{ \mp \mu \left[\lambda^2(\lambda^2 - 3\mu^2) + 3\lambda^2 - \mu^2 \right] + \sigma \lambda \left[-(\lambda^2 - 3\mu^2) + \mu^2(3\lambda^2 - \mu^2) \right] \right\}.$$

Первое выражение в уравнении (3) удовлетворяется при условии $\mu = 1, \rho = 0$, а из второго выражения получаем

$$\pm \frac{2(\lambda^2 \mp 2\sigma\lambda - 1)}{(1 + \lambda^2)^2} = 0. \quad (4)$$

Решая уравнение $\lambda^2 \mp 2\sigma\lambda - 1 = 0$ получаем решения $\lambda = \pm \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}$. Знак «минус» перед радикалом не учитывается, в связи с тем, что всегда выполняется условие $\lambda \geq 0$. Переходя к координате z по формуле $z = \pm \lambda \mu$ получим изолированные точки либрации L_1 и L_2 в пространстве $Gxyz$ [2], расположенные по отдельности вдоль оси z

$$L_1(0, 0, \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}), \quad L_2(0, 0, \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 1}).$$

Рассмотрим симметричный случай, когда $\sigma = 0$, где потенциал $U_0 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2\lambda}{J}$ и

$r_1 = \lambda \mp i\mu, \quad r_2 = \lambda \pm i\mu$. В этом случае существуют такие точки либрации $L_1(0, 0, 1), L_2(0, 0, -1), L_D, L_\infty$. Здесь L_D - поверхностная точка либрации диска D ($0 \leq \rho < 1$),

расположенного внутри окружности G с единичным радиусом $\rho^2 = x^2 + y^2 = 1$, а L_∞ - бесконечно удаленная поверхностная точка либрации, расположенная на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = \infty$.

Принимая во внимание условие симметричности $U(x, y, -z, -\sigma) = U(x, y, z, \sigma)$, находим, что для отрицательных значений σ точки либрации L_1 и L_2 изображаются симметрично на плоскости Gxy , а поверхностные точки либрации сохраняются.

В асимметричном случае, когда $0 < \sigma < \infty$, где потенциал $U = \frac{(1+i\sigma)}{r_1} + \frac{(1+i\sigma)}{r_2} = \frac{2(\lambda \mp \sigma\mu)}{J}$, можно найти такие точки либрации, как $L_1(0,0, \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1})$, $L_2(0,0, \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 1})$, L_D, L_∞ .

Остается предельный случай, когда $\sigma = \infty$, а потенциал $U = \frac{i}{r_1} + \frac{i}{r_2} = \frac{\pm 2\mu}{J}$. В этом случае точки либрации имеют вид $L_1 \rightarrow L_\infty$, $L_2 \rightarrow L_D$, L_D, L_∞ .

Следует отметить, что (4)-уравнение больше не имеет никаких точных решений.

Запишем интеграл энергии в виде

$$\frac{V^2}{2} = U + h, \quad (5)$$

где V - скорость тела M_2 , h - постоянная энергии. Из этого интеграла для любых $h < 0$ можно найти возможные области движения с помощью неравенства

$$U \geq C, \quad (6)$$

здесь $C = -h$ - новая постоянная. Границы таких областей являются поверхностями нулевых скоростей

$$U = C. \quad (7)$$

На следующих рисунках 2-6 на основе уравнения (7) изображены сечения поверхностей нулевых скоростей (для значений, когда $\sigma = 0; 0.5; 1; 2; \infty$) в плоскости $O\rho z$. Эти графики получены с помощью системы символьных вычислений Mathematica [4] и соответствуют графикам, полученные в работе [2].

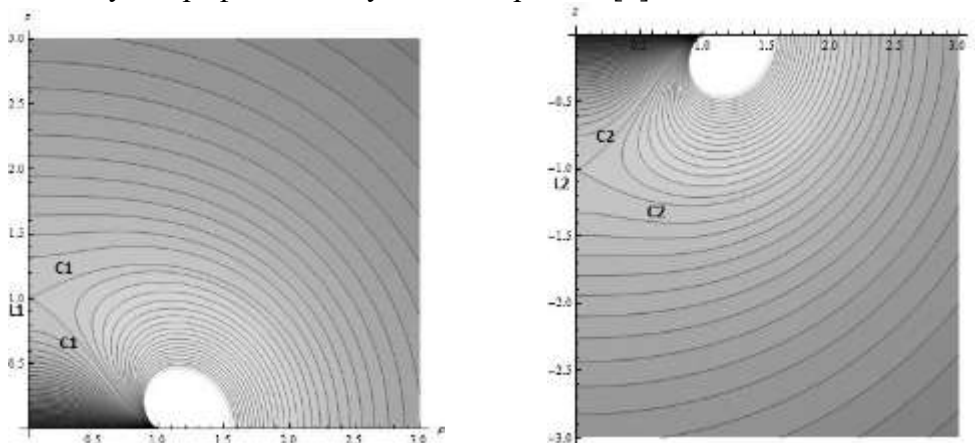


Рисунок 2. Симметричный случай, когда $\sigma = 0$. Точки либрации: $L_1(0, 1)$, $L_2(0, -1)$,
 $C_1 = C_2 = 1$, $C_D = 0$

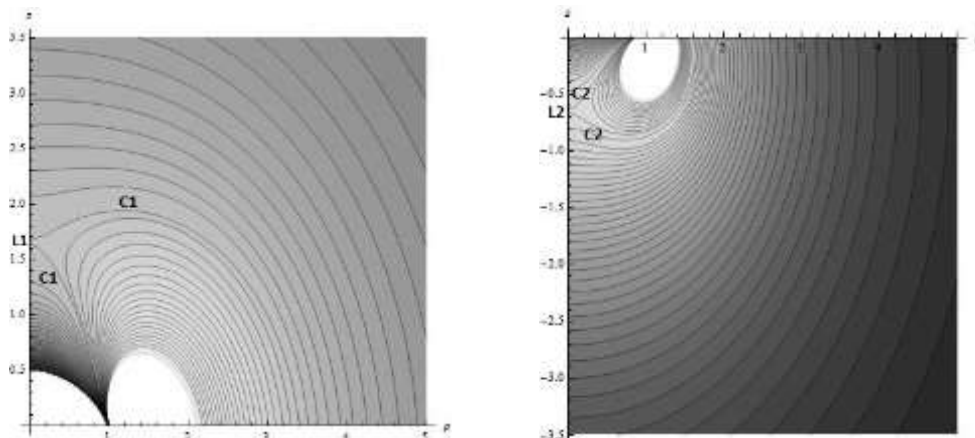


Рисунок 3. Асимметричный случай, когда $\sigma = 0,5$. Точки либрации: $L_1(0, (1 + \sqrt{5})/2)$ и $L_2(0, (1 - \sqrt{5})/2)$. $C_1 = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618\dots$, $C_2 = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.618\dots$

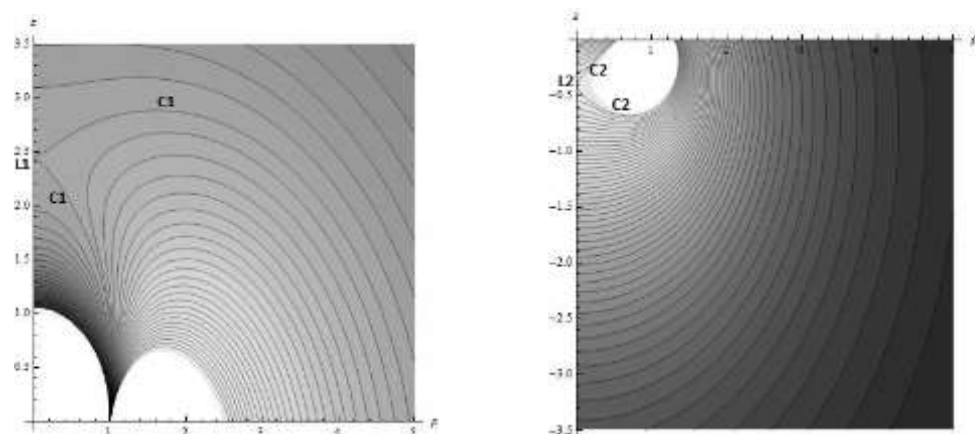


Рисунок 4. Асимметричный случай, когда $\sigma = 1$. Точки либрации: $L_1(0, 1 + \sqrt{2})$ и $L_2(0, 1 - \sqrt{2})$. $C_1 = \sqrt{2} - 1 = 0.414\dots$, $C_2 = \sqrt{2} + 1 = 2.414\dots$

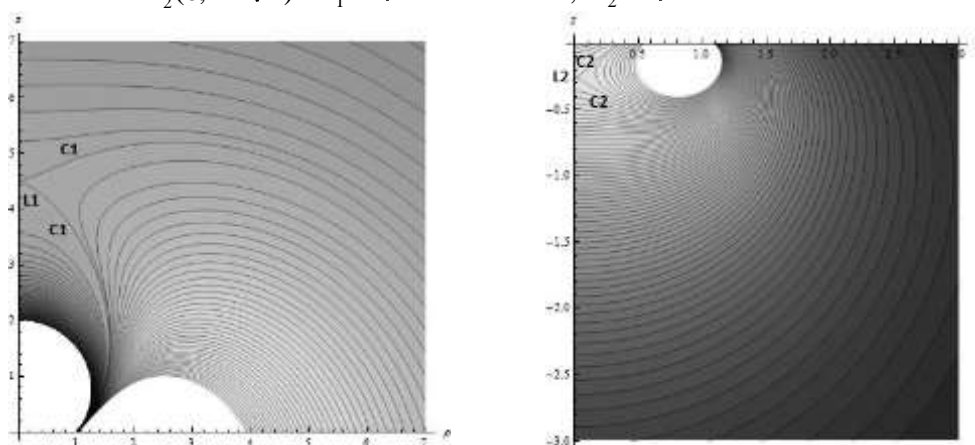


Рисунок 5. Асимметричный случай, когда $\sigma = 2$. Точки либрации: $L_1(0, 2 + \sqrt{5})$ и $L_2(0, 2 - \sqrt{5})$. $C_1 = \sqrt{5} - 2 = 0.236\dots$, $C_2 = \sqrt{5} + 2 = 4.236\dots$

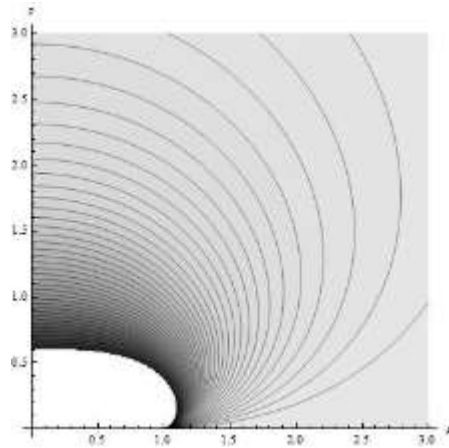


Рисунок 6. Предельный случай $\sigma = \infty$

4 Заключение

Рассмотрена обобщенная задача двух неподвижных центров. Руководствуясь работой Лукьянова Л.Г. найдены точки либрации данной задачи. На плоскости, с помощью системы аналитических вычислений Mathematica, построены графики сечений поверхностей нулевых скоростей. Эти графики идентичны с графиками, найденные в работе Лукьянова Л.Г., что мы и предполагали получить.

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. - М., Наука, 1968. - 799 с.
2. Лукьянов Л.Г. Об обобщенной задаче двух неподвижных центров // Космические исследования. - 2006. - Т.44, №2. - с. 162-169.
3. Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Демин В.Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // Астрономический журнал. - 1963. - Т. 40, №2. - с. 363.
4. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. - М., 2010. - 624 с.

Аңдатпа. Мақалада екі қозғалмайтын центр есебінің жалпыланған жағдайы қарастырылған. Денелердің массасы тұрақты болып саналады. Л.Г. Лукьяновтың жұмысының негізінде есептің либрация нүктелері табылды. Есептеулер үшін компьютерлік алгебра жүйесі Mathematica қолданылды. Осы жүйенің көмегімен нәлдік жылдамдықтар беттері тұрғызылды.

Түйін сөздер: екі дене есебі, либрация нүктелері, нәлдік жылдамдықтар беттері.

Abstract. A generalized problem of two fixed centers is considered. The masses of bodies are considered to be constant. Based on L.G. Lukyanov's work are found the libration points of the problem. For the calculations is used Mathematica computer algebra system. With help of this system we built surfaces of zero velocity.

Keywords: two body problem, libration points, zero-velocity surfaces.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВИБРОЗАЩИЩАЕМЫХ ТЕЛ НА ТРЕХ
ОПОРАХ КАЧЕНИЯ СО СПРЯМЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

(г.Алматы, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, *-магистрант)

***Аннотация.** В настоящей работе изучается колебательное движение твердого тела на трех опорах качения, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка. При этом введены новые переменные, с помощью которых уравнения движения разложены на уравнения поступательного и вращательного движений. Полученные дифференциальные уравнения движения существенно не линейны. Для решения уравнения движения применяется метод переразложения. Получены формулы для частоты свободного поступательного и вращательного колебаний. Установлено, что для виброзащитных систем, несущие элементы которых являются параболоми высокого порядка, характерно проявление явления «дребезг» при малых колебаниях.*

Частота колебаний системы медленно убывает с возрастанием амплитуды.

***Ключевые слова:** виброзащитные устройства, опора качения, нелинейные уравнения движения, пространственные колебания, метод переразложения.*

1. Введение. В нашей стране сейсмически активные районы составляют примерно 30% территории. В этих районах осуществляется в грандиозных масштабах строительство гражданских, промышленных, энергетических и других объектов. Во многих сейсмозащитных и виброзащитных устройствах в качестве основного элемента используются тела качения различного вида. В работе[1] исследовано динамика виброзащиты сооружений с опорами качения для различных моделей грунтов. Исследованию эффективности виброзащиты опорами качения при наличии трения качения на релаксирующих грунтах посвящены работы[2-3].

Целью настоящей работы является исследование пространственных свободных колебаний виброзащитных систем с нелинейными неголономными связями, реализуемыми опорами качения, ограниченными поверхностями высокого порядка.

Сформулированная цель предполагает решение следующих задач:

– Постановка и решение задачи о движении механической системы, моделирующей сейсмоизоляцию сооружений с помощью опор качения, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка и состоящей из тела большой массы, опирающегося при своем движении на 3-х тел-носителей, которые перекатываются по поверхности, совершая поступательные движения.

2. Уравнения движения. Рассмотрим консервативную (порождающую) систему. Уравнения движения виброзащитаемого тела на трех опорах качения ограниченных поверхностями вращения высокого порядка в безразмерном форме имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \left[\frac{\Phi_1}{\tilde{\Lambda}_1} - 1 \right] u_1 = 0, \quad \ddot{v}_1 + \left[\frac{\Phi_1}{\tilde{\Lambda}_1} - 1 \right] v_1 = 0, \\ \ddot{\varphi} + \beta_0 \frac{\Delta(r_i^2)}{\Delta} \left[\frac{\Phi_1}{\tilde{\Lambda}_1} - 1 \right] \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Заменой переменных $\tilde{u}_1 = r \cos \varphi_1$ и $\tilde{v}_1 = r \sin \varphi_1$, система уравнений приводится и виду

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}_1^2 + \left[\frac{N_2}{r^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1 \right] r = 0, \quad (2)$$

$$\dot{r}\dot{\varphi}_1 + r\ddot{\varphi}_1 = 0, \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi} + \beta_0 \frac{\Delta(r_i^2)}{\Delta} \left[\frac{\Phi_1}{\Lambda_1} - 1 \right] \varphi = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3) преобразуем к виду

$$r^2 \dot{\varphi}_1 = const, \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{const}{r^2} = \frac{C_1}{r^2}.$$

Если при $\tau = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, тогда $const = C_1 = 0$, откуда $\varphi_1 = const = C_2$, уравнение (2) при этих условиях примет вид

$$\ddot{r} + \left[\frac{N_2}{r^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1 \right] r = 0, \text{ или } \ddot{r} + \Phi_1 - r = 0, \quad (5)$$

где

$$\Phi_1 = N_2 r^{\frac{1}{n-1}}, \Lambda_1 = r. \quad (6)$$

3. Решение уравнение движения

3.1 Поступательные колебания. Представим решение и нелинейный член уравнения (5) в виде усеченного тригонометрического ряда соответственно

$$r = \sum_{k=1}^{\vartheta} E_{2k-1} \sin(2k-1)\omega\tau, \quad (7)$$

$$\tilde{\Phi}_1(r) = \sum_{u=1}^{\vartheta} F_{2k-1} \sin(2k-1)\omega\tau. \quad (8)$$

Форма суммы (7) выбрана по нечетным гармоникам, исходя из соображений симметричности колебательной системы. При удержании в сумме (7) четных членов в процессе построения решений, коэффициенты этих членов обращаются в нуль.

Подставляя выражения (7) и (8) в (5) и приравнивая члены с одинаковой $\sin(2k-1)\omega\tau$, можно получить систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} -(\omega^2 + 1)E_1 + F_1(E_1, E_3, \dots, E_{2k-1}) &= 0; \\ -(9\omega^2 + 1)E_3 + F_3(E_1, E_3, \dots, E_{2k-1}) &= 0; \\ \dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, \vartheta). \quad (9)$$

$$-\left[(2k-1)^2 \omega^2 + 1 \right] E_{2k-1} + F_{2k-1}(E_1, E_3, \dots, E_{2k-1}) = 0.$$

Ограничиваясь тремя членами и решая систему уравнений (9) относительно ω , E_3 , E_5 , получим

$$\omega^2 = \frac{F_1(E_1, E_3, E_5)}{E_1} - 1, E_3 = \frac{F_3(E_1, E_3, E_5)}{9\omega^2 + 1}, E_5 = \frac{F_5(E_1, E_3, E_5)}{25\omega^2 + 1}. \quad (10)$$

Методом коллокации определим F_1 , F_3 , F_5 . Приравнивая выражения (6) и (8) и учитывая соотношение (7), получим уравнение в виде

$$\sum_{k=1}^{\vartheta} F_{2k-1} \sin(2k-1)\alpha_0 = N_2 \left(\sum_{k=1}^{\vartheta} E_{2k-1} \sin(2k-1)\alpha_0 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (11)$$

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

где $\alpha_0 = \omega\tau$. Присваивая α_0 значения $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и ограничиваясь членами $k=1,2,3$ в (11) получим систему в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_1 + F_3 + \frac{1}{2}F_5 &= N_2 \left(\frac{1}{2}E_1 + E_3 + \frac{1}{2}E_5 \right)^{\frac{1}{n-1}}; \\ \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_5 &= N_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}E_1 + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}E_5 \right)^{\frac{1}{n-1}}; \\ F_1 - F_3 + F_5 &= N_2 (E_1 + E_3 + E_5)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Разрешая (12) относительно F_k , получим

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{N_2}{3} \left[\left(\frac{1}{2}E_1 + E_3 + \frac{1}{2}E_5 \right)^{\frac{1}{n-1}} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}E_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}E_5 \right)^{\frac{1}{n-1}} + (E_1 - E_3 + E_5)^{\frac{1}{n-1}} \right]; \\ F_3 &= \frac{N_2}{3} \left[2 \left(\frac{1}{2}E_1 + E_3 + \frac{1}{2}E_5 \right)^{\frac{1}{n-1}} - (E_1 - E_3 + E_5)^{\frac{1}{n-1}} \right]; \\ F_5 &= \frac{N_2}{3} \left[\left(\frac{1}{2}E_1 + E_3 + \frac{1}{2}E_5 \right)^{\frac{1}{n-1}} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}E_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}E_5 \right)^{\frac{1}{n-1}} + (E_1 - E_3 + E_5)^{\frac{1}{n-1}} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для первого приближения полагая, что $E_1 \neq 0$, $E_3 = E_5 = 0$, получим

$$F_1 = N_2 K_1 E_1^{\frac{1}{n-1}}, F_3 = N_2 K_3 E_1^{\frac{1}{n-1}}, F_5 = N_2 K_5 E_1^{\frac{1}{n-1}}. \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + 1 \right], K_3 = \frac{1}{3} \left[2^{\frac{n-2}{n-1}} - 1 \right], \\ K_5 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (3.2.14) в уравнения (3.2.10) определим

$$\omega^{(l)} = \left(\frac{N_2 K_1}{E_1^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, E_3^{(l)} = \frac{N_2 K_1}{9(\omega^{(l)})^2 + 1} E_1^{\frac{1}{n-1}}, E_5^{(l)} = \frac{N_2 K_5}{25(\omega^{(l)})^2 + 1} E_1^{\frac{1}{n-1}}. \quad (16)$$

Учитывая (3.2.15) и (3.2.7) представим решение уравнения (3.2.5) в виде

$$r = E_1 \sin(\omega^{(l)}\tau) + \frac{N_2 K_1}{9(\omega^{(l)})^2 + 1} E_1^{\frac{1}{n-1}} \sin(3\omega^{(l)}\tau) + \frac{N_2 K_5}{25(\omega^{(l)})^2 + 1} E_1^{\frac{1}{n-1}} \sin(5\omega^{(l)}\tau) \quad (17)$$

Для второго приближения, полагая, что $E_1 \neq 0$, $E_3 \neq 0$, $E_5 = 0$ из выражения (13) получим

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{N_2}{3} \left[\left(\frac{1}{2} E_1 + E_3 \right)^{\frac{1}{n-1}} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} E_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} + (E_1 - E_3)^{\frac{1}{n-1}} \right], \\
 F_3 &= \frac{N_2}{3} \left[2 \left(\frac{1}{2} E_1 + E_3 \right)^{\frac{1}{n-1}} - (E_1 - E_3)^{\frac{1}{n-1}} \right], \\
 F_5 &= \frac{N_2}{3} \left[\left(\frac{1}{2} E_1 + E_3 \right)^{\frac{1}{n-1}} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} E_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} + (E_1 - E_3)^{\frac{1}{n-1}} \right].
 \end{aligned} \tag{18}$$

Второй шаг интеграции для (18) получим, подставляя в (18) первое приближение $\tilde{\omega}^{(1)}$, $E_3^{(1)}$ определенное соотношением (16). Имеем

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{N_2}{3} E_1^{\frac{1}{n-1}} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{N_2 K_1 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(1 - \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right], \\
 F_3 &= \frac{N_2}{3} E_1^{\frac{1}{n-1}} \left[2 \left(\frac{1}{2} + \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(1 - \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right], \\
 F_5 &= \frac{N_2}{3} E_1^{\frac{1}{n-1}} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(1 - \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right].
 \end{aligned} \tag{19}$$

Поставив (19) в (16), находим

$$\omega^{(2)} = \left[\left(\frac{N_2 K_1}{E_1^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1 \right) - \tilde{\Omega}_n \right]^{\frac{1}{2}}, \quad E_3^{(2)} = \frac{N_2 \tilde{K}_3 E_1^{\frac{1}{n-1}}}{9(\omega^{(2)})^2 + 1}, \quad E_5^{(2)} = \frac{N_2 \tilde{K}_5 E_1^{\frac{1}{n-1}}}{25(\omega^{(2)})^2 + 1}. \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Omega_n &= \frac{N_2}{3} E_1^{\frac{1}{n-1}} \left[\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}} + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(1 - \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right], \\
 \tilde{K}_3 &= \frac{1}{3} \left[2 \left(\frac{1}{2} + \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(1 - \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right], \\
 \tilde{K}_5 &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(1 - \frac{N_2 K_3 E_1^{\frac{n-2}{n-1}}}{9(\omega^{(1)})^2 + 1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right].
 \end{aligned} \tag{21}$$

На основании (20) и (7) получим более точное решение однородного нелинейного уравнения (5). Таким образом, имеем

$$r = E_1 \sin(\omega^{(1)} \tau) + \frac{N_2 \tilde{K}_3}{9(\tilde{\omega}^{(2)})^2 + 1} E_1^{\frac{1}{n-1}} \sin(3\omega^{(2)} \tau) + \frac{N_2 \tilde{K}_5}{25(\tilde{\omega}^{(2)})^2 + 1} E_1^{\frac{1}{n-1}} \sin(5\omega^{(2)} \tau). \tag{22}$$

3.2 Вращательные колебания. Теперь решение третьего уравнения (1) пишем в виде

$$\varphi = \tilde{A}_\varphi \sin \omega_\varphi \tau. \tag{23}$$

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

Подставив (23) в (1), находим

$$\omega_\varphi = \sqrt{\beta_0 \cdot \frac{\Delta(r_i^2)}{\Delta}} \cdot \omega, \quad (24)$$

где $\omega = \omega^{(1)}$, а A_φ – определяются из начальных условий. Решения системы уравнений (1) можем написать в виде

$$u_1 = \tilde{A}_{u_1} \sin \omega \tau, \quad v_1 = \tilde{A}_{v_1} \sin \omega \tau, \quad \varphi = \tilde{A}_\varphi \sin \omega \tau, \quad (25)$$

где $\tilde{A}_{u_1} = E_1 \cos \varphi_1$, $\tilde{A}_{v_1} = E_1 \sin \varphi_1$.

Частота колебаний тела по направлениям u_1 и v_1 одинакова. Частоты свободного колебания виброзащитных систем определяются формулами

$$\omega^2 = \frac{N_2 K_1}{(\tilde{A}_u^2 + \tilde{A}_v^2)^{\frac{n-2}{2(n-1)}}} - 1, \quad \omega_\varphi^2 = \beta_0 \frac{\Delta(r_i^2)}{\Delta} \left(\frac{N_2 K_1}{(\tilde{A}_u^2 + \tilde{A}_v^2)^{\frac{n-2}{2(n-1)}}} - 1 \right). \quad (26)$$

4. Результаты и анализ. В качестве примера рассмотрим колебания виброзащищаемого тела на опорах качения, несущие поверхности которых ограничены параболой четвертой и шестой степеней при следующих значениях параметров

$$n = 4, \quad a_1 = 6,25 \cdot 10^{-8} \tilde{m}^{-3}, \quad a_2 = 15 \cdot 10^{-8} \tilde{m}^{-3}, \quad H = 300 \tilde{m}, \quad \omega_0^2 = 3,26 \frac{1}{c^2}, \quad g = 9,8 \frac{\tilde{m}}{\tilde{m}^2},$$

$$n = 6, \quad a_1 = 1,56 \cdot 10^{-12} \tilde{m}^{-5}, \quad a_2 = 6,6 \cdot 10^{-12} \tilde{m}^{-5}$$

Зависимость частоты системы от амплитуды, построенная методом тригонометрической коллокации, приведена на рисунке (1).

На этом рисунке толстая пунктирная линия построена на основании второго приближения (20). Сплошной тонкой линией – кривые первого приближения (16).

Близость кривых дает представление о быстроте сходимости итерационных процессов. Поэтому в решении (17) мы можем ограничиться первыми членами

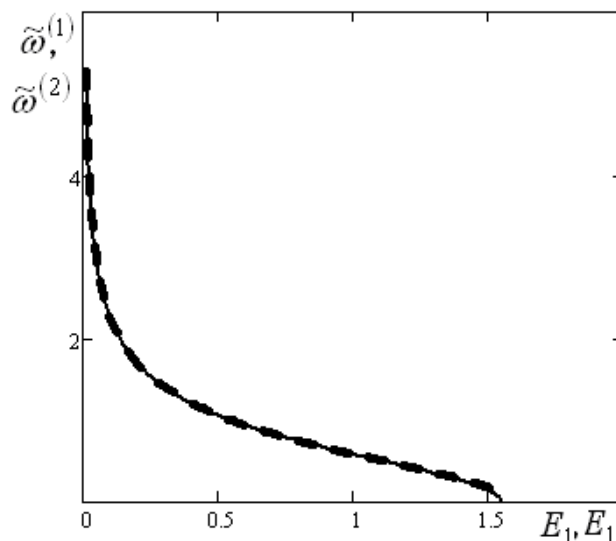


Рисунок 1. График зависимости частоты собственных колебаний от амплитуды для виброзащитных систем с элементами качения высокого порядка

5. Выводы. Стремление частоты собственных колебаний к бесконечности при амплитуде $A \rightarrow 0$ называется для нелинейных систем «дребезгом». Таким образом, для

виброзащитных систем, несущие элементы которых являются параболоми высокого порядка, характерно проявление явления «дребезг» при малых колебаниях.

Частота колебаний системы медленно убывает с возрастанием амплитуды. Частота виброзащитных систем, несущие элементы которых ограничены параболоми второго порядка, при малых колебаниях не зависит от амплитуды.

1. Калыбаев А.А. Бисембаев К. Теории виброзащиты сооружений с опорами качения для различных моделей грунтов // Материалы Международной научно-технической конференции «2 Ержановские чтения». –Актобе, 2007. – С. 159-165.
2. Бисембаев К. Колебания твердого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями с учетом трения качения на релаксирующих грунтах // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия «Математика-механика-информатика». – Алматы, 2008. – С. 102-110.
3. Бисембаев К. Колебания тела на опорах со спрямленными поверхностями // Изв. АН КазССР. сер. физ.-мат. 1988. №3. с. 65-69.

Аңдатпа. Бұл жұмыста жоғары дәрежелі беттермен шектелген кинематикалық теңселмеі үш тірекке орнатылған қатты дененің тербелмелі қозғалысы, қарастырылған. Жаңа айнымалы енгізу арқылы қозғалыс теңдеуі ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстардың теңдеуіне бөлінеді. Алынған дифференциальдық теңдеу сызықты емес болады. Қозғалыс теңдеуін шеші үшін қайта жіктеу әдісі қолданы. Ілгерілемелі және айналмалы еркін тербелістері үшін жиелектің формуласы алынды. Тасымалдаушы элементері жоғары дәрежелі параболойда болатын дірілден қорғау жүйесі үшін аз тербеліс кезінде «дребезг» құбылысының пайда болатындығы тағайындалды. Жүенің жиелігі амплитуданың артуына сәйкес баяу кемиді.

Түйін сөздер: дірілден қорғайтын қондырғы, теңселмелі тірек, еркін тербеліс, сызықты емес тербеліс, кеңістіктік тербеліс, қайта жіктеу әдісі.

Abstract. In this paper we study the oscillatory motion of a rigid body on three legs of rolling, limited higher order surfaces of revolution. In this case new variables are introduced, by which the equation of motion is decomposed into translational and rotational movements. The resulting differential equations of motion are essentially nonlinear. To solve the equations of motion re-expansion method was applied. The formulas for the frequency of free translational and rotational vibrations have been determined. Vibration isolation systems, bearing elements of which are high-order parabolas display characteristic manifestation of the phenomenon of "chatter" with small variations. The frequency of oscillation of the system slowly decreases with increasing amplitude.

Keywords: Vibration device support rolling, nonlinear equations of motion, spatial fluctuations, re-expansion method.

**СУҒА ТОЛЫҚ БАТЫРЫЛҒАН СУТУРБИНАСЫ ҚАЛАҒЫНА ӘСЕР
ЕТУШІ ГИДРАВЛИКАЛЫҚ ТЕҢӘСЕРЛІ КҮШ МОМЕНТІН АНЫҚТАУ**

(Алматы қ., Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті)

***Аңдатпа.** Бұл жұмыста бір уақытта су астында үш қалағы әр түрлі жағдайда орналасатын сутурбинасының қалақтарына әсер етуші гидравликалық күш моментін, әр қалақтардың қуатын анықтау қарастырылған. Қарастырылатын сутурбинасының бір уақытта су астында үш қалағы әр түрлі жағдайда орналасады. Бұл кезде су ағыны энергиясын қабылдауы әртүрлі. Зерттеу нәтижесі сутурбинасы қуатының қанша бөлігі қалақтардың суға толық батырылған кезде алынғанның, және де олардың суға кіру және судан шығу кездеріндегі шығындарын анықтауға мүмкіндік береді.*

***Түйін сөздер:** Сутурбинасы, қалақ, қуат, гидравликалық күш, момент, ағын, айналу бұрышы.*

Су ағынының энергиясын максимал түрде қабылдау үшін суға толық батырылған кездегі қалақтардың су ағынының ағысына қатысты орналасуы үлкен мәнге ие [1]. Біз қарастырып отырған гидротрубинаның құрылымына сәйкес бір уақытта су астында үш қалақ әр түрлі күйде орналасады, яғни олар су ағынының энергиясын әр түрлі қабылдайды. Осыған байланысты бұл жұмыста су ағынына батырылған әр қалақтың гидравликалық күшінің моменті мен қуаты зерттеледі. Бұл қалақтар суға толық батқан кезде гидротрубинаның жалпы қуатының қанша пайызы қабылданатынын анықтауға мүмкіндік береді. Ал бұл қалақтардың су ағынына енгенде және шыққан кезде шығынды дәл анықтауға мүмкіндік береді.

1-суретте бірін-бірі жүйелі ауыстыратын, және ағынның (судың қысымы) әсеріне іліккіш алты жазық және радиалды қалақтары бар гидротрубина көрсетілген. Гидротрубинаның айналу осі декарттық координаталардың басымен сәйкес келеді. 1,2,3,4,5,6 белгілеулері – гидротрубинаның қалақтарының реттік номері, R – қалақтар бекітілетін гидротрубинаның негізгі цилиндрі тірегінің (дисктің) радиусы. Қалған параметрлер гидротрубинаның схемасында көрсетілген [2].

Толық батырылған кезде гидротрубинаның қалақшалы дөңгелегінің сұйық ағынымен әсерлесу күшінің қорытқы моментін (4) формулаларды қолдана отырып анықтаймыз [2].

(4)–ші теңдеудегі интеграл астындағы шамаларды есептеу үшін 1-суретте көрсетілген гидротрубинаның геометриялық схемасын негізге ала отырып гидротрубинаның параметрлерінің арасындағы кейбір қатынастарды орнатайық:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_2 + \varphi, & \varphi_2 &= \alpha_2 + \alpha_1 + \varphi, & \varphi_3 &= \alpha_2 + 2\alpha_1 + \varphi, \\ d_3 &= R \cos \varphi + \xi \cos \varphi_1, & r_3 &= \sqrt{h_3^2 + d_3^2} = \sqrt{R^2 + \xi^2 + 2R\xi \cos \alpha_2}, \\ h_3 &= R \sin \varphi + \xi \sin(\alpha_2 + \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

мұндағы:

r_3 - қалақтың жұмыс бөлігі элементінің радиус векторының модулі,

h_3 – элементтің қарастырылып отырған нүктесінен ағыс бетіне дейінгі арақашықтық.

Онда

$$\sin \beta_1 = \frac{h_3}{r_3} = \frac{R \sin \varphi + \xi \sin \varphi_1}{\sqrt{R^2 + \xi^2 + 2R\xi \cos \alpha_2}} \quad (2)$$

Қалақтардың толық батырылуы кезіндегі сұйықтың көлемдік шығынының элементі төмендегі формула бойынша анықталады[1]:

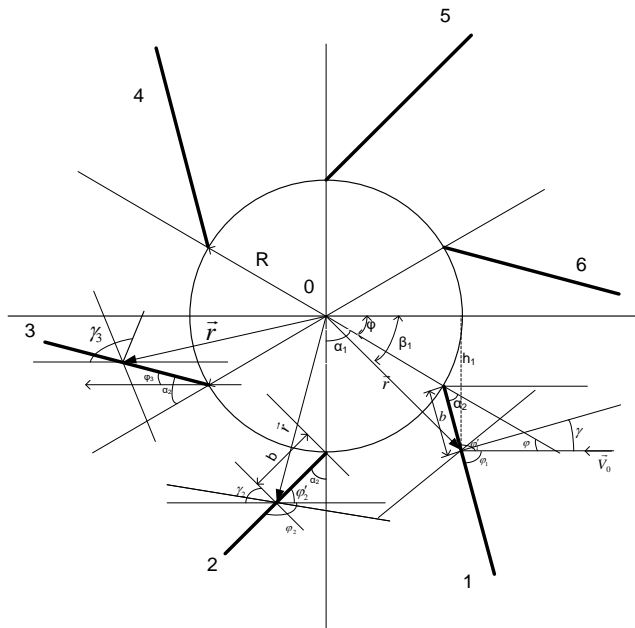
$$dQ = \varrho_0 dS \cos \gamma = \varrho_0 a d\xi \cos \tilde{\gamma}.$$

Мұндағы

$$\tilde{\gamma} = \bar{g}_0 d\bar{S} = 90^\circ - (\alpha_2 + \varphi). \quad (3)$$

Бұл теңдеулердегі a - қалақтардың ені, ξ - қалақтардың басынан $d\xi$ - қалақ элементіне дейінгі айнымалы арақашықтық. (2) және (3) қатынастарын қолдана отырып (4) теңдеуден алғашқы интегралды анықтайық:

$$\begin{aligned} \rho \int [\bar{r}_3 \times \bar{g}_0] \cdot dQ = \rho \int r_3 \cdot g_0 \cdot \sin \beta_1 \cdot dQ = \frac{\rho a g_0^2 l}{2} \cdot \left(R \sin \alpha_2 + \frac{1}{2} l \sin 2\alpha_2 \right) \sin 2\varphi - \\ - \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \cdot \left(R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \cos 2\alpha_2 \right) \cdot \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \cdot \left(R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \right) \end{aligned} \quad (4)$$



1- сурет. Бір–бірін бір ізді ауыстыратын алты қиғаш жазық қалақтары бар гидротрубина.

Одан ары $u = r_1 \dot{\varphi}$ қатынасын ескеріп, (1) және (2) формулаларды қолдана отырып екінші интегралды анықтайық:

$$\begin{aligned} \rho \int [\bar{r}_3 \times \bar{u}_0] dQ = \rho \int r_3 u_0 dQ = \rho a g_0 \dot{\varphi} \cdot l \left\{ R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right\} \cos \alpha_2 \sin \varphi + \\ + \rho a g_0 \dot{\varphi} \cdot l \left\{ R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right\} \times \sin \alpha_2 \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Жоғарыда айтылып өткендей гидротрубинаның жұмыс істеуі кезінде біруақытта сұйық ағысында бірін–бір бір ізді ауыстыратын үш қалақ төмендегі схема бойынша орналаса алады:

– ротордың айналу бұрышының мәні $\varphi = \frac{\pi}{3}$ болғанда бірінші қалақ екіншісін, ал екіншісі үшіншісін ауыстырады. Бірінші қалақтың орнына алтыншы қалақ келіп, үшінші қалақ ағыстан шығады. Сондықтан қалақтардың толық батқан кездегі турбинаның гидравликалық күші мен қуатын әр қалақ үшін жеке анықтау керек. 1- суреттен көрініп тұрғандай турбинаның айналу бұрышының $\varphi = \pi - 2\alpha_1 - \alpha_2$ мәнінде үшінші қалақтың сұйық ағынымен өзара әсерлесу күшінің моменті нольге тең. Турбинаның одан әрі айналмалы қозғалысы кезінде үшінші қалақтың ориентациясы қарама–қарсы бағытқа өзгереді, яғни үшінші қалақтың күштерінің моменті теріс болады. Осыдан толық батырылу кезінде турбинаның айналу бұрышының өзгеру интервалы мынаған тең болады:

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

$$0 \leq \varphi \leq \pi - 2\alpha_1 - \alpha_2.$$

Айналу бұрышының $0 \leq \varphi \leq \pi - 2\alpha_1 - \alpha_2$ интервалында толық батырылған күйде орналасқан қалаққа әсер ететін гидравликалық күштің моменті төмендегідей болады:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{a\rho g_0^2 l}{2} \left(R \sin \alpha_2 + \frac{1}{2} l \sin 2\alpha_2 \right) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} a\rho g_0^2 l \left(R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \cos 2\alpha_2 \right) \cos 2\varphi + \\ &+ \frac{1}{2} a\rho g_0^2 l \left(R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \right) - \rho a g_0 l \dot{\varphi} \left(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right) \cos \alpha_2 \sin \varphi - \\ &- \rho a g_0 l \dot{\varphi} \left(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right) \sin \alpha_2 \cos \varphi, \\ M_2 &= \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \left\{ R \sin \alpha_2 + \frac{1}{2} l \sin 2\alpha_2 \right\} \sin 2(\alpha_1 + \varphi) - \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \times \\ &\times \left\{ R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \cos 2\alpha_2 \right\} \times \cos 2(\alpha_1 + \varphi) + \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \left(R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \right) - \rho a g_0 l \dot{\varphi} \times \\ &\times \left(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right) \times \cos \alpha_2 \sin(\alpha_1 + \varphi) - \rho a g_0 l \dot{\varphi} \left(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right) \times \\ &\times \sin \alpha_2 \cos(\alpha_1 + \varphi), \\ M_3 &= \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \left\{ R \sin \alpha_2 + \frac{1}{2} l \sin 2\alpha_2 \right\} \sin 2(2\alpha_1 + \varphi) - \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \times \\ &\times \left\{ R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \cos 2\alpha_2 \right\} \times \cos 2(2\alpha_1 + \varphi) + \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \left(R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \right) - \rho a g_0 l \dot{\varphi} \times \\ &\times \left(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right) \cos \alpha_2 \sin(2\alpha_1 + \varphi) - \\ &- \rho a g_0 l \dot{\varphi} \left(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right) \sin \alpha_2 \cos(2\alpha_1 + \varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

Ротордың айналу бұрышының $\alpha_1 - \alpha_0 \leq \varphi \leq \alpha_1$ интервалында турбинаның алтыншы қалағы сұйық ағынына батырылып, ал үшіншісі сұйық ағынынан шығарылады. Бірінші және екінші қалақ сұйыққа толық батып тұрады. Ротордың айналу бұрышының $\alpha_1 \leq \varphi \leq \alpha_1 + (\pi - 2\alpha_1 - \alpha_2)$ интервалында бірінші және алтыншы қалақтар сұйыққа толық батып тұрады. Бұл күйдегі алтыншы қалақтың гидравликалық күшінің моменті төмендегідей болады:

$$\begin{aligned} M_6 &= \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \left(\sin \alpha_2 + \frac{1}{2} l \sin 2\alpha_2 \right) \sin 2(5\alpha_1 + \varphi) - \\ &- \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \left(R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \cos \alpha_2 \right) \times \cos 2(5\alpha_1 + \varphi) + \frac{1}{2} \rho a g_0^2 l \left(R \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} l \right) - \\ &- \rho a g_0 l \dot{\varphi} \left(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right) \times \cos \alpha_2 \sin(5\alpha_1 + \varphi) - \\ &- \rho a g_0 l \dot{\varphi} \left(R^2 + \frac{1}{3} l^2 + Rl \cos \alpha_2 \right) \sin \alpha_2 \cos(5\alpha_1 + \varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

Осыған аналогті түрде турбинаның басқа қалақтарының сұйық ағынына толық батқан кездегі бірін-бірі ауыстыруын және гидравликалық күш моменттерін анықтауға болады.

Толық батырылған кезде гидротрубинаның әр қалағының сұйық ағысынан алатын қуаты келесі теңдеумен анықталады:

$$N_1 = \rho a g_0^2 l^2 \dot{\varphi} (W + \tilde{A}_1 \mu_{11} - \tilde{B}_1 \mu_{21}) - \rho a g_0 l^3 \dot{\varphi}^2 \tilde{C} [\cos \alpha_2 \lambda_{11} + \lambda_{21} \sin \alpha_2],$$

$$N_2 = \rho a \vartheta_0^2 l^2 \dot{\phi} (W + \tilde{A}_2 \mu_{11} - \tilde{B}_2 \mu_{21}) - \rho a \vartheta_0 l^3 \dot{\phi}^2 \tilde{C} [\lambda_{11} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_{21} \sin(\alpha_1 + \alpha_2)], \quad (8)$$

$$N_3 = \rho a \vartheta_0^2 l^2 \dot{\phi} (W + \tilde{A}_3 \mu_{11} - \tilde{B}_3 \mu_{21}) - \rho a \vartheta_0 l^3 \dot{\phi}^2 \tilde{C} [\lambda_{11} \cos(2\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_{21} \sin(2\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Сұйықтың ағыс энергиясын қолдану коэффициентін сұйықтың гидротрубинаның қалақтарына берген қуатын сұйықтың өзінің ағысының қуатына бөлу арқылы $N_T = \frac{\rho a l \vartheta_0^2}{2}$

формуласы арқылы анықтаймыз, сонда:

$$\eta_1 = 2\chi \{W + \tilde{A}_1 \mu_{11} - \tilde{B}_1 \mu_{21} - \chi \tilde{C} [\lambda_{11} \cos \alpha_2 + \lambda_{21} \sin \alpha_2]\},$$

$$\eta_2 = 2\chi \{W + \tilde{A}_2 \mu_{11} - \tilde{B}_2 \mu_{21} - \chi \tilde{C} [\lambda_{11} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_{21} \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]\},$$

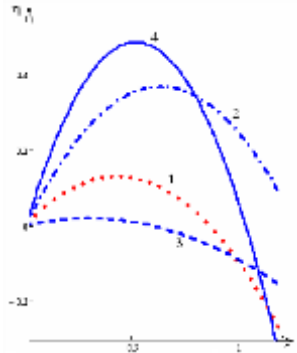
$$\eta_3 = 2\chi \{W + \tilde{A}_3 \mu_{11} - \tilde{B}_3 \mu_{21} - \chi \tilde{C} [\lambda_{11} \cos(2\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_{21} \sin(2\alpha_1 + \alpha_2)]\}. \quad (9)$$

Ротордың айналу бұрышының $0 \leq \varphi \leq \pi - 2\alpha_1 - \alpha_2$ интервалында сұйық ағысының энергиясын қолданудың толық коэффициенті мынаған тең:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \quad (10)$$

2- суретте бірінші, екінші және үшінші қалақтар үшін η сұйық ағыны энергиясын қолдану коэффициентінің χ гидротрубинаның жүйріктік коэффициентіне тәуелділігі және η -ның қосынды коэффициентінің χ -ға тәуелділігі келтірілген. Графиктегі сызықтардың номері қалақтардың номерімен сәйкес келеді, ал 4-ші сызық η -ның қосынды коэффициентінің χ -ға тәуелділігін көрсетеді.

Графиктен сұйық ағыны энергиясын қолданудың максимал мәндері әр қалақ үшін әр түрлі екендігі көрініп тұр, бұл қалақтардың орналасуымен байланысты. Сұйық ағыны энергиясын қолданудың максимал мәні қалақтың екінші орналасуына сәйкес келеді.



2 - сурет. Толық батқан кездегі сұйық ағыны энергиясын қолдану коэффициентінің гидротрубинаның жүйріктік коэффициентіне тәуелділік графиктері: 1- бірінші қалақ, 2- екінші қалақ, 3- үшінші қалақ, 4- қосынды.

3-суретте әр қалақ үшін сұйық ағыны энергиясын қолданудың максимал коэффициенттерінің α_2 көлбеу бұрышына тәуелділігі, сұйық ағыны энергиясын қолданудың қосынды максимал коэффициенттерінің α_2 көлбеу бұрышына тәуелділігі көрсетілген.

Графиктен сұйық ағыны энергиясын қолданудың қосынды максимал коэффициенті α_2 көлбеу бұрышы өзгергенде қатты өзгермейтіні көрініп тұр.

4-суретте сұйық ағысына батырылған қалақтардың қорытқы моменттерінің $\chi = 0,06$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$, $\vartheta_0 = 1 \text{ м/с}$, мәндері кезінде $\gamma = \frac{R}{l}$ параметрлеріне тәуелділігі берілген, мұнда сандармен көрсетілген:

1-бірінші қалақтың қорытқы моментінің тәуелділігі,

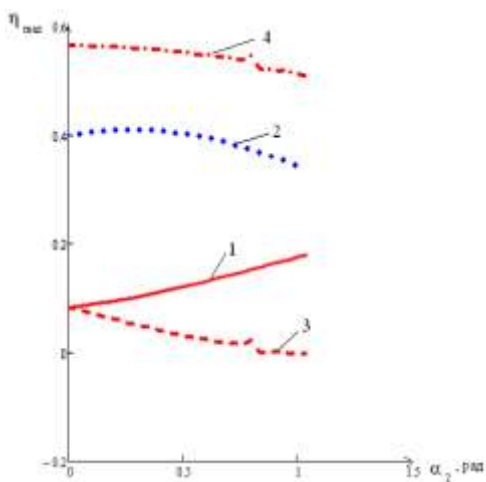
2-екінші қалақтың қорытқы моментінің тәуелділігі,

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

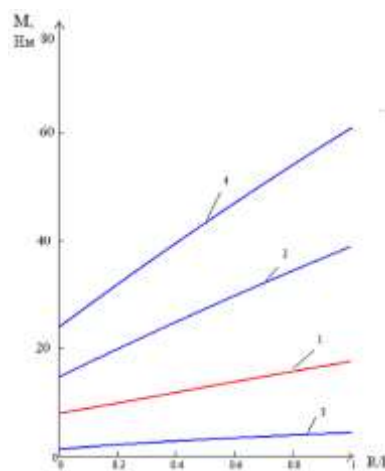
3-үшінші қалақтың қорытқы моментінің тәуелділігі.

4-сұйыққа батырылған қалақтардың қосынды қорытқы моментінің тәуелділігі.

Графиктен сұйыққа батырылған үш қалақтардың ішінен екінші номерлі қалақ ең көп қорытқы момент беретіні көрініп тұр.



3-сурет. Толық батқан кездегі сұйық ағыны энергиясын қолданудың максимал коэффициентінің α_2 көлбеу бұрышына тәуелділігі: 1- бірінші қалақ, 2- екінші қалақ, 3- үшінші қалақ, 4- қосынды



4-сурет. Сұйық ағысына батырылған қалақтардың қорытқы моменттерінің $\chi = 0,06$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$, $\vartheta_0 = 1 \text{ м/с}$, мәндері кезінде $\gamma = \frac{R}{l}$ параметрлеріне тәуелділігі

1. Стесин С.П., Яковенко Е.А. Лопастные машины и гидродинамические машины.- М.: Машстроение,-1990, - 220с.
2. Тулешов А.К., Бисембаев К., Жаменкеев Е.К. Момент силы и мощность гидротурбины в начале погружения лопасти // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия информатика и информатизация образования, - 2008, - №4(14),-С.154-161.

Аннотация. В работе исследуется момент гидравлической силы и мощности каждой лопасти гидротурбины, погруженной в водный поток. В рассматриваемой гидротурбине, в воде одновременно находится три лопасти с разными положениями. Воспринимаемые ими энергии водного потока при полном погружении разные. Результаты работы позволяет точно определить, какой процент из общей мощности гидротурбины воспринимается, именно при полном погружении лопастей. А также потери при входе и выходе лопастей из течения.

Ключевые слова: Гидротурбина, лопасть, мощность, гидравлическая сила, течение, угол поворота.

Abstract. The moment of hydraulic force and power of every blade of the hydro-turbine submerged in a water-course is in-process investigated. In the examined hydro-turbine, in water simultaneously there are three blades with different positions. The energies of water-course perceived by them at complete immersion are different. Job performances allows exactly to define, what percent from general power of hydro-turbine is perceived, exactly at complete immersion of blades. And also losses at an entrance and exit of blades from a flow.

Keywords. Hydro-turbine, blade, power, hydraulic force, flow, corner of turn.

УДК 621.01

Қ.Н. Жұмаділлаев, Ж.О. Джакупова¹, А.К. Джумадиллаева¹ГРАФИКТЕРМЕН ЖҰМЫС БАРЫСЫНДА ОҚУШЫЛАРДЫҢ ҒЫЛЫМИ
ТАНЫМДЫҚ КӨЗҚАРАСЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ(Алматы қ., Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті,
¹№172 мектеп - гимназия)

Аңдатпа. Мақалада графиктермен жұмыс барысында оқушылардың ғылыми танымдық көзқарасын қалыптастыру мәселелері қарастырылған. Физикалық құбылысты графиктер арқылы сипаттау қарама-қайшылықты көрнекі етеді. Оқушылардың диалектикалық ойлау қабілеттерін жетілдіретіні және олардың ғылыми танымдық көзқарасын дұрыс қалыптастырады. Физика сабақтары мен физикалық зерттеулерде графиктерді қолдану физикалық құбылыстарды зерттегенде туындайтын қайшылықтарды оңай түсіндіреді. Құбылыстың белгісіз жақтарын айқындап, жаңа заңдылықтарды ашуға көмектеседі, ал кейде бұрын белгісіз болатын нысандарды анықтаудың бірден-бір тәсілі болады.

Түйін сөздер: график, талдау, құбылыс, диалектикалық ойлау, ғылыми көзқарас.

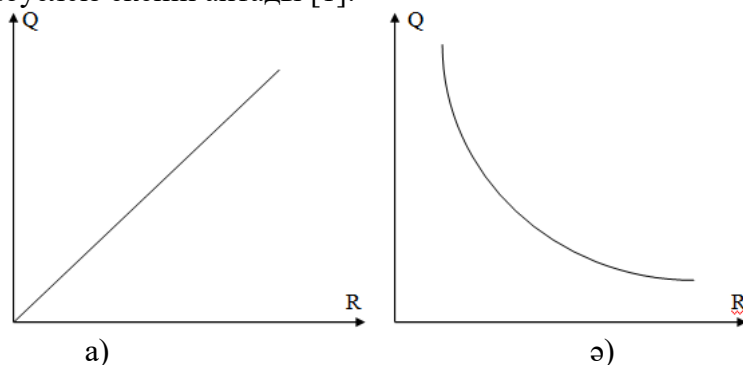
Ғылыми ойлаудың ең маңызды бөлігінің бірі – диалектикалық логика. Яғни, физикалық ойлау да диалектикалық болу керек. Мұны оқушылардың ойлау қабілеттерін қалыптастырғанда естен шығармау керек.

Бір біріне қарама-қарсы физикалық мәселелерді қарастырғанда формальді логика екі жауаптың тек біреуін ғана таңдауға итермелейді. Ал, диалектикалық логика белгілі бір жағдайлар орын алғанда қарама-қайшы екі тұжырымның екеуі де дұрыс бола алатына, кейде олардың екеуінің де дұрыс болмайтынына алып келеді. Физикалық құбылысты графиктер арқылы сипаттау қарама-қайшылықты көрнекі етеді. Бір ғана құбылысты зерттегенде қарама-қарсы нәтижелер алынатын бірер мысал қарастырайық.

№1 Мысал. Өткізгіш бойынан бірдей уақытта бөлініп шығатын жылудың оның кедергісінен тәуелділігін зерттеңіз.

Бірінші оқушы $Q = I^2 R t$ өрнегін жазып, өткізгіштен бөлінетін жылу мен кедергінің байланысы, Q және R тік бұрышты координаталар жүйесінде, түзу сызық болатынын көрсетеді (1а - сурет). Оның ойынша жылу мөлшері өткізгіш кедергісіне тура пропорционал.

Екінші оқушы $Q = U^2 t / R$ өрнегін жазып, өткізгіштен бөлінетін жылу мен кедергінің байланысы, Q және R тік бұрышты координаталар жүйесінде, гиперболо болатынын көрсетеді (1ә - сурет). Оның ойынша жылу мөлшері өткізгіш кедергісіне кері пропорционал. Ал үшінші оқушы $Q = I U t$ өрнегін жазып, өткізгіштен бөлінетін жылу кедергіге тәуелсіз екенін айтады [1].



1- сурет. Жылу мөлшерінің кедергіден тәуелділіктері

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

Кімнің айтқаны дұрыс? Егер қарастырып отырған жағдайға мұқият үнілсек, белгілі бір шарттар орындалғанда, үш оқушының айтқандары да өздігінен дұрыс екеніне көз жеткіземіз. Джоуль-Ленц заңының физикалық мағынасын тек бірінші оқушы жазған өрнек анықтайды. $R = U / I$ екенін ескерсек, қалған екі өрнек бірінші өрнектің дербес жағдайлары болып шығады. Жылу мөлшерін анықтайтын үш өрнектің әр қайсысына R , U және I шамаларының тек екеуі ғана кіретін болғандықтан, олардың біреуі тұрақты болғанда жылуды есептейтін өрнектің соған сәйкес біреуін тандап алған тиімді.

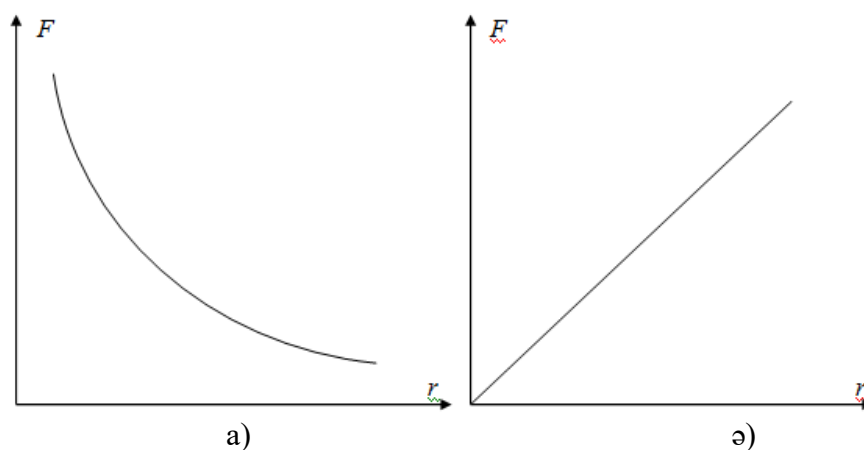
Мысалы, өткізгіштер тізбектей жалғанғанда ток күші тұрақты, сондықтан жылу мөлшері кедергіге тура пропорционал болады. Бұл кезде жылу мөлшерін $Q = I^2 R t$ өрнегін қолданып есептеген ыңғайлы. Ал өткізгіштер параллель жалғанса кернеу тұрақты болады да, олардың әр қайсысынан бөлінетін жылу кедергіге кері пропорционал болады. Себебі кернеу бірдей болғанда жылу мөлшері ток күшіне тәуелді болады, ал ток кедергісі аз өткізгіште көп болады. Бұл кезде жылу мөлшерін $Q = U^2 t / R$ өрнегін қолданып есептеген ыңғайлы.

Мұндай жағдайларды физиканың көптеген тақырыптарында туғызып, сараптамалар жүргізуге болады.

№2 Мысал. Дене шеңбер бойымен қозғалғанда, оған әсер ететін центрге тартқыш күштің шеңбер радиусынан тәуелділігін зерттеңіздер.

Бірінші оқушы $F = m \frac{v^2}{r}$ өрнегін жазып, центрге тартқыш күш пен радиус байланысы, F және r тік бұрышты координаталар жүйесінде, гиперболоа болатынын көрсетеді (2а-сурет). Оның ойынша центрге тартқыш күш радиуска кері пропорционал.

Екінші оқушы $F = m\omega^2 r$ өрнегін жазып, центрге тартқыш күш пен радиус байланысы, F және r тік бұрышты координаталар жүйесінде, түзу сызық болатынын көрсетеді (2ә-сурет). Яғни, центрге тартқыш күш радиуска тура пропорционал.



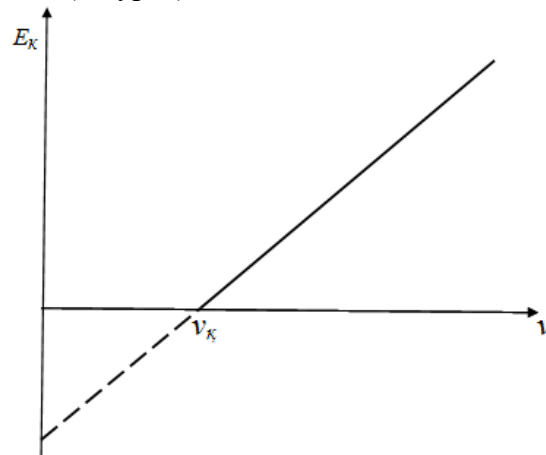
2-сурет. Центрге тартқыш күштің радиустан тәуелділіктері

Ал, үшінші оқушы $F = m\omega v$ өрнегін жазып, центрге тартқыш күштің радиуска тәуелсіздігін айтады [2].

Кімнің айтқаны дұрыс? Алдыңғы есептегідей жағдайға тап болдық. Мұндай есептерді шығару мен құбылыстарды сипаттайтын графиктерді талдау барысында оқушылар шындықты анықтап, бір мәселе жайлы бір мезетте әр түрлі, тіпті, бір біріне қарама-қарсы көзқарастардың болуы мүмкін екендігіне көз жеткізеді. Физикалық нысанның бұрын белгісіз жаңа қасиеттерін болжап білуге мүмкіндік туғызады.

№3 Мысал. Герц ашқан фотоэффект құбылысын қарастырайық. Бұл құбылысты Ленард пен Столетов жан-жақты зертеп, жүздеген графиктер салып, тәжірибе нәтижелерін фотоэффекттің 3 заңы арқылы тұжырымдаған. Олар фотоэффект құбылысын түсіндіре алмады.

Фотоэффект құбылысын, Ленард пен Столетовтің графиктеріндегі қарама-қайшылықты талдай отырып, Эйнштейн түсіндіріп берді. Бұл графиктердің ең маңыздысын қарастырайық (3-сурет).



3-сурет. Фотоэлектрондар кинетикалық энергиясының жарық жиілігінен тәуелділігі

Эйнштейн 3-суреттегі фотоэлектрондар кинетикалық энергиясының жарық жиілігінен тәуелділігі графигін, Планк теңдеуін және энергияның сақталу заңын қолданып фотоэффект заңы:

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$$

теңдеуін алды. Бұл график арқылы фотоэффекттің қызыл шекарасы мен электрондардың металдан шығу жұмысы да анықталады [3].

Ең маңызды нәтиже – фотоэффект құбылысында байқалған, жарықтың кванттық қасиеті. Ленард пен Столетовтің фотоэффект құбылысын түсіндіре алмауының себебі: олар классикалық электродинамика шеңберінен шыға алмады, жарықты тек толқын деп қарастырды. Жарық табиғаты жайлы толқындық көзқарас 3-суреттегі графикті түсіндіре алмады.

Қалыптасқан көзқарасқа қарама-қарсы келетін графиктерді талдау оқушылардың ой әрекетінің ұтқырлығының және әртүрлі физикалық құбылыстардың сандық сипаттамасы болатын физикалық шамалардың функционал байланысы жайлы терең, дұрыс көзқарастың қалыптасуына көмектеседі.

Қарама-қайшы нәтижеге алып келетін құбылыстарды қарастыру оқушылардың дәлелді пікірталас жүргізу, сыни ойлау, өз ойын міз бақпас дәлелдер келтіргенде өзгерте алу сияқты қасиеттерін қалыптастырады.

Физиканың көптеген заңдылықтары тәжірибе жүзінде алынған графиктерді талдау барысында алынған.

Мысалы, 1785 жылы Ш. Кулон ашқан нүктелік зарядтардың өз ара әрекеттесу заңы:

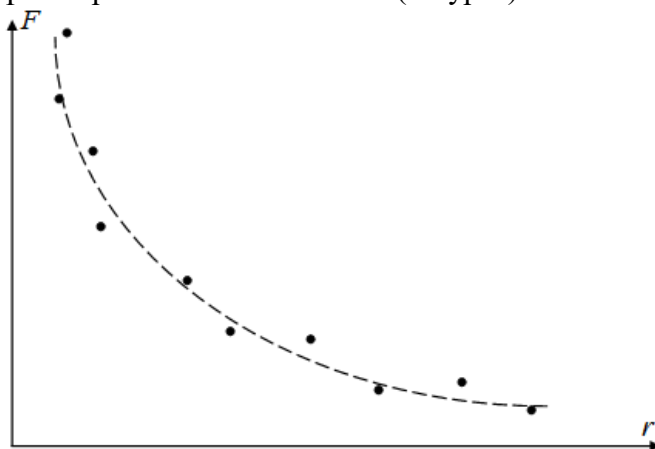
$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

өрнегін қарастырайық. Бұл заңды ол зарядтардың өз әрекеттесу күшін айналма таразының көмегімен өлшеу арқылы ашқан.

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

Оның тұжырымдамасы: *Вакуумде орналасқан нүктелік екі заряд сол зарядтардың көбейтіндісіне тура пропорционал, ал ара қашықтығының квадратына кері пропорционал күшпен әрекеттеседі.*

Кулон тәжірибесін біз қайталайтын болсақ, күш пен ара қашықтықты байланыстыратын нүктелер жиынтығын аламыз (4-сурет).

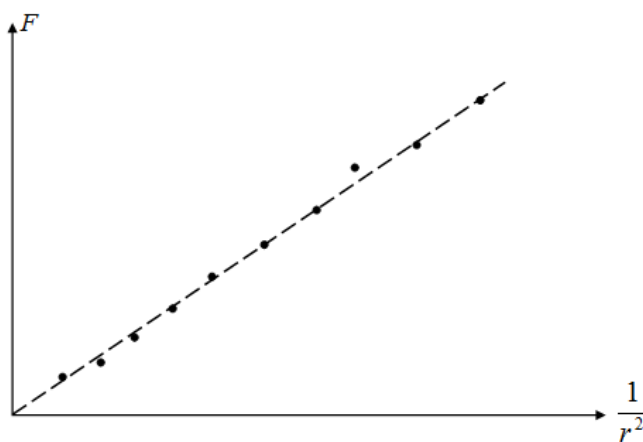


4-сурет. Күштің ара қашықтықтан тәуелділігі

Бұл нүктелер қандайда бір тегіс қисық төңірегінде орналасқан (пунктир қисық). Ол қисықтан күш пен ара қашықтық арасындағы функционал байланыстың нақты түрін ала алмаймыз. Функционал байланыстың нақты түрін алу үшін, тәжірибеде алынған сызықтарды түзетеді. Сызықтарды түзету үшін логарифмдік масштабқа ауысады, немесе тәуелділікті $F = F(r^n)$ түрінде іздейді. Яғни күшті ара қашықтықтың n -інші дәрежесіне тәуелді деп есптейді. Зерттеуші n -нің нақты мәнін бұрын белгілі заңдылықтармен ұқсастықты пайдалану, немесе байқап көру және қателесу әдісі арқылы таңдайды.

Кулонның заманында Ньютон ашқан бүкіл әлемдік тартылыс заңы: $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

белгілі болатын. Кулон да күшті $F \approx \frac{1}{r^2}$ түрінде іздеді. 4-суреттегі нүктелерді F және $\frac{1}{r^2}$ диаграммасында бейнелейік (5-сурет).

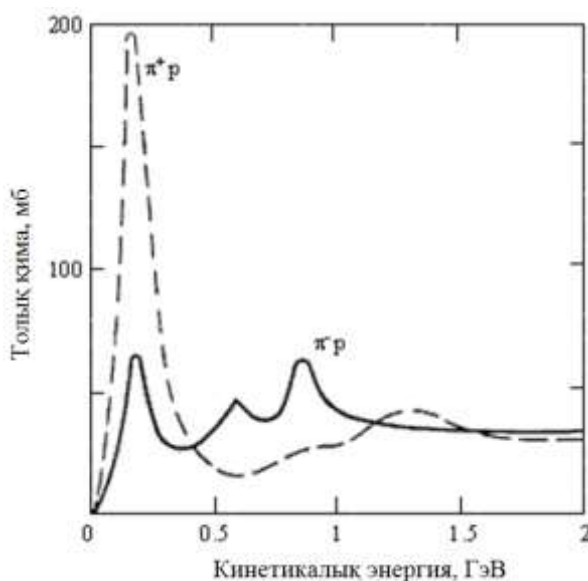


5-сурет. Күштің $\frac{1}{r^2}$ -тан тәуелділігі

Бұл нүктелер қандай да бір түзудің төңірегінде орналасады. Тәжірибе қателігін ескеріп, оларды бір түзу бойында жатады деп есептеуге болады. Яғни, күштің $\frac{1}{r^2}$ -тан тәуелділігі түзу сызық, басқаша айтқанда күш $\frac{1}{r^2}$ -қа тура пропорционал. Пропорционалдық коэффициент тәжірибеде алынған түзудің бұрыштық коэффициентіне тең. Күш $\frac{1}{r^2}$ -қа тура пропорционал дегеніміз – күш ара қашықтықтың квадратына (r^2 -қа) кері пропорционал дегеніміз. Тәжірибеде алынған деректерді талдауда графиктерді пайдалану арқылы ғана Кулон заңының дұрыстығына көз жеткізе аламыз.

XX ғасырдың 60-шы жылдары ашылған резонанстар деп аталатын элементар бөлшектер де графиктерді талдау барысында ашылды. Резонанстар күшті әрекеттесу нәтижесінде ыдырайды. Олардың өмір сүру уақыты $10^{-22} - 10^{-24}$ с. Өмір сүру уақыты мен жүрген жолдарының қысқалығы салдарынан, олардың тректерін тікелей бақылау мүмкін емес. Резонанстар толық қиманың энергиядан тәуелділіктеріндегі максимумдар түрінде көрініс береді. Алғаш рет резонанстар π -мезондар мен нуклондар әрекеттесуі кезінде бақыланды (6-сурет) [4].

Қиманың $\sigma = \sigma_0$ максимумына сәйкес келетін E_0 энергия массасы $m = E_0/c^2$ резонансқа сәйкес келеді. Бөлшектің резонанс деп аталуының басты себебі: әрекеттесу қимасының кинетикалық энергиядан тәуелділігі графигінің резонанстық қисыққа ұқсауы.



6-сурет. π -мезондар мен нуклондар әрекеттесуінің толық қимасының кинетикалық энергиядан тәуелділігі

Резонанстар масса, электр заряды, спин, изоспин сияқты нақты кванттық сипаттамаларға ие. Резонанстарды бақылаудың тиімді әдісі: резонанстар ыдырағанда пайда болатын бөлшектердің энергиялары мен импульстарының графиктерін талдау. Резонанстардың болуы нуклондардың құрылысының күрделі екендігін дәлелдейді. Резонанстарды зертеу адрондардағы кварктар мен глюондардың өз ара әрекеттесуінің динамикасын түсінуге мүмкіндік береді.

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

Қорыта айтқанда, физика сабақтары мен физикалық зерттеулерде графиктерді қолдану:

- физикалық құбылыстарды зерттегенде туындайтын қайшылықтарды оңай түсіндіреді;
- физикалық шамалар арасындағы байланысты оңай тағайындауға септігін тигізеді;
- құбылыстың белгісіз жақтарын айқындап, жаңа заңдылықтарды ашуға көмектеседі;
- кейде бұрын белгісіз болатын нысандарды анықтаудың бірден-бір тәсілі болады.

Физика сабақтарында графиктерді кең қолдану түлектердің сыни тұрғыда ойлау қабілетерін жетілдіріп, дүниеге ғылыми көзқарастарын қалыптастырады.

1. Қошыбаев Н. Жалпы физика курсы. III-том. Электр және магнетизм. / Алматы: Зият-Пресс, 2005
2. Қошыбаев Н.. Жалпы физика курсы. I-том. Механика. / Алматы: Зият-Пресс, 2005
3. В. Акоста, К. Кован, Б. Грем. Основы современной физики. / М: Просвещение, 1981
4. Сайт <https://ru.wikipedia.org/wiki>

***Аннотация.** В статье рассмотрены проблемы формирования научного мировоззрения учащихся при работе с графиками. Показано, что описание физических явлений при помощи графиков, наглядно демонстрируя противоречия. Развивает способности мыслить диалектически, а так же правильно формирует взгляды на окружающий мир. Использование графиков на уроках физики и физических исследованиях легко объясняют противоречия, возникающие при исследованиях физических явлений. Помогают установлению новых закономерностей, раскрывая неизвестные стороны явлений, а иногда являются единственным способом определения неизвестных объектов.*

***Ключевые слова:** график, анализ, явление, диалектическое мышление, научное мировоззрение.*

***Abstract.** The article deals with problems of formation of scientific outlook of pupils when working with graphics. It is shown that the description of physical phenomena by means of graphs, clearly demonstrating the contradictions. It develops the ability to think dialectically, as well as correctly generates views on the world around us. Use graphs on the lessons of physics and physical research is easy to explain the contradictions arising from the study of physical phenomena. They help the establishment of new laws, revealing the unknown side effects, and sometimes the only way to determine the unknown object.*

***Keywords:** graph, analysis, phenomenon, dialectical thinking, the scientific outlook.*

УДК 62-231

Т.Т. Кайым¹, В.Ф. Грибанов¹, А.Т. Каимов¹, С.Т. Каимов²

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВЫСОКОЭФФЕКТИВНОГО НАДЕЖНОГО РАЗРУШЕНИЯ ГРУНТА (РОССЫПИ, ТОРФ) ИННОВАЦИОННЫМ ОТВАЛОМ БУЛЬДОЗЕРА СО СЪЕМНЫМ РЕЖУЩИМ НОЖОМ

(г. Алматы, ¹Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева, ²Казахский национальный университет имени Аль-Фараби)

Аннотация. Для повышения эффективности разработки россыпных месторождений полезных ископаемых и торфа с применением землеройно-строительных машин авторами создан инновационный исполнительный механизм рабочего органа (ИМ РО) отвала бульдозера со съемным режущим ножом. Разработана математическая модель определения его геометрических, структурно-кинематических и динамических параметров с учетом стохастических процессов взаимодействия его с разрабатываемой средой. В ней предусматривается производить учет случайных ошибок отклонения величины параметров от «идеальной» расчетной модели и систематических ошибок, связанных с точностью измерения, на основе использования рекуррентной процедуры определения оптимального весового коэффициента Калмана. Выбор структурных, кинематических и динамических параметров инновационного ИМ РО отвала со съемным режущим ножом производится на основе реализации принципа его адаптации к усилию сопротивления разрушения участка массива грунта (УМГ), формирования его оптимальной толщины слоя (стружки). Разработанные математические методы являются основой для создания инновационных ИМ РО отвала бульдозера со съемным режущим ножом. На разработанный инновационный ИМ РО отвала бульдозера получен патент Республики Казахстан.

Ключевые слова: отвал бульдозера, исполнительный механизм, математическая модель, режущий нож.

Введение. В современный период времени (начало XXI века) резко увеличивается масштаб применения некоторых землеройно – строительных машин (ЗСМ), к которым относятся бульдозеры. Этот факт обуславливается тем, что бульдозеры все шире эксплуатируются при разработке россыпных месторождений полезных ископаемых во многих горнодобывающих странах мира: США, Канада, Китай, Россия, Австралия, Новая Зеландия, Южная Африка, Бразилия, Чили, Венесуэла и т.д. [1] и торфа [2].

Бульдозеры производятся в различных странах мира, например, США, Япония, Германия, Россия, Беларусь и др.

Повышение эффективности работы бульдозера достигается в основном применением технических операций, обеспечивающими снижение силы сопротивления разрушения УМГ отвалом бульдозера. Эффект по снижению силы сопротивления разрушения УМГ отвалом бульдозера достигается, в основном, за счет использования технических приемов, облегчающих внедрение ИМ РО отвала бульдозера в УМГ. Один из наиболее распространенных методов, обеспечивающих интенсификацию рабочих процессов бульдозера, является рационализация конструкции его отвала [3-5]. Методы этого направления обуславливают повышение производительности бульдозера за счет более рационального внедрения ИМ РО отвала бульдозера в УМГ и снижения силы сопротивления разрушения его [5].

«Например, бульдозеры с системой стабилизации глубины резания УМГ эффективно используются при разработке коротких участков грунта стружкой большой толщины. При этом не производятся остановки бульдозера и обеспечивается быстрое

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

наполнение частицами разрушаемого грунта призмы волочения перед отвалом. Такие устройства гарантировано обеспечивают высокий уровень ровности разрабатываемой поверхности УМГ, что повышает качество и эффективность выполняемых работ» [6].

Наибольшее влияние на технико-экономические показатели эксплуатации бульдозера оказывают физико-механические характеристики УМГ. Для наиболее точной оценки эксплуатационных параметров динамической системы стохастических процессов взаимодействия ИМ РО отвала бульдозера – разрушаемая среда была разработана ее математическая модель их расчета. В процессе ее реализации были проведены специальные исследования кинематических и динамических характеристик разработанного инновационного ИМ РО отвала бульдозера с учетом максимальной силы сопротивления разрушения УМГ I-IV категории крепости [7].

Идея работы. Идея работы заключается в разработке эффективных методик исследования ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом и в применении принципов адаптации ИМ РО отвала бульдозера к технологическим условиям его эксплуатации.

Целью работы является разработка теоретических основ расчета параметров инновационного ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом, адаптирующегося к внешним условиям эксплуатации.

Методология исследования базируется на системном подходе, при котором совокупность ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом – разрушаемый УМГ рассматривается как единая система взаимосвязанных и взаимодействующих элементов.

Выбор структурных, кинематических и динамических параметров инновационного ИМ РО отвала со съёмным режущим ножом производится на основе реализации принципа его адаптации к усилию разрушения УМГ, формирования его оптимальной толщины слоя (стружки). При этом существенно уменьшается динамическая нагрузка на ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом, обеспечивая снижение расхода энергии, степени деформации и вероятностей поломки ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом. Тем самым повышается их надежность, что позволяет бульдозеру разрабатывать прочные грунты при значительном увеличении производительности бульдозера, снижении себестоимости разрушения УМГ, улучшении экологии окружающей среды за счет уменьшения степени пылегазообразования. Также при этом упрощается конструкция ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом за счет возможности обеспечения оптимальной толщины слоя (стружки) разрушаемого УМГ без обратной связи в системе управления ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом, обуславливаемой использованием функциональных возможностей ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом (рисунок 1).

На рисунке 1 приведена структурная схема инновационного ИМ РО отвала бульдозера со съёмным режущим ножом [8].

Величина заглубления съёмного режущего ножа отвала бульдозера в УМГ x_k определяется из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k + \gamma_k; & (1) \\ z_k = x_k + \delta_k, & (2) \end{cases}$$

где u_k – величина, контролирующая эволюцию матрицы состояния положения съёмного режущего ножа отвала бульдозера в разрабатываемом УМГ, измеряемая техническими средствами измерения, определяется по следующей формуле [9]:

$$u_k = 2,2 \cdot 10^{-4} \cdot L^2 + 5,009 \cdot 10^{-4} (1+r)^2 + 5,7824 \cdot 10^{-12} (1+r)^2 \cdot L^2 - 1,6 \cdot 10^3, \quad (3)$$

γ_k и δ_k – соответственно, ошибки математической модели определения положения съёмного режущего ножа отвала бульдозера в разрабатываемом УМГ и ошибки

измерений положения съемного режущего ножа отвала бульдозера в разрабатываемом УМГ.

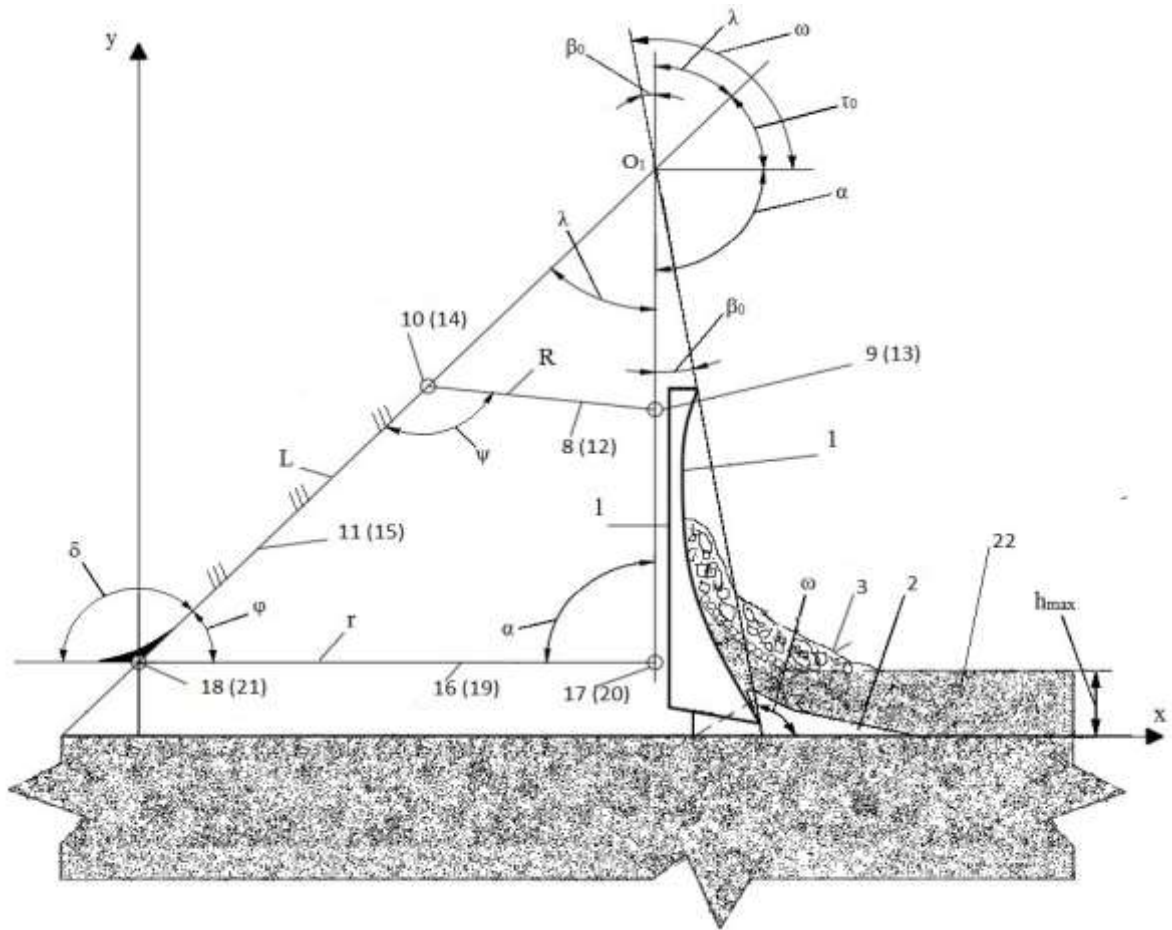


Рисунок 1. Инновационная схема ИМ РО отвала бульдозера со съемным режущим ножом: отвал 1 бульдозера; ω – переменный (управляемый) угол установки отвала 1 бульдозера со съемным режущим ножом 2, рад.; разрушенный УМГ 3; α – переменный угол; δ - постоянный конструктивный угол, рад.; φ - угол между продольными осями толкающего бруса R и раскоса r , рад.; ψ - угол между линией, соединяющей шарниры крепления кронштейна L, и линией, соединяющей шарниры толкающего бруса R, рад.; L- длина кронштейна, м; l- расстояние между шарнирами крепления толкающего бруса R и раскоса r к отвалу 1 бульдозера со съемным режущим ножом 2, м; r- длина раскоса, м; R – длина толкающего бруса, м; β_0 - постоянный конструктивный угол между, рад.

При этом случайные ошибки, вызванные отклонением спроектированного ИМ РО отвала бульдозера со съемным режущим ножом от ее «идеальной» модели, и представляющие собой случайные ошибки, определяются первыми статистическими моментами $M\gamma_k$, величины которых и их законы распределения не зависят от времени (номера итерации k); средние значения ошибок равны нулю: $M\gamma_k = M\delta_k = 0$; закон распределения случайных величин может быть и не известен, но известны их дисперсии σ_γ^2 и σ_δ^2 ; предполагается, что все случайные ошибки независимы.

Алгоритм решения задачи следующий. На k -ом шаге определяется отфильтрованное значение с сенсора x_k^{opt} , которое хорошо приближается к истинной координате системы x_k . Неизвестная величина x_{k+1} определяется по формуле [10]:

$$x_{k+1} = x_k + u_k + \gamma_k. \quad (4)$$

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

Поэтому еще не получая значение с сенсора полагается, что на шаге $K+1$ система эволюционирует согласно этому закону и сенсор покажет значение близкое к $x_k^{opt} + u_k$. С другой стороны, на шаге $K+1$ имеется неточное показание с сенсора z_{k+1} . Идея состоит в том, чтобы получить наилучшее приближение к истинной координате x_{k+1} выбирается так называемая «золотая» середина между показанием z_{k+1} источника с сенсора и $x_k^{opt} + u_k$, являющимся предсказанием того, что ожидается от него получить. Показанию с сенсора дается вес K , а на предсказанное значение $(1 - K)$ величина x_{k+1}^{opt} определяется по формуле:

$$x_{k+1}^{opt} = K \cdot z_{k+1} + (1 - K) \cdot (x_k^{opt} + u_k), \quad (5)$$

где K –весовой коэффициент Калмана, величина которого выбирается такой, чтобы получившееся оптимальное значение координаты x_{k+1}^{opt} было бы наиболее близко к истинной координате x_{k+1} . Например, если известно, что показания с сенсора очень точные, то степень доверия к нему будет больше и значения e_{k+1} имеет больший вес (K близко единице). Если же с сенсор, наоборот, совсем неточный, тогда необходимо больше ориентироваться на теоретически предсказанное значение $x_k^{opt} + u_k$. В общем случае, чтобы найти точное значение коэффициента Калмана необходимо минимизировать величину

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x_{k+1}^{opt}. \quad (6)$$

После подстановки в уравнение (6) формулы (5) получается:

$$e_{k+1} = (1 - K) \cdot (e_k + \gamma_k) - K \cdot \delta_{k+1}. \quad (7)$$

Минимизируется среднее значение математического ожидания от квадрата ошибки:

$$M(e_{k+1}^2) \rightarrow \min. \quad (8)$$

Математическое ожидание квадрата ошибки величины заглубления съемного режущего ножа отвала бульдозера в разрабатываемый УМГ определяется по формуле:

$$M(e_{k+1}^2) = (1 - K)^2 (M e_k^2 + \sigma_\gamma^2) + K^2 \sigma_\delta^2. \quad (9)$$

Это выражение принимает минимальное значение при условии:

$$K_{k+1} = \frac{M e_k^2 + \sigma_\gamma^2}{M e_k^2 + \sigma_\gamma^2 + \sigma_\delta^2} \quad (10)$$

После подстановки в выражение (10) для определения среднеквадратичной ошибки $M(e_{k+1}^2)$, минимизирующее ее значение весового коэффициента K_{k+1} , получается следующее выражение:

$$M(e_{k+1}^2) = \frac{\sigma_\gamma^2 (M e_k^2 + \sigma_\delta^2)}{M e_k^2 + \sigma_\gamma^2 + \sigma_\delta^2}. \quad (11)$$

Таким образом, реализуется алгоритм решения математической модели оценки стохастической системы динамического процесса взаимодействия ИМ РО отвала бульдозера со съемным режущим ножом с разрабатываемым УМГ с использованием итерационной формулы для вычисления весового коэффициента K .

На основании этих исследований разрабатываются математические модели оценки прочностных характеристик наиболее распространенных грунтов Казахстана. Как известно, прочностные характеристики неоднородного грунта могут рассматриваться как стохастический процесс. Во многих практических задачах используется модель случайного процесса, реализации которого представляют собой гармонические колебания с известными (детерминированными) амплитудой и частотой, но случайной начальной фазой.

В работах [11 - 13] приведены экспериментально-теоретические результаты исследований процесса разрушения грунтов и горных пород. При этом отмечается, что одним из основных факторов, влияющих на эффективность процесса разрушения

грунтов и горных пород, является угол резания α (угол, образуемый траекторией движения и передней гранью режущего клина).

При этом закон изменения случайной величины силы сопротивления разрушения УМГ I-IV категории крепости представляет собой равномерно распределенную случайную величину на известных интервалах изменения величины угла резания α и представляется в следующем виде [14]:

$$P(X) = \begin{cases} Kp \cdot b \cdot h [1 - 0.033(60^\circ - \alpha)], & \text{при } 45^\circ < \alpha < 60^\circ; & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,5Kp \cdot b \cdot h [1 - 0,029(45^\circ - \alpha)], & \text{при } 37,5^\circ < \alpha < 45^\circ; & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,35Kp \cdot b \cdot h [1 - 0,019(37,5^\circ - \alpha)], & \text{при } 20^\circ < \alpha < 37,5^\circ, & (14) \end{cases}$$

где $P(X)$ – плотность вероятности появления случайной величины силы сопротивления разрушения УМГ по Ю.А. Ветрову; b – ширина отвала бульдозера, м; h – высота отвала бульдозера, м; α – угол резания УМГ, рад.; Kp – коэффициент крепости разрушаемого УМГ.

Таким образом, реализация рассматриваемого случайного процесса может быть представлена формулой:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (15)$$

где $x(t)$ – закон изменения в течение периода времени t случайной величины силы сопротивления разрушения УМГ съемным режущим ножом отвала бульдозера; A – амплитуда случайной величины силы сопротивления разрушения УМГ съемным режущим ножом отвала бульдозера; ω_0 – частота случайной величины силы сопротивления разрушения УМГ съемным режущим ножом отвала бульдозера; φ – фаза появления случайной величины силы сопротивления разрушения УМГ съемным режущим ножом отвала бульдозера, которая в большинстве случаев может считаться равномерно распределенной на интервале $0 \dots 2\pi$, то есть имеющей следующую плотность вероятности:

$$P_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (16)$$

Полученные результаты:

1. Разработана математическая модель стохастических процессов высокоэффективного надежного разрушения грунта (россыпи, торф) инновационным ИМ РО отвала бульдозера со съемным режущим ножом. На основе применения разработанной математической модели осуществлена фильтрация результатов экспериментальных исследований с учетом силы сопротивления разрушения УМГ.

2. Обоснованы геометрические, структурно-кинематические, силовые и динамические параметры инновационного ИМ РО отвала бульдозера со съемным режущим ножом с учетом его адаптации к свойствам разрабатываемого УМГ.

3. Разработанные математические методы являются основой для создания инновационных ИМ РО отвала бульдозера со съемным режущим ножом, адаптирующихся к силам сопротивления разрушаемого УМГ.

4. Разработанный инновационный ИМ РО отвала бульдозера со съемным режущим ножом защищен Патентом РК.

1. И.Б.Флеров. Россыпи / Горная энциклопедия. Том 4 (Ортия-Социосфера). – М: Издательство: «Советская энциклопедия». 1989. С.400.
2. И.Ф.Ларин. Торф. / Горная энциклопедия. Том 5 (СССР-Яшма). – М.: Издательство «Советская энциклопедия». 1991. С. 166-171.

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

3. Т.Т. Кайым, Г.Т. Каимова, Ж.Л.Таиров Структурно- кинематический синтез параметров адаптивного исполнительного механизма РО ПТСДМ. //Научный журнал - «Поиск» МОиН РК № 2 (2) г.Алматы. 2013г. с.17-22.
4. Т.Т.Кайым, Ж.Л. Таиров. Обоснование и выбор параметров адаптирующихся подвески механизма навесного оборудования бульдозера. //Сборник материалов международной конференций «Посвященное 90-летию О.Д. Алимова». г. Бишкек. 2013г. с.31-35.
5. Т.Т. Кайым. Адаптирующиеся многоцелевые рабочие органы строительных и дорожных машин. /Монография. Алматы. 1998. - 148 с.
6. В.И.Баловнев, Р.Г.Данилов. Система регулирования глубины резания грунтов. //Строительные и дорожные машины. 2015. № 9. с. 48-51.
7. А.Т. Каимов, С.Т. Каимова и др. Математическая модель повышения достоверности оценки эмпирических данных при разрушении грунта инновационным отвалом бульдозера со съемным режущим ножом. //Международный научный журнал-приложение Республики Казахстан. № 3(1)/2016. г. Алматы. 2016г. с.240-247.
8. Т.Т. Кайым, С.У. Джолдасбеков, М.С. Джуматаев, В.Ф. Грибанов, Ж.Л. Таиров, А.Т. Каимов, С.Т. Каимов и др. /Патент РК № 31476 «Бульдозерное оборудование» .г. Астана, 14.01. 2015г. – 15 с.
9. Р.А. Козбагаров. Обоснование параметров бульдозера с переменным углом резания. /Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – г.Алматы. 1998 г. С.19.
- 10.Kaimov S.T., Kaiym T.T., Golubeva T.V. Mathematical and Computer Modeling of Movement of The Executive Mechanism of the Adaptive Multipurpose Operating Part of Earthmoving and Construction Machine. // The IRES 10-th International Conference Institute of Research and Journals. 2015. p.35-38.
- 11.В.И.Баловнев, Р.Г.Данилов. Система регулирования глубины резания грунтов. //Строительные и дорожные машины. 2015. № 9.,с. 48-51.
- 12.Н.Т.Сурашов, Р.А.Козбагаров, Н.С.Камзанов. Влияние угла захвата и наклона боковых граней ножа отвала бульдозером на силу резания грунта. //Вестник КазНИТУим.К.Сатпаева. 2015. №6. с.155-159.
- 13.Н.С.Камзанов, Р.А.Козбагаров. Определение величины сопротивления грунта резанию и ширины режущих граней многопрофильными ножами отвала землеройно-строительных машин. //Вестник КазНИТУим.К.Сатпаева. 2015. № 4. с. 308-315.
- 14.Ветров Ю.А. Расчеты сил резания и копания грунтов. / Монография. Киев: Изв. КГУ. 1965. – 231 с.

Аңдатпа. Торфтық және шашыранды кен орындарында жұмыс тиімділігін арттыру үшін авторлармен жер-құрылыс машиналар саласында алынбалы кескіш пышақты бульдозер қайырмасының атқарушы механизмнің инновациялық түрі құрылды. Қоршаған орта жағдайын, оның геометриялық, құрылымдық, кинематикалық және динамикалық параметрлерін ескере отырып, механизмнің математикалық үлгісі құрылды. Бұл жерде кездейсоқ қателіктердің ауытқу шамасын параметрлердің "мінсіз" есептеу моделін және жүйелі қателер байланысты дәлдікпен өлшеу, жүргізуге есепке алу, пайдалану негізінде рекурренттік айқындау рәсімдерін оңтайлы Калман коэффициенті қолдану көзделді. Құрылымдық, кинематикалық және динамикалық параметрлерін инновациялық атқарушы механизмнің жұмыс органының үйінді алмалы-салмалы пышақпен кесудің негізінде жүргізіледі және негізгі қағидаттарының іске асыру, оның бейімделу әрекетіне учаскесінің топырақ алқабын қалыптастыру, оның оңтайлы қабатының қалыңдығын қалыптастырады. Әзірленген бульдозердік инновациялық атқарушы механизмнің жұмыс органына Қазақстан Республикасының патенті алынды.

Түйін сөздер: бульдозер қайырмасы, атқарушы механизм, математикалық модель, кескіш пышақ.

Abstract. To improve the efficiency of the development of placer mineral deposits and peat with the use of earth-moving and construction machines, the authors have developed an innovative actuator

of the working body of the blade dozer blade with removable cutting with a knife. Developed a mathematical model to determine its geometrical, structural-kinematic and dynamic parameters given the stochastic processes for its interaction with a development environment. It is envisaged to produce the account of random error variances of the parameters from the "ideal" design models and systematic errors associated with the measurement accuracy, based on the use of a recurrent procedure for determining the optimal weighting factor Kalman. Choice of structural, kinematic and dynamic parameters of innovation of the blade with a removable cutting knife is based on the implementation of the principle of adaptation to resistance force of the destroyed area of the soil, the formation of its optimal layer thickness. Mathematical methods are the foundation for creating innovative, the dozer blade with removable knife. Developed innovative bulldozer obtained a patent of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: *the dozer blade, actuator, mathematical model, cutting knife.*

УДК 530.1(556.3.02)

Л.Г. Касенова

ВИРТУАЛЬНЫЙ ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ КАК ОДНА ИЗ ФОРМ ФОРМИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ

(г. Астана, Казахский университет экономики, финансов и международной торговли)

Аннотация. *В статье рассматривается применение информационных компьютерных систем в образовательном процессе. Показано, что внедрение современных мультимедийных ресурсов и компьютерных технологий наряду с традиционными формами обучения, позволит повысить качество подготовки выпускников инженерных специальностей.*

Современные специалисты рассматривают компьютерные системы учебного назначения (в том числе виртуальные лаборатории) как инструментальный аспект информационных образовательных технологий, от качества которого зависит возможность реализации компетентностного подхода в профессиональной подготовке. Это обуславливает необходимость создания виртуальных лабораторных практикумов инновационного типа, применение которых позволит преодолеть разрыв между теоретической и практической подготовкой обучающихся, эффективно формировать информационную компетентность студентов.

Ключевые слова: *физический эксперимент, виртуальный лабораторный практикум, информационная компетентность, инновационные методы образования.*

Введение. Современный период развития Казахстана четко обозначил новые приоритеты в области образования, соответствующие мировым тенденциям. Учебные заведения практически всех экономически развитых стран осуществляют переход или уже перешли на реализацию модульных программ, основанных на компетенциях.

Данный подход значим и для Казахстана, поскольку, как показывает практика, только он способен обеспечить «достижение высокого уровня качества высшего образования, удовлетворяющего потребности рынка труда, задач индустриально-инновационного развития страны, личности и соответствующего лучшим мировым практикам в области образования» [1].

Основной категорией, позволяющей определить степень подготовки специалиста по объему изученного материала и совокупности профессиональных умений, становится категория компетенции.

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

Обучение, основанное на компетенциях, наиболее эффективно реализуется в форме модульных программ, причем основной принцип обучения ориентирован на результаты, необходимые для сферы труда.

Отечественное образование обеспечивает выпускника достаточно хорошим набором знаний и предметных умений, однако мы часто сталкиваемся с такими фактами на практике, когда отличник, окончивший колледж или университет, в дальнейшем оказывается неуспешным человеком, или еще один пример, когда молодой специалист слишком долго адаптируется на рабочем месте.

Наиболее востребованными становятся гибкие специалисты, которые не только хорошо владеют своей специальностью, но и способны быстро адаптироваться и осваивать новые знания и навыки, обладают аналитическим мышлением и могут критически мыслить. Кроме того, на современном рынке труда важны умение работать в стрессовой ситуации, управлять своим рабочим временем, проводить переговоры, представлять широкой публике свой продукт/услугу и т. д.

Сказанное привело общественность к выводу, что настоящий подход к высшему образованию, ориентированный на решение одной задачи - обучить человека определенной специальности - уже устарел. Назрела необходимость усиления практико-ориентированной подготовки в высшей школе, а также обеспечения соответствия образования запросам и возможностям общества периода информатизации и глобальной массовой коммуникации.

Компетентностный подход как вектор развития казахстанского образования.

Инновационный процесс в образовании связан с формированием новой миссии образования, обусловленной, по мнению ученых, изменениями общемировоззренческих представлений о человеке и его сущности. Компетентностный подход прежде всего возник в профессиональном образовании и был направлен на поиск ответа: как учить так, чтобы на выходе получить компетентного профессионала. При этом необходимо сохранение высокого уровня фундаментальной подготовки выпускников различных направлений, сохранение лучших традиций высшей школы. Содержательные изменения базируются на выделении компетенций, не отрицающих ЗУН, но существенно от них отличающихся: от знаний – необходимостью их действенного использования; от умений – переносом на различные объекты воздействия; от навыков – осознанной деятельностью как в привычной, так и в нестандартной обстановке. Например, в разделе «Электричество и магнетизм» рассматривается взаимосвязь напряженности и потенциала электростатического поля. Раньше студент должен был дать определение градиента потенциала и записать формулу его связи с напряженностью, сейчас ему будет предложено указать практическую значимость этой зависимости с решением конкретных технических примеров. В разделе «Квантовая физика» при изучении свойств полупроводников ранее требовалось, в частности, указать, как изменяется электропроводность полупроводников с температурой. При компетентностном подходе студенты должны будут показать, что знают, где используется эта зависимость, как работают терморезисторы, или должны будут выполнить небольшую исследовательскую задачу с использованием температурной зависимости сопротивления полупроводников, например, в лабораторной работе [2].

Успешно решать задачи профессионального образования позволяет компьютерное моделирование физических процессов на лабораторных занятиях. Постановка виртуального лабораторного практикума в сочетании с натурным экспериментом способствует наиболее осознанному, более глубокому усвоению физических знаний и позитивной оценке практической значимости этих знаний.

Основой профессиональной деятельности выпускника технологического вуза (бакалавра, магистра) являются умения строить и использовать физико-математические

модели для описания, прогнозирования различных явлений, осуществлять системный количественный и качественный анализ, владеть компьютерными методами сбора и обработки информации, методами решения оптимизационных задач с использованием информационных технологий.

Уровень развития информационных обучающих технологий позволяет создавать имитационные модели практически любых реальных событий и процессов, на базе которых может быть создана система дистанционного обучения с виртуальным присутствием преподавателя, соответствующего реального лабораторного оборудования и других технических средств, используемых в учебных лабораториях. Это означает, что виртуальный лабораторный практикум предназначен для предварительной подготовки студента в дистанционном режиме к последующему выполнению реальных экспериментов в учебных лабораториях, т. е. он является виртуальным тренажером для обучающихся студентов [3].

Современные специалисты рассматривают компьютерные системы учебного назначения (в том числе виртуальные лаборатории) как инструментальный аспект информационных образовательных технологий, от качества которого зависит возможность реализации компетентного подхода в профессиональной подготовке. Это обуславливает необходимость создания виртуальных лабораторных практикумов инновационного типа, применение которых позволит преодолеть разрыв между теоретической и практической подготовкой обучающихся, эффективно формировать информационную компетентность студентов.

Информационная компетенция включает «способность ориентироваться в информационном потоке; использовать рациональные способы получения, преобразования, систематизации и хранения информации; способность актуализировать ее в необходимых ситуациях интеллектуально-познавательной деятельности; способность критически оценивать полученную информацию; компьютерная грамотность, владение новыми информационными и мультимедийными технологиями (электронные образовательные ресурсы); умение применять рациональные приемы поиска, отбора, систематизации и использования информации, пользоваться методической и научной литературой по профилю подготовки и смежным вопросам» [4].

Базовые естественнонаучные дисциплины, к числу которых относится физика, являются основой для дальнейшего изучения инженерных спецдисциплин. Знание фундаментальных законов физики дают возможность будущему специалисту - инженеру адаптироваться в мире быстро меняющихся технологий, законы не устаревают при развитии науки и техники, например, законы сохранения массы, энергии, импульса, заряда выполняются всегда, если этого не происходит значит искомая задача решена неверно. Но в современном инженерном образовании роль физики не исчерпывается усвоением фундаментальных понятий и законов.

В конкретной науке соответственно ее объекту познания используется определенный мыслительный инструментарий - категории, принципы, различные методы познания, образующий ее методологический базис, куда входят элементы знаний из целой совокупности различных наук. Физический эксперимент входит в число методов научного познания и выступает как необходимый компонент естественнонаучного образования, и тем самым он выполняет определенные дидактические функции.

Сочетание фундаментального содержания учебных программ по физике с лабораторно-практической формой усвоения неосценимо для развития интеллектуальных способностей, необходимых для качественной подготовки специалиста, востребованного и конкурентоспособного на современном рынке труда, который должен

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ **ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ**

не только освоить определенную сумму знаний и решать типовые задачи, но и обладать способностью к непрерывному самообразованию, которая особенно важна при изучении предметов практической направленности, выполнении исследовательских и лабораторных работ [5].

Удовлетворение повышающихся из года в год требований к подготовке инженера, возрастание информативной емкости учебного материала, недостаточность средств для обновления материально-технической базы невозможно без внедрения информационных технологий (ИТ) в образовательный процесс. Внедрение ИТ в образовательный процесс позволяет обойти многие трудности и в сочетании с традиционными методами повышает качество образования, побуждает студента к более активной учебной деятельности, позволяет индивидуализировать учебный процесс, более эффективно использовать рабочее время.

Виртуальный лабораторный практикум реализует разновидность физического эксперимента - обучающего физического эксперимента, ставящего целью отработку основных приемов и технологий планирования и проведения эксперимента, включая его основные этапы: формулировку цели и задач исследований, определение способов и методов достижения цели, используемое оборудование и технологии. Виртуальная лабораторная работа - это способ освоения знаний на основе процесса получения и обработки экспериментальных данных - количественных характеристик реальных физических величин, определяющих поведение исследуемого объекта, процесса или явления, подтверждающих или опровергающих сформулированные целевые функции проведения эксперимента.

Проведение виртуальных лабораторных работ по физике. В Казахском университете экономики, финансов и международной торговли (г.Астана) виртуальный лабораторный практикум представляет из себя набор из лабораторных работ, охватывающих следующие разделы физики: механика; термодинамика; электростатика и постоянный ток; оптика.

В целом, виртуальный практикум включает в себя не только непосредственно сами лабораторные работы, но и общие методические указания по использованию практикума, справочный материал. Эти указания содержат все требования для запуска приложений на компьютере, а также помощь по использованию каждой конкретной работы [6].

Электронные лабораторные работы состоят из подразделов, которые наглядно указаны в интерфейсе программы для данного раздела физики (рисунок 1):

1. *Язык.* Выбор языка выполнения лабораторной работой (казахский/русский)
2. *Лабораторные работы.* Данный подраздел является основным и включает в себя: наименования лабораторных работ, выполненные в виде гиперссылок на теоретические сведения по изучаемым физическим явлениям и законам, описание лабораторной установки и этапы выполнения работы, непосредственное выполнение виртуального эксперимента, занесение измеряемых величин в таблицу экспериментальных данных.
3. *Справка.* Переход к справочному материалу по разделу.
4. *Помощь.* Описание работы программы.



Рисунок 1. Интерфейс виртуальной лабораторной работы к разделу «Оптика»

В начале описания работ сформулирована цель, указаны приборы и принадлежности. Каждая работа содержит теоретическое введение, описание установки и метода измерения, порядок выполнения работы, проведение эксперимента, обработка результатов эксперимента, контрольные вопросы. Поэтому структурно-функциональную схему компьютерной обучающей системы можно представить в следующем виде (рисунок 2).



Рисунок 2. Структурно-функциональная схема компьютерной обучающей системы

Выполнение виртуального эксперимента начинается с изучения установки (рисунок 3.)

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

Каждая лабораторная работа имеет несколько вариантов с различными параметрами установок, что позволяет осуществлять на занятии фронтальное выполнение работ.



Рисунок 3. Виртуальная установка для изучения работы линзы

Таким образом, виртуальный лабораторный практикум имеет ряд отличительных особенностей, которые наряду с моделированием и имитацией изучаемых процессов и явлений определяют его преимущества по сравнению с традиционными методами: компьютерная анимация лабораторной работы способствует увеличению скорости передачи информации обучаемому и повышению уровня ее понимания; аудио сопровождение работы позволяет лучше воспринимать изучаемый материал, благодаря комментариям преподавателя; видео сопровождение обеспечивает наглядную демонстрацию изучаемого материала, улучшает его восприятие; компьютерный контроль с помощью соответствующих тестов позволяет проверить усвоенные знания. Проведенные методические исследования показали, что можно организовать дистанционное изучение физических процессов студентами различных форм обучения. Фактически каждое представленное в электронном комплекте физическое явление может изучаться предварительно в компьютерном варианте, а затем более осмысленно может быть осуществлено на реальной лабораторной установке.

Заключение. Компьютерное выполнение лабораторных и расчетно-графических работ, во-первых, способствует более глубокому усвоению студентами сущности рассматриваемого процесса, явления или закона; во-вторых, формирует в сознании студента представления о том, что физика – фундамент естествознания, на котором базируются технические дисциплины; в-третьих, экономит время на расчетах; в-четвертых, совершенствует умение в общении с компьютерной техникой, в частности в приобретении навыков построения графиков функциональных зависимостей нескольких величин, и, в-пятых, способствует более глубокому усвоению физического материала, упрочению физических знаний в целом, развитию физического мышления и даже, возможно, научной интуиции.

Процессы моделирования физических процессов способствуют формированию таких слагаемых информационной компетенции, как умение ориентироваться в информационном потоке, способность использовать рациональные способы получения и преобразования информации, навыка актуализации ее в творческой деятельности, овладение новыми мультимедийными технологиями.

Применение инновации в преподавании физики тесно связано с повышением эффективности обучения и направлены на конечный результат образовательного процесса- это подготовка высококвалифицированного специалиста, имеющего фундаментальные и прикладные знания, способного успешно осваивать новые, профессиональные и управленческие области, умеющего гибко и динамично реагировать на изменяющиеся социально-экономические условия, обладающего высокими нравственными, гражданскими и лидерскими качествами.

1. Государственная программа развития образования Республики Казахстан на 2011-2020 годы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://edu.resurs.kz/elegal/programma-2011-2020> – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 20.08.2016).
2. Бочкарева, Ю.Г. Формирование информационной компетенции бакалавров в виртуальном лабораторном практикуме по физике. [Текст] / Бочкарева Ю.Г., Чижухина Н.И. // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 2. - С. 123-130
3. Виртуальный лабораторный практикум по разделу физики «Механика» для дистанционной формы обучения студентов. / В. В. Чаевский [и др.] // Труды БГТУ. – 2012. - №8. – С.146-148
4. Кришталь, Н.М. Структура и содержание ключевых компетенций дизайнеров / Н.М. Кришталь // Компетентность. – 2010. – №7. – С. 4-10.
5. Касенова, Л.Г. Категории «компетентность», «компетенция», «общеучебная компетенция» в современной педагогической практике. / Л.Г.Касенова // Вестник КазНПУ им. Абая. – 2009. - №4 (23). – С.31-33
6. Наглядная физика [электронный ресурс] // Виртуальная образовательная лаборатория. - метод доступа URL: <http://www.virtulab.net/index.php>

Аңдатпа. Мақала ақпараттық компьютерлік жүйелерді оқу үрдісінде пайдалануы қарастырылған. Заманауи мультимедиялық ресурстар мен компьютерлік технологияларды еңгізу, оқытудың дәстүрлі түрлерімен қатар, инженерлік түлектерінің дайындығын жақсартуға ықпал ететіні көрсетілген.

Қазіргі заманғы ақпараттық технологиялар сарапшылары білім беру мақсатында құрылған компьютерлік жүйелерді (виртуалды зертханаларды қоса алғанда) ақпараттық білім беру технологиялар аспаптық аспектісі ретінде қарастырады, себебі оның сапасынан, кәсіби даярлау барысында, құзыреттілік тәсілдің іске асу мүмкіндігі байланысты. Бұл инновациялық үлгідегі виртуалды зертханалық практикумдерін құру қажет етеді, өйткені олар теориялық және практикалық оқыту арасындағы ашақтықты еңсеруге көмектеседі, студенттердің ақпараттық құзыреттілігін тиімді қалыптастырады.

Түйін сөздер: физикалық эксперимент, виртуалды зертханалық практикум, ақпараттық құзыреттілік, инновациялық білім беру әдістері.

Abstract. The article discusses the use of information and computer systems in the educational process. It is shown that the introduction of modern multimedia resources and computer technology along with traditional forms of training, will improve the training of engineering graduates.

Modern experts consider computer systems for educational purposes (including virtual labs) as an instrumental aspect of information technology education, the quality of which depends on the possibility of implementing the competency approach in training. This necessitates the creation of a virtual laboratory practical innovation type, the use of which will bridge the gap between theoretical and practical training of students and effectively shape their information competence of students.

Keywords: physical experiment, a virtual laboratory practical, informational competence, innovative education methods.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШЕНИЯ БИНАРНОЙ
ГАЗОВОЙ СМЕСИ ВО ВСТРЕЧНЫЙ ПОТОК ТРЕТЬЕГО
КОМПОНЕНТА РАЗЛИЧНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В РЕЖИМЕ
РАЗВИТОЙ КОНВЕКЦИИ

(г. Алматы, ¹Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
²Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики при
Казахском национальном университете им. аль-Фараби,
г. Атырау, ³Атырауский институт нефти и газа)

Аннотация. Получены экспериментальные данные по конвективному смешению бинарной газовой смеси во встречный поток третьего компонента при его различных скоростях. Определено влияние скорости встречного потока на величину разделения самого тяжелого по плотности компонента смеси в условиях развитой конвекции. Тем самым показана важность обеспечения точности настроек по давлениям и скоростям при отработке опытного модуля разделения углеводородных газов. Существенным фактором в оптимизации процесса разделения является определение требований к настройкам параметров модуля разделения. Формулировка требований к параметрам модуля разделения необходима для создания опытно промышленного способа диффузионного разделения углеводородных газовых смесей.

Ключевые слова: Газы, диффузия, смеси, конвекция, разделение, поток

При изотермическом многокомпонентном смешении газов в системах с существенно отличными друг от друга коэффициентами диффузии возникают условия, связанные с преимущественным переносом самого тяжелого по плотности компонента смеси [1-3]. Разработанные в [4-8] инновационные подходы позволили создать устройства, в которых максимально проявляется селективный перенос компонента смеси с заданными свойствами. Особенно ярко этот эффект проявляется в режиме непрерывного разделения в условиях диффузионного моста [2]. Экспериментальная реализация метода диффузионного моста в [2,9] продемонстрировала особенности разделения при различных составах смеси и направлении ее градиента плотности. В данной работе приводятся результаты по изучению влияния величины разделения самого тяжелого компонента смеси в зависимости от скорости потока третьего компонента.

Схема экспериментальной установки приведена на рис.1. Особенностью экспериментальной установки является возможность сбора многоступенчатого модуля разделения свободно устанавливая диффузионные каналы 1 на место имитаторов диффузионных каналов 2. Методика проведения эксперимента заключалась в следующем. Газовые смеси из баллонов 9, 13 через систему трубопроводов, расходомеров 11, 15, манометров 12, 16, датчика перепада давления 17, гидродинамического сопротивления 30 поступают через магистрали 3 и 4 на диффузионный соединительный канал 1, который имеет следующие параметры: $d = 10,5 \cdot 10^{-3}$ м, $L = 159 \cdot 10^{-3}$ м, $b = 55 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 2). В разделительной ячейке, которая включает в себя магистрали 3 и 4 соединенные вертикальным плоским диффузионным каналом, моделировался процесс взаимной диффузии когда встречные объемные потоки равны. Затем смеси газов через систему из магистральных манометров 18, 19, вентилях регулировок гидродинамического сопротивления 21, 25 попадают в баллоны отбора проб газов 24, 27, которые затем анализируются на хроматографе.

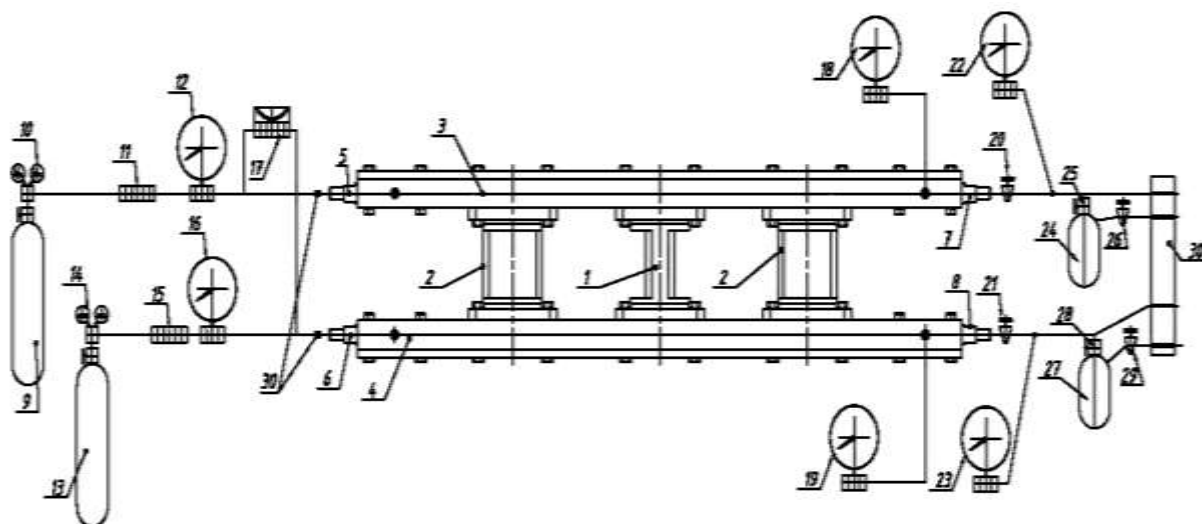


Рисунок 1. Схема стендовой установки

1 – диффузионный канал; 2 – имитаторы диффузионного канала; 3 - магистраль смеси газов; 4 – магистраль технологического газа; 5 – подача смеси газов; 6 – подача технологического газа; 7 – выход с верхней магистрали; 8 – выход с нижней магистрали; 9 – баллон смеси газов; 10-редуктор; 11 — расходомер(объемный); 12 – манометр подаваемой смеси газов; 13 – баллон технологического газа; 14 – редуктор; 15 — расходомер объемный; 16 – манометр технологического газа; 17 – датчик перепада давления; 18 – манометр магистрали смеси газов; 19 – манометр магистрали технологического газа; 20 - вентиль тонкой настройки; 21 - вентиль тонкой настройки; 22 – манометр верхней магистрали выхода; 23 – манометр нижней магистрали выхода; 24 – баллон отбора пробы газа; 25 – вентиль баллона отбора пробы газа; 26 – выходной вентиль баллона отбора пробы газа; 27 – баллон отбора пробы газа; 28 – вентиль баллона отбора пробы газа; 29 – выходной вентиль баллона отбора пробы газа; 30 – устройство выхода магистралей газа.

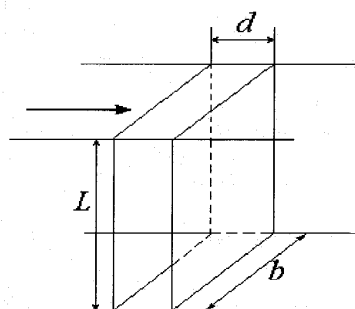


Рисунок 2. Геометрическая форма и параметры диффузионного канала

Эксперименты проводились с системой гелий (He) + фреон-12 (R₁₂) – аргон (Ar). Выбор данной системы обусловлен тем, что в ней согласно [2] при данных геометрических характеристиках могут быть реализованы условия с преимущественным разделением самого тяжелого по плотности компонента. В опытах всегда соблюдалось условие, которое предполагало смешение бинарной смеси гелия и фреона-12 с аргонном. При этом соблюдалось условие, что плотность смеси, подаваемая на магистраль 3, была меньше, чем плотность аргона, который транспортировался через магистраль 4. Изучалось влияние объемной скорости аргона на величину смешения самого тяжелого по плотности компонента. Изменение объемной скорости аргона осуществлялось за счет

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

перекрывающего вентиля тонкой регулировки 25. Концентрации компонентов измерялись на хроматографе с погрешностью измерений в 0,3%.

На рис. 3 приведены опытные данные по влиянию объемной скорости аргона на величину конвективного смешения фреона-12. Отмечается, что для исходных составов с малым и небольшим содержанием R12 в смеси в режиме развитой конвекции зависимость концентрации перешедшей части фреона-12 от скорости встречного потока газа (аргона) очень близка к линейной. При определенном значении скорости объемного потока конвективное смешение самого тяжелого по плотности газа прекращается (точки вблизи пересечения линий 1 – 3 с осью абсцисс). В этом случае фреон-12 не появляется у нижнего торца канала, что позволяет сделать предположение о стабилизации конвективного смешения при заданных объемных скоростях аргона. При увеличении содержания R12 в исходном составе интенсивность конвективного смешения нарастает, и его возможная стабилизация наступает с увеличением интенсивности встречного потока.

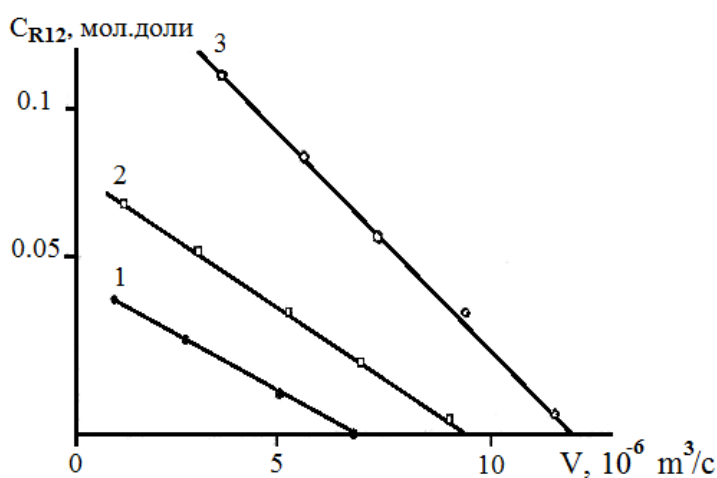


Рисунок 3. Зависимость концентрации фреона-12 у нижнего среза диффузионного канала от объемной скорости встречного потока аргона при $T = 298,0$ К, $P = 91,9$ кПа. Линии 1, 2, 3 соответствуют исходным концентрациям R12 в смеси: 8,9%, 16,8% и 28,5%. Точки – опытные данные для фреона-12.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что скорости парциальных потоков компонентов оказывают влияние на величину разделения. Отработка опытного модуля разделения углеводородных газов предполагает определение точности настроек по давлениям и скоростям установки. Поэтому вопросы зависимости разделения смеси от скорости встречного потока важны для создания опытно промышленного способа диффузионного разделения газовых смесей.

Часть результатов приведенных в работе была получена при финансовой поддержке гранта Комитета Науки МОН РК № 3482/ГФ4.

1. Косов В.Н., Селезнев В.Д., Жаврин Ю.И. Эффект разделения компонентов при изотермическом смешении тройных газовых смесей в условиях свободной конвекции // ЖТФ. – 1997. – Т. 67, Вып. 10. – С. 139-140.
2. Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Красиков С.А. Исследование неустойчивого диффузионного процесса в изотермических трехкомпонентных газовых смесях в стационарных условиях // ЖТФ. – 1999. – Т. 69, Вып. 7. – С. 5-9.

3. Косов В.Н., Кульжанов Д.У., Жаврин Ю.И., Красиков С.А., Федоренко О.В. Особенности разделения углеводородных изотермических газовых смесей при конвективной диффузии / Под ред. чл.- корр. НАН РК, проф. В.Н. Косова. – Алматы: MV- Принт, 2014. – 144 с.
4. Предварительный патент РК № 6359 / Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Красиков С.А. – Оpubл. 15.07.1998, – бюл. № 6.
5. Патент РК № 26884. Устройство разделения газовой смеси / Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Красиков С.А., Федоренко О.В. // Промышленная собственность. – 2013. – Бюл. № 12 б. – С. 129.
6. Патент РК № 26885. Способ разделения газовой смеси / Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Красиков С.А., Федоренко О.В. // Промышленная собственность. – 2013. – Бюл. № 12 б. – С. 129-130.
7. Инновационный патент РК № 28071. Способ разделения газовой смеси / Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Красиков С.А., Федоренко О.В. // Промышленная собственность. – 2014. – Бюл. № 1. – С. 26.
8. Инновационный патент РК № 30416. Устройство для разделения газовой смеси / Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Красиков С.А., Федоренко О.В. // Промышленная собственность. – 2015. – Бюл. № 10 (I). – С. 49.
9. Royarkov I.V., Zhavrin Yu.I., Kosov V.N., Kulzhanov D.U. Research by a fixed method mass-exchange of a binary gas mixture in a counter stream a pure component in a condition of diffusion instability // Problem of evolution of open systems. – 1999. – Vol. 1. – P. 72-78.

***Аңдатпа.** Эртүрлі жылдамдықтардағы үшінші компоненттік кезікпе агымға бинарлы газды қоспалардың конвективті араласуы бойынша тәжірибелік мәліметтер алынды. Дамыған конвекция жағдайында тығыздығы бойынша ең ауыр қоспа құраушының бөліну көлеміне қатысты кезікпе агым жылдамдығының ықпалы анықталды. Осыған орай, көмірсутегі газдардың бөлінуінің тәжірибелі модулін өңдеуде қысым мен жылдамдықты теңшеумен қамсыздандырудың маңыздылығы нақтыланып көрсетілген. Бөліну модулінің көрсеткіштерін теңшеу үшін ережелерді анықтау бөліну үрдісінің маңызды факторы болып табылады. Көмірсутегі газдар қоспаларының диффузиялық бөлінуінің тәжірибелік өнеркәсіптік әдістерін құру үшін бөліну модулі көрсеткіштерінің ережелері тұжырымдалды.*

***Түйін сөздер:** газдар, диффузия, қоспалар, бөліну, агым.*

***Abstract.** Experimental data on the convective mixing of binary gas mixtures in a counter flow of the third component at its different speeds are obtained. The influence of counter flow speed on the separation value of the density heaviest component of mixture in the developed convection conditions is determined. Thereby the importance of assurance of adjustment accuracy on the pressures and speeds at the development of prototype separation module of the hydrocarbon gases is shown. A significant factor in the optimization of separation process is to determine the requirements for the parameters setup of the separation module. The definition of requirements for the parameters of separation module is necessary for the creation of the pilot industrial way for the diffusion separation of the hydrocarbon gas mixtures.*

***Keywords:** Gases, diffusion, mixtures, convection, separation, flow.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО
ИЗУЧЕНИЮ КИНЕТИКИ ДИФФУЗИОННЫХ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ В ПОЛИФАЗНЫХ КЕРАМИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ

(г.Алматы, Казахский национальный педагогический университет имени Абая)

Аннотация. В статье рассмотрена кинетика неизотермических диффузионных процессов дегидратации в капиллярно-пористых модельных образцах (пластина, цилиндр, шар). В качестве объекта исследования использованы модельные образцы, изготовленные методом пластического формования из монокристаллической глины. Приведены результаты изучения кинетики неизотермических диффузионных процессов дегидратации, протекающие в этих образцах при различных условиях. Результаты исследования получены путем проведения компьютерных вычислительных экспериментов. Приведенные результаты получены при заданных условиях однозначности.

Ключевые слова: кинетика, неизотермический процесс, диффузия, капиллярнопористый материал, модельный образец.

Исследование сложных процессов переноса при физико-химических превращениях в капиллярнопористых, в частности полифазных керамических, материалах имеет важное научно-практическое значение.

Рассмотрим механизм диффузионных процессов дегидратации кристаллически связанной воды при обжиге капиллярнопористых керамических материалов. Согласно существующей теории твердофазных процессов(реакций) [1] они протекают по зональному механизму. Экспериментально установлено, что диффузионные процессы дегидратации кристаллически связанной воды сначала протекают на внешней поверхности тела, а затем по достижению соответствующих температурно – газовых условий, локализованная реагирующая поверхность с определенной скоростью углубляется внутрь образца. При этом образовавшееся газообразное вещество переносится через слой твердого продукта реакции, в данном случае через наружный капиллярнопористый слой твердого тела в окружающую среду и претерпевает резкое расширение. При этом скорость и продолжительность данного явления ограничивается характером диффузионных процессов.

В качестве математической модели для описания изотермических диффузионных процессов дегидратации кристаллически связанной воды из керамических образцов(пластина, цилиндр, шар) можно использовать следующие кинетические уравнения [2-5]:

$$\frac{(1-U)^2}{2} = \frac{D_{эф} \cdot \tau}{R^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} [U \ln U + (1-U)] = \frac{D_{эф} \tau}{R^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{3}(1-U) - U^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{D_{эф} \cdot \tau}{R^2} \quad (3)$$

где, $D_{эф}$ -эффективный диффузионный коэффициент; τ - время; U - относительная масса связанного вещества(в нашем случае кристаллическая вода); R - определяющий размер, для пластины - половина толщины, для цилиндра и шара - радиус.

Правая сторона выше приведенных уравнений (1)–(3) является критерием Фурье (Fo_m) для процесса массопереноса:

$$Fo_m = \frac{D_{\text{эф}} \cdot \tau}{R^2} \quad (4)$$

Тогда уравнения (1),(2) и (3) можно написать в следующей критериальной форме:

$$\frac{(1-U)^2}{2} = Fo_m; \quad (5)$$

$$\frac{1}{4}[U \ln U + (1-U)] = Fo_m; \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{3}(1-U) - U^{\frac{2}{3}} \right] = Fo_m \quad (7)$$

Продолжительность рассматриваемых диффузионных процессов в образцах, при условии $U=0$, соответствует значению критерия Фурье, соответственно пластина $Fo_m = \frac{1}{2}$

цилиндр $Fo_m = \frac{1}{4}$, шар $Fo_m = \frac{1}{6}$.

Особенностью неизотермического режима является то, что эффективный диффузионный коэффициент изменяется в зависимости от температуры. Температурную зависимость данного коэффициента можно описать следующей известной формулой:

$$D_{\text{эф}} = D_0 * e^{-E/R_g T} \quad (8)$$

где, D_0 -потоянная величина для данного процесса; E - энергия активации; R_g -газовая постоянная; T -температура.

Для исследуемого образца из монотермитовой глины экспериментальным путем были определены следующие величины: $D_0 = 2.51 \cdot 10^3 \text{ см}^2 / \text{мин}$; $E=90000 \text{ Дж/моль}$ [4].

Учитывая выше приведенные выражения, из уравнений (1),(2) и (3) можно получить приближенные кинетические уравнения для описания кинетики неизотермических диффузионных процессов, соответственно для пластины, цилиндра и шара:

$$\frac{(1-U)^2}{2} = \frac{D_0 * e^{-E/R_g T} \cdot \tau}{R^2}; \quad (9)$$

$$\frac{1}{4}[U \ln U + (1-U)] = \frac{D_0 * e^{-E/R_g T} \cdot \tau}{R^2}; \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{3}(1-U) - U^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{D_0 * e^{-E/R_g T} \cdot \tau}{R^2}. \quad (11)$$

Керамические образцы нагревались по линейному закону:

$$T = \mathcal{U}_T \tau + T_n, \quad (12)$$

где \mathcal{U}_T – постоянная скорость нагревания, T_n -начальная температура.

Учитывая выше сказанное (12), уравнения (9),(10) и (11) можно переписать в

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

следующей форме:

$$\frac{(1-U)^2}{2} = \frac{D_0 * e^{-E/R_z(\nu_T\tau+T_0)} \cdot \tau}{R^2} \quad (13)$$

$$\frac{1}{4}[U \ln U + (1-U)] = \frac{D_0 * e^{-E/R_z(\nu_T\tau+T_0)} \tau}{R^2} \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{3}(1-U) - U^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{D_0 * e^{-E/R_z(\nu_T\tau+T_0)} \cdot \tau}{R^2} \quad (15)$$

Таким образом, используя уравнения (13),(14) и (15) в качестве алгоритма были проведены компьютерные вычислительные эксперименты по изучению неизотермических диффузионных процессов при обжиге модельных керамических образцов(пластина, цилиндр, шар) из монотермитовой глины. Для исследования и анализа кинетики диффузионных процессов массопереноса составлена программа в среде Origin.

Вычислительные эксперименты проводились при следующих условиях однозначности.

Физические условия. Объектами исследования служили модельные образцы(пластина, цилиндр, шар), полученные путем пластического формования из монотермитовой глины. Образцы обжигались при различных скоростях нагревания ($\mathcal{Q}_1 = 3K/мин$, $\mathcal{Q}_2 = 5K/мин$, $\mathcal{Q}_3 = 7K/мин$).

Эффективный коэффициент диффузии при нагревании исследуемых образцов определялись по формуле (8).

Геометрические условия. Исследованию подвергались образцы в форме пластины, цилиндра и шара, заформованные со следующими параметрами(толщина и диаметр образца):

$$d_1 = 2r_1 = 2см, \quad d_2 = 2r_2 = 4см, \quad d_3 = 2r_3 = 6см.$$

Краевые условия. До начала процесса ($\tau=0$) относительная масса во всех слоях образца являются одинаковыми и постоянными: $U(0, x) = 1 = const$ (начальное условие). В исследованиях рассматривается одномерная симметричная задача диффузионного массопереноса при граничных условиях первого рода. При $\tau > 0$ значение относительной массы связанного вещества(кристаллическая вода) на поверхностных слоях образца(в связи с быстротечностью реакции(дегидратация)) будет равна нулю ($U=0$) и остается постоянным.

Вычислительные эксперименты по изучению кинетики диффузионных процессов в исследуемых образцах из монотермитовой глины в неизотермических условиях проводились при температурах 800 К и выше(область дегидратации).

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что характер кинетических кривых диффузионных процессов для всех рассматриваемых режимов нагрева качественно схожий, но значительно отличаются количественными значениями. Это объясняется тем, что изучаемые процессы описываются одной общей закономерностью и протекают по зональному механизму.

Полученные результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы при определении оптимальных режимов обжига капиллярнопористых керамических образцов различной формы из данного природного глинистого сырья. Кроме этого, в области образования возможно организовать лабораторные практикумы, позволяющие

всестороннее изучить сложные диффузионные физико-химические процессы при термической обработке керамических материалов.

1. Будников П.П., Гинстлинг А. Реакции в смесях твердых веществ.-М.: Стройиздат, 1971.-488с.,ил.
2. Кулбеков М.К. Моделирование и исследование диффузионной кинетики горения углерода при обжиге топливосодержащей керамики в промышленных условиях// Журнал прикладной химии.-1992.т.65, №1., с.126-130.
3. Кулбеков М.К. К теории диффузионной кинетики параллельных твердофазных процессов при обжиге топливосодержащей керамики// Журнал прикладной химии.- 1992.т.65. №12, с.2689-2694.
4. Кулбеков М.К. О зональном механизме и кинетике диффузионных процессов при обжиге керамики из монтмориллонитовой глины// В кн.: Наука в учебном процессе.- Сборник материалов научной конференции ППС и аспирантов. Часть 1. Алма-Ата,1990.
5. Кулбек М.К. и др. Термодинамика сложных параллельно протекающих процессов переноса в технологии силикатных материалов // В кн: Строительные материалы XXI века. Технология и свойства. Импортзамещение.- Алматы, 2001, кн. 2, с.7-12.

Аңдатпа. Ғылыми мақалада қылтүтікқуысты моделді үлгілерде(пластина, цилиндр, шар) изотермиялық емес жағдайда жүретін дегидратация процесінің кинеткасы қарастырылған. Зерттеу объектісі ретінде монотермитті шикізаттан пластикалық формалау әдісімен дайындалған моделді үлгілер алынды.Осы үлгілерде изотермиялық емес жағдайда жүретін дегидратация диффузиялық процесстерінің кинеткасы оқып ұйрену нәтижелері келтірілген. Нәтижелер компьютерның көмегімен сандық есептеу тәжірибелерін жүргізу арқылы алынған.

Түйін сөздер: кинетика, изотермиялық емес процес, диффузия, қылтүтікқуысты материал, моделді үлгілер.

Abstract. The article deals with the kinetics of non-isothermal diffusive processes of dehydration in capillary and porous model samples (a plate, the cylinder, a sphere) is considered. The model samples made by method of plastic formation of monotermitovy clay are used as object of research. The results of studying of kinetics of non-isothermal diffusive processes of dehydration proceeding in these samples under various conditions are given here. The results of research are received by carrying out computer computing experiments. The given results are received under the set unambiguity conditions.

Keywords: kinetics, not-isothermal process, diffusion, capillary and porous material, model sample.

М. Құлбекұлы

**ЕКІНШІ ТЕКТІ ФАЗАЛЫҚ ТҮРЛЕНУЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ
ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ**

(Алматы қ., Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті)

Аңдатпа. Ғылыми мақалада фазалық түрленулер теориясына қатысты мәселелер қарастырылған. Бірінші текті фазалық түрленулердің негізгі ерекшелігі ретінде жылу эффектілері аталып, оларды тасымалдау үдерістерімен байланыстыра сипаттаудың теориялық тәсілдері көрсетілген. Екінші текті фазалық түрленулер кезінде де жанана жылу эффектілерінің орын алу жағдайлары қарастырылған. Бұл эффектілердің физикалық себептері екінші текті фазалық түрленулер кезінде орын алатын меншікті жылу сыйымдылық (c_p), көлемдік жылулық ұлғаю (β) мен сығылу (α) коэффициенттерінің айтарлықтай аралықтарда секірмелі өзгерістерінің тасымалдау үдерістеріне тигізетін әсері арқылы түсіндірілген.

Түйін сөздер: фазалық түрленулер, жылу эффектілері, меншікті жылу сыйымдылығы

Табиғатта, техникада және технологияда фазалық ауысулар (түрленулер) – деп аталатын құбылыстар кеңінен орын алады. Сондықтан да бұл үдерістерді жан-жақты зерттеудің ғылыми – практикалық мәні зор. Бүгінгі қалыптасқан ғылыми көзқарас бойынша бұл үдерістер өздерінің ерекшеліктері бойынша бірінші және екінші текті фазалық түрленулер деп екі топқа бөлінеді [1,2]. Қандай да бір фазалық түрлену болмасын ол заттардың қасиеттерін сипаттайтын белгілі бір мәндерінің секірмелі түрде өзгеруімен өтетіні белгілі. Әдетте бірінші текті фазалық түрленулер барысында заттың меншікті көлемі, осыған орай тығыздығы өзгеріп, олар белгілі бір жылудың жұтылуымен немесе бөлінуімен жүреді. Бірінші текті фазалық түрленулердің жарқын мысалы ретінде заттардың агрегаттық күйлерінің (қатты, сұйық, газ) өзгеруіне байланысты жүретін үдерістерді атауға болады. Бірінші текті фазалық түрленулерді термодинамиканың екінші бастамасының салдары ретінде тұжырымдалған Клапейрон-Клаузиус теңдеуімен сипаттауға болатыны белгілі.

Екінші текті фазалық түрленулердің негізгі ерекшеліктері – оның барысында меншікті көлемнің өзгеруі болмайды да, жылудың жұтылуы немесе бөлінуі орын алмайды. Бірақ екінші текті фазалық түрленулер барысында заттардың жылу сыйымдылығының, сығылғыштығының, жылулық ұлғаю коэффициенттерінің т.б. мәндерінің секірмелі өзгерістері орын алатындығы белгілі.

Екінші текті фазалық түрленулердің мысалы ретінде темірдің, никелдің, кобальттің немесе кейбір магниттік қоспалардың ферромагниттік күйден парамагниттік күйге көшулерін айтуға болады. Бұл ауысулар материалдарды қыздыру барысында Кюри нүктесі – деп аталатын белгілі температура мәндерінде жүзеге асырылады. Екінші текті фазалық түрленулер жағдайында Клапейрон-Клаузиус теңдеуі өз мағынасын жоғалтады да бұл үдерістерді сипаттауда қазіргі кезде белгілі дәрежеде Эренфест қатынастары қолданылуда.

Енді осы айтылғандарды термодинамикалық тұрғыдан қысқаша тұжырымдасақ. Түрленулер барысында меншікті термодинамикалық потенциал $\phi(T,P)$ үздіксіз қалады да, әдетте оның туындыларының үздіксіздігі бұзылады. Бірінші текті фазалық түрленулерде бұл функцияның $\phi(T,P)$ бірінші туындысы секірмелі өзгереді. Ал, екінші текті фазалық түрленулерде оның бірінші туындысы үздіксіз қалып, тек екінші туындысы секірмелі өзгеріске ұшырайды. Фазалық түрленулердің бірінші және екінші

текті болып аталынуларының да бір төркіні осында жатыр. Осы айтылғандарға орай мына өрнектерді жазуға болады [1]:

$$s = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right)_P, \quad v = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial P}\right)_T. \quad (1)$$

Сонымен бірінші текті фазалық түрленулер меншікті энтропияның (s) және меншікті көлемнің (v) секірмелі өзгерістерімен сипатталады екен. Ал бұл өзгерістер кезіндегі меншікті фазалық түрлену жылуын (q) былай анықтауға болады

$$q = T (s_2 - s_1). \quad (2)$$

Екінші текті фазалық түрленулер кезінде (1) өрнектегі s және v мәндері үздіксіз қалады, яғни бұл үдерістерде жылу эффектілері орын алмайды деген сөз. Мұндай фазалық ауысулар кезінде меншікті термодинамикалық потенциалдың мынадай екінші туындыларының үзілуі орын алады:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} = -\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = -\frac{c_p}{T}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial P} = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial P^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T. \quad (3)$$

Бұл өрнектерден байқағанымыздай екінші текті фазалық түрленулер мынадай шамалардың (параметрлер) секірмелі өзгерістерімен байланысты жүреді екен:

1. Меншікті жылу сыйымдылық $-c_p$;
2. Көлемдік жылулық ұлғаю коэффициенті

$$\beta = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad (4)$$

3. Заттың (үлгі) изотермиалық сығылу коэффициенті

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T. \quad (5)$$

Бүгінгі күні бірінші текті фазалық түрленулерге қарағанда екінші текті ауысулар теориясының ғылыми тұрғыдан әлі толық қалыптаспай отырғандығын атап өткен жөн. Осыған байланысты төменде осы кезге дейінгі жүргізіліп келе жатқан ғылыми-зерттеу жұмыстарымыздың нәтижелеріне [3-6] сүйене отырып бұл құбылыстарға қатысты жасалған бір қатар тұжырымдарды келтіруді жөн көрдік. Сонымен бүгінгі ғылыми көзқарас бойынша бірінші текті фазалық түрленулер жылуды жұту немесе бөлу, яғни жылу эффектілерімен (эндотермиялық немесе экзотермиялық) байланысты жүретін болса, ал екінші текті фазалық ауысулар мұндай құбылыстар мен байланысты болмайды екен. Дегенмен екінші текті фазалық түрленулер кезінде заттың (жүйенің) жоғарыда айтылған термодинамикалық коэффициенттерінің (c_p , β , α) айтарлықтай өзгерістері жанама жылу эффектілерінің орын алуына әкеп соғуы мүмкін. Бұл айтылғандарды фазалық түрленулерді тасымалдау үдерістерімен байланыстыра қарастырғанда жақсы байқауға болады. Мәселені әуелі бірінші текті фазалық ауысуларға байланысты қарастырып көрейік. Айталық бір дененің (үлгінің немесе жүйенің) бойында қыздыру барысында бір мезетте жылудың тасымалдануы, бірінші текті фазалық түрлену (жылу эффекті), диффузиялық масса тасымалдану және жылулық ұлғаю (немесе шөгу) сияқты табиғаттары әр түрлі төрт үдеріс қабаттаса жүріп жатыр делік. Сонда қайтымсыз үдерістер термодинамикасының негізін құрайтын Онзагер теориясының принциптеріне сәйкес қорытқы жылу ағынына қатысты мынадай теңдеуді жазуға болады [7-9]

$$q = L_{11}X_1 + L_{12}X_2 + L_{13}X_3 + L_{14}X_4, \quad (6)$$

мұндағы L –кинетикалық коэффициенттер (ортаның қарастырылып отырған ағынды өткізу қабілетін сипаттайды), X –термодинамикалық (қозғаушы) күштер.

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

Келтірілген (6) теңдеудің оң жағындағы бірінші мүше негізгі күшке қатысты жылу ағынын, ал екінші-фазалық түрленуге, үшіншісі диффузияға, төртіншісі жылулық ұлғаюға (деформация) қатысты қосымша ағындарды сипаттайды. Осындай теңдеулерді аталған ағындардың әрқайсысы үшін жазуға болады (q_2, q_3, q_4). Полифазалық жүйелердегі қабаттаса жүретін күрделі тасымалдау үдерістерін жан-жақты зерттеу нәтижелері [3-6] жүйедегі (денедегі) қосымша термодинамикалық күштердің X_2, X_3, X_4 (ағындардың) негізгі ағынға (мысалы жылу ағыны) әсерін термодинамикалық коэффициентер мен күштердің эффективті мәндері арқылы ($L_{эф}, X_{эф}$) сипаттауға болатындығын көрсетті

$$q_{эф} = L_{эф} X_{эф}. \quad (7)$$

Шын мәнінде мұндай күрделі тасымалдау үдерістері кезінде тәжірибеші потенциалдың эффективті мәндерін, яғни қабаттаса жүріп жатқан басқа үдерістердің әсерін ескеретін потенциал (мысалы температура) өрістерін, осыған сәйкес термодинамикалық коэффициенттердің (мысалы температураөткізгіштік- $a_{эф}$) де эффективті мәндерін анықтай алатындығы белгілі.

Егер қарастырып отырған жүйені қайта қыздыру барысында алғашында жүріп өткен қайтымсыз үдерістер орын алмаса, яғни тек қана бір үдеріс ($q=L_1 X_1$) жүретін болса, онда мына өрнектер арқылы қабаттаса жүретін қосымша үдерістердің әсерлік мәнін былай бағалауға болар еді

$$\Delta q_{эф} = q_{эф} - q = L_{эф} X_{эф} - L_1 X_1, \quad (8)$$

$$\frac{q_{эф}}{q} = \frac{L_{эф} X_{эф}}{L_1 X_1}. \quad (9)$$

Енді жоғарыда келтірілген теориялық мәселелерді нақты бір жағдай үшін, мысалы жылуөткізгіштік үдерісі үшін қолданып көрейік. Әуелі стационар жағдайды қарастырайық. Жүйенің бойында (денеде) тек жылуөткізгіштік үдерісі ғана жүрсе, оны сипаттау үшін Фурье теңдеуін қолдануға болатындығы белгілі

$$q = -\lambda \nabla T. \quad (10)$$

Ал егер оған қабаттаса бірнеше үдеріс (фазалық түрленулер, диффузия т.б.) жүретін болса, онда (7) теңдеуге сәйкес (10) теңдеуін эффективті мәндер арқылы жазуға болады.

$$q_{эф} = -\lambda_{эф} (\nabla T)_{эф}. \quad (11)$$

Бұдан қабаттаса жүріп жатқан басқа құбылыстардың жылу ағынына әсерін (8) және (9) теңдеулерге сәйкес былай анықтауға болады.

$$\Delta q_{эф} = \lambda_{эф} (\nabla T)_{эф} - \lambda \nabla T, \quad (12)$$

$$\frac{q_{эф}}{q} = \frac{\lambda_{эф} (\nabla T)_{эф}}{\lambda \nabla T}. \quad (13)$$

Осы жағдайларға сәйкес стационар емес үдерістер үшін былай жазуға болады [3-9]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 T; \quad (14)$$

$$c_{эф} \rho \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_{эф} = \lambda_{эф} (\nabla^2 T)_{эф}, \quad (15)$$

немесе $a_{эф} = \frac{\lambda_{эф}}{c_{эф} \rho}$ екенін ескерсек, (13) мына түрде жазуға болады

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_{эф} = a_{эф} (\nabla^2 T)_{эф}. \quad (16)$$

Бұл жағдай да жоғарыда келтіргендей амалдармен (12), (13) берілген (14)-(16) теңдеулерді пайдалана отырып қабаттаса жүріп жатқан басқа да үдерістердің (жылу эффектілері, диффузия т.б.) стационар емес жылу ағынына әсерін анықтап бағалауға болады.

Енді осы айтылғандарды екінші текті фазалық түрленулерге қатысты қарастырсақ. Бұл құбылыстар кезіндегі заттың (жүйенің) термодинамикалық коэффициенттерінің (ϵ, β, α) айтарлықтай өзгерістері тасымалдауға қатысты термодинамикалық күштердің (потенциал өрістерінің) өзгерістеріне, осыған сәйкес ағын (мысалы жылу ағыны) шамаларының да өзгерулеріне жағдай жасап, осылардың нәтижесінде қосымша жанама жылу эффектілеріне әкеп соғатыны дау тудырмаса керек. Олай болса екінші текті фазалық түрленулер кезінде ешқандай жылу эффекті орын алмайды - деп айтуға болмайды екен. Бір жағынан заттың (жүйенің) меншікті жылу сыйымдылығының екінші текті фазалық түрленулер кезінде айтарлықтай өзгеруі басқа да термодинамикалық коэффициенттерінің өзгеруіне әкеп соғатыны белгілі ($a_{\epsilon\phi} = \frac{\lambda_{\epsilon\phi}}{\rho \cdot c_{\epsilon\phi}}$). Сонымен қатар

жоғарыда келтірілген мәліметтерден аталған коэффициенттермен қатар екінші текті фазалық түрленулер барысында β және α параметрлерінің өзгеруі де қосымша жанама жылу эффектілерінің орын олуына әкеп соғатындығы анық.

Екінші текті фазалық түрленулер кезіндегі осындай жылу эффектілерінің тасымалдау үдерістеріне тигізер әсерлерін де жоғарыда келтірілген теориялық нәтижелермен сипаттауға болады екен.

1. Сивухин Д.В. Термодинамика и молекулярная физика. – М.:Наука, 1990. – 582 с.ил.
2. Құлбекұлы М. Молекулалық физика және термодинамика. – Алматы: Қарасай, 2006. – 248 б., ил.
3. Кулбеков М.К. К термодинамической теории теплопереноса, осложненного физико-химическими превращениями в полифазных капиллярнопористых материалах. – Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки», №1 (25), 2009.– с.104-108.
4. Кулбеков М.К. Теплообменные процессы в технологии керамических материалов.– В кн.: Строительные материалы XXI века. Технология и свойства. Импортзамещение., Алматы, 2001, с.53-58.
5. Кулбеков М.К., Хамраев Ш.И. К термодинамической теории сложных процессов теплопереноса в полифазных системах.– //Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования», 2008, №4, с. 72-75.
6. Кулбеков М.К. К термодинамике процессов газопереноса при фазовых и химических превращениях в теплотехнологии капиллярнопористых материалов. // Поиск. Серия естественных и технических наук. № 1(1)/2012. –с.135-139.
7. Пригожин И.Р. Введение в термодинамику необратимых процессов.–М.: ил, 1960.
8. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. –М.: Мир, 1967.–544с.ил.
9. Лыков А.В. Теплообмен. – М.:Энергия, 1978.–480с., ил.

***Аннотация.** В научной статье рассмотрены некоторые вопросы теории фазовых превращений. Показаны теоретические аспекты описания процессов переноса при тепловых эффектах, имеющих место при фазовых превращениях первого рода. Сделано обоснованное предположение о возможных проявлениях косвенных тепловых эффектов и при фазовых превращениях второго рода. Проявление таких эффектов при фазовых превращениях второго рода можно объяснить скачкообразными изменениями удельной теплоемкости (c_p), коэффициентов объемного теплового расширения (β) и объемного сжатия (α). Такие эффекты*

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

хорошо проявляются при изучении процессов переноса в присутствии фазовых превращений и первого и второго рода.

Ключевые слова: фазовые превращения, тепловые эффекты, удельная теплоемкость

Abstract. In the scientific article some questions of the theory of phase transformations are considered. Theoretical aspects of the description of processes of transfer at the thermal effects taking place at phase transformations of the first sort are shown. The reasonable assumption of possible manifestations of indirect thermal effects is made and at phase transformations of the second sort. Manifestation of such effects at phase transformations of the second sort can be explained a gallop with figurative changes of a specific teplotemnost (c_p), coefficients of volume thermal expansion (β) and volume compression (α). Such effects are well shown when studying processes of transfer in the presence of phase transformations and the first and second sort.

Keywords: phase transformations, thermal effects, specific heat

УДК 530.1:537.8

С.К. Тлеукенов, М.К. Жуkenов

МЕТОД МАТРИЦАНТА. ЕДИНОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДАХ С ВЗАИМНОЙ ТРАНСФОРМАЦИЕЙ УПРУГИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

(г. Астана, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
г. Павлодар, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова)

Аннотация. В работе определены законы преломления на границах анизотропных сред, обобщающие закон Снеллиуса для изотропного случая. Разработано единое описание поверхностных волн Лэмбовского типа в анизотропных упругих, диэлектрических, пьезоэлектрических, пьезомагнитных средах и в средах с магнитоэлектрическим эффектом. Одним из важных практических приложений волн Лэмба является их широкое использование при неразрушающем контроле, вследствие их дисперсии и незначительному затуханию. Получены предельные скорости упругих и электромагнитных волн в тонких слоях (пластинах).

Ключевые слова: Метод матрицанта, волновые процессы, упругие и электромагнитные поля, взаимная трансформация, поверхностные волны.

1. Метод матрицанта основан на приведении исходной системы уравнений движения упругой анизотропной среды и совместной системы уравнений упругой среды и уравнений Максвелла для пьезосред:

- упругая анизотропная среда:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}$$

- уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2}; \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \operatorname{div} \vec{B} = 0; \vec{j} = 0; \rho = 0$$

- определяющие соотношения; упругая среда:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)$$

- пьезоэлектрическая среда:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k ;$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k$$

- пьезомагнитная среда:

$$\sigma_{ij} = e_{ijkl} \varepsilon_{kl} - Q_{ijk} H_k ;$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j + Q_{ijk} \varepsilon_{jk}$$

- среда с магнитоэлектрическим эффектом:

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_j - \alpha_{ij} H_j$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j - \alpha_{ij} E_j$$

к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \quad (1)$$

Структура матриц коэффициентов B для упругих анизотропных сред

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{W} = (U, \sigma, V, \tau)^t$$

Структура матриц коэффициентов B для пьезосред

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ \pm i\omega b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & \pm i\omega b_{13} & b_{43} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & \pm i\omega b_{14} & 0 & b_{34} \\ \pm i\omega b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{W} = (U, \sigma, E, H)^t$$

Структура матриц коэффициентов B для сред с магнитоэлектрическим эффектом

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}, \vec{W} = (E_y, H_x, H_y, E_x)^t$$

При этом используется представление решения искомых полей в форме:

$$F(z, x, y, t) = f(z) e^{i\omega t - imx - iny} \quad (2)$$

B – матрица коэффициентов, – вектор столбец, имеющий в упругой анизотропной среде компоненты

$$\vec{W} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, U_y, \sigma_{yz})^t \quad (3)$$

в пьезосредах:

$$\vec{W} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, U_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)^t \quad (4)$$

Структура матриц коэффициентов, для всех рассмотренных классических феноменологических моделей сред, позволяет построить структуру матрицанта [5-6].

Структура матрицанта, есть линейная взаимнооднозначная зависимость между элементами прямого и обратного матрицантов.

Представление матрицанта (Гантмахер)

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

$$T = E + \int_0^z B(z_1) dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1) B(z_2) dz_1 dz_2 + \dots$$

$$T^{-1} = E - \int_0^z B(z_1) dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1) B(z_2) dz_1 dz_2 + \dots$$

В частности для матриц $B(2 \times 2)$:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}; T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{pmatrix} \quad (5)$$

В случае матриц $B(4 \times 4)$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix}; T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & t_{31} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Из (5) и (6) следуют инвариантные соотношения, включающие законы сохранения при рассматриваемом процессе. Инвариантные соотношения следуют из тождества:

$$T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = E$$

Структура матрицанта была определена, в общем случае, для систем уравнений $(2n \times 2n)$.

2. Из построения структуры матрицанта следует рекуррентное соотношение:

$$T^2 = 2\hat{p}T - E; \hat{p} = \frac{1}{2}(T + T^{-1}) \quad (7)$$

E – единичная матрица.

Полином Чебышева второго рода имеет вид

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x) = \frac{1}{2i} \left[\left(x + \sqrt{1-x^2} \right)^n - \left(x - i\sqrt{1-x^2} \right)^n \right]$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

Матричные полиномы:

$$\hat{p} = \frac{1}{2}(T + T^{-1}); T^2 = 2pT - E; P_n(p) = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} U_n(p)$$

Соотношение (7), приводит к аналитическому представлению матрицанта периодически неоднородного слоя на основе полиномов Чебышева-Гегенбауэра. Это представление является обобщением результатов работ Бриллюэна и Пароди для дискретных периодических структур:

$$T^n = P_n(\hat{p})T - P_{n-1}(\hat{p})$$

3. Аналитическое представление матрицанта периодически неоднородного слоя и свойства полиномов Чебышева-Гегенбауэра позволяют получить аналитическое решение исходных систем уравнений для широкого класса однородных анизотропных сред.

На основе этих решений рассмотрены задачи отражения/преломления, условия существования поверхностных волн, уравнения дисперсии волн Лэмбовского типа для различных моделей сред.

$$\vec{W}_0 + \vec{W}_R = \vec{W}_T;$$

$$\left(\frac{1}{2}E - R \right) \vec{W}_0 + \left(\frac{1}{2}E + R \right) \vec{W}_R = \left(\frac{1}{2}E - R_1 \right) \vec{W}_T;$$

$$\vec{W}_R = (R + R_1)^{-1} (R - R_1); \quad \vec{W}_R = G \vec{W}_0;$$

$$\bar{W}_T = (E + G)\bar{W}_0; \quad R = \frac{B - k\chi B^{-1}}{2i(k + \chi)};$$

Задача на собственные значения Волны Лэмбовского типа

$$\begin{pmatrix} U \\ 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix}_{Z=L} = T \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix}_{z=0}; \quad \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix}_{Z=L} = T \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix}_{z=0}$$

Показано их единое описание. Рассмотрены и получены хорошо известные предельные случаи для тонких слоев (предельные скорости) и толстых слоев (волны Рэлея и Гуляева-Блюштейна).

Лэмб: упругая среда ромбической симметрии; плоскость xz:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}; \quad b_{13} = im \frac{c_{13}}{c_{33}}; \quad b_{21} = -\rho\omega^2; \quad b_{24} = im; \quad b_{34} = \frac{1}{c_{55}};$$

$$b_{43} = -\rho\omega^2 + m^2 \left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right)$$

$$\frac{tg\chi h}{tgkh} = \left(\frac{\chi\Delta_1 b_{21} + k\Delta_2 b_{43}}{k\Delta_1 b_{21} + \chi\Delta_2 b_{43}} \right)^{\pm 1}$$

Поверхностные волны

$$\frac{tg\chi h}{tgkh} = \frac{th|\chi|h}{th|k|h} \rightarrow 1 \Rightarrow \Delta_1 b_{21} - \Delta_2 b_{43} = 0$$

Предельные скорости

$$\chi h \rightarrow 0; \quad kh \rightarrow 0; \quad \frac{h}{\lambda} \rightarrow 0$$

- упругая среда:

$$\oplus \Delta_2 b_{43} = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0 \Rightarrow c_{np}^2 = 0; \quad b_{43} = 0 \Rightarrow c_{np}^2 = \frac{c_{11}}{\rho} \left(1 - \frac{c_{13}^2}{c_{11}c_{33}} \right)$$

$$\ominus \Delta_1^2 = 0 \Rightarrow c_{1np}^2 = \frac{c_{11}}{\rho}$$

$$c_{2np}^2 = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\omega h c_{2np}}{2} \text{ следует из:}$$

$$1 + \frac{h^2}{3} \left(\chi^2 + k^2 + \Delta_2^2 \frac{b_{43}}{b_{21}} \right) = 0$$

-среда с магнитоэлектрическим эффектом:

$$\frac{tg\chi h}{tgkh} = \left(\frac{\chi\Delta_2 b_{12} + k\Delta_1 b_{43}}{k\Delta_2 b_{12} + \chi\Delta_1 b_{43}} \right)^{\pm 1}$$

$$\Delta_1^2 = b_{12}b_{34} + b_{14}^2; \quad \Delta_2^2 = b_{21}b_{43} + b_{23}^2$$

Поверхностные волны:

$$\Delta_1 b_{43} - \Delta_2 b_{12} = 0$$

Предельные скорости

$$\oplus \Delta_1 b_{43} = 0; \quad \Delta_1 \neq 0; \quad b_{43} = 0 \Rightarrow V_{np}^2 = \frac{\mu_z}{\mu_y \beta}$$

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

$$\ominus \Delta_1 b_{12} = 0; b_{12} \neq 0; \Delta_2^2 = 0; x^2 - 2bx + c = 0; x = \frac{1}{V^2}$$

$$b = \frac{1}{2}(\varepsilon_z \mu_y + \varepsilon_y \mu_z - 2\alpha_y \alpha_z), \quad c = (\varepsilon_y \mu_y - \alpha_y^2)(\varepsilon_z \mu_z - \alpha_z^2)$$

Заклучение.

Метод матрицанта позволяет создать единое описание волновых процессов в средах с взаимной трансформацией упругих и электромагнитных волн. Для классических моделей сред установлены структуры матрица коэффициентов и структура матрицанта: нормированной матрицы фундаментальных решений. В случае периодических структур получены обобщения результатов работ Бриллюэна и Паради, известных для дискретных периодических структур. Построены матрицы граничных условий и получены аналитические решения задач отражения и преломления на границе анизотропных сред с различными физико-механическими свойствами.

- 1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982 г.
- 2 Вайнштейн Б.К., Современная кристаллография. Том-4. Наука, 1979 г.
- 3 Тлеукунов С.К., Оспанов А.Т. Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. – Алматы: Наука, 1985. – 176 с.
- 4 Тлеукунов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград: Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1987. - Т.165. - С. 177-181.
- 5 Тлеукунов С.К. Метод матрицанта, Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004г., 148 с.
- 6 Tleukenov S. The structure of propagator matrix and its application in the case of the periodical inhomogeneous media. Abstr. Semin. on Earthquake processes and their consequences Seismological investigations. 1989. - Kurukshetra, India. - P. 4.

Аңдатпа. Жұмыста изотропты орталар үшін Снеллиус заңын жалтылайтын анизотропты орталардың шегіндегі сыну заңдары анықталды. Анизотропты серпімді, диэлектрлік, пьезоэлектрлік, пьезомагниттік және магниттоэлектрлік орталардағы Лэмб типті беттік толқындардың бірегей сипаттамасы өңделді. Лэмб толқындарының дисперсиясы мен өшу коэффициентінің аздығына байланысты, олардың маңызды пайдалану саласының бірі – бұзбайтын бақылау. Жұқа қабаттардағы (пластиналарда) серпімді және электромагниттік толқындардың шекті жылдамдықтары есептелді

Түйін сөздер: Матрицант әдісі, толқындық волновые процесстер, серпімді және электромагниттік өрістер, өзара трансформация, беттік толқындар.

Abstract. In work the Snell refraction laws on borders of anisotropics mediums generalizing a Snell's law for an isotropic case are defined. The uniform description of the ground waves of Lamb type in non-isotropic resilient, dielectric, piezoelectric, the pyezomagnitnykh and in environments with magnetoelectric effect is developed Wednesdays. One of important practical applications of waves of Lamb is their wide use at non-destructive monitoring, owing to their dispersion and to slight attenuation. The maximum speeds of elastic and electromagnetic waves in laminas (plates) are received.

Keywords: Matriciant method, wave processes, resilient and electromagnetic fields, the relative transformation, the ground waves

УДК 621.01

З.Г. Уалиев, Г. Уалиев, Н.Р. Хужаев*, Г.К. Избасарова*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(г. Алматы, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, * - магистрант)

Аннотация. В работе предлагается аналитический метод определения инерционных параметров механических систем с упругими элементами, у которых основное движение осуществляется за счет закрученных упругих валов и сжатых пружин. Постановка и решение обратной задачи динамики механических систем с существенно упругими звеньями позволяет автоматизировать процесс построения математических моделей систем независимого движения.

Ключевые слова: инерционные параметры, механическая система, уравнения движения, математическая модель, упругие звенья.

Наиболее распространенной механической системой являются многомассовые крутильно-колебательные системы. К ним относятся системы с сосредоточенными параметрами, соединенные между собой упругими безмассовыми участками валов. Эти системы могут быть цепные, а также разветвленные с постоянными и периодически изменяемыми параметрами [1]. Анализ движения сложных механических систем, особенно многомассовых крутильных колебательных систем с сосредоточенными и распределенными массами, к которым приводятся многие расчетные схемы технологических машин и автоматических линии, связан с задачей построения общих динамических моделей систем и локальных моделей систем с нелинейными функциями положения.

При составлении динамической модели исходят из предположений, что инерционные свойства системы отображаются массами m_{ij} или моментами инерции J_{ij} сосредоточенными в сечениях, которые соединены безинерционными упруго-диссипативными связями c_{ij} . Движение такой многомассовой крутильной системы описывается системой уравнений вида.

$$\|a_{ij}\| \{ \ddot{q}_j \} + \|b_{ij}\| \{ \dot{q}_j \} + \|c_{ij}\| \{ q_j \} = \{ Q_j \}, \quad (1)$$

Здесь $\|a_{ij}\|, \|c_{ij}\|$ - матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов, Q_j - обобщенные силы.

Инерционные коэффициенты a_{ij} каждого диска многомассовой механической системы зависят от значений приведенных к ним моментов инерции отдельных механизмов, т.е. $a_{ij} = f(J_{ij})$. Обобщенные координаты механической системы (1) могут выбираться различными способами. Как известно, каждый $J_{n_i}(q_i)$ определяется методом приведения масс из условия равенства кинетических энергий для каждого положения приводимого механизма, определяемого обобщенной координатой q_i звена приведения.

Если при решении прямой задачи динамики в первом приближении можно предполагать, что все элементы системы абсолютно жесткие, которые дают достаточную

ФИЗИКА. ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ФИЗИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ

для практики информацию об изменении параметров, то решение второй задачи в задаче динамического проектирования нельзя не учитывать упругие свойства элементов, силы трения и зазоры в кинематических парах и другие нелинейные характеристики механизма.

Построение математической модели таких систем связано с экспериментально-расчетным вычислением приведенных инерционных параметров многих передаточных и исполнительных механизмов. Поэтому следует разработать новые методики и подходы моделирования и автоматизации решения задач динамического анализа и синтеза сложных механических систем. Выбор способа решения уравнения движения зависит от характера действия заданных сил и от передаточных свойств механизма. При этом размеры, массы и моменты инерции звеньев должны быть известными или должны быть определены расчетными и экспериментальными методами. Однако возникает необходимость решения и обратной задачи, когда заданы кинематические характеристики движения машины и необходимо найти оптимальные значения масс моментов инерции, а следовательно и размеров звеньев, при которых механизмы нагружаемые заданными силами, двигались бы в требуемом режиме.

Например, для механизмов высоких классов (МВК), вопрос учета упругих свойств звеньев и трения в кинематических парах стоит абсолютно остро. Поэтому даже в идеальном механизме при постоянной скорости входного звена, скорости и ускорения остальных звеньев являются переменными, что приводит к появлению значительных инерционных нагрузок, которые накладываясь с внешними нагрузками могут привести к значительным деформациям звеньев. Связь между нелинейными характеристиками движения, как системы недеформированных элементов, и его линейными упругими деформациями выступает в качестве основной задачи динамики системы с упругими элементами. В большинстве выполненных к настоящему времени исследований эта задача формулируется в подвижной системе отчета, следующей за движением системы, состоящей из недеформируемых элементов. Относительно такой системы отчета и измеряются упругие деформации звеньев. В зависимости от того как связаны упругие перемещения с движением системы, с жесткими элементами, исследования их динамики можно разделить на две основные категории, использующие одноэтапные и двухэтапные методы.

В одноэтапных методах изучения движения механической системы с жесткими элементами малые упругие перемещения моделируются одновременно. Эти методы приводят к системам уравнений, решение которых описывают как «жесткое», так и малые упругие перемещения одновременно.

В двухэтапных методах на первом этапе выполняют расчет системы с недеформируемыми элементами, что определяет основное номинальное движение. Эти результаты используются в качестве входных данных второго этапа вычислений, которые дают упругие перемещения.

Двухэтапные методы обладают тем преимуществом, что всегда приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Их основной недостаток необходимость проведения двух независимых расчетов в сочетании с итерационным процессом, учитывающим изменение «жесткого» движения вследствие упругих перемещений звеньев. Одноэтапные методы приводят к смешанной системе алгебро-дифференциальных уравнений, которые требуют выполнения только одного расчета.

В быстроходных машинных агрегатах используются системы с существенно-упругими элементами. Процесс закручивания валов или сжатие пружин осуществляется за счет передаточных механизмов под действием движущего момента со стороны двигателя. Процесс разрядки происходит под действием потенциальной энергии закрученных валов или сжатых пружин. При этом движение таких исполнительных

механизмов с упругими звеньями не зависит от вращения главного вала машинного агрегата (системы независимого движения).

Часто, приводимые к сечениям общей модели машин, передаточные или исполнительные механизмы представляют систему с одной степенью свободы с жесткими звеньями. Движение такой системы с голономными связями описывается уравнением

$$J_n(\varphi)\ddot{\varphi}(t) + 0,5J_n(\varphi)\dot{\varphi}^2(t) = M_n, \quad (2)$$

где φ - угол поворота звена приведения.

Для определения инерционных коэффициентов динамической модели машин можно воспользоваться уравнениями движения отдельных приводимых к общему валопроводу механизмов вида (2). Значения приведенных моментов сил могут быть определены известными методами для каждого приводимого механизма. Законы движения, без учета колебательных явлений, динамических ошибок входных звеньев отдельных механизмов определяются из характеристики двигателя и функции положения. Использование уравнения движения исполнительных механизмов для определения приведенного момента инерции при построении общей динамической модели сложной машины, удобно при изучении движения так называемых механизмов независимого действия. Такие механизмы, у которых основное движение осуществляется за счет моментов упругих сил закрученных валов или сжатых пружин, часто встречаются в текстильных машинах [2]. Уравнение (2) может быть рассмотрено относительно функции $J_n(\varphi)$ как линейное дифференциальное уравнение первого порядка с коэффициентами $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$. Например, движение механизма боя станков автоматов [2], в процессе зарядки (закручивания) торсионного вала, можно описывать уравнением:

$$\dot{\varphi}^2(t)J_n'(\varphi) + 2\varphi(\ddot{t})J_n(\varphi) + k\varphi = 0 \quad (3)$$

где $\varphi(t)$ - угол поворота упругого вала, который определяется функцией положения системы и характеристикой двигателя. Закручивание упругих валов и сжатия упругих пружин, осуществляются в течение сравнительно большего времени чем времени разрядки упругих элементов. Решив уравнение (3) при известных начальных условиях можно определить значения приведенного момента инерции механизма для каждого положения [3].

Действительно, дифференциальное уравнение первого порядка относительно приведенного момента инерции исполнительного механизма имеет вид:

$$J_n'(\varphi) + \frac{2\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)}J_n(\varphi) = \frac{-k\varphi(t)}{\dot{\varphi}^2(t)}, \quad (4)$$

Решение уравнения (4) при $\dot{\varphi} \neq 0$ имеет вид:

$$J_n(\varphi) = e^{\int \frac{2\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} d\varphi} \left(C - k \int \frac{\varphi(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} e^{-2\int \frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} d\varphi} d\varphi \right)$$

Вычисляя отдельно интеграл:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} d\varphi = \int_{t_0}^t \frac{\ddot{\varphi}(t)\dot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} dt = \int_{t_0}^t \frac{d\dot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} = \ln \frac{|\dot{\varphi}(t)|}{|\dot{\varphi}(t_0)|},$$

получим:

$$J_n(\varphi) = e^{-2 \ln|\dot{\varphi}|} \left(C - k \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\varphi(t)}{\dot{\varphi}^2(t)} e^{2 \ln|\dot{\varphi}|} d\varphi \right) = \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\dot{\varphi}^2} \left(C - k \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varphi d\varphi \right) = \frac{C - k\varphi^2(t)}{2\dot{\varphi}^2(t)},$$

$\varphi(t)$ - определяется через функции положения между главным валом машинного агрегата и входным звеном исполнительного механизма с упругим элементом.

Поскольку положение системы в процессе разрядки (раскручивания) под действием закрученного упругого вала соответствует его положению при зарядке, полученные значения приведенного момента инерции и определяют инерционные характеристики системы при моделировании ее движения в процессе разрядки.

Таким образом, использование уравнения движения исполнительных и передаточных механизмов с существенно-упругими звеньями позволяет автоматизировать построение математической модели многомассовых механических систем.

1. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых машин. Л., 1976. с.430
2. Джолдасбеков У.А., Уалиев Г.У. Совершенствование механизмов прокладывания утка на многоцветных ткацких станках СТБ. М., 1986. с.192
3. Уалиев Г., Уалиев З.Г. Математическое моделирование динамики механических систем нелинейными характеристиками, Алматы, 2007 г., - 332 с.

Аңдатпа. Бұл мақалада күрделі механикалық жүйелердің қозғалыс заңдарын математикалық моделдеу арқылы анықтау мәселелері қарастырылады. Құрылымы айнымалы механикалық жүйелердің жалпы және локальды математикалық моделдерін құрудағы олардың дифференциалдық қозғалыс теңдеулерінің инерциялық коэффициенттерін анықтау әдістері келтірілген. Элементтері бұралып және созылып деформацияланатын механикалық жүйелердің математикалық моделдері қарастырылып, олардың инерциялық коэффициенттерін аналитикалық әдіспен анықтау келтірілген.

Түйін сөздер: инерциялық коэффициенттері, механикалық жүйелері, механикалық қозғалыс теңдеу, математикалық модел, серпімді денелер.

Abstract. In this article the analytical method of definition of the inertial parameters with elastic linkages is given. The main motion of the elastic linkages implements at the expense of torsion angle of elastic arbor and compressed springs. The task and solving of an inverse problem of mechanism's dynamic with the sufficient elastic linkages allow to automatize a process of the mathematical models building that represent mechanisms of an independent motion.

Keywords: inertial parameters, mechanical system, the equation of the movement, mathematical model, elastic links.

ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ.
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

ӘОЖ 681.3.06

А.Т. Бектемесов, А.Ж. Бурлибаев

МОДЕЛДІ ТЕКСЕРУ ӘДІСІНІҢ ҚОЛДАНУ АУМАҚТАРЫ ЖӘНЕ
ҚАРАПАЙЫМ ҮЛЕСТІРІЛГЕН АЛГОРИТМДЕРДІҢ ВЕРИФИКАЦИЯ
ҮШІН КҮРДЕЛІЛІГІ

(Алматы қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті)

Аңдатпа. Бұл мақалада программа верификациясының әдісі – моделді тексеріс арқылы Knight қарапайым логикалық есептің шешуі ұсынылады. Қойылған логикалық есептің верификация және моделді тексеріс арқылы шешімін табу үшін Spin жүйесі қолданылады. Сонымен қатар, қарапайым үлестірілген алгоритмдердің верификация үшін шолу жасалынады.

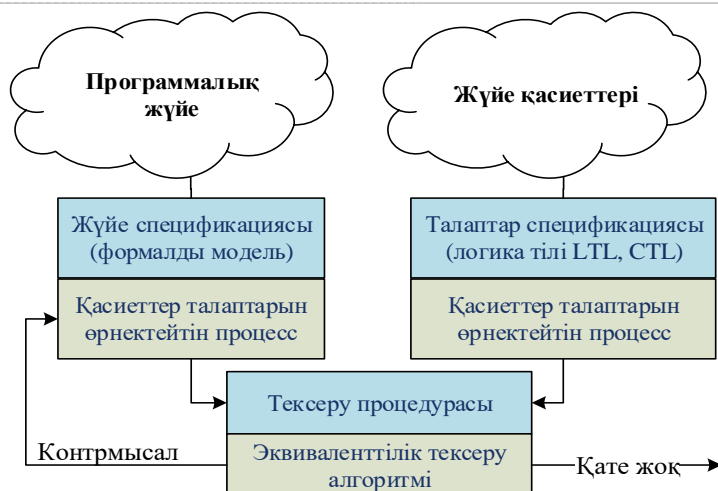
Түйін сөздер: Үлестірілген алгоритмдер, Nadoor, ВуМС, Spin, Promela, верификация, моделді тексеріс.

Программалардың мүмкін болатын барлық жағдайын тексеру осы уақыттағы шешілмей келетін мәселенің бірі болады. Шешімге жақындағанның бірі – моделді тексеріс әдісі (Model Checking) [1]. Компьютерлік программалардың дұрыс жұмысына толық кепіл беру моделді верификацияның басты мақсаты болады. Программалар қателері әр түрлі апаттарға әкеп соғады: табиғат ластану, финанстық шығындар, тіпті адам өлімі. Программаны модельді тексеру барысында сол программаның бүкіл жағдайларын тексереді. Ал тестілеу тек енгізілетін мәндерге ғана жауап қайтарады.

Анализ жұмыстарын жүргізу үшін программаның абстрактыланған формалды моделі құрылады. Тексерілетін қасиеттер немесе шарттар формалды математикалық тілінде мынадай логикалық қатынасы өрнектеледі: $M \models \phi$, белгілі бір ϕ бульдік формула M модельді қанағаттандырады. Бұл жердегі M , программа немесе алгоритмнің қысқартылған абстрактылы түрі - бульдік немесе Крипке структурасымен жасалған моделі, ал ϕ M моделдің тексерілетін қасиеттер моделі.

Верификация жұмысы абстрактыланған программа моделіне спецификация талаптарын тексеру болып табылады. Берілген программаның моделді алгоритмі және сол берілген программаға тексеру спецификациясы табылса, программаның қолданбалы автоматты верификация жүйесін құруға болады. Формалды тілдегі спецификацияны жүйе қолданушысы программаның тек қасиетін анықтайды [2] (Сурет 1).

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**



Сурет 1. Верификация жүйесінің алгоритмі

Верификациялау барысында программалық жүйенің немесе бір бөлігінің дұрыс есептемеуін дәлелдейміз. Ал моделді тексеру – верификация және тестілеу әдістерінің біріккен түрі болады. Тексерілетін программаны верификаторға салып бірден тексеруге болмайды, себебі программа қандай жүйемен құрылғанына немесе қарапайым есептердің циклдік қайталануына байланысты күйлер саны экспоненциалды өсуі мүмкін. Сондықтан шығарылатын есепті барынша абстракциялау қажет, яғни қысқарта отырып моделін құрамыз.

Spin верификаторының моделдік тілі – Promela (Promela – Process Meta Language, ағылшын тілінен *процесстік мета тілі*) [2]. Promela тілімен тек қателерді ғана емес сондай-ақ кері жору арқылы логикалық есептердің шешу жолын табуға болады.

Шахмат тақтасын ат жүрісімен толтыру есебін шешіп көрейік. Есеп шарты бойынша, "Г" шахмат ат жүрісімен $N \times N$ өлшемді шахмат тақтасын қайталамай барлық ұяшықтарынан өтіп шығу қажет. Мұндай логикалық есептерді Promela тілінде дұрыс моделдеуден кейін, LTL логикасы арқылы шешімін табуға болады. Біздің жағдайда есептің шешімі болатын LTL тұжырымды терістей отырып есеп шешімін контрмысал арқылы табамыз [3].

Бұл есептің псевдокоды келесіндей болады:

```
define K = 1; A[]=TRUE; A[I,J] = FALSE;
active proctype Knight(){
do
::I>2 && J<N && A[I-2, J+1] => I=I-2; J=J+1; A[I, J]=FALSE; K++;
::I>2 && J>1 && A[I-2, J-1] => I=I-2; J=J-1; A[I, J]=FALSE; K++;
... /* барлық 8 вариантын тексеріп шығамыз */
:: K==N*N => break
od}
```

Бұл есепке мынадай шешім жоқ деп шарт қоямыз:

«Келешекте шахмат тақтасы толығымен ат жүрісімен толады» - деген спецификациялық тұжырымын LTL формуласына салсақ:

$\diamond (K == (N*N))$

Яғни бұл есеп үшін қойылған LTL шартымыз мүлдем орындалмайды деген

терістеумен Spin жүйесіне саламыз. Мұндағы K есептеуіш предикаты барлық жағдайдағы тақта толатын жолын табады.

LTL формуласының Promela тіліндегі never claim шарты мынадай түрде болады:

```
never { /* <>(K==(N*N)) */
TO_init:
do
:: atomic { ((K==(N*N))) -> assert(!((K==(N*N)))) }
:: (1) -> goto TO_init
od;
accept_all:
skip
}
```

Егер шешім бар болса Spin верификаторы контрмысалмен қателік жолын көрсетуі керек. Кері жорығанымыз үшін бұл контрмысал дұрыс шешім болады.

```
never claim generated from (LTL formula n's starter (loop/last))
assert! assertion violated (1,0x=193) (at depth 432)
assert! write height (val).

Spin Version 5.4.3 - 1 January 2016
Warning: Search not completed
+ Partial Order Reduction

Bit statebook search for:
never claim          + (never 0)
assertion violation  + (if within scope of claim)
acceptance cycles    + (fairness disabled)
invalid end states   - (disabled by never claim)

State-vector 66 bits, depth reached 785, errors: 1
23712 states, stored
4233 states, matched
242843 transitions (= stored+matched)
0 atomic steps

Hash factor: 594.423 (best if = 100.)

bits set per state: 3 (-k1)

Data on memory usage (in Megabytes):
21.765  maximum memory usage for states (stored*(state-vector + overhead))
16.306  memory used for hash array (-w1)
0.816   memory used for bit stack
0.134  memory used for BFO stack (-ms1000)
16.467  total actual memory usage

run: elapsed time 0.18 seconds
run: rate 1841766 states/second
```

a)

```
MSC: first  MSC: fourth
MSC: started 0  MSC: visited 0
MSC: 1 0 3 3 1  MSC: 1 1 1 4 4 18
MSC: fourth  MSC: sixth
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 2 1 0 5 3  MSC: 1 3 1 4 4 18
MSC: third  MSC: sixth
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 2 3 0 4 4  MSC: 1 4 1 2 4 13
MSC: fourth  MSC: fourth
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 3 2 1 4 3  MSC: 1 3 1 4 4 18
MSC: second  MSC: first
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 1 3 0 4 4  MSC: 1 1 1 1 4 17
MSC: seventh  MSC: fourth
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 0 3 3 1 7  MSC: 1 3 1 4 4 18
MSC: eighth  MSC: sixth
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 3 1 0 4 4  MSC: 1 4 1 2 4 13
MSC: third  MSC: first
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 3 2 1 4 3  MSC: 1 3 1 4 4 18
MSC: sixth  MSC: second
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 4 2 1 4 10  MSC: 1 0 1 4 4 24
MSC: second  MSC: eighth
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 3 3 0 4 11  MSC: 1 1 1 2 4 22
MSC: first  MSC: seventh
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 0 3 1 4 13  MSC: 1 0 1 4 4 24
MSC: eighth  MSC: third
MSC: visited 0  MSC: visited 0
MSC: 1 3 2 1 4 3  MSC: 1 3 1 4 4 18
```

b)

Сурет 2. LTL тұжырымы бойынша моделді верификация нәтижелері:

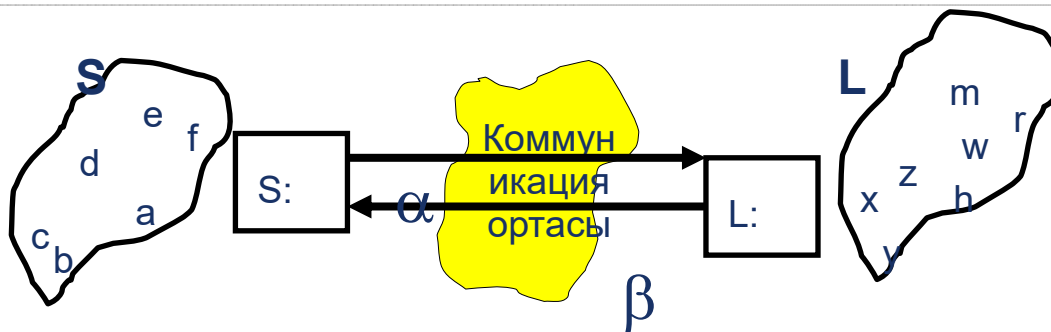
- a) 1 қате never_0 нақтылау бойынша табылды;
- b) контрмысал. Есептің шешілу жолы.

Контрмысал нәтижесі – есебіміздің дұрыс шешім жолы болады (2, b-сурет). Верификатор есептеуіші бойынша, циклдің 633-ші детерминисттік емес қадамында дұрыс шешімі анықталды.

Бүгінгі таңда үлестірілген алгоритмдер көптеген программалық жабдықтарда немесе жүйелерде жиі кездеседі [4]. Сонымен қатар, технологияның қарқынды дамуы күрделі программалардың да дамуына тікелей қатысты екені белгілі. Алайда, үлестірілген алгоритмдердің және параллельді программалардың дұрыс жұмыс жасауы да қиындай бермек [5]. Логикалық қателер тіпті қарапайым алгоритмдерде бірнеше болуы мүмкін.

Мысалы, Дейкстраның қарапайым протоколында жиынды үлкен және кіші екі топқа бөледі. Параллельді жұмыс жасайтын бұл алгоритмде 3 қате бар: инициализацияда екі процесс бір-бірін күтеді, сондықтан кез-келені бос ақпарат жіберуі тиіс; егер жиында үш бірдей сан кездесе алгоритм мәңгі циклға түседі; ақпараттарды тасымалдау әдісі қабылдау және жолдау (send-receive) болғандықтан, егер, біреуі тоқтап қалған жағдайда екінші процесс шексіз күтуде болады [6].

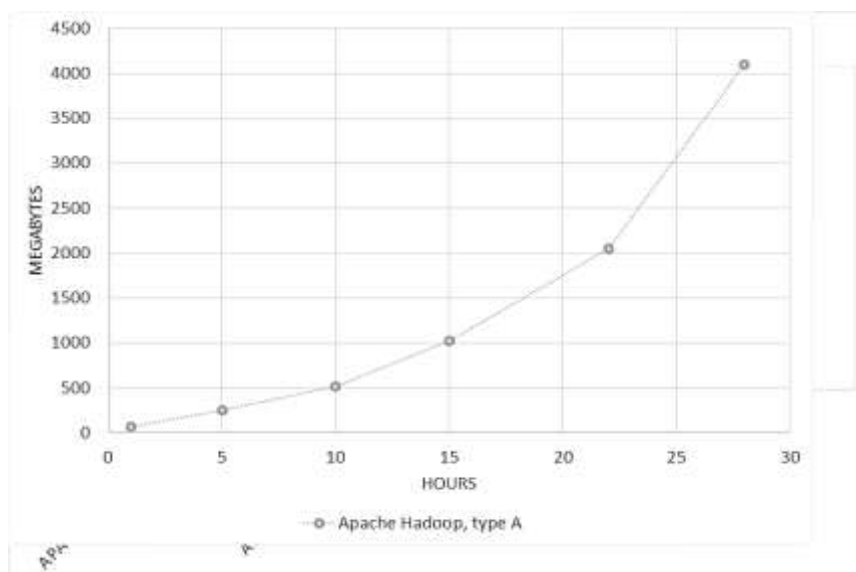
**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**



Сурет 3. Дейкстра жіктеу протоколы. α , β - ақпарат тасымал каналдары. S, L жіктелу жиындары

Parsing үлестірілген алгоритмінің жұмысын қарастырайық. Parsing алгоритмінің атқаратын қызметі - үлкен ақпараттарды өңдеу. Алгоритм қарапайым, алайда, параллельді-үлестірілген алгоритмі күрделі болмақ. Айталық, Hadoop жүйесінде үлестірілген алгоритм бойынша әр 16 есептеу түйіндеріне, шамамен, 4Gb жуық 209 мың pdf файлдарын өңдеу 25 сағаттан артық уақытқа созылған (Сурет 4) [7]. Егер жай тізбектелген программаға салатын болсақ $16 \cdot 25 = 400$ сағат, яғни 16 тәуліктен аса уақытқа созылатыны белгілі. Сондықтан есептеу машиналарына үлестірілген нұсқасы тиімді болғаны анық. Бірақ, бұл күрделі программа қаншалықты дұрыс жұмыс атқаратыны әлі белгісіз. Моделді тексеріс арқылы параллельді алгоритмнің логикасына үңіліп көрелік. Parsing алгоритмі келесі қадамдардан тұрады:

1. Ең алғашқы сөйлемді анықтап 2-ші қадамға өтеді.
2. Сөйлемді тіркейді. алғашқы сөзді тауып 3-ші қадамға өтеді.
3. Табылған сөзді сақтайды.
4. Табылған сөздің қанша рет кездесетінін анықтайды.
5. Егер сөйлем бітпесе сол сөзге келесі сөзді жалғап 4-ші қадамға өтеді. Егер де сөйлем аяқталса 6-шы қадамға өтеді.
6. Егер табылған сөз тіркесі сөйлемде ең соңғы болмаса, онда осы сөйлемдегі келесі сөзді анықтап 3-ші қадамға өтеді. Егер соңғы болса 7-ші қадамға өтеді. Егер текст бітпесе, онда келесі сөйлеммен 2-ші қадамға қайтады.



Сурет 4. Parsing программасын Hadoop жүйесінде үлестіріліп 209 мың pdf файлдарды өңдеудегі уақыт нәтижесі

Мұндай үлестірілген программаларды тексеру және оның жұмысына жоғары кепіл беретін верификатор жүйесінің бірі ВуМС болып табылады. Австрияның техникалық университеті жанындағы Formal Methods in System Engineering ғылыми зерттеу институты басшылығы қолдауымен жасалған верификатор - бірнеше жылдық еңбектің жемісі болды [8].

Бұл жұмыс грант № 5033/ГФ-4 ҚР БҒМ Ғылым Комитеті қолдауымен орындалды.

1. Карпов Ю. Г., Model Checking: Верификация параллельных и распределенных программных систем // БХВ-Петербург – Санкт-Петербург, – 551 с. 2010.
2. Clarke E. M., Grumberg O., Peled D.A. Model Checking // The MIT Press. – London, England, 155– 165. 1999.
3. Бектемесов А.Т. Компьютерлік программаларды spin верификаторында симуляциялау және верификациялау // Халықаралық ғылыми-практикалық конференция (международная научно-практическая конференция) «Мектепте және жоғары оқу орындарында математиканы, физиканы және информатиканы оқытуды жетілдіру мәселелері», Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, 188-192 б. 2014.
4. Tatsuhiro Tsuchiya and Andre Schiper. Verification of consensus algorithms using satisfiability solving. Distributed Computing, 23(5-6):341-358, 2011.
5. John A., Konnov I., Schmid U., Veith H., Widder J. Parameterized model checking of fault-tolerant distributed algorithms by Abstraction FMCAD, pages 201-209, 2013.
6. Карпов Ю.Г. Анализ корректности параллельной программы разделения множеств // Программирование, 1996, N6
7. Aubakirov S., Trigo P. and Ahmed-Zaki D. Comparison of Distributed Computing Approaches to Complexity of n-gram Extraction // Agent and Systems Modeling, Portugal Proceedings of DATA, pages 25-30 2016
8. Konnov I., Veith H., and Widder J. What you always wanted to know about model checking of fault-tolerant distributed algorithms. In PSI2015, Revised Selected Papers, volume 9609 of LNCS, pages 6-21. Springer, 2016.

***Аннотация.** В статье предложено решение простой логической задачи Knight методом model checking. Продемонстрирован эксперимент тестирования и верифицирования данной логической задачи. А также, сделан обзор распределенных алгоритмов для верификации.*

***Ключевые слова:** Распределенные алгоритмы, Hadoop, ВуМС, Spin, Promela, верификация, модельная проверка/*

***Abstract.** This article presents modern development method of computer program verification called model checking. An experimental method of testing and verifying of logic problems are presented. Spin verifier used to find correct solution of the problem by verification and model checking. And also, presented an review of distributed algorithms for verification.*

***Keywords:** Distributed Algorithms, Hadoop, ВуМС, Spin, Promela, verification, Model Checking.*

ЗНАЧИМОСТЬ Е-ПОРТФОЛИО В КОНТЕКСТЕ РЕЗУЛЬТАТОВ СОЦИОЛОГИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

(г. Алматы, ¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
² Университет «Нархоз»)

***Аннотация.** В статье рассматриваются результаты социологического исследования, проведенного с целью оценки значимости е-портфолио. Описывается выборка респондентов и методы, применяемые в ходе исследования. Определяются основные предпочтения различных групп заинтересованных лиц. Уточнено понимание е-портфолио среди респондентов. Проведено сравнение значимости задач, которые решает е-портфолио в зависимости от принадлежности к различным целевым группам. Оценивание проводилось с помощью аппарата нечетких множеств и его результаты были нормированы в интервале от 0 до 1. По результатам социологического исследования определен функционал портала е-портфолио, учитывающий весовые категории значимости задач и соответствующая ему структура портала.*

***Ключевые слова:** е-портфолио, оценка значимости е-портфолио, функционал портала е-портфолио*

С целью изучения значимости технологии е-портфолио для различных целевых групп, таких как работодатели, выпускники, руководство вузов и преподаватели, проводилось социологическое исследование.

Описание выборки: общее количество респондентов – 593, из них 228 респондентов из числа академической общественности, 240 студентов и магистрантов, 125 представителей работодателей, в том числе представители из казахстанских вузов различных категорий, в том числе 9 – национальных, 16 – государственных, 8 – акционированных, 20 – частных. Среди респондентов из числа академической общественности эксперты в области реформирования высшего образования, эксперты и представители национальных и международных аккредитационных агентств, представители МОН РК и подведомственных организаций (Национальный Центр тестирования и его региональные представительства, Центр Болонского процесса и академической мобильности). Методом глубинного интервью было опрошено 20 респондентов.

В рамках исследования были использованы как количественные, так и качественные методы [1, 2]. В частности: кабинетное исследование, в рамках которого был выполнен анализ вторичных источников информации: доступной официальной статистической информации, публикаций, отчетов. Также был проведен опрос респондентов методом "face to face", позволяющий выявить мнения разных категорий заинтересованных лиц по заданной тематике. Для выбранных категорий респондентов были разработаны и распространены разнообразные анкеты и гайды, использовались электронные системы опроса респондентов для обеспечения прозрачности и достоверности данных [3,4].

Глубинное интервью выбранных респондентов проводилось с целью, получения более подробной, детальной информации.

Интервью были наполнены полу-открытыми вопросами, т.е. применялась техника интервьюирования, позволяющая изучить проблемы и вопросы, которые невозможно было бы предположить логическим путем. Полу-открытые вопросы дали возможность респондентам высказаться так и о том, что для них является важным. Среди

высказываний звучали проблемы отсутствия профессиональных стандартов, пассивность работодателей, некорректность формулирования результатов обучения, неготовность преподавателей к полной всесторонней оценке степени сформированности профессиональной компетентности и результатов обучения.

Результаты проведенного анкетирования позволили выделить наиболее важные факторы, влияющие на структуру е-портфолио.

По итогам социологического исследования было выявлено, что е-портфолио при обучении в вузе понимается:

- как студенто-ориентированная информационно-коммуникационная технология оценки уровня сформированности профессиональной и личностной компетентности и степени достижения результатов обучения,
- использующая возможности электронных средств и ресурсов, содействующая демонстрации личностных достижений владельца,
- обеспечивающая аутентичность результатов оценки,
- предполагающая интерактивное взаимодействие субъектов образовательного процесса, адекватность и объективность представляемых материалов, их доступность, целенаправленную организацию самостоятельной работы, мониторинг результатов образовательной деятельности,
- вне зависимости от уровня обучения структура е-портфолио определяется следующими составляющими - объективной и субъективной – и инвариантным (обязательным для всех) и вариативным (творческим, заполняемым по желанию обучающегося) компонентами.
- структура портфолио имеет фрактальный характер и обладает синергетичным эффектом.

Анализ различных мнений позволил разработать проект структуры е-портфолио с учетом распределения ответственности [5, 6].

В ходе социологического исследования были выявлены различия в требованиях к структуре е-портфолио у студентов, работодателей и академической общественности. Работодатели предполагают необходимость первоочередного акцента на результаты обучения, отражающих степень сформированности компетенций и уровень автономности автора портфолио. Так же для них важны материалы, подтверждающие наличие компетенций и позволяющие провести их независимую оценку. Кроме того, работодатели зачастую предъявляют к выпускникам завышенные требования, несоответствующие завершеному уровню обучения.

Социологическое исследование позволило сравнить оценку значимости задач, которые решает е-портфолио в зависимости от принадлежности к различным целевым группам. Оценивание проводилось с помощью аппарата нечетких множеств и его результаты были нормированы в интервале от 0 до 1.

Таблица 1 – Значимость функций е-портфолио

Задачи	Работодатели	Преподаватели	Студенты	Выпускники
а) образовательного процесса:				
- учет личностных особенностей обучающихся при организации образовательного процесса;	0	0.4	1	0.7

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

- содействие внедрению кредитной технологии обучения;	0	1	0.6	0.2
- организация виртуальных выставок и экспозиций результатов образовательной деятельности студентов;	1	1	0.8	1
- мониторинг образовательного процесса и образовательных результатов обучающихся;	0,5	1	0.6	0.4
- обеспечение прозрачности оценки и ее адекватности;	1	1	0.7	0.7
- проведение индивидуальных консультаций;	0	0.4	0.7	0.6
- вовлеченность обучающихся (обеспечение полного участия каждого обучающегося в образовательном процессе);	0.2	0.9	0.6	0.4
- предоставление обучаемому инструмента исследования, конструирования, формализации знаний о предметном мире, его моделирования;	0,3	0.8	0.7	0.9
- поддержка индивидуальной образовательной траектории обучающегося;	0,3	0.6	0.9	0,8
- формирование умения работать в команде;	1	0.4	0.5	0.9
- реализация контекстного (профессионально-направленного) обучения;	0.7	0.6	0.6	0.9
- учету удовлетворенности потребителей;	0.9	0.3	0.9	1
- интенсивного общения субъектов образовательного процесса;	0.3	0.8	0.9	0.8
- интеграция количественной и качественной оценки компетенций обучающихся посредством анализа разнообразных продуктов образовательной деятельности;	0.9	0.9	0.6	0.8
- содействие реализации профессиональной направленности обучения;	1	0.8	0.9	1
б) личностного роста:				
- мотивация личностного роста;	0.8	0.7	0.9	1

- развитие познавательной самостоятельности обучающихся;	0.7	0.8	0.7	0.8
- формирование рефлексии;	0.9	0.7	0.6	0.9
- формирование коммуникативных умений и навыков, в том числе умений объективно оценивать окружающих, отстаивать свою точку зрения, демонстрировать результаты деятельности	1	0.9	0.9	1
- формирование умения презентовать результаты образовательной деятельности;	0.9	1	0.9	0.9
- развитие творческого потенциала;	1	1	0.8	0.9
- формирование информационной компетентности и информационной культуры;	0.9	0.9	0.8	0.9
- развитие личностных свойств: целеустремленности, настойчивости, уверенности, открытости, терпимости, эмоциональной устойчивости;	1	0.9	0.6	0.8
- формирование умения принять точку зрения другого;	0.8	0.8	0.7	0.8
- свобода в выборе видов и способов деятельности и собственных маршрутов, в том числе и образовательных;	0.8	0.6	1	1
- приобщение учащихся к определенным областям сетевой культуры;	0.5	0.6	1	1
- предоставление возможностей выбора широкой палитры ценностей;	0.6	0.6	1	1
- возможность изучения опыта других;	1	1	1	1

Проанализировав сводные данные по значимости можно сделать вывод о различии значимости разных функций для разных групп потребителей е-портфолио. Кроме этого, данные полученные в ходе исследования позволяют выявить проблемные аспекты и пассивность отдельных групп экспертов.

По результатам социологического исследования определен функционал портала е-портфолио, учитывающий весовые категории значимости задач и соответствующая ему структура портала [7].

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

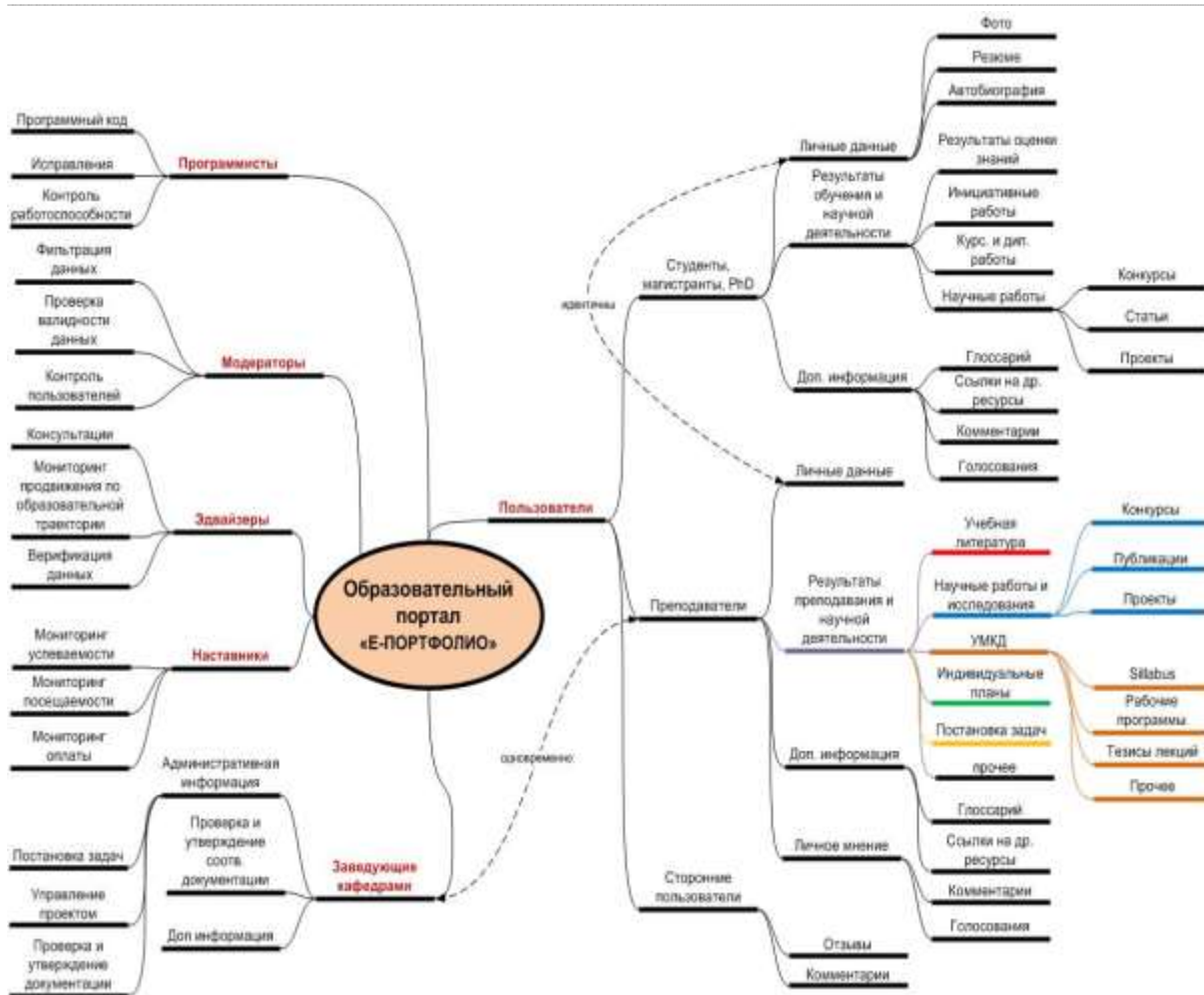


Рисунок 1 - Функционал портала е-портфолио

Таким образом, проведенное исследование позволило оценить значимость е-портфолио, в том числе в разрезе задач, и уточнить его понимание.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант №3639/ГФ4.

1. Равен, Дж. Компетентность в современном обществе. Выявление, развитие и реализация / Дж. Равен. – М.: Знание, 2002. - 155 с.
2. Апарина Л.А. Оценка универсальных компетенций специалиста // Сибирский выпускнический журнал, № 3, 2009.- С.35-42.
3. Голуб Г.Б. Портфолио в системе выпускнической диагностики// Школ.технол.-2005.- №1. - С.181-196 .
4. Mendoza-Calderón, Marco A.; Ra mirez-Buentello, Joaquin. (2006). Handbook of Research on ePortfolios. Facilitating Reflection Through ePortfolio at Tecnológico de Monterrey. Hershey, USA. Ali Jafari (Ed). pp: 484-493.
5. Wiedemann, Julius, ed. (2008). Web Design: Flashfolios. Icons. Hong Kong; Köln; London; Los Angeles; Madrid; Paris; Tokyo: Taschen.
6. Lane, C. (2007). The Power of ‘e’: Using e- Portfolios to Build Online Presentation Skills. Innovate, 3(3), 5.

7. Strivens, Janet. (2007). A survey of e-pdp and e-portfolio practice in UK Higher Education. 24.

Аңдатпа. Мақалада е-портфолио мәнділігін бағалау мақсатында жүргізілген әлеуметтік зерттеулердің нәтижелері қарастырылады. Респонденттерді іріктеу мен зерттеу барысында қолданылатын әдістер сипатталады. Қызығушы жақтардың әр түрлі топтарының негізгі артықшылықтары анықталады. Респонденттердің арасында е-портфолио ұғымы нақтыланады. Әр түрлі мақсаттық топтарға тиістілігіне тәуелді е-портфолио шешетін мәселелердің мәнділігін бағалауды салыстыру жүргізілді. Бағалау айқын емес жиындар аппаратының көмегімен жүргізіліп, 0 мен 1-дің аралығында нормаланды. Әлеуметтік зерттеу нәтижесі бойынша есеп мәнділігінің салмақ категориясын ескеретін е-портфолио порталының функционалы және оған сәйкес портал құрылымы анықталды.

Түйін сөздер: е-портфолио, е-портфолио мәнділігін бағалау, е-портфолио порталының функционалы

Abstract. The article discusses the results of a sociological survey conducted in order to assess the significance of e-portfolio. It describes the sample of respondents and methods used in the study. There is defines the main preferences of different groups of stakeholders. There is clarified understanding of e-portfolios among the respondents. There is made the comparison of the importance of evaluation tasks, which solves e-portfolio, depending on the accessories for different target groups. Evaluation was carried out using fuzzy sets and the results were normalized in the range from 0 to 1. According to the results of sociological research there is defined the functionality of the portal e-portfolio, taking into account the importance of the weight categories of tasks and the corresponding portal structure.

Keywords: e-portfolio, assess the significance of e-portfolio, functionality of the portal e-portfolio

UDK 004.056

N.A. Baimukhanov*, A.U. Pyrkova

CORPORATE NETWORKS PROTECTION BY USING DIFFICULT REPLACEMENT CIPHERS

(Almaty, al-Farabi, Kazakh National University, * - master student)

Abstract. The article deals with a client server application and data protection method, in the form of a complex cipher replacement. There was used the Gronsfeld code. This cipher is characterized by its reliability and potentially allow further modifications that improve its resistance, in particular the double encryption of different numeric keys. The main task is the most secure data transfer between server and client.

Keywords: Information protection, client server application, cryptography, Gronsfeld cipher.

Today's world using the available through the Internet information resources, is the main activity of each organization. Many organizations Acceding local network to workstations through its access gateway information resources. Internet has become a vital and growing global network that changed the way of life and thinking of most people.

But despite its great possibilities, it has also spawned a lot of problems, mainly related to the security of the organization, as the most common protocols for data exchange of information does not provide adequate protection against data interception. The reasons for this are several [1-2]:

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

- the absence of the original security policy: the development of Internet functioning principles of the main efforts were directed to achieve the information exchange and many amenities designed without network access control mechanisms on the part of the Internet;
- essential services vulnerability: basic Internet Protocol is a set of TCP / IP protocol, which the service programs does not guarantee Safety;
- mostly transmitted over the Internet unencrypted information makes it possible to monitor the data channels: e-mail, passwords and file transfers can be easily intercepted by an attacker using the available programs;

The current level of software development allows enough competent hacker which is familiar with the TCP / IP stack protocols, unauthorized to connect to a remote system, capture compounds legitimate users.

The article deals with the network protection with a complex of cipher replacement, called Gronsfeld Cipher. This is a modification of cipher Caesar cipher with a numeric key. To this end, under the original message written letters numbers numeric key [3]. If the key is shorter than the posts, then his record is cyclically repeated. Ciphertext gets around, as in Caesar cipher, but not counted in alphabetical third letter (as is the Caesar cipher), and choose the letter, which is offset in alphabetical order on the corresponding number key. To implement the Gronsfeld cipher used Java programming language. For example, take the place of the original text Nurbol name, instead of the key year of birth 1990:

Message	N	U	R	B	O	L
Key	1	9	9	0	1	9
Ciphertext	O	D	A	B	P	U

It should be noted that the Gronsfeld code spite of its simplicity, can be modified in the form of double or multiple different numerical n cipher keys, which greatly complicates the decoding of the source code unknown numerical key.

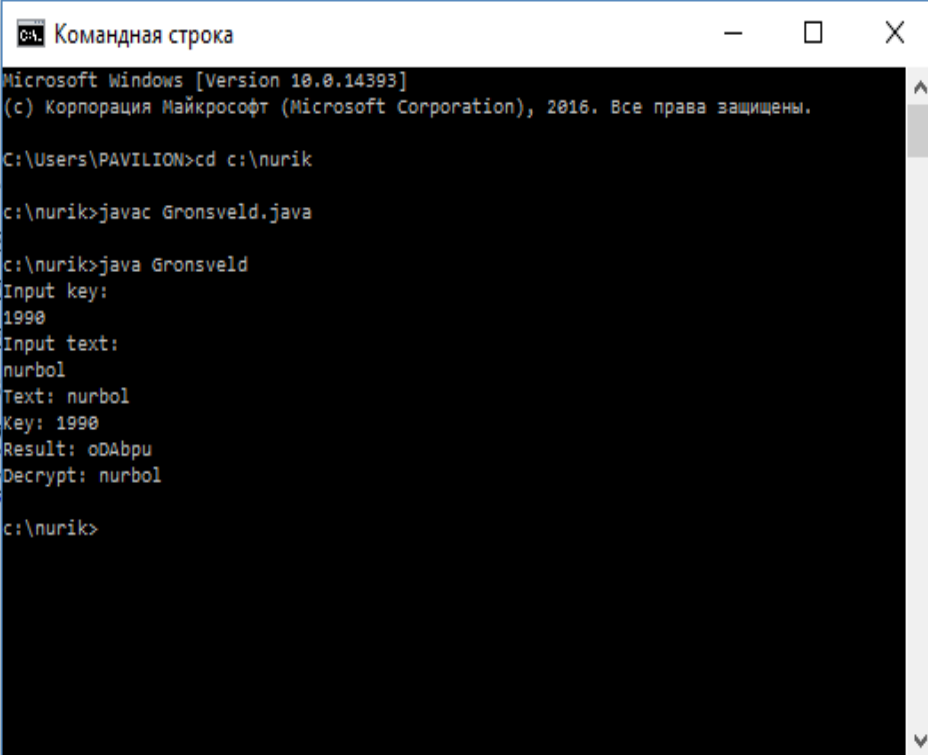
```
System.out.println("Text: " + String.valueOf(achText));
    System.out.print("Key: ");
    for (int i = 0; i < aKey.length; i++) {
        System.out.print(aKey[i]);
    }
```

in this code segment key cyclic repetition is described by along the length of the original text.

```
{
    c = (char) (c + i);

    if (c < 'A') {
        c = (char) (c + 'z' - 'A' + 1);
    }
    if (c > 'z') {
        c = (char) (c - 'z' + 'A' - 1);
    }
}
```

In this code segment offset alphabetically is described on the corresponding number key.



```
Командная строка
Microsoft Windows [Version 10.0.14393]
(c) Корпорация Майкрософт (Microsoft Corporation), 2016. Все права защищены.

C:\Users\PAVILION>cd c:\nurik

c:\nurik>javac Gronsveld.java

c:\nurik>java Gronsveld
Input key:
1990
Input text:
nurbol
Text: nurbol
Key: 1990
Result: o0Abpu
Decrypt: nurbol

c:\nurik>
```

Also it implemented in a rather simple client server application where the communication between the client and the server is displayed in the form of text messages. The application is implemented in Java[3].

```
ServerSocket ss = new ServerSocket(port);
Socket socket = ss.accept();
```

ServerSocket class is slightly different from the Socket class. The main difference of ServerSocket lies in the fact that it knows how to make the program waiting for connections from clients. When creating the ServerSocket, you need to specify the port on which it will work, and to call it by accept (). This method causes the program to wait for connections on the specified port. Execution of the program hangs at this point, until the client connects. After a successful client connection, create a normal Socket object, which can be used to perform all operations with the existing socket [4]. Note also that this Socket object displays the other end of the connection. If we want to send data to the client, we can not use this for our own socket.

Next, consider the Socket class. We have created a Socket object by specifying the IP-address and port. We use InetAddress class to display the IP-addresses. The method used to create InetAddress object:

```
InetAddress ipAddress = InetAddress.getByName(address);
```

In our program we used the address 127.0.0.1. This is a special address called the loopback address - it just displays the local computer. If you intend to run the client and server are on different computers, then you need to use the corresponding server IP-address.

After we created a InetAddress, you can create a Socket:

```
Socket socket = new Socket(ipAddress, serverPort);
```

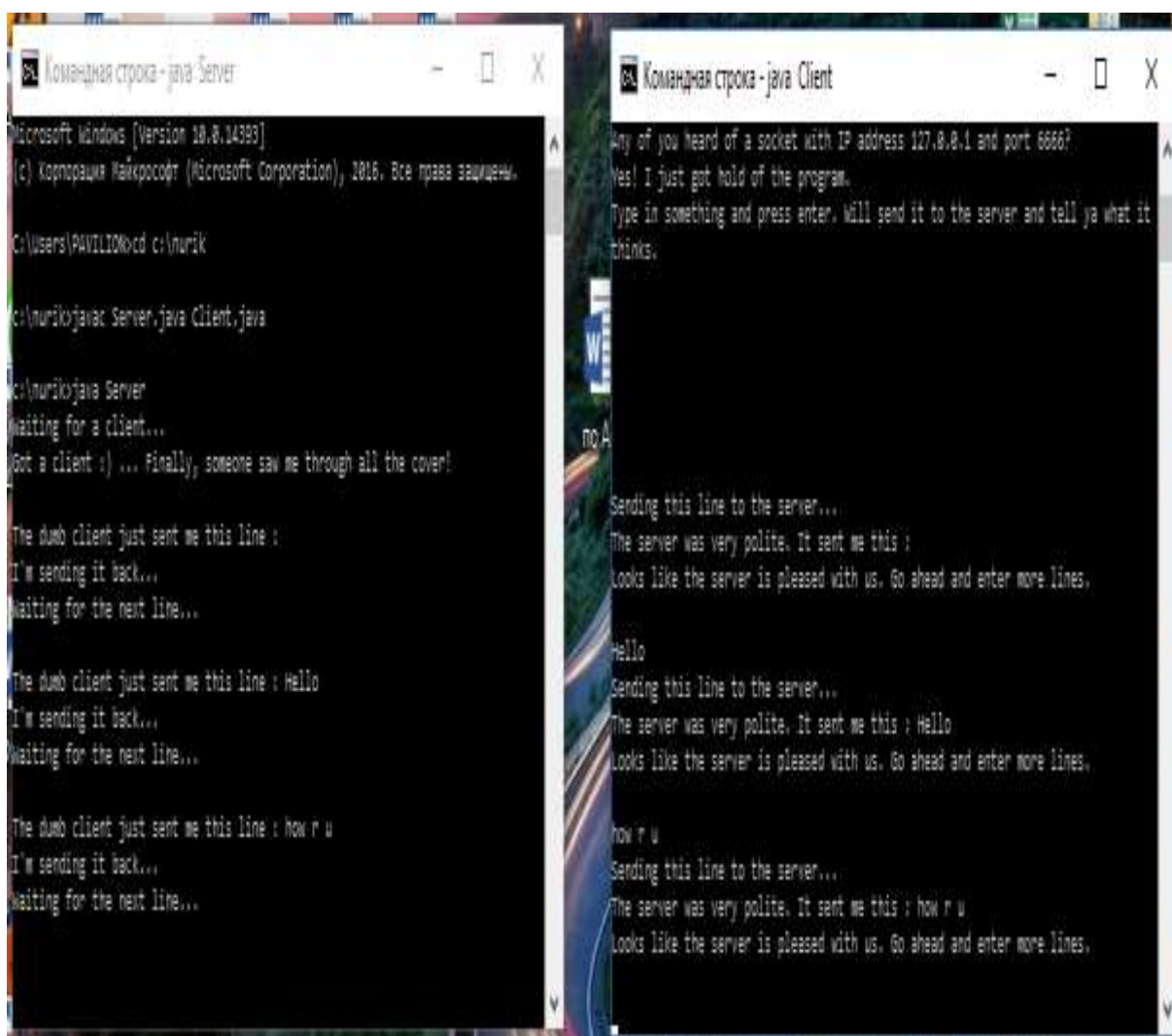

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

After creating a Socket object, you can take the input and output streams of the socket. Input stream will allow you to read from the socket, and gives the output stream to write to the socket.

```
InputStream sin = socket.getInputStream();  
OutputStream sout = socket.getOutputStream();
```

The following lines simply converted into other types of flow streams. After that, it will be easier to work with objects String. This code does not do anything to the network:

```
DataInputStream in = new DataInputStream(sin);  
DataOutputStream out = new DataOutputStream(sout);
```



In this application, we have implemented a number of actions including:

- 1) Program is trying to communicate with another program (which is waiting for the connection to it). In our case, the first program - the Customer, and the second - Server.
- 2) After successful binding to the server, the client is waiting for data input and sends the text to the server.

- 3) The server program sends back to the client is the same.
- 4) Resulting from the server text, the client shows you.

1. B. Schneier, Applied Cryptography, Second Edition: Protocols, Algorithms. John Wiley & Sons, Inc. 1996.
2. Шаньгин В.Ф., Информационная безопасность. ДМК Пресс, 2014.
3. Эванс Э., Предметно-ориентированное проектирование. Структура сложных программных систем. Издательский дом «Вильямс», 2011.
4. Защита информации в корпоративных приложениях. Частные решения [Электронный ресурс]. - <http://citforum.ru/security/articles/corp-net/>

***Аңдатпа.** Мақалада Клиент-серверлік қосымша мен күрделі алмастыру шифры түріндегі мәліметтерді жөнелтудің қорғау әдісі қарастырылады. Жұмыста Гронсфельд шифры пайдаланылды. Бұл шифр өзінің сенімділігімен және болашақта әрі қарай оның орнықтылығын жақсартатын, дербес жағдайда әр түрлі сандық кілттермен қос шифрлау арқылы жетілдіру мақсатында дамытуға болады.*

***Түйін сөздер:** ақпаратты қорғау, клиент серверлік қосымша, криптография, Гронсфельд шифры.*

***Аннотация.** В статье рассмотрены клиент-серверное приложение и метод защиты передачи данных, в виде шифра сложной замены. В работе использован шифр Гронсфельда. Данный шифр отличается своей надежностью и в перспективе допускает дальнейшие модификации, улучшающие его стойкость, в частности двойное шифрование разными числовыми ключами. Основной задачей является достижение наибольшей защиты передачи данных между сервером и клиентом.*

***Ключевые слова:** защита информации, клиент-серверное приложение, криптография, шифр Гронсфельда.*

ӨОЖ 004.627

Ж.С. Қажиақпарова, Д.К. Ташенова

ВЕЙВЛЕТ-ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІ – БЕЙНЕНІ СЫҒУДЫҢ ӘДІСІ

(Орал қ., Батыс Қазақстан иновациялық-технологиялық университеті)

***Аңдатпа.** Мақалада вейвлет-технологияларының бейнені сығуда қолдану принциптері баяндалған. Вейвлет-әдістің артықшылықтары мен кемшіліктері ашып көрсетілген. Хаар базисі негізінде екіөлшемді вейвлет-түрлендірулерің сұлбасы сипатталған. Вейвлет-түрлендірулерге негізделген вейвлет-сығудың тізбекті әдісі қарастырылған. Вейвлет-түрлендіру арқылы бейнені сығу әдісінің тиімділігін арттыру жолдары бейнеленген. Вейвлет-түрлендірулерге негізделген параллельді әдісі ұсынылған.*

***Түйін сөздер:** Вейвлет-түрлендірулері, вейвлет-технологиялары, Хаар базисі, вейвлет-сығулары, цифрлы бейне, параллельді есептеулер.*

Қазіргі таңда есептеу техникасының, графикалық мониторлардың, түрлі түсті принтерлердің, цифрлы байланыс құралдарының, Интернеттің дамуымен, қуаты мол компьютерлерінің кең таралуымен, цифрлы камералар өңдеу технологиясының алға жылжуымен байланысты цифрлы бейнелер кеңінен қолданысқа енді. Бейне цифрлы

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

түрде көп бит санымен берілгендіктен, оны сақтауда айтарлықтай жады көлемін алады, сондай-ақ жолдау кезінде жылдамдығы аз болады. Сондықтан бейнені сығу ауадай қажет болды. Бұдан бейнелерді сығуға деген қызығушылық тұрақты түрде қарқынды дамыды [1, 556].

Бейнені сығу дегеніміз – цифрлы түрде сақталатын бейнеге мәліметтерді сығу алгоритмін қолдану. Сығу нәтижесінде бейненің өлшемі кішірейеді, сәйкесінше оны жолдау уақыты да азаяды, сонымен қатар бейнені сақтауға қажетті жады көлемі үнемделеді. Бейнені сығудың екі түрі бар: бейне толығымен қалпына келетін және қалпына келмейтін [1, 226]. Көптеген бейнелердің файлдар форматы бірінші түрін қолданады, осы технологияны қолданып сығылған бейнені қайтадан қалпына келтірсе, алынған бейненің әр биті бастапқы бейнеге сәйкес келеді. Алайда оның сығу коэффициенті өте аз, ол телевидениеде, медицинада, аэрофототүсірілімдерде қолданылады. Ал екінші түрі бойынша сығылған бейне толығымен бастапқы бейнеге сәйкес келмесе де, оған жуық болады, оның үстіне оның сығу коэффициенті өте жоғары, бірнеше жүз есе болуы мүмкін, бейнелерді сығуда бұл әдіс жиі қолданылады. Көптеген зерттеулер бойынша адамның көру қабілеті кейбір визуалдық бөлшектерді айқын байқай алмайды, сондықтан осы бөлшектердің жоғалуы немесе өзгеруі адамның көру мүшелеріне айтарлықтай білінбейді.

Тақырыптың өзектілігі жоғарыда атап өткендей, әлемдегі ақпарат қорының көп бөлігін құрайтын цифрлы бейнелер сақталуында жадының көп бөлігін талап етумен анықталады. Осы мәселені шешуде бейнені сығу қажеттілігі туындайды, ал сығу технологияларының бірі вейвлеттер әдісі салыстырмалы түрде жаңа, әрі бірқатар жағдайларда тиімді.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы қазіргі кезде цифрлы бейнені сығу кезінде қолданылатын вейвлет-сығу әдісін ұсынуында.

Жұмыстың теориялық және тәжірибелік маңыздылығы жұмыста вейвлет-сығу әдісі негіздері толығымен зерттеліп, бірқатар теориялық мағлұмат жинақталуында; олардың бейнені өңдеу саласында одан әрі зерттеулер жүргізу кезінде қосымша материал ретінде қолданылуында; жұмыстың теориялық негіздеріне сүйеніп құралған бағдарламаның бейнені сығу алгоритмдерінің тиімді нұсқасы ретінде қолданылуында.

Жұмыс мақсаты – бейнені сығу барысында уақытты және ресурстарды үнемдеу қажеттілігінен туындайтын бейнені сығу алгоритмінің вейвлет-түрлендіруге негізделген әдісін ұсыну.

Мақсатқа жету барысында келесі **міндеттер** қойылған:

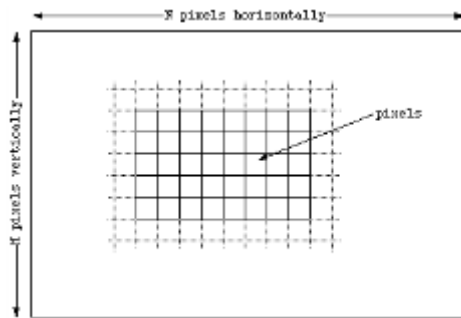
1. Бейнені өңдеуді жүзеге асыратын әдістер мен алгоритмдерді оқып, зертеу;
2. Сұр түстің реңіндегі бейнені вейвлет-сығу әдісін жүзеге асырушы тізбекті алгоритмбойынша бағдарлама құру;
3. Құрылған бағдарламалардың нәтижесінде алынған сандық нәтижелерді талдау, қорытынды жасау.

Жұмысты одан әрі дамыту перспективалары. Бейнені сығу барысында уақытты және ресурстарды үнемдеу қажеттілігінен туындайтын бейнені сығу алгоритмін тиімділеу үшін параллельді алгоритмді жүзеге асыру.

Бейнені сығу есебін шешу барысын сипаттау.

Компьютерлік әлем негізі – сан, демек кез келген ақпарат түрі есептеу құрылғысы жұмыс жасай алатын сандық мәндер жиыны ретінде берілуі керек. Сондай-ақ бейнелер де осы принципке бағынады. Бейнені кескіндеудің екі жолы бар: нүктелік (растрлік) және векторлық графика түрінде. Біріншісінде әр нүктенің түстік параметрлерін сипаттаушы сандар массиві қолданылса, ал екіншісінде математикалық формула көмегімен алынған жаңа мәндерден бейненің барлық нүктелерін есептейді [1, 696].

Барлық растрлік бейнелер биттік картада (биттік массив) орналасуымен және түстік параметрлерімен сипатталатын өте шағын элементтерден тұрады. Бұл элементтер пиксельдер (pixel – picture element) деп аталады, пиксельдер өзара тығыз байланысты. Бейне өлшемі (size) көлденең (width) және тігінен (height) орналасқан пиксельдер санымен беріледі. Сонымен, қандай да бір таңдалған бейненің ені (width) мен ұзындығы (height) бейнеден сандық мәлімет ретінде алынатын массивтің сәйкесінше бағандары мен жолдарының санын береді [2, 112 б]. Бейне пиксельдерінің кескінделуі төменде 1-суретте көрсетілген.



1-сурет. Растрлік BMP бейнелердің кескінделуі

Жұмыста сұр түс реңіндегі BMP форматты бейнелер негіз ретінде алынған. Бұл жағдайда бейненің әр пиксели 8 битпен кодталады. Берілген түрдегі бейненің түсінің тереңдігі– 8 бит, ал оның әр пиксели 256 түрлі мәндерді қабылдай алады. Бұл мәндер сұр түстің 256 реңі. Демек бағдарламада массив элементтері [0 – 255] аралығындағы оң сандар болып табылады. 2-суретте сұр түстің 256 реңі көрсетілген.



2-сурет. Сұр түстің 256 реңі

Бейнені сығу дегеніміз – цифрлы түрде сақталатын бейнеге мәліметтерді сығу алгоритмін қолдану. Сығу нәтижесінде бейненің өлшемі кішірейеді, сәйкесінше оны жолдау уақыты да азаяды, сонымен қатар бейнені сақтауға қажетті жады көлемі үнемделеді.

Вейвлет-сығу әдісінің негізгі алгоритмі

1. Таңдалған бейнені екі өлшемді массив түріне ауыстыру;
2. Декомпозиция: алынған екі өлшемді массивке таңдалған вейвлеттік түрлендіруіді жүргізу;
3. Кодтау: Децимация – вейвлеттік түрлендіруге ұшыраған екі өлшемді массив элементтерін қандай да бір ϵ мәнімен салыстырып, одан кішілерін 0-ге теңестіру;
4. Сығылған бейнені көру;
5. Декодтау;
6. Кері вейвлет-түрлендірулерін орындау;
7. Декодталған бейнені алу.
8. Бастапқы және декодталған бейнелерді салыстыру.

Осыған орай алгоритм бейненің бастапқы түріне келуіне байланысты бейне толықтай қалпына келетін және толықтай қалпына келмейтін болып екіге бөлінеді [3, 356].

Хаар вейвлеттерін қолданып, қандайда бір сигналды өңдеу мысалы негізінде вейвлет түрлендірулердің мәнін түсінейік. Қандай да бір S бір өлшемді дискретті кіріс

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

сигналы берілсін делік. Әр көршілес элементтер жұбына сәйкес екі мән беріледі:

$$a_i = \frac{S_{2i} + S_{2i+1}}{2} \text{ және } d_i = \frac{S_{2i} - S_{2i+1}}{2} \quad (1)$$

Бастапқы сигналдың әр элементіне осы операцияны қайталай отырып, шығыста екі сигнал алынады: біріншісі a_i — кіріс сигналының жуықталған нұсқасы, екіншісі d_i — бастапқы сигналды қалпына келтіруге қажетті бөлшектенген ақпаратты сақтайды. Осылайша Хаар түрлендірулері алынған a_i сигналына да қолданылуы мүмкін. Осы идеяның бағдарламалық жүзеге асуы төменде [3, 426].

Бейне пиксельдерінің мәні сақталатын массив элементтері оң бүтін сандар, сондықтан егер көршілес екі пиксель мәндерінің айырымы теріс болған жағдайда, оны оңға айналдыру үшін пиксельдердің орташа мәнін қолданамыз [4, 536].

Екі өлшемді Хаар түрлендірулері дегеніміз – бір өлшемді Хаар түрлендірулерінің композициясы. Екі өлшемді кіріс сигналы S матрицасымен берілсін делік. S матрицасының әрбір жолына бір өлшемді Хаар түрлендірулерін қолдансақ, жолдары бастапқы матрица жолдарының жуықталған және бөлшектенген бөліктерінен тұратын екі жаңа матрицалар пайда болады. Сәйкесінше алынған матрицалардың әрбір бағанына бір өлшемді Хаар түрлендірулерін қолданады, нәтижесінде біреуі жуықтаушы құраушылардан, қалған үшеуі тігінен, көлденең және диагональді бөлшектеуші құраушылардан тұратын төрт матрица алынады. Осы процес келесі деңгейге қайталанады, бастапқы матрица ретінде алдыңғы деңгейде жуықтаушы құраушы ретінде алынған матрица болады [5, 966].

Кері вейвлеттік түрлендіруді жүзеге асыру үшін $\sim A$ екі өлшемді синтез массивін беру керек.

$$\sim A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \sim A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad X = \sim A_8 \begin{vmatrix} \sim A_2 \begin{vmatrix} c_{31} \\ d_{31} \end{vmatrix} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{vmatrix}$$

Тура түрлендірудің жұмыс принципіне ұқсас кері түрлендірулер алдымен кодталған матрицаның әр жолына, содан соң әр бағанына жүргізіледі. Сонымен, вейвлет-түрлендірулерге негізделген бейнені сығу есебін шешу $C\#$ бағдарламасында орындалып, оның нәтижелері төмендегі суреттерде (3, 4-сур.) көрсетілген.

Қорыта келе, Вейвлеттер мен оларға негізделген идеялар бейнені өңдеу теориясы мен тәжірибесіне баға жетпес үлес қосты және жақын болашақта осы саладағы негізгі бағыт болуы ғажап емес. Қазірдің өзінде вейвлет-түрлендірулер әр түрлі есептерді шешуде әдеттегі Фурье түрлендірулердің орнын басуда.

Бұл көптеген салаларда, соның ішінде компьютерлік графика және бейнелерді сығуда, ДНК анализін өңдеуде, сигналдарды жалпы өңдеуде, деректерді сығу мен тілді тануда да қолданылады [6, 86 б].



3-сурет. Бейнені тура вейвлет-түрлендіру арқылы сығу



4-сурет. Бейнені кері вейвлет-түрлендіру арқылы қалпына келтіру

Жұмыс мақсатының қойылуы бойынша бейнені сығу барысында қарастырылған барлық мәселелер мен тапсырмалар орындалды:

1. Бейнені өңдеуді жүзеге асыратын әдістер мен алгоритмдерді оқып, зертелді, соның ішінде вейвлет-сығу әдісіне аса назар аударылды;

2. Сұр түстің реңіндегі бейнені вейвлет-сығу әдісін жүзеге асырушы тізбекті алгоритм бойынша бағдарлама құрылды;

3. Құрылған бағдарламалардың нәтижесінде алынған әр сандық нәтижелерді талданды, қорытынды жасалды.

1. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999, 203 б.
2. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд. СПб-ГТУ, 1999, 131б.
3. Акжалова А.Ж. Параллельные вычисления. Алматы, 2004, 114б.
4. Балашов К.Ю. Сжатие информации: анализ методов и подходов. – Минск: ИТК, 2000, 41б.
5. Ватолин Д. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. – М: Диалог-МИФИ, 2002, 381б.
6. Мюррей Д.Д. Энциклопедия форматов графических файлов. – Киев: Изд. Группа ВНУ, 1997, 669б.

Аннотация. В статье рассмотрены принципы работы вейвлет-технологии. Описаны особенности и недостатки вейвлет-метода. Представлена схема двумерного вейвлет-преобразования на основе базиса Хаара. Описан последовательный алгоритм сжатия изображения с помощью вейвлет-метода. Предложен параллельный алгоритм вейвлет-сжатия, основанный на вейвлет-преобразованиях.

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

Ключевые слова: Вейвлет-преобразования, вейвлет-технологии, базис Хаара, вейвлет-сжатия, цифровые изображения, параллельные вычисления.

Abstract. In article are considered the principles of work of wavelet-technology. Features and shortcomings of a wavelet-method is described also. The scheme of two-dimensional wavelet-transformation on the Haar's basis is submitted here. There is described the consecutive algorithm of compression of the image by means of a wavelet-method. The parallel algorithm of wavelet-compression based on wavelet-transformations is offered here.

Keywords: Wavelet-transformations, wavelet-technologies, Haar's basis, wavelet-compression, digital images, parallel calculations.

УДК 612.172.4

Н.Н. Керімбаев, Б.Ә. Мәдиева *

**QRS-КЕШЕНІН НӨЛДІ ҚИЫП ӨТУ САНЫНА НЕГІЗДЕЛГЕН
АЛГОРИТМ АРҚЫЛЫ АНЫҚТАУ**

(Алматы қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті)

Аңдатпа. Мақалада QRS кешенін және электрокардиограмма жайлы қысқаша түсіндірілген. Электрокардиограмма арқылы жүректің өткізгіш жүйесін бақылауға болады. Мақала авторы QRS кешенін анықтау үшін нөлдіктен нөлді қиып өтетін сандар негізіндегі алгоритмді қолданғанын түсіндірген. Мақалада нөлді қиып өту санына негізделген алгоритмнің іске асырылуы жайлы қамтылған. Алгоритмнің қадамдары сызба бейнелер мен формулалармен көрсетілген. Мақала тұжырымдамасында алгоритмнің нәтижелігі мен тиімділігі жазылған.

Түйін сөздер: электрокардиограмма(ЭКГ), QRS кешені, нөлді қиып өту.

Кіріспе. Заманауи медициналық аппараттарды автоматтандыру шаралары жан-жақты зерттеліп, жетілдірілу үстінде. Мүмкіндігіне қарай медициналық аппараттарды компьютерге қосу арқылы да автоматтандыру үдерісі жүзеге асырылуда. Сондай жүйенің біреуі электрокардиограф. Адам ағзасындағы жүректің қызметі өзіндік ритммен басқарылатын электрлі импульстер шығарып, оны қабылдағыш жүйге жібереді [1]. Электрокардиограмма (ЭКГ) – бұл жүрек жұмысы кезінде электрлік импульстердің графикалық бейнесі. Электрокардиограмманы талдау арқылы аурудың дұрыс диагнозын алу үшін кедергіні анықтау мен оны жою өте маңызды іс болып табылады. Электрокардиограммаларды алу электрокардиографтың күшейтілген каналдарына байланысты. Электрокардиограмма тісшелер мен аралықтардан тұрады. P, Q, R, S, T - тісшелерімен ажыратылады. P-тісшесі оң және сол жақ жүрекшелердің қозуы кезіндегі электропотенциалдардың алгебралық суммасы. Q, R, S тісшелері қарыншалардың қозуының бастамасы, ал T – реполяризация процесін көрсетеді. QRS кешенін анализдеу үшін бізге ЭКГ - нің басқа бөліктерінен QRS кешенін анықтап беретін алгоритм қажет. QRS кешенін анықтау үшін бір шама алгоритмдер бар, мәселен, туындыға негізделген алгоритм, Пан-Томпкинс алгоритмі және т.б. Электрокардиограф жүйесінде QRS кешенін анықтау үшін нөлді қиып өту санына негізделген алгоритмін алынды. Себебі алгоритмнің сезімталдылығы мен ерекшелігінің көрсеткіші басқаларынан алде қайда жоғары және ЭКГ-дағы шулардан QRS кешенін оңтайлы анықтай алады.

Кәзіргі кезде электрокардиографтарды интерпретациялаудың әртүрлі моделдері бар. Ондай модельдердің кейбіреулері өкінішке орай қателіктерге жол береді. Сондықтан да берілген моделдердің алгоритмдерін жан-жақты зерттеуді қажет етеді.

Нөлді қиып өту алгоритмі. Мақалада электрокардиографиялық сигналдар арқылы QRS- кешенін анықтауға ЭКГ сегментеріндегі нөлді қиып өтетін санды есептеуге негізделген әдіс ұсынылған [2]. Бұл өте шулы электрокардиографиялық сигналдарды жоғары деңгейде анықтауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар нөлдік өткелдегі сандарын QRS анықтауларында анықталған қиындықтарды тиімді шешеді.

ЭКГ компоненттеріндегі спектралды сипаттамаларына сай Р және Т толқынының орта мәнін азайту үшін ЭКГ сигналдарындағы жоғары жиіліктің шуын сүзгілеу қажет. Сүзгіленетін сигнал уақытша оқшауланған R толқынына қолданытын болғандықтан сызықтық фазасы бар жолақты фильтр қолданылады.

1-суреттен көріп отырғанымыздай алгоритм үш қадамадан тұрады: сигналды табу, оқиғаны анықтау және R-толқынының уақытша оқшаулануы [3].



1 - сурет. Алгоритм қадамдары

Сигналды табу жолақты фильтрді қолданудан, сызықсыз түрленуден, амплитудалық бағалаудан тұрады және де жоғары жиілікті тізбектерді қосу, нөлдік өткелді іздеу және қиылысу есептеулерінде қамтиды. Сүзгіден өткен сигнал нөлдің айналасында тербеледі, сонымен қатар QRS комплекстер кешенінде жоғары амплитудаға ие, ал қалған аралықтарда оның амплитудасы төмен болады. Жоғары жиіліктегі жүйелілікті сүзгіден өткен сигналға қоссақ, онда QRS сегментінен тыс нөлді қиып өтетін көп сигналдар мен QRS кешенін тек аз ғана нөлдік қиылысуы бар сигнал ала аламыз. Жоғары жиіліктегі тізбектің есептелуі мынадай

$$b(n) = (-1)^n K(n), \quad (1)$$

мұндағы $K(n)$ – уақыт өте өзгертін амплитуда. Сигналды түзелуі сигналдың сызықсыз түрленуінен болады

$$y(n) = \text{sign}(x_f(n)) x_f^2(n), \quad (2)$$

мұндағы $x_f(n)$ – сүзгіленген сигнал және $y(n)$ – сызықсыз түрленген сигнал. $y(n)$ сигналы R толқынының уақытша орналасуын анықтауға қолданылады.

Жоғары жиіліктегі тізбектің қосылуы мен амплитудалық баға: жолақты сүзгіні $y(n)$ сигналына қолдану салдарынан жоғары жиіліктегі тербеліс әлісірген. Сәйкес, жоғары жиіліктегі тізбекті сигналға қосу қажет:

$$z(n) = y(n) + b(n), \quad (3)$$

Осылай QRS- сегментінен тыс нөлдік қиылысудың санын артамыз.

$K(n)$ [2] анықталуы мынадай формуламен іске асырылады:

$$K(n) = \lambda_K K(n-1) + (1 - \lambda_K) |y(n)| c, \quad (4)$$

Мұндағы, $\lambda_K \in (0; 1)$ – түзелу факторы және c параметрі тұрақты күшейткішті білдіреді, мәселен, $c = 4$.

Нөлдік қиылысуды табу және есептеу:

$$d(n) = \left[\frac{\text{sign}[z(n)] - \text{sign}[z(n-1)]}{2} \right] \quad (5)$$

Сегменттегі нөлдік қиылысулар саны:

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

$$D(n) = \sum_{i=0}^{N-1} d(n-i) \quad (6)$$

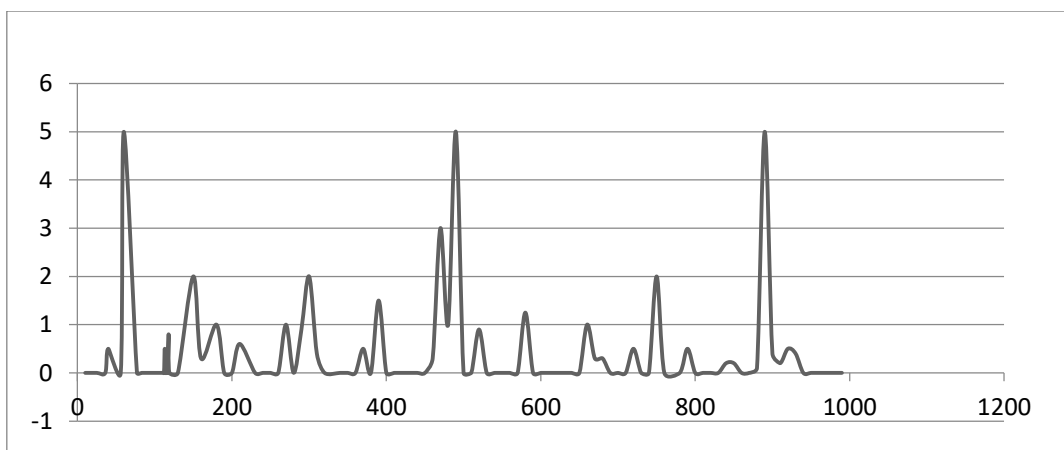
оқиғаны табу Θ биімді шек мәнін қолдану арқылы жүзеге асырылады:

$$\Theta(n) = \lambda_{\Theta}\Theta(n-1) + (1-\lambda_{\Theta})D(n) \quad (7)$$

мұндағы, $\lambda_{\Theta} \in (0; 1)$ қалдырып кету факторын көрсетеді. Оқиғаны табу үшін $\Theta(n)$ шек мәнін $D(n)$ сигналымен салыстырылады. $D(n)$ кіші болған кезде ғана оқиға анықталады.

Уақытша оқшаулау оқиғасы іздеу аралықтары үшін уақытша R толқынды оқшаулауды қолдана отырып шектейді. $y(n)$ сигналында максимум/минимумды іздеу бірлестігі орындалады. Егер минимум шамасы максимум шамасына қарағанда әлдеқайда көп болса, онда минимум уақытша орналасуын R толқынның уақыты ретінде қарастырылады. Әйтпесе R толқынының орналасуын максималды шама анықтайды. R толқынының нақты жағдайын белгілеу үшін жолақты сүзгілеудің топтық кешіктірілулер болу керек.

Алгоритмнің зерттелуі мен нәтижесі. Әдісті зерттеуге [4] шынайы құралдардың көмегімен және нақты ЭКГ сигналдары алынды (2-сурет). Бұл сигналдар алгоритмнің дұрыс орындайтынын тексеру үшін идеалды болып табылады. Сәйкес әдістің қолдану анализін шынайы ЭКГ көрсеткіштерімен жүзеге асырдым. Кіріс сигналдарынан алынған мәнді нөлді қиятын санды есептеу алгоритміне тестілей жүргізілді



2 - сурет. Тестіленген ЭКГ мәндері

Алгоритмнің тиімділігін бағалау үшін екі параметрлерді қолднамыз – нәтиженің сезімталдылығын мен ерекшелігін, яғни келесі тәсілмен өлшейміз:

$$\text{сезімталдылық} = \frac{TP}{TP+FN} * 100\% \quad \text{ерекшелік} = \frac{TP}{TP+FP} * 100$$

мұндағы TP - дұрыс анықталғандар саны, FN – жалған терістеулер саны және FP – жалған анықталғандар саны.

1-кестеде алгоритмнің есептелген нәтижесі көрсетілген. Алгоритмнің сезімталдылығы 99,70% (277 Fns) және ерекшелігі 99,57% (390 FPs) құрайды. Ең көп жалған нәтиже 207 жазбада орын алған. Бұл жазба атап айтқанда алгоритм үшін ас бір күрделі мәселе емес. Көптеген шулы жазбалар үшін, мәселен 108 жазбада алгоритм аса идеалды емес, алайда жақсы нәтижелер де жетерлік. Кейбір есептеулерде соңғы R толқыны соңғы жазбаларда да анықталған, мәселен 100 жазбада.

1-кесте. Алгоритмнің сезімталдылығы мен ерекшелігі

Жазба	TP	FN	FP	Сезімталдылық (%)	Ерекшелік (%)
100	1901	1	0	99.95	100.00

Хабаршы • Вестник

«Физика-математика ғылымдары» сериясы • Серия «Физико-математические науки»,
№4 (56) -2016

101	1521	2	5	99.87	99.67
102	1808	13	13	99.29	99.29
103	1729	0	0	100.00	100.00
104	1841	16	17	99.14	99.09
105	2144	0	2	99.03	98.71
106	1696	0	5	100.00	98.71
107	1783	1	0	99.94	100.00
108	1454	26	32	99.24	97.85
109	2094	5	1	99.76	99.95
111	1774	2	4	99.89	99.95
112	2111	0	4	100.00	99.81
113	1505	1	0	99.93	100.00
114	1604	0	5	100.00	99.69
115	1636	1	0	99.94	100.00
116	1995	22	3	98.91	99.86
119	1661	0	0	100.00	100.00
121	1558	2	4	99.87	99.74
122	2054	0	0	100.00	100.00
123	1269	0	2	100.00	99.84
200	2166	2	12	99.91	99.45
201	1519	2	1	99.87	99.93
202	1868	3	3	99.84	99.84
203	2424	57	25	97.70	98.98
205	2197	4	0	99.82	100.00
207	1585	7	95	99.56	94.35
210	2198	6	2	99.73	99.91
212	2285	0	5	100.00	99.78
213	2680	20	17	99.26	99.37
215	2793	2	0	99.93	100.00
217	1843	2	2	99.89	99.89
219	1773	0	0	100.00	100.00
220	1694	0	0	100.00	100.00
221	1998	22	19	98.91	99.06
222	2115	1	2	99.95	99.91
223	2199	0	1	100.00	99.95
228	1700	3	43	99.82	97.53
230	1859	0	2	100.00	99.89
231	1278	0	0	100.00	100.00
232	1485	0	12	100.00	99.20
233	2553	8	0	99.69	100.00
234	2288	3	0	99.87	100.00
Барлығы	91006	277	390	99.70	99.57

Әрине бұл сипаттамалар басқа есептелінетін алгоритмдерге [3] қарағанда сапалы әрі оңтайлы анықтаулар беріп отыр. Кестеде көстілген нәтижелерде сезімталдылық $K(n)$ амплитудасында $b(n)$ жоғары жиілікті тізбекке тәуелді. Дегенімен бұл амплитуда алгоритмнің көмегімен оңай басқарылады.

Қорытынды. QRS кешенін анықтауға алгоритм таңдағанда оның есептелу

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

күрделігіне, жүзеге асыру күрделігіне және алгоритм қаншалықты дұрыс QRS кешенін шудан айрып көрсете алуын қарастырған жөн. Зерттеу барысында тізшелерді дұрыс әрі нақты анықтауға нәлді қиып өткен санға негізделген алгоритм талданды. Алгоритмнің басқа да есептеу әдістерге қарағанда өнімділігі жоғары. Себебі қарапайым тәсілдермен QRS кешенін аз уақытта анықтауға мүмкіндік берді.

1. Зудбинов, Ю.И. Азбука ЭКГ. — третье издание. Стилистика текста [Текст]: учеб. пособие / Ю.И. Зудбинов. — Ростов н/Д. 2003. — 160 с. — ISBN 5-222-02964-6.
2. Kohler B.-U., Henning C., Orglmeister R. QRS detection using zero crossing counts // Progress in biomedical research. 2003. Vol. 8(3). P. 138–145.
3. Afonso VX, Tompkins WJ, Nguyen TQ, et al. ECG beat detection using filter banks. IEEE Trans Biomed Eng. 1999; p. 192-202.
4. Абрамов М.В. Аппроксимации экспонентами временного кардиологического ряда на основе ЭКГ // Вестник кибернетики. 2010. № 9. С. 85–91.

***Аннотация.** Статья кратко описывает комплекс QRS, а также процесс механизма электрокардиограммы. Благодаря электрокардиограмме можно контролировать проводящую систему сердца. Автор статьи для определения комплекса QRS использует алгоритм основанный на подсчете числа пересечений нуля. Статья базируется на осуществлении использования алгоритма подсчета числа пересечений нуля. Алгоритм показан при помощи графиков и формул. В заключение статьи, дан анализ основных результатов и эффективности данного алгоритма.*

***Ключевые слова:** электрокардиограмма, QRS комплекс, пересечение нуля.*

***Abstract.** This article describes the complex QRS, and the process electrocardiogram mechanism. Thanks electrocardiogram can monitor of cardiac conduction system. Author of the article to determine the QRS uses an algorithm based on counting the number of zero crossings. Article is based on the implementation of the use of the algorithm is based on counting the number of zero crossings. The algorithm illustrated by means of graphs and formulas. In conclusion the article, gives the analysis of the main results and the effectiveness of the algorithm.*

***Keywords:** Electrocardiography (ECG), QRS complex, zero crossings.*

УДК 004.93.1:621.397

С.А. Кудубаева, Г.К. Калакова, С.Б. Берік

Пороговая обработка изображений рук человека для распознавания жестов

(г. Кустанай, Костанайский государственный университет имени А.Байтурсынова)

***Аннотация.** В статье рассматриваются вопросы распознавания образов, на примере жестовой речи глухих. Основные методы, используемые для распознавания образов, базируются на алгоритмах компьютерного зрения, с применением сенсора Kinect-2. К базе жестов казахского жестового языка, для ее обработки, применены известные методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов. Используются методы и технологии Гонсалес Р., Фисенко В.Т, а также другие работы, связанные с обработкой графической информации по сегментации и пороговой обработке изображения.*

***Ключевые слова:** распознавание образов, сегментация изображения, пороговая*

обработка, жесты глухих.

Сегментация представляет разделение изображения на отдельные области, в частности, выделение на сложном фоне объектов интереса, имеющих требуемые свойства. Во многих случаях полезные объекты на изображениях являются протяженными, и сегментация может использовать это свойство [1–3]. Задача автоматической установки порога в автономных информационно-управляющих системах очень важна для сегментации, выделения и распознавания полезных объектов на фоне помех [2]. Общая структура цифровой обработки изображений включает предварительную фильтрацию, бинарное квантование и последующую логическую обработку. Алгоритм выделения рук человека на изображениях следует относить к методам среднего уровня, так как на выходе рассчитываются различные атрибуты (признаки), извлекаемые из входного изображения. Для извлечения некоторых атрибутов следует использовать сегментацию, с помощью которой возможно разметить изображение на некоторые составляющие объекты. Степень детализации сегментации всегда должна зависеть от решаемой задачи (нахождения контуров рук в нашем случае). Бинарное квантование представляет весьма ответственный этап обработки изображений, поскольку может привести к необратимым потерям информации. Предположим, что объекты на изображении светлые, тогда квантование дает высокий уровень (белое) при превышении порога в данной точке и низкий уровень (черное) в противном случае.

Работу по распознаванию жеста проведем на основании алгоритма выделения рук (1-рис.), на вход которого подаются видеофайлы, записанные с помощью сенсора Kinect 2.0. По алгоритму проведем циклическую обработку кадров, по которому на каждой итерации осуществляется проверка на получение определенного кадра. В случае возникновения ошибки алгоритм прекращает свою работу, иначе подбирается пороговое значение отсечения яркости до тех пор, пока не будет выявлено оптимальное значение. После происходит заполнение внутренних областей объектов. Если на изображении отсутствуют объекты, то итерация считается завершенной и следует осуществить попытку получения следующего кадра видеопоследовательности, в обратном случае производится удаление лишнего шума и подсчет объектов на основе вычисления площадей объектов. В результате работы алгоритма определяются графические области рук на кадрах. Выходными данными алгоритма являются изображения, на которых отображены руки человека. Средняя скорость обработки кадра составляет $\approx 0,12$ секунды, при условии, что разрешение составляет FullHD 1920x1080 пикселей, а вычисления производятся с помощью одного ядра процессора Intel Core i7 3,4 ГГц.

Пошаговая работа алгоритма более детально выглядит следующим образом. Пусть R – вся пространственная область, занимаемая изображением. Сегментирование изображения можно рассматривать как некоторый процесс, который делит R на n подобластей $\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_n\}$.

Вся область R по умолчанию формируется в классе данных *uint8*, с числовыми значениями пикселей в диапазоне от 0 (черный) до 255 (белый). Для численной операции следует конвертировать R в класс *double*, который позволяет производить вычисления с двойной точностью. Данный процесс основан в соответствии с формулой (1).

$$W = f(x, y)/255, \quad (1)$$

где x, y – координаты пикселей, а f – яркость изображения в точке координат. Стоит заметить, что изображение представляется как совокупность основных Red, Green, Blue каналов, формирующих промежуточные цвета. Изначально следует сформировать бинарные матрицы пикселей из RGB каналов области R , применяя для каждого канала свое пороговое отсечение яркости в диапазоне $[0, 1]$, значение которого подбирается на

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

основании усредненной цветовой характеристики рук. Яркостные значения меньше заданного порога принимают значение черного цвета, в обратном случае цвет становится белым.

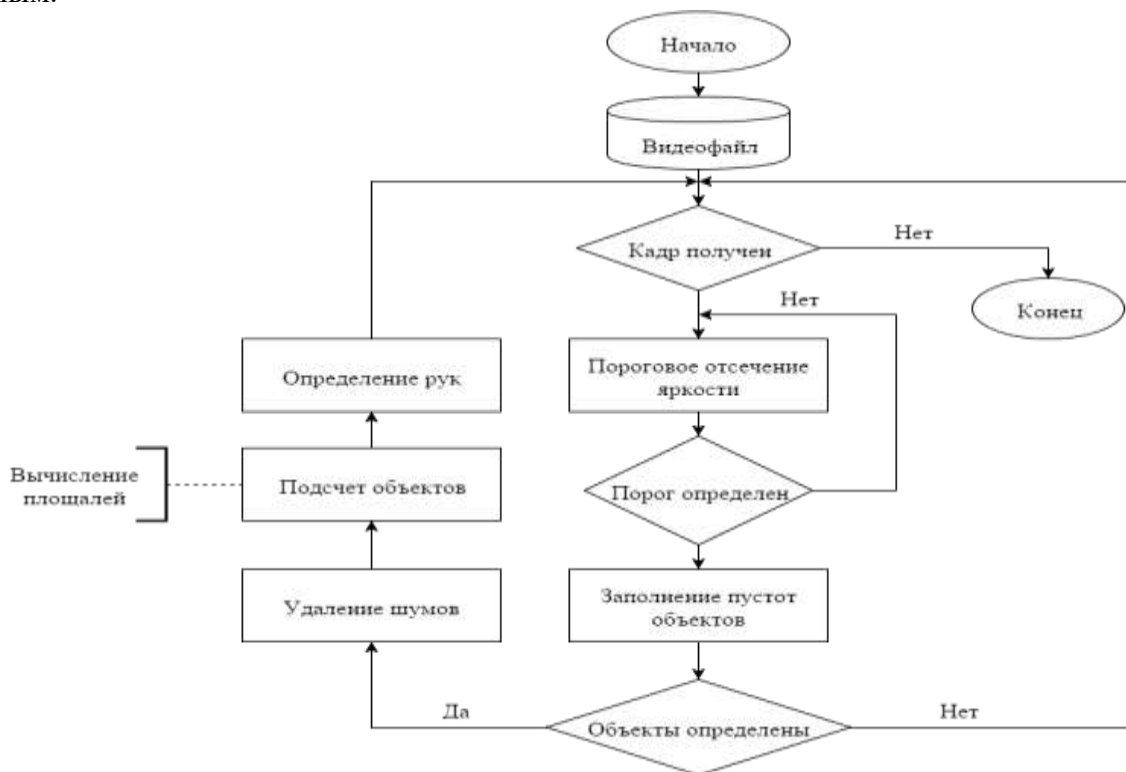


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма выделения рук на изображениях

Далее необходимо сложить полученные матрицы в матрицу I по логическим условиям: белый цвет формируется, если все значения пикселей трех уровней – 1, в обратных случаях пиксели получают черный цвет. Преобразование на уровне каналов позволяет избежать перед непосредственной бинаризацией перевода R из RGB в полутоновый формат с одним каналом, как изображено на рисунке 2, а также более гибко управлять пороговыми значениями [3].

Для восприятия и дальнейшей сегментации удобнее работать с белым передним планом и черным фоном, в соответствии с рисунком 3. Такую задачу позволяет решить комплементарное дополнение матрицы I .

Следующий шаг направлен на заполнение пустот объектов на области I . Анализ базируется на следующих шагах [4]:

1. Поиск одной цветовой области, которая полностью окружена другой.
2. Замена найденной области цветом окружающей ее области.

Это необходимо для получения сплошных объектов на изображении I . Однако, в случае проведения данной процедуры область руки будет заполнена областью тела. Проблема решается, путем использования набора параметров. С помощью координат определяются центры рук. В случае, если точка центра руки входит в область тела и глубина руки (Z) меньше глубины области тела, то графический объект руки считается отдельным и заполнению не подлежит.

Для удаления незначительных шумов и неровных границ вокруг объектов следует наложить на I структурный элемент в виде маски, которая является матрицей нулей и единиц, формирующей овальную область [5]. Диаметр подбирается, основываясь на

наилучших результатах. При увеличении диаметра исчезают мелкие объекты. Таким образом, также возможно исключить те объекты, которые по цветовым характеристикам совпадают с цветом рук, но гораздо меньше в диаметре.



Рисунок 2- RGB изображение



Рисунок 3- Двоичное изображение

Заключительный этап работы алгоритма выделения рук человека, который основан на подсчете количества сегментированных объектов с определением их площадей изображен, в соответствии с рисунками 4-6. Та область, которая содержит в себе координаты из набора текстовых данных и будет являться рукой. Найденная область на изображении, где присутствует рука выглядит, в соответствии с рисунком 6.

Также выявлено в результате тестирований на заранее записанной жестовой базе данных, что отклонения алгоритма от нормального функционирования возникают в

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

случаях, когда угол наклона кисти руки превышает 45° . Это обусловлено тем, что сенсор Kinect не в состоянии определить ключевую точку в районе центра руки. Данную погрешность решает метод усреднения последних 7 предыдущих горизонтальных и вертикальных вершин контура рук, который позволяет предсказать в каком месте окажутся эти вершины в последующий момент времени.

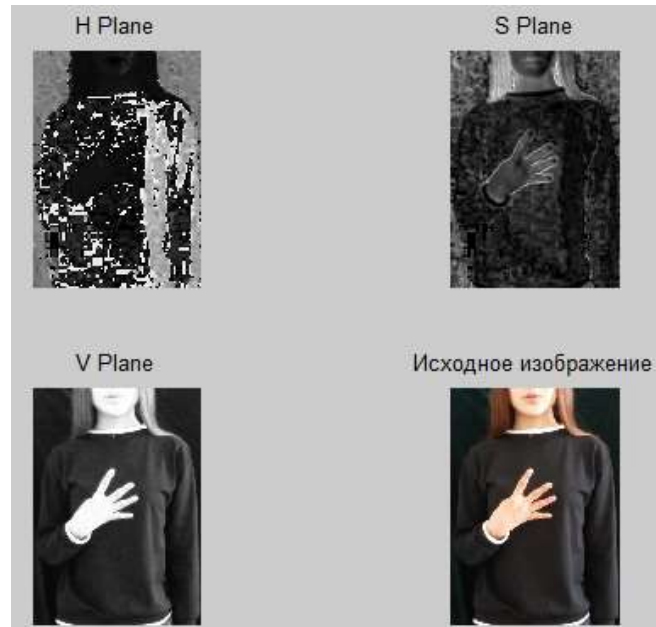


Рисунок 4- Полутонное изображение (изображения с градацией серого цвета)

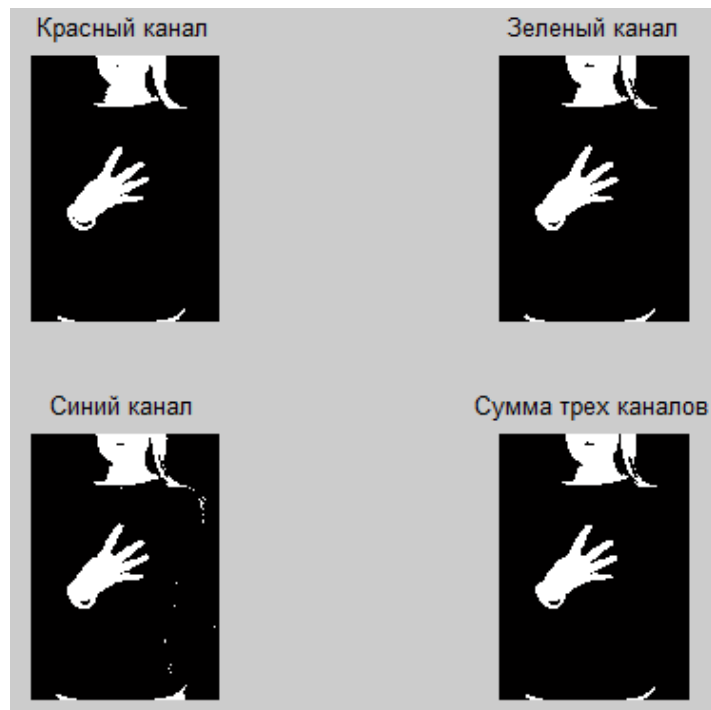


Рисунок 5- Индексированное изображение



Рисунок 6 – Иллюстрация результата алгоритма выделения руки распознанная рука

Алгоритм выделения рук на изображениях является начальной ступенью обработки перед вычислением информативных признаков жестов рук человека.

Таким образом, алгоритм выделения рук принимает на вход видеофайл, затем циклически извлекает кадры. Для каждого кадра производится пороговое отсечение яркости, до тех пор, пока не будет определен оптимальный порог. Далее осуществляется заполнение пустот объектов, с последующим их нахождением на изображении. Затем удаляются шумы, подсчитывается количество найденных объектов на основе вычисления их площадей и определяются руки человека. После из найденных рук извлекаются информативные признаки необходимые для распознавания жеста на основе теории принятия решений.

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2005. — 1072 с.
2. Weszka J., Rosenfeld A. Threshold evaluation Techniques // IEEE Trans. SMC-8. 1978. P. 622–629.
3. Волков, В.Ю. Пороговая обработка для сегментации и выделения протяженных объектов на цифровых изображениях / В.Ю. Волков, Л.С. Турецкий // Информационно-управляющие системы, № 5, 2009. – С. 10–13.
4. Щерба, Е.В. Анализ применимости методов интерполяции и экстраполяции для решения задачи восстановления изображения // Компьютерная оптика, № 3(33), 2009. – С. 336–339.
5. Лапшенков, Е.М. Модель оценки потерь качества графического изображения при сжатии с потерями, ориентированная на системы распознавания образов // Компьютерная оптика, № 3(35), 2011. – С. 408–415.

Аңдатпа. Мақалада бейнелерді танып-білу сұрақтары саңыраулардың ымдау тілінің мысалы арқылы қарастырылады. Бейнелерді тану үшін қолданылатын негізгі әдістер, Кінест-2 сенсорын қолданатын, компьютерлік көру алгоритмдеріне негізделген. Құрылған ымдау қорын қазақ тілінде өңдеу үшін, сандық сигналдарды өңдеудің негізгі әдістері мен алгоритмдері қолданылған. Гонсалес Р, Фисенко В.Т атты ғалымдардың әдістері мен технологиялары, сонымен қатар графикалық ақпараттың өңделуінің шектелуіне және саралауға байланысты басқа да жұмыстар пайдаланылды.

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

Түйін сөздер: бейнелерді тану, суреттерді саралау, өңделудің шектелуі, ымдау қимылдары

Abstract. The article triggers the topic of image detection in the example of gesture conversation of deaf people. Main methods used for image detection are based on algorithms of machine vision with the use of Kinect-2 sensor. Well known methods and algorithms of digital signal processing was used for gesture database of Kazakh gesture language. Methods and technologies of Gonsales R, Fisenko V.T and other works related to graphical data processing based on segmentation and threshold image processing.

Keywords: image detection, image segmentation, threshold processing, deaf gestures

ОӘЖ 373.5.02.016:004(574)

Е.Ө. Медеуов, Б.Ғ. Бостанов, И.Т. Сәлғожа

**әл ФАРАБИДІҢ ЕСЕПТЕРІН ШЕШТІРУ АРҚЫЛЫ ОҚУШЫЛАРДЫҢ
АКТ - ҚҰЗЫРЛЫЛЫҚТАРЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ**

(Алматы қ., Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті)

Аңдатпа. Мақала сыныптан тыс жұмыстарды ақпараттық технологияларды пайдалана отырып ұйымдастыру және өткізу барысында оқушылардың АКТ-құзырлылықтарын қалыптасатыру мәселелеріне арналған. Сыныптан тыс жұмыстарды әлемдік ғылымның дамуына өзінің іргелі еңбектерімен үлесін қосқан, Қазақстан тумасы, әл-Фарабидің математикалық мұраларын оқыту туралы айтылған.

Түйін сөздер: Акт – құзырлылық, әл-Фарабидің математикалық мұралары, сыныптан тыс жұмыс, ақпараттық құзырлылық.

Өз заманында «шығыстың Аристотелі» атанған ғұлама - Әбу Насыр Әл Фараби, халқымызға білімнің, ілімнің нәрін сепкен данышпа ойшыл, аса ірі тарихи тұлға. Әл Фараби бірнеше тілді меңгеріп, жүзден астам құнды еңбектер жазып қалдырған. Оның әлеуметтік-экономикалық мәселелерге, математикаға, философияға арналған трактаттары осы күнге дейін өзінің ғылыми маңыздылығымен құнды. Ол математиканы қолдану негізінде табиғат құбылыстарының сырын жазып шығуға болады деп тұжырымдаған. Оның математикалық трактаттары осы замандағы математика ілімінің негізі болып табылады [1]. Олай болса, жалпы ғылымның дамуына орасан зор үлес қосқан, оның кейбірінің негізін қалаушыларының бірі – әл Фарабидің математикалық мұраларын насихаттау, оларды оқушыларға оқыту қажет.

Бұл оқушылардың өз ата бабаларының дүниежүзілік ғылымда өз орны бар, данышпан, өте білімді болғандарын біле жүрсе, текті елдің ұрпағы екенін естеріне салады. Бабалар мұрасын оқыту өскелең ұрпақты патриоттыққа тәрбиелеп, жастардың бабалар мұрасына деген құрметін арттырады. Оқушыларға олардың әлі де зерттелмеген мұралардың көп екендігін айтып жеткізу, оларды ғылымға баулып, қызығушылықтарын артырады, қабілетерін дамытуға өз үлесін қосады.

Әл Фараби бабамыздың математикалық мұраларындағы «Алмагестке қосымша» («Алмагест» б.з. 2-ғ. өмір сүрген Птоломейдің еңбегі, гректің ұлы астрономы) атты кітабында баяндалған математикалық астрономия мен географияның әр түрлі есептерін математикалық жолмен шешу қажетінен туған үлкен де жүйелі тригонометриясы, шығыста алғашқылардың бірі болып Птоломейдің «Алмагест» кітабына түсініктеме

жазуы т.б. деректер, сызғыш, циркульсіз фигураларды бірнешеге бөлуі, құрастыруы, $\sin 1^\circ$ мәнін табу [2,3], геометриялық салу есептеріндегі - бұрыштың трисекциясын салу сияқты т.б. есептерін шығарту оқушының математика пәніне деген қызығушылығын тудыраы сөзсіз. Ал, бұл деректер мектеп программасында, мектеп оқулықтарында айтылмайды.

Енді мұндай мәліметтерді қай уақытта, қашан, қандай мақсатпен оқытамыз деген сұрақтар туындайды. Бұл мәселені шешудің бір жолы ол – сыныптан тыс жұмыс, іс-шараларында оқыту. Қазіргі кезде, жалпы қоғамда, оның ішінде білім беру саласында жеке тұлғаның құзырлығын қалыптастыру мәселесі өзекті тақырыптардың біріне айналды.

Құзырлығы ұғымы педагогика саласында тұлғаның субъектілік тәжірибесіне ерекше көңіл аудару нәтижесінде пайда болды. Құзырлығы латын тіліндегі «competens» сөзінің тікелей аудармасы. Белгілі сала бойынша жан-жақты хабардар, білгір және қандай да бір сұрақтар төңірегінде беделді түрде шешім шығара алады дегенді білдіреді [4].

Ғалымдар құзырлығын бірнеше кілттік құзырлықтарға жіктейді. Ең кең таралғаны А. В. Хуторскийдің жіктемесі, ол келесі құзырлықтарды ерекшелейді: құндылық-мағыналы; жалпы мәдени; оқу-танымдық; ақпараттық; коммуникативті; әлеуметтік-еңбек; тұлғаның өзін-өзі жетілдіру құзырлығы.

Ақпараттық құзырлығы - нақты объектілердің (теледидар, магнитофон, телефон, компьютер және т.б.) және ақпараттық технологиялардың (Интернет, аудио- видеожазба, электрондық пошта және т.б.) көмегімен өз бетімен ақпаратты табу, іріктеу және ақпаратты талдау, түрлендіру, сақтай және тасымалдай алу.

«Ақпараттық құзырлығы» терминін көптеген авторлар жеке адамның қандай да бір ақпаратты өз бетімен іздеу, таңдау, талдау, ұйымдастыру, ұсыну және тасымалдай алу мүмкіндігі деп түсіндіреді. Мысалы, О. Г. Смолянинова ақпараттық құзырлығын ақпаратты іздеу, алу, өңдеу, ұсыну мен тасымалдау, жалпылау жүйелеу және ақпаратты білімге айналдырудағы әмбебап тәсілдер деп қарастырады.

Біз оқушылардың құзырлығы деп нәтижеге бағдарланған білім беру жүйесінің сапалық көрсеткішін айтамыз. Құзырлығы оқушылардың бойындағы тек білімі ғана емес, сонымен қатар білімін практикада, болып жатқан үдерісте тиімді пайдалана алуы, тиімді шешім қабылдап, нәтижеге жетуі, ал ақпараттық-коммуникациялық құзырлықтың оқу, тұрмыс және кәсіби бағыттағы міндеттерді шешуде ақпараттық-коммуникациялық технологияның мүмкіндіктерін жан-жақты қолдану қабілеті деп түсінеміз.

Олай болса, әл Фараби бабамыздың математикалық мұраларын оқушылардың АКТ-құзырлықтарын қалыптастыру мақсатында информатикадан ұйымдастырылатын іс-шараларда оқытуымызға болады. Өйткені, біріншіден, бала ізденіп, ақпарат жинауы үшін – ол тың ақпарат болуы қажет, екіншіден қазіргі желі мүмкіндігінің жоғарылығына байланысты, желіде нақты жауап берілмеуі керек, үшіншіден нәтижеге жету үшін өзінің математика т.б. пәндерден алған білімдерін нәтиже алуға пайдаланады.

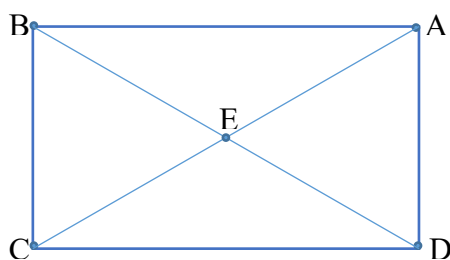
Сыныптан тыс жұмыстарда АКТ-құзырлықтарды қалыптастыру туралы айтылған уақытта информатика және математика сабақтарының орны ерекше екендігі белгілі [5]. Ендеше осы информатика, математика сабағында оқу үдерісін әр құзырлығын өз орнын табатындай етіп әл Фарабидің математикалық мұраларын пайдалана отырып қалай ұйымдастыруға болатынын қарастырайық.

Сыныптан тыс жұмыстардың түрлері өте көп. Оқушылардың қызығушылығын ескере отырып, алуан түрлі етіп ұйымдастыруға болады. Жалпы білім беретін орта мектепте алгоритмдеу ұғымымен танысып, программалау тілін 7-сыныптан бастап оқиды, 8-сыныпта программа құрып, есеп шығара алулары керек. Дегенмен стандарт

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

бойынша белгіленген аптасына бір сағат программалау тілін оқыту аздық етеді. Бұл мәселені шешу үшін программалау тілінен қосымша сыныптан тыс жұмыстар ұйымдастыру қажет. Мұндай жұмыстарды программалау тілінен алған білімдерін толықтырып, ары дамыту мақсатында ұйымдастырып, әл-Фарабидің есептерін шешіп, программа құруға үйретуге болады. Мысалы, Әл-Фарабидің сегізінші кітабынан. «Төртбұрыштарды бөлу туралы» есебін алайық [3].

[I] Егер ол $ABCD$ жазық фигурасын оның бұрыштарының бірі арқылы өтетін сызықпен қалай тең екіге бөлу керек десе, онда A бұрышын аламыз да E нүктесінде қиылысатын AC және BD сызықтарын жүргіземіз. Онда егер BE сызығы ED сызығына тең болса, онда AC сызығы $ABCD$ фигурасын қажет бөледі. Міне оның суреті [1-сурет].



1-сурет. Бөлінген жазық фигура

Осы есепті информатикадан сыныптан тыс жұмыстарда оқушыларға беріп, программасын құрғызсақ. Біріншіден, программалау тілінің графикалық мүмкіндіктерін пайдалана отырып, суретін салады.

```
uses GraphABC;  
begin  
  var l1, l2: real;  
  SetPenColor(clred);  
  Rectangle(100, 100, 400, 300);  
  SetPenColor(clblue);  
  Line(400, 100, 100, 300);  
  Line(100, 100, 400, 300);  
  TextOut(90, 90, 'B');  
  TextOut(90, 302, 'C');  
  TextOut(405, 90, 'A');  
  TextOut(405, 302, 'D');  
end.
```

Екіншіден, BE сызығы ED сызығына тең екендігін тексеру үшін, координаттар жазығындағы екі нүктенің ара қашықтығын табу формуласын еске түсіреді (2-сурет).

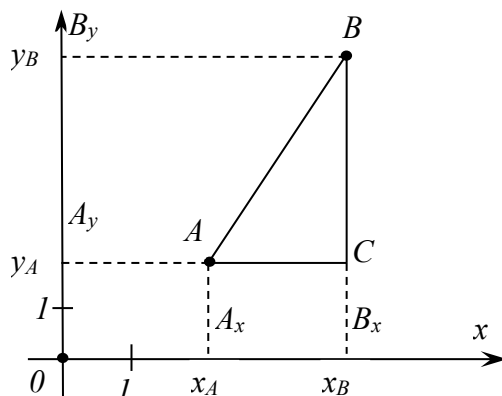
Қарама-қарсы төбелерін қосқанда пайда болған CBA және ACD үшбұрыштарының ауданын Герон формуласы бойынша тауып алады. Ол үшін алдымен үшбұрыштың әр қабырғасының ұзындықтарын тауып алу керек.

ACD үшбұрышының қабырғаларының ұзындықтары:

$$AC := \text{sqr}(\text{sqr}(400 - 100) + \text{sqr}(100 - 300));$$

$$AD := \text{sqr}(\text{sqr}(400 - 400) + \text{sqr}(100 - 300));$$

$$CD := \text{sqr}(\text{sqr}(100 - 400) + \text{sqr}(300 - 300));$$



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2-сурет. Координаттар жазығындағы екі нүктенің ара қашықтығын табу формуласы

СВА үшбұрышының қабырғаларының ұзындықтары:

$$AB := \text{sqr}(\text{sqr}(100 - 400) + \text{sqr}(100 - 100));$$

$$BC := \text{sqr}(\text{sqr}(100 - 100) + \text{sqr}(100 - 300));$$

AC қабырғасының ұзындығы есептелген.

ACD үшбұрышының ауданы:

$$P1 := (AC + AD + CD) / 2;$$

$$S1 := \text{SQRT}(P1 * (P1 - AC) * (P1 - AD) * (P1 - CD));$$

СВА үшбұрышының ауданы:

$$P2 := (AB + BC + AC) / 2;$$

$$S2 := \text{SQRT}(P2 * (P2 - AB) * (P2 - BC) * (P2 - AC));$$

Ауданын тауып алған соң, екі үшбұрыштың ауданын салыстырады. Егер де екі үшбұрыштың ауданы тең болса, ABCD жазық фигурасын оның бұрыштарының бірі арқылы өтетін сызықпен екіге қаж бөлуге болады.

writeln('S1=', S1:5:2);

writeln('S2=', S2:5:2);

if S1=S2 then Writeln('ABCD фигурасы қаж бөлінді');

end.

Егер, ақпараттық-коммуникациялық құзырлылықтың оқу, тұрмыс және кәсіби бағыттағы міндеттерді шешуде ақпараттық-коммуникациялық технологияның мүмкіндіктерін жан-жақты қолдану қабілеті екенін ескерсек, онда мұндай жұмыстардың оқушылардың ақпараттық-коммуникациялық құзырлылықтарын қалыптастыру мәселесіне өз үлесін қосары анық.

Нәтижесінде сыныптан тыс жұмыстарда мұндай есепті шығару барысында оқушылар басқа пәндерден алған білімдерін толықтырып, оны пайдалана отырып, программа құру арқылы есептің шешуін табатындығын көріп отырмыз. Бұл оқушылардың АКТ құзырлылығын қалыптастыруға көмектеседі деген сөз. Сондай-ақ, ғылым тарихымен, математика тарихынан хабардар болады. Осылайша берілген тың ақпаратты АКТ құралдарын пайдалана отырып, өңдеу арқылы жаңа ақпарат алып, АКТ құралдарын өздерінің күнделікті қызметтеріне пайдаланана алу құзырлылықтары қалыптаса түседі.

1. Сейтақов А.С Қазақ ойшылдары мен ағартушылардың философиялық-педагогикалық мұраларының рөлі мен маңызы. «Жаһандану жағдайында ұлттық білі беру жүйесінің даму мәселелері» Алтынсарин оқулары халықаралық ғылыми-практикалық

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

- конференциясының материалдары. Алматы. 2008 ж. 31-34 б.
2. Кубесов А.К. Математическое наследие аль-Фараби. Алма-Ата, «Наука», 1974. – 246 с.
 3. Аль-Фараби, Математические трактаты. – Алма-Ата, 1972.
 4. Вербицкий А.А. Компетентностный подход и теория контекстного обучения. Труды методологического семинара «Россия в Болонском процессе: проблемы, задачи, перспективы». — М., 2004.
 5. Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Бостанов Б.Г., Умбетбаев К.У., Салгожа И.Т., Торебекова Р.К. Формирование ИКТ-компетенции во внеклассной работе по математическому наследию аль-Фараби. Материалы I международной научной конференции в рамках IV Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общества: история и перспективы развития». -г.Красноярск 2016г. С.172-177

***Аннотация.** Статья посвящена вопросу формирования ИКТ-компетентности учащихся при подготовке и проведении с использованием современных информационно-коммуникационных технологий внеклассной работы, посвященной изучению математического наследия аль Фараби – одного из величайших ученых раннего средневековья, уроженца Казахстана, чьи фундаментальные труды внесли существенный вклад в развитие мировой науки.*

***Ключевые слова:** ИКТ-компетентность, математические наследия аль Фараби, внеклассная работа, информационная компетентность.*

***Abstract.** The article focuses on the formation of ICT competence of students in the preparation and carrying out of the use of modern information and communication technologies extracurricular activities devoted to the study of the mathematical heritage of Al Farabi Kazakh National University - one of the greatest scholars of the early Middle Ages, a native of Kazakhstan, whose fundamental works have made a significant contribution to the development of world science.*

***Keywords:** ICT competence, mathematical heritage of Al Farabi, class work, information competence.*

ӘОЖ 37.026.8

Ж.К. Нурбекова, Н.К. Токжигитова*

**СТУДЕНТТЕРДІҢ ВИЗУАЛДЫ ПРОГРАММАЛАУ БОЙЫНША
ҚАБІЛЕТТЕРІН МУЛЬТИ-КРИТЕРИАЛДЫ БАҚЫЛАУ КЕЗЕҢДЕРІ**

(Астана қ., Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, *- докторант PhD)

***Аңдатпа.** Мақалада визуалды программалау бойынша студенттердің оқу жетістіктерін мульти-критериалды бағалауды қолданудың әдістемесі ұсынылған. Визуалды программалау бойынша негізгі компетенциялары Б.Блумның таксономиясы негізінде берілген, бағалау оқыту үдерісінің өте маңызды аспектісі болып табылады, себебі бұл студенттердің білімдері мен біліктіліктерінің меңгеру деңгейін анықтауға мүмкіндік береді.*

***Түйін сөздер:** Оқыту принципі, оқыту нәтижелерін мульти-критериалды бағалау, визуалды программалауға сапалы оқыту өлшемдері, программалық кодтар.*

Оқыту нәтижелерін бақылау және бағалау үдерісінде мульти-критериалды бағалауды қолдану келесі кезеңдерден тұрады: күнделікті (ағымды), межелік (аралық), және қорытынды бақылау [1].

I) Оқушылардың үлгерімін ағымды бақылау - академиялық период кезінде кестеге сәйкес аудиторлық және аудиториядан тыс сабақтарда кәсіби оқу бағдарламасына бойынша студенттердің білімін жүйелі түрде тексеруді оқытушы өткізеді [1].

Ағымды бақылау кезінде студенттердің оқу жетістіктері әр орындаған тапсырма үшін 100 балдық шкала бойынша бағаланады (ағымды сабақтардағы жауап, үй жұмысын тапсыру, студенттің өзіндік жұмысы).

Визуалды программалау бойынша білімді ағымды бақылау келесі кезендерде жүзеге асады:

- еңбек тапсырмасына сәйкес бағдарламалық код жасау (C1), әр студентке парақтарды межелу тілін меңгеру деңгейі үшін, ақпараттық ресурстардың парақтарын жасауға қойылатын талаптарды анықтайтын нормативтік құжаттарды пайдалану қабілеттері үшін 100 балдық шкала бойынша баға қойылады;

- программалық кодты оптимизациялау (C2), арнайы программалық қорларды қолданғаны үшін, программалық кодтың оқылуын жоғарылату әдістерін таңдауды негіздегендері үшін 100 балдық шкала бойынша баға кіші топқа қойылады;

- ақпараттық ресурстың клиенттік бөлімінде программалық кодты орналастыру (C3), құрылғылардың жұмыс кеңістігінің өлшемдерінде ақпараттық ресурсты бейнелегендері үшін кіші топ 100 балдық шкала бойынша бағаланады;

- программалық кодты ақпараттық ресурстың серверлік бөлігінде орналастыру (C4), ақпараттық ресурстың элементтерін әр түрлі браузерлерде бейнелегендері үшін кіші топ 100 балдық шкала бойынша бағаланады.

Барлық кезендерде студенттер жүйелік облыстар, web-технологиялар негіздері, мәліметтер базасын заманауи басқару жүйелерінің негіздері бойынша білімдерін қолдануды көрсетулері қажет, бұл оқытудың пәнаралық байланысын қамтамасыз етеді.

Үлгерімді ағымдық бақылаудың бағасы рұқсат рейтингісінің 50%-нан кем болмауы қажет.

Білімді бақылауды жоспарлаудың даралығы студенттердің жеке қабілеттерін, кәсіби тәжірибесі мен нақты бір жағдайдағы кәсіби білімін есепке алуға мүмкіндік береді [2].

Бақылаудың объективтілігі студенттердің нақты үлгерімін көрсетпейтін, бақылаудың тәрбиелік маңызын төмендететін субъективті және қате пікірлердің алдын алады. Білімді бақылау объективтілігі көптеген факторларға байланысты. Оларға келесілерді жатқызуға болады: оқытудың жалпы және нақты мақсаттарын анықтау, бақылаудың объектілері мен мазмұнын таңдауды және іріктеуді негіздеу, бақылау нәтижелерін өңдеу, талдау және бағалау әдістерімен қамтамасыз ету, бақылау жүргізуді ұйымдастыру. Бақылаудың сапасы мен объективтілігі бұл сұрақтардың шешіміне байланысты болады.

II) Білім алушылардың аралық аттестатталуы - белгілі бір оқу пәнінің мазмұнының бөлігін немесе оқуды аяқтағаннан кейін барлық көлемін меңгеру сапасын бағалау мақсатымен өткізілетін шара. Студенттердің аралық аттестатталуы емтихан және дифференциалды сынақ түрінде өткізіледі. Емтихандар пәннің кәсіби оқу бағдарламасы бойынша білім алушылардың оқу жетістіктерін тексерудің түрі болып табылады, олардың мақсаты: академиялық период бойынша оқу жетістіктерін бағалау. Берілген пән бойынша оң рейтинг бағасын алмаған студенттер қорытынды бақылауға (емтиханға) жіберілмейді.

Визуалды программалау бойынша емтихан өткізуде оқытудың нәтижелерін ескеру қажет.

Студенттердің визуалды программалау облысындағы құзіреттіліктерінің деңгейін анықтау үшін құзіреттіліктерді қалыптастыру деңгейін анықтау қажет. Программалау үдерісі күрделі үдеріс болғандықтан қалыптасу деңгейін анықтау үшін Блум

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

таксономиямын пайдаланайық [3]:

1. "Білу" деңгейі, студент базалық түсініктерімен, визуалды программалау терминдерімен, визуалды программалаудың ережелері мен принциптерімен (мысалы, C++) таныс.

2. Түсіну - студент жобалау концепцияларын типтік есептерде қолданады, құбылыстарды модельдеуді біледі, қосымша жобалаудың кемшіліктерін талдап, анықтай алады, стандарт ережелер бойынша қарапайым бағдарламаларды және алгоритмдерді жетілдіреді, берілген шаблон бойынша алгоритмді (программаны) молайта алады.

3. Қолдану (AP) - программалаудың берілген шарттарында және жаңа жағдайларда белгілі алгоритмдерді қолдану, программалаудың ережелерін, әдістерін қолдану, формалармен жұмыс жасаудың белгілі алгоритмдерін жаңа жағдайларда қолдану, нақты тәжірибелік жағдайларда әдістерді пайдалану біліктілігі.

4. Талдау (AN) - есепті қосалқы есептерге дұрыс бөлу, объектінің, үдерістің құрылымын анықтау, ғылыми зерттеу объектісінде және ақпараттық жүйеде бүтіннің бөліктерін мүшелеп алу, олардың арасындағы өзара байланысты ерекшелену біліктілігі, бүтінді ұйымдастыру принциптерін түсіну қабілеті; ақпараттық есептің шешу логикасындағы қателер мен олқылықтарды анықтау біліктілігі, визуалды программалау құралдарымен есептің шешімін табу үшін қажетті берілгендердің маңыздылығын бағалау.

5. Синтез (S) - визуалды программалау кезінде пайда болатын проблемалық стандартты емес жағдайларда шарттардың өзгеруін жоспарлау, жобалау, жасау біліктілігі.

6. Бағалау (E) - жобаны жүзеге асырудың нақты және жоспарланған жұмысын салыстыру негізінде жаңа мәліметтерді, өз тәжірибесін және эксперттердің тәжірибесін есепке ала отыра, ақпараттық есепті шешу моделін анықтау және коррекция жасау біліктілігі, жоба мақсаттарының өзгеруі деңгейінде стратегиялық ойлау, ақпараттық жүйелерді басқару біліктілігі.

Білімдерді меңгеру беріктігінің принципі оқыту мазмұны білім алушылар санасында ұзақ уақытқа сақталып қалуын, олардың тәртібінің негізі болуын талап етеді. Бұл нәтижеге білім алушы танымдық белсенділік танытып, материалдың жүйелі қайталануы ұйымдастырылғанда, оқыту нәтижелерін жүйелі бақылау, оларды өлшеу қамтамасыз етілген жағдайда ғана жетуге болады.

III) IT-мамандықтарының түлектері визуалды программалау бойынша жеке мемлекеттік емтихан тапсырмайды. Программалау бойынша білімді бағалау үдерісінде орындалған тәжірибелік тапсырманың келесі сипаттамаларына назар аудару қажет: әр түрлі кітапханалар мен платформаларды пайдалану біліктілігі, визуалды компоненттерге сәйкес қасиеттерді, әдістер мен жағдаяттарды білуі [4].

Біз студенттерді визуалды программалауға проблемалық оқыту әдісін (Problem Based Learning, PBL) қолданып оқытуды ұсынып отырмыз. Әдістің мақсаты - студенттерді кәсіби проблемалардың шешуін өздігінен табуға үйрету. Оқытушы топтың алдына мәселе қояды және оларға еркіндік береді, өзі белсенді бақылаушы ролімен шектеледі. Студенттер тапсырманы орындау үшін қандай ақпарат қажетті, оны қайдан алады және қалайша қолданады өздері шешеді. Негіз ретінде біз Steden Университетінде PBL қолдануды алдық, мұнда топпен жұмыс есепті 7 қадаммен шешуін болжайды:

1 қадам: мәселе теориясын жоғары оқу орнының мультимедиялық кітапханасында және интернетте оқулықтардан оқу.

2 қадам: мәселенің түп негізін және күтілетін нәтижені анықтау.

3 қадам: миға шабуыл. Студенттер мәселені жан жақты қарастырады және оны шешу бойынша идеялармен алмасады.

4 қадам: идеяларды көрнекі түрге келтіру, есепті шешу нұсқаларының тізімін жасау.
5 қадам: тізімді өңдеу, презентация жасау, өздік жұмыс жасау үшін топтар бойынша тақырыптарды үлестіру.

6 қадам: PBL сабақтарының арасында университет кітапханасында және интернетте шешу нұсқауларын жеке қарастыру.

7 қадам: ақпарат алмасу және мәселенің оңтайлы шешімін таңдау. Осы сабақта студенттер жаңа тапсырма алып 1 қадамға көшеді.

Қорытынды: әрбір студент өзі үшін жаңалық ашады, кәсіби мәселені шешу тәжірибесін алады, командада және өздігінен жұмыс жасауды үйренеді, бұл болашақ мансап үшін дайындалуға көмектеседі.

Алғашқы сабақтарда студенттер визуалды программалауды оқытуда қарастырылатын негізгі модульдер тізімімен танысады. Силлабуста әр түрлі оқу әдістері, тәжірибелік жүзеге асырудың кейбір басқарушылық принциптері сипатталады. Оқытудың әр модулі әр түрлі іс-шаралардан құралады: дәрістер, семинарлар, зертханалар және мини-жобаларды жүзеге асыру.

Курстың қойылған мақсаттарын жүзеге асыру үшін студенттер дәрістер мен зертханалық әдістерден алынған білімдерін тәжірибе жүзінде пайдалануы қажет. Ұсынылған оқу іс-шаралары келесілерді қамтиды:

- Дәрістер: оқытушы дәрістер мазмұнының негізгі идеяларын түсіндіреді және студенттер өздігінен қосымша шешімдер үздейтін кейбір мәселелерді ұсынады. Негізінен дәріс презентация көмегімен оқылады, дәріс барысында жеке студенттерге және кіші топтарға сұрақ қойылады. Дәрістің соңында әрбір кіші топ өз интеллект-картасын жасайды.

- Зертханалық сабақтар: студенттер алдында дәріс барысында берілген тәжірибелік есептер шығарады. Студенттер командамен жұмыс жасайды, идеал жағдайда 2 студенттен. Оқытушы кейбір нұсқаулар жасайды. Зертханалық жұмысты бағалау келесідей жүргізіледі: әрбір студент немесе команда зертханалық жұмыстың проблемасын, шешуін, өз әдістерін ұсынады. Студенттердің басқа топтары мен дәріс беруші оларды талдап ұсыныс жасайды.

- Семинарлар: студенттік командалардың (идеал жағдайда 4 студенттен) PBL көмегімен есеті шешу бойынша пікір-таластары.

- Мини-жоба: Мини-жобаны 4 студенттен құралған команда жасайды. Апта сайын, мини-жоба біртіндеп жүреді. Студенттер жобаны орындаудың кестесін өздігінен жасайды және жобаның уақытында орындалуы үшін жауапты болады.

Әрбір оқу іс-шарасы алғышарттармен, қажетті базалық білімдермен, біліктіліктермен және күтілетін нәтижемен сипатталады. Келешекте жаңа білімдер мен ақпараттар құрылымдалып білімдер базасына қосылады. Осылайша әрбір студентте жеке "Визуалды программалау" бойынша білімдер базасы құрылады.

Білімдер базасы студенттерді оқыту бағдарламасына енгізіліп оның міндетті элементі болды. Оны оқыту кәсіби ортада жұмыс жасауға, олардың функционалдық бағыттарын анықтауға, еңбек мәселелерін жақсы орындау үшін қажетті білімдерді, қосымша ақпарат пен кеңестерді алуға мүмкіндік береді.

Бағалау оқыту үдерісінің өте маңызды аспектісі болып табылады, себебі бұл студенттердің білімдері мен біліктіліктерінің меңгеру деңгейін анықтауға мүмкіндік береді.

Бағалау пәнді тек техникалық біліп қана қоймай, сонымен қатар студенттер меңгеретін дағдылар мен құзіреттіліктерін бағалауды да қамтуы қажет [2]. Осылайша, бағалау кезінде олардың когнитивті дағдыларына (талдау, синтез, қолдану, бағалау, сынау) және іс-әрекет дағдыларына (уақытты, ресурстарды ұйымдастыру, координация, келіссөздер жүргізу, т.с.с.) назар аудару керек.

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

Әр түрлі курс бойынша білімдерді бағалау үдерісімен қанағаттанбаған студенттер көбінесе студенттерді оқытуда бағалау нақты прогреске шоғырланбайтынына көңілдері толмайды. Бағалау студенттердің білім, біліктілік және құзіреттіліктерді қалайша алатынын ескеріп, курсты аяқтағандар сәйкесінше мүмкіндіктерді меңгеруді қамтамасыз ету керек.

Жоғары мектепте программалауды оқытуды ұйымдастырудың құралдарының классификациясына негізделіп біз визуалды программалау бойынша нақты білімдерді қалыптастыру құралдарын анықтадық [5]:

- оқытудың нақты құралдары (оқулықтар, оқу-әдістемелік құралдар, дидактикалық және көрнекілік материалдар);

- оқытудың идеал құралдары (жаңа оқу материалын меңгеру үшін қолданылатын студенттердің алдында алған білімдері мен біліктіліктері);

- оқытудың виртуалды құралдары (студенттердің виртуалды әрекетіне себеп болатын программалық оқу құралдары).

Оқыту нақты уақытта әр студенттің нәтижелеріне әсер етуі керек. Бұл әдіс студент қажетті уақытта дұрыс білім біру контентін алып, алдына қойған мақсаттарға жету мүмкіндігін арттырады. Жобалық жұмысты жасай отыра студенттер теориялық материалды тереңірек меңгеріп, қолданбалы сипаттағы есептерді шешу барысында теория нәтижелерін тәжірибе жүзінде қолдануға нақты мүмкіндік алады.

Білім алушының жеке басын, кәсіби білімін өздігінен жетілдіруге қабілеттерін, оның ақпараттық қоғам жағдайында өзіндік өнімді әрекетін дамыту, оқыту үдерісінің сапасы мен тиімділігін жоғарылату мақсатымен өмір бойы оқуға дайындықты қалыптастыру үшін біз ақпараттық мультимедиялық технологияны пайдаландық. Мультимедиялық ақпараттық технологиялардың негізгі принциптері:

- интерактивті жұмыс тәртібі;
- басқа программалық өнімдермен байланыс;
- берілген мәліметтердің, есептердің өзгеру үдерісінің икемділігі.

Мультимедиялық технологиялар анимациямен, дыбыспен және видеомен жұмыс жасауды қамтамасыз етеді. Мультимедиялық ақпараттық технологиялар тұтынушының ақпараттық қажеттіліктерін максималды қанағаттандыруға, ұсынылған материалдың сапасын жоғарылатуға мүмкіндік береді.

Бұл мақалада біз студенттердің оқу жетістіктерін бағалаудың мульти-критериалды моделін қолданып визуалды программалауды оқыту бойынша білім беру үдерісін ұйымдастыру әдістері мен формалары туралы айтылып кетті. Білім беру үдерісі оқыту үдерісімен қатар білімді бақылау үдерісін қамтиды. Жобалық және рекурсивтік принциптеріне, жанжақтылық принципіне сәйкес ағымды бақылауды өткізу, студенттердің ағымды және қорытынды аттестатталуы кезінде жеке даралық, объективтілік және беріктік принциптерін жүзеге асыруын қамтамасыз ету оқыту үдерісін ұйымдастыруда визуалды программалауды сапалы оқыту өлшемдерін негіздеуді қамтамасыз етеді. Бұл өлшемдер саналық принципі, қалыптастырушы және анықтаушы бағалаудың бірігуі, шешімдерді қабылдау үдерісінің барлық кезеңдерінде өлшемділігі, дескриптивтігі көмегімен оңай тексеріледі. Келесі кесте (1 кесте) оқыту нәтижелерін мульти-критериалды бағалауды қолданумен визуалды программалауға сапалы оқытуды қамтамасыз етудің жүйесін бейнелейді.

1-кесте. Оқыту нәтижелерін мульти-критериалды бағалау үшін визуалды программалауға сапалы оқыту өлшемдері

Үдеріс	Оқыту принципі	Оқыту нәтижелерін мульти-критериалды бағалау		Визуалды программалауға сапалы оқыту өлшемдері
		Мульти-критериалды бағалау принциптері	Шешім қабылдау үдерістері	
Теориялық оқыту	- жобалау принципі - рекурсивтік принципі	саналылық	Жағдаяттық талдау; Мәселенің идентификациясы және мақсат қою; Қажетті ақпаратты іздеу; Мүмкін болатын шешімдер жиынын қалыптастыру; Шешімдерді бағалау өлшемдерін қалыптастыру; Шешімдерді жүзеге асыру мониторингі үшін индикаторлар мен өлшемдерін жасау	Жаңа білімдермен монотонды байланыста тұрақтылықты сақтайтын базалық білімдерді қалыптастыру
Ағымды бақылау	Жанжақтылық принципі			Оқыту материалдары мен бақылаудың қарапайымдылығы
Бағдарлы бақылау	Жеке даралық принципі	Қалыптастырушы және анықтаушы бағалаудың бірлігі	Шешімдер бағалауын өткізу; Ең тиімді шешімді таңдау	Білім алушылармен білім беру ресурстарын жасау арқылы оқытудың көрнекілігі
Қорытынды бақылау	Объективтілік принципі	критериалдық, дескриптивтік	Жүзеге асыру; Жүзеге асыру мониторингі	Пәндік саланың өзгеруіне жылдам адаптациялау қабілеттерінің қалыптасуы
Қорытынды аттестаттау	Беріктік принципі		Нәтижені бағалау	Оқыту нәтижелерінің өмір бойы тұрақтылығы

Оқыту нәтижелерін анықтау, сапалы оқыту өлшемдерін табу, оқыту мен бақылау үдерістерінің өзара байланысын анықтау оқытудың күтілетін нәтижелері мен бақылау формаларына, бағдарлама мазмұнының өзара толықтыруына негізделген визуалды программалау бойынша білім алушылардың оқу жетістіктерін мульти-критериалды бағалауды жүзеге асыруға мүмкіндік береді.

1. «Білім алушылардың үлгерімін ағымдағы бақылау, аралық және қорытынды мемлекеттік аттестаттау жүргізудің үлгі ережесін бекіту туралы» Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрінің 2008 жылғы 18 наурыздағы № 125 бұйрығы
2. Красноборова А.А. Критериальное оценивание как технология формирования учебно-познавательной компетентности учащихся. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук, Нижний Новгород, 2010.

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

3. Bloom, B. S. (Ed.), Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals: Handbook I, cognitive domain, Longmans, 1956. 52 Huitt, W., —The cognitive system, Educational Psychology Interactive, Valdosta, GA, Valdosta State University, 2006. Retrieved May 22, 2008 from <http://chiron.valdosta.edu/whuitt/col/cogsys/cogsys.html>
4. J. R. Savery and T. M. Duffy, "Problem Based Learning: An Instructional Model and its Constructivist Framework," in Constructivist Learning Environments: Case Studies in Instructional Design, B. Wilson, Ed. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications, 1996.
5. Нурбекова Ж.К. Теоретико-методологические основы обучения программированию: монография. – Павлодар, 2004. – 225с.

***Аннотация.** В статье предлагается методология применения мульти-критериального оценивания учебных достижений студентов по визуальному программированию. Основные компетенции по визуальному программированию представлены на основе таксономии Б.Блума, так как оценка является очень важным аспектом процесса обучения, поскольку это позволит нам определить уровень усвоения знаний и умений студентами.*

***Ключевые слова:** Процесс обучения, мульти-критериальное оценивание учебных достижений, размеры качественного обучения визуальному программированию, программные коды.*

***Abstract.** This paper proposes a method of applying a multi-criteria-based assessment in the visual programming. Core competencies in visual programming presented on the basis of taxonomia B. Bloom, as evaluation is a very important aspect of the learning process, as it will allow us to determine the level of assimilation of knowledge and skills of students.*

***Keywords:** Оқыту принципі, оқыту нәтижелерін мульти-критериалды бағалау, визуалды программалауға сапалы оқыту өлшемдері, программалық кодтар.*

ӘОЖ 004.413

С.З. Сапақова¹, Н.Ш. Қабылханова², Ү. Анарбек^{1*}

**АЛМАТЫ ҚАЛАСЫ БОЙЫНША УРБАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕСІН
МОДЕЛДЕЙТІН АҚПАРАТТЫҚ ЖҮЙЕ ҚҰРУ**

(Алматы қ., ¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
²№159 гимназия, * - магистрант)

***Аңдатпа.** Бұл жұмыста Алматы қаласындағы урбанизация процесін моделдеу есебі қарастырылған, статистикалық мәліметтер жинақталып, солардың негізінде осы процеске әсер ететін басты факторлар іріктеліп алынды. Жұмыста берілген факторлар бойынша регрессиялық теңдеуді құрып, оған көптік регрессиялық және дисперсиялық талдаулар жүргізіп, құрылған моделдің сапасын Фишер критерийінің, ал регрессия коэффициенттерінің маңыздылығы және корреляциялар Стьюденттік t-критерийінің негізінде есептейтіндей ақпараттық жүйе дайындалды. Урбанизациялау процесінің моделінің ақпараттық жүйесін құруда web-технологиялар, JetBrains PhpStorm мәтіндік өңдеушісі қолданылды. Робот-парсер технологиясы көмегімен факторлар туралы мәліметтерді басқа сайттардан алу функциясы жасалынды.*

***Түйін сөздер:** CSS, HTML, PHP, SQL, Дарбин-Уотсон критерийі, дисперсиялық талдау, корреляция, регрессиялық талдау, РОБОТ- ПАРСЕР, Стьюдент критерийі, урбанизациялау, Фишер критерийі.*

Урбанизациялау қоғамның қалыптасуына әсер ететін қала санының өсуіне алып

келетін бүкіләлемдік тарихи процесс болып табылады. Процесс негізіне елдің демографиялық көрсеткішінің құрылымы, халықтың көшіп-қонуы, өндіріс күшінің өзгерісі, мәдениеттегі өзгеріс пен жаңа мәдениеттің қалыптасуы кіреді. Урбанизациялау процесі демографиялық, географиялық, әлеуметтік және экономикалық аспектілерді қамтиды.

Бұл мақалада демографиялық процеске ықпалды деген факторлар іріктеліп алынды, солардың негізінде толықтай регрессиялық, дисперсиялық талдаулар жүргізіп, алынған регрессия теңдеуінің сапасы Дарбин-Уотсон критериймен тексеретіндей ақпараттық жүйенің құру барысы және жұмыс принциптері сипатталады.

Урбанизациялау процесінің математикалық моделі

Көпфакторлы регрессиялық талдау жасау кезеңдері мен жүзеге асырылуы:

Бастапқы деректерді дайындау кезеңі. 1-кестеде 2005 жылдан 2015 жыл аралығында Алматы қаласы бойынша урбанизациялау үрдісіне әсер ететін 7 фактордың сандық нәтижелері көрсетілген [1].

1-кесте. Нәтижелік көрсеткіш пен факторлар кестесі

N	Y (мың адам)	X ₁ (тг)	X ₂ (%)	X ₃ (%)	X ₄ (1000 ад.шақ)	X ₅ (кв.м.)	X ₆ (млн. Тонн)	X ₇ (мың. Тонн)
2005	1247,9	39614	8,8	109,6	695,9	16,7	5843,6	6
2006	1278,3	49201	8,4	112	624,8	18,4	6260,9	8
2007	1324,7	59240	8,2	127,1	781,3	18,5	7418,9	8,7
2008	1361,9	78021	7,8	110,7	778,5	18,6	8024,8	10,1
2009	1390,7	90239	7,4	107,5	757	19,1	8212	10,6
2010	1413,5	95139	7,7	108	733,5	19,3	8591,3	18,2
2011	1449,8	106597	6,3	106,8	780,1	19,5	11476,8	11
2012	1475,4	121674	5,6	106,1	752,7	20,3	16130,5	11,7
2013	1507,5	134378	5,6	104,4	753,6	20,8	17957,6	12,1
2014	1642,3	142310	5,6	107	725,2	24,4	18928,4	12,4
2015	1703,5	155242	5,5	114,8	728,8	28	21780,3	43,5

Нәтижелік көрсеткіш пен факторлар кестесіндегі анықтамалар:

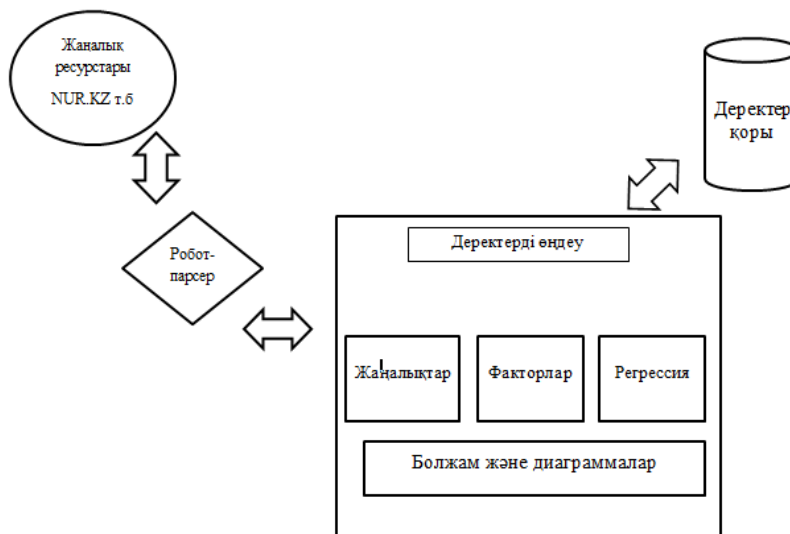
- n – бақылаулар саны (2005-2015 жылдар аралағы);
- Y – нәтижелі көрсеткіш (кездейсоқ тәуелді шама). Алматы қаласы бойынша 2005 жыл мен 2015 жыл аралығындағы демографиялық көрсеткіш;
- X₁ - Алматы қаласы бойынша халықтың өмір сүру деңгейі, теңге;
- X₂ - жұмыссыздық деңгей көрсеткіші, пайыз;
- X₃ - тұтынушылық баға индексі, пайыз;
- X₄ - 1000 адамға шаққандағы диагноз бойынша тіркелген ауру адамдар саны;
- X₅ - бір адамға шаққандағы баспанамен қамтамасыз ету көрсеткіші, шаршы метр;
- X₆ - барлық транспорт түрінің жүк айналымы, млн. тонна;
- X₇ - атмосфераға шығарылған зиянды заттар көлемі, мың тонна.

Ең кіші квадраттар әдісі көмегімен теңдеудің параметрлерін анықтау кезеңі. Бұл кезеңде нәтижелік көрсеткіш пен сол көрсеткішке әсер ететін факторлар мәні анықталғаннан кейін, регрессия теңдеуі құрылады. Модель теңдеуінің параметрлері ең кіші квадраттар әдісі арқылы анықталады. $B(X_j) \cdot X_j$ формуланы қолдану арқылы регрессия параметрлерінің векторы есептелінеді. X_j айнымалысы бар матрица урбанизациялау процесіне әсер ететін факторлар мәндерінен құралады, X_j айнымалысы бар матрицаға бірлік бағаны қосылады.

Урбанизация процесінің ақпараттық жүйесін құру

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

Урбанизация процесіне байланысты құрылатын ақпараттық жүйенің жұмыс істеу сызбасы 1-суретте көрсетілген.



1-сурет. Ақпараттық жүйенің жұмыс істеу сызбасы

Сызба бойынша деректерді өңдеу 4 амалды қамтиды.

Факторлар деректерін өңдеу урбанизациялау процестеріне әсере ететін факторлар туралы ақпарат, кестелік мәліметтер мен диаграммаларды өңдеуден тұрады.

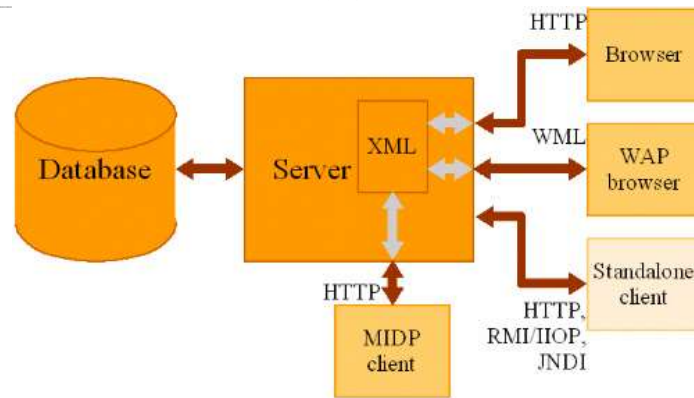
Регрессия деректерінің өңделуі жүйенің басты маңызды бөлігі болып табылады. Себебі урбанизациялау процестерінің моделі регрессиялық талдау негізінде құрылды.

Жаңалықтар деректерінің өңделуі болжам жасау үшін қажетті операция болып табылады. Бұл деректер робот-парсер технологиясының көмегімен жүзеге асырылады.

Болжам және диаграммалар деректерінің өңделуі құрылған модель мен сызықты тренд моделі негізінде болжам жасауды, болжам негізінде диаграммаларды тұрғызуды қамтиды. Деректер қоры факторлардың кесте түрінде берілген мәліметтер жиынтығынан тұрады, парсинг жаңалықтарыды, статистикалық деректерді қамтиды.

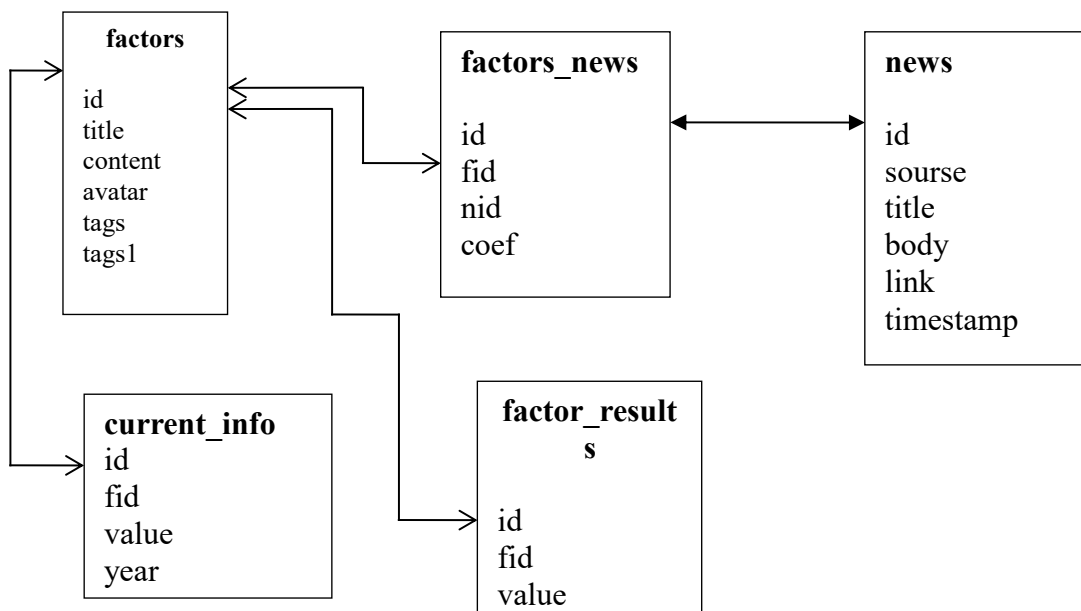
Робот-парсер технологиясы көмегімен статистикалық сайттардан факторларға байланысты ақпараттар алынып, өңделінеді. Ақпараттарды алудың өзінің алгоритмі бар, алдымен факторларға байланысты кілттік сөздер құрылып, сол сөздер негізінде парсинг жүргізіледі. Парсинг нәтижесінде алынған ақпарат бағалау коэффициенті арқылы өңделіп, анықталған коэффициенттер болжам жасауға қолданылады. Парсинг, яғни керекті ақпаратты басқа сайттардың алу, өңдеу технологиясы, архитектурасы 2-суретте көрсетілген.

Парсинг архитектурасы басқа сайттардан HTTP протоколын қолданып, JNDI қосымшалар интерфейсі мен WML минималды деректер блогын қолданып серверге мәлімет жіберу болып табылады.



2-сурет. Парсинг архитектурасы

Ақпараттық жүйенің деректер қоры негізгі 5 кестенің өзара байланысынан тұрады. Деректер қорының моделі 3-суретте көрсетілген:



3-сурет. Деректер қоры сұлбасы

Деректер қорындағы factors кестесінде урбанизациялау процесіне әсер ететін факторлар туралы ақпараттарды қамтиды. Кесте факторлардың жеке идентификацияланған нөмері (id), факторлар атауы (title), кестеде берілу формасы (content), сурет (avatar), парсинг оң үшін кілттік сөздер (tags), парсинг үшін теріс кілттік сөздер (tags1) атрибуттардан тұрады. factors_news кестесі идентификацияланған нөмер (id), факторлардың жеке идентификацияланған нөмері (fid), нөмерлердің идентификацияланған нөмері (nid) және парсинг үшін коэффициенттер нөмірінен (coef) атрибуттарынан тұрады. news кестесі идентификацияланған нөмер (id), сілтеме сайттар тізімі (source), ресурстар тізбегі (title), сайт сілтемесі (link) және уақыт көрсеткіші (timestamp) атрибуттарынан тұрады. Деректер қорындағы current_info кестесі факторлар коэффициенттері туралы ақпаратты қамтиды. Кесте идентификацияланған нөмер (id), факторлардың жеке идентификацияланған нөмері (fid), демографиялық көрсеткіш (value) және жылдар (year) атрибуттарынан тұрады. factor_results кестесі

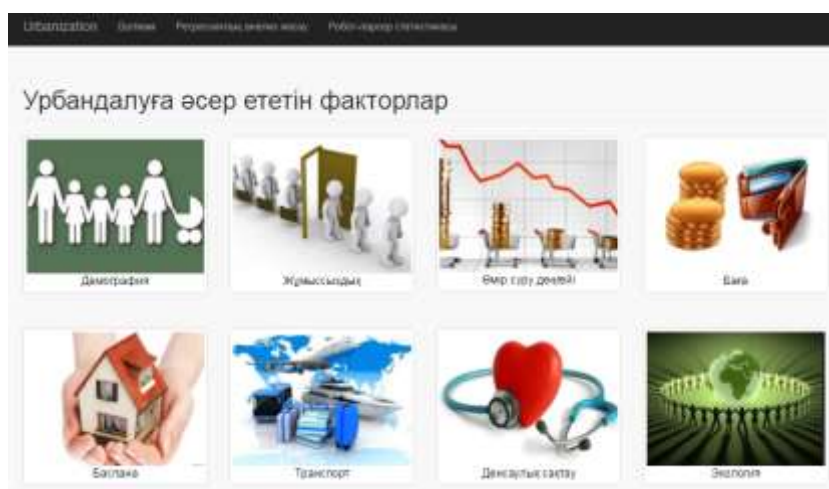
**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

идентификацияланған нөмер (id), факторлардың жеке идентификацияланған нөмері (fid), демографиялық көрсеткіш (value) және уақыт көрсеткіші (timestamp) атрибуттарын қамтиды.

Ақпараттық жүйенің веб-интерфейсі

Ақпараттық жүйе ақпараттардың жиынтығын өңдеуден, басқарудан, деректер қорымен байланыстан қандай да бір логикалық амалды орындайтын жүйе болып табылады. Урбанизациялау процестері моделінің ақпараттық жүйесі PHP тілінде, PhpStorm мәтіндік редакторында құрылды. Сайттың негізгі беті факторлар туралы мәлімет пен негізгі мәзірден тұрады.

Болжам мәзірінде ақпараттық жүйенің негізгі атқаратын функциясы орналасқан. Регрессиялық, корреляциялық талдау жасау осы мәзірде орындалады. Құрылған ақпараттық жүйеде (4-суретте) регрессиялық талдау және корреляциялық талдау есептелінеді.



4-сурет. Жүйенің басты беті

Корреляциялық талдау нәтижелік көрсеткіш пен факторлар және факторлардың өзара байланысын анықтау үшін жүргізіледі.

Программада 7 фактор бойынша регрессиялық талдау жасалынып (5-сурет), автоматты түрде факторлардың корреляциялық коэффициенттері есептеліп (6-сурет), нәтижесі кесте түрінде беріледі. Сонымен қатар талдау нәтижесінде программа интерфейсінде №1 мәзірі пайда болады.

№	Басталу уақыты	Демографиялық	Әлеуметтік	Жұмыссыздық	Білім	Транспорт	Баспананың	Жұмыс	Экология
		көрсеткіші	деңгейі	деңгейі	деңгейі	жүру уақыты	деңгейі	деңгейі	деңгейі
№	У	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
1	2005	1247.9	38614	8.5	106.6	995.9	16.7	5843.6	6
2	2006	1278.3	49201	8.4	112	624.8	18.4	6290.0	8
3	2007	1324.7	59240	8.2	127.1	701.3	18.5	7416.9	8.7
4	2008	1381.8	78821	7.8	110.7	778.5	18.8	8024.6	10.1
5	2009	1390.7	80239	7.4	107.5	787	19.1	8212	10.6
6	2010	1413.5	95139	7.7	109	733.5	19.3	8591.3	10.2
7	2011	1448.8	108897	8.3	108.8	790.1	19.5	11476.8	11
8	2012	1475.4	121074	8.6	100.1	752.7	20.3	10130.5	11.7
9	2013	1507.3	134378	8.8	104.4	753.8	20.0	17957.8	12.1
10	2014	1642.3	142310	8.8	107	725.2	24.4	19928.4	12.4
11	2015	1703.5	165242	8.5	114.8	728.8	28	21790.3	13.5
12	2018	1718.7	188724	8.3	123.3	722.8	31.5	21845.6408	17.2

5-сурет. Талдау жасау терезесі

	Y	X1	X2	X3	X4	X5	X7
Y	1						
X1	0.96502	1					
X2	-0.8983	-0.963	1				
X3	-0.2208	-0.3726	0.41247	1			
X4	0.22096	0.31292	-0.3163	0.08273	1		
X5	0.94981	0.85188	-0.7606	-0.025	0.03591	1	
X7	0.54628	0.95072	-0.9451	-0.2632	0.16823	0.88899	1

6-сурет. Корреляциялық талдау нәтижесі

Бұл мәзірде бірінші жүргізілген талдау нәтижесінде қалған маңызды факторлар бойынша кесте жинақтайды. Регрессиялық талдау жасалынып болғаннан кейін программада соңғы қорытынды теңдеу анықталды. Жүргізілген талдау нәтижесінде X_1 және X_5 факторларының мәні регрессия теңдеуіне кіреді, яғни басқа факторлармен салыстырғанда орташа айлық көлемі мен халықтың баспанамен қамтылу факторлары демографиялық көрсеткіштерге ықпалды болып тұр. Қорытынды регрессия теңдеуі:

$$Y=812,001+0,745X_1+20,694X_5$$

Осы теңдеуге қатысты параметрлері t_{b0} , t_{b1} және $t_b > t_k$ болып табылатындықтан регрессия коэффициенттерінің 0-дік гипотезасы жоққа шығарылып, статистикалық маңызды болды. Детерминация коэффициенті: $R^2=0.9907378$, ал $F=426,8628 > F_{кр}(0.05;2;8)=0.0012098$ орындалғандықтан детерминация коэффициенті статистикалық тұрғыдан маңызды және регрессия теңдеуі сенімді болып табылады [2]. Соңғы регрессия теңдеуі анықталғаннан кейін, жалпы теңдеудің дұрыстығы автокорреляция коэффициентінің нәтижесімен анықталады. Дарбин-Уотсон критерийінің алгоритмі программада көрсетіліп, соңғы теңдеу анықталғаннан кейін автоматты түрде қалдықтар автокорреляциясы есептелінеді [3]. Программаның есептеу нәтижесінде $DW = 2,09$ мәнге ие, яғни қалдықтардың автокорреляциясы жоқ H_0 гипотезасы қабылданады.

Ақпараттық жүйеде факторлар саны мен бақылаулар санын өзгертуге болады, кез келген санды факторлар мен бақылаулар санына программа автоматты регрессиялық және корреляциялық талдау жасайды (7-суретте). Болжам жасауда сызықты тренд моделі және оның функциялары қолданылды. Артықшылығы болжам жасаудағы ең жеңіл әдіс болып табылса, кемшілігі тиімсіздігінде. РНР программалау тілінің артықшылығы оның көпфункционалды қызмет атқаруында, соның бірі робот-парсер технологиясы. Технологияны қолдану арқылы парсинг жүзеге асырылады, яғни басқа сайттардан ақпаратты алу, өңдеу функциялары.

Регрессиялық анализ жасау

Y:	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
X0:	1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	157
X1:	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133	145
X2:	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111	122	133
X3:	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121
X4:	1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109

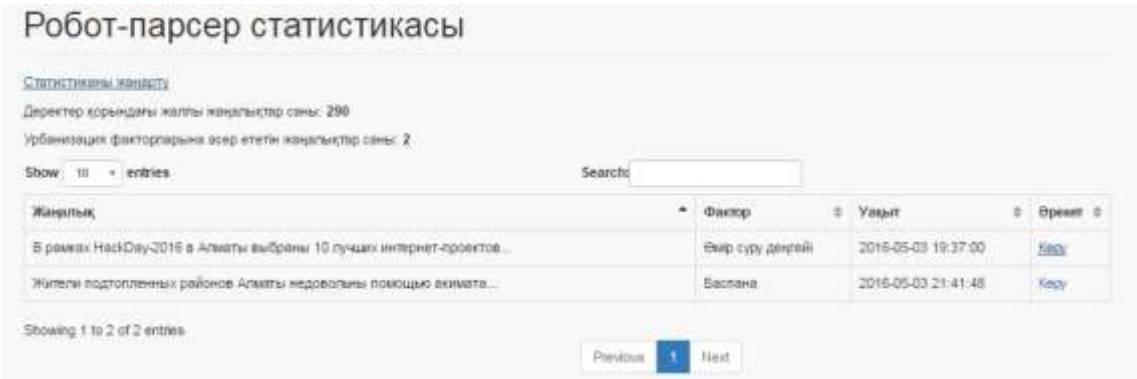
Анализировать

7-сурет. Автоматты регрессиялық талдау жасау

Құрылған ақпараттық жүйеде осы технология мүмкіндіктерін толық мәнді

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

қолданған. Деректер қорындағы жаңалықтар саны статистикалық сайттардан әр жаңарту жүргізген сайын алынып отырады. Демографиялық көрсеткішке болжам жасау үшін алынған ақпаратқа кілттік сөздер негізінде жекелей талдау жүргізіледі. Кілттік сөз негізінде табылған ақпараттар тағайындалған коэффициентпен бағаланады. Осы коэффициенттер негізінен кесте құрылады. Кестеде болжам жасалынатын жылдың әр факторлары туралы мәлімет болады, сонымен қатар бағаланатын коэффициенттер факторлар туралы ақпаратқа қосылып отырады. Нәтижесінде болжам жасау тиімді әрі жүйелі болады (8-сурет).



The screenshot shows a web interface titled "Робот-парсер статистикасы". It includes a search bar and a table with the following data:

Жаңалық	Фактор	Уақыт	Време
В рамках NextDay-2016 в Алматы выбраны 10 лучших интернет-проектов...	Өмір сүру деңгейі	2016-05-03 19:37:00	Кіші
Жители подопленных районов Алматы недополучили поощрjю акимата...	Баспана	2016-05-03 21:41:48	Кіші

8-сурет. Робот-парсер статистикасының терезесі

Урбанизациялау процесі елдің әлеуметтік-экономикалық дамуының маңызды аспектісі болып табылады. Сондықтан таңдалған тақырыптың өзектілігі айқын, көптеген әлеуметтік маңызды факторларды автоматты түрде іріктеп, олардың статистикалық мәндерін Робот-парсер технологиясының негізінде жаңарта отырып, ең соңғы Алматы қаласы бойынша демографиялық болжамды алып береді. Сонымен қатар, толығымен регрессиялық, дисперсиялық талдаулар жүргізіледі, ең соңғы алынған теңдеуге Дарбин-Уотсон критерийі тексеріледі. Ал, бұндай арнайы болжамдар қаланың әлеуметтік мәселелеріне байланысты жоспарлау жұмыстарына аса қажет екені белгілі.

1. Алматы қаласы бойынша статистикалық мәліметтер сайты. URL: <http://almaty.stat.gov.kz/index.php/ru/>
2. Гайдышев И. Анализ и обработка данных// Основы эконометрики. – Санкт-Петербург, 2010. – 750 бет.
3. Шашков В.Б. Прикладной регрессионный анализ (многофакторная регрессия) // — Оренбург: ГОУ ВПО ОГУ, 2003. — 363 бет.

Аннотация. В работе рассмотрена задача моделирования процесса урбанизации в г. Алматы, собраны и структурированы статические данные, на базе которых определены основные факторы, влияющие на данный процесс. Разработана информационная система, которая по основным факторам выполняет множественный регрессионный и дисперсионный анализ, оценивает качество регрессионного уравнения по критерию Фишера, а для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции рассчитываются *t*-критерий Стьюдента. При создании информационной системы для моделирования процессов урбанизации использовались web-технологии и текстовый редактор JetBrains PhpStorm. Для извлечения информации с другого сайта разработана функция по технологии робот-парсер.

Ключевые слова: CSS, HTML, PHP, SQL, дисперсионный анализ, корреляция, критерий Дарбина- Уотсона, критерий Стьюдента, критерий Фишера, регрессионный анализ, Робот-Парсер, урбанизация.

Abstract. In this paper we consider the problem of modeling the process of urbanization in Almaty, collected and structured statistical data, on the basis of which the major factors influencing this process. As a result of work was developed information system, which run a multiple regression and analysis of variance to assess, evaluate the quality of the regression equation with Fisher criterion and to assess the statistical significance of the regression coefficients and the correlations are calculated Student's *t*-test. In the process of creation an information system for the simulation of urbanization used web-technology and a text editor JetBrains PhpStorm. To retrieve information from another site feature is designed for robot-parser technology.

Keywords: CSS, HTML, PHP, SQL, analysis of variance, correlation, criterion of Darbin-Watson, Student's *t* test, Fisher's exact test, regression analysis, robot-parser, urbanization.

ӘОЖ 371.31

А.Ж. Сқақова

ҚАШЫҚТЫҚТАН ОҚЫТУДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ СЕРІКТЕСТІК

(Алматы қ., Нархоз университеті)

Аңдатпа. Бұл мақалада қашықтықтан білім алу жүйесінің халықаралық модельдері, серіктестік пен іс-шаралар туралы талдау жасалған. Қашықтықтан оқудың дамуы ең алдымен екі негізгі фактормен анықталады. Қоғамның әлеуметтік-экономикалық қажеттіліктері және ақпаратты тарату мен өңдеу, коммуникация салаларындағы ғылыми-техникалық прогресс. Үздіксіз білім алу жүйесінің даму қарқыны қарастырылған. Қашықтықтан білім беруді ұйымдастыратын дүниежүзілік ашық университеттердің дамуы әр түрлі қырдан қарастырылады. Сонымен қатар ашық университеттердің қашықтықтан оқытуда бағалау жүйесін және басқа да оқу үдерісін компьютерлік басқару әдістеріне көңіл бөлінген.

Түйін сөздер: қашықтықтан оқыту, технология, модель, білім беру, виртуалды, университет.

Білім беруді интернационалдандыру жағдайында қашықтықтан білім беру үлкен маңызға ие. Компьютерлік байланыстың, онлайн режимінде ақпаратпен алмасу мен интерактивті телевизияның пайда болуы жаңа көкжиектер ашуда. Қашықтықтан оқудың екі моделі бар. Біріншісі – студенттер саны көп болатын, білім беру тек қашықтықтан оқыту әдістерімен берілетін ашық университет. Осындай ашық «жоғары мүмкіндікті университеттер» көбінесе ұлттық оқу орындары ретінде құрылады, қоғамдық қорлармен қаржыландырылады. Мысалға, Үндістандағы Индира Ганди университеті, Таиландтағы Сукхотха Тхамматират университеті, Индонезиядағы Тербука университеті, Ұлттық Кореялық ашық университет және Қытайдағы ашық радиотелеуниверситеттер жүйесі. Үкімет оларды ұлттық деңгейде білім мен дағдыны дамытудың әлеуметтік-экономикалық стратегиясының негізі ретінде қарастырады және оларға әсер етіп, қолдау деңгейі өте жоғары. Мұндай университеттер интеллектуалды немесе экономикалық элитаға емес, қыруар халыққа арналған университеттер.

Қашықтықтан оқытуды ұйымдастыратын ірі деген ұйымдар «МЕГА-университеттер» атты эксклюзивті топқа бірігеді (Universities of the World). Олардың ішіндегі ең танымалы — Ұлыбританияның ашық университеті.

Мұндай ірі жүйелердің дамуы әр түрлі қырдан қарастырылады. Ертеден келе жатқан ұйым қыруар студент санымен, алуан түрлі курстарымен, үлкен әкімшілік

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

құрамымен және т.б. ерекшеленеді.

Солай Қытайдың ашық радиотелеуниверситеті жыл сайын ақылы және ақысыз оқу курстарына миллионнан астам студент жазылғаны туралы хабарлайды. Қазіргі уақытта халықаралық деңгейде білім беру сирек кездеседі, бірақ бұл жағдай тез арада өзгеруі мүмкін, себебі кейінгі уақытта қашықтықтан оқыту тұрақты позицияны иеленуде. Ашық асыра университеттерге оқу материалдарын шығару мен басқарудың орталықтандырылған жүйесі мен оқытудың локалды жүйесіндегі аттестациялау мен білім алушыларды қолдау тән. Олардың көбі басып шығарылған оқу материалдарына бас аударса, кейбірі радио мен телевизияның мүмкіндіктерін пайдаланады. Көбісі ЭВМ негізіндегі бағалау жүйесін және басқа да оқу үдерсін компьютерлік басқару әдістерін қомақты жұмыс көлемін меңгеру үшін қолданады.

Қашықтықтан оқытудың екінші моделіне негізделген Австралия, АҚШ, Канада, Швеция мен т.б. мемлекеттерінің жоғары оқу орындары білім беру университет немесе колледж қабырғасында немесе олардан тыс жерде өткізіледі деген пікірді ұстанады. Мұндай оқу орындарында білім деңгейін бағалау мен диплом беру тұстарында қашықтықтан оқу мен күндізгі оқуды айыра қоймайды, студенттер бір топтан екінші бір топқа ауыса беруі мүмкін. Студенттер оқу орындарында классикалық дәріс-кеңес беру моделін толықтыру мақсатында қашықтықтан оқу материалдарын қолданады.

Соңғы онжылдықта қашықтықтан оқытудың бірнеше халықаралық моделі пайда болды. Олардың барлығы белгілі бір серіктестік пен студенттерді қолдау іс-шараларын ұсынады. Үздіксіз білім беру Ассоциациясының (Канберра, Австралия), төрағасы Л.Моранның еңбектерінде осындай үш модель көрсетілген.

Бірінші модельдің мысалы ретінде басқа елдерден қашықтықтан оқыту курстарының пакетін алып, өз мәдени ортасына бейімдейтін, студенттерді оқытып, үлгерімін бағалап, курсты өтуі бойынша өзінің куәліктерін беретін Гонконгтың ашық оқу институтын (АОИ) қарастыруға болады. Алғашқы уақытта бұл жерде білім беру тек ағылшын тілінде жүзеге асырылды, қазіргі уақытта АОИ кейбір курстарды қытай тіліне аударды және тек қытай тілінде білім алуға болатын курстар енгізілуде; бір тілден екінші тілге өту бағдарламалары да қарастырылған. АОИ-ң табысты қызметінің кілті деп түпнұсқадағы оқу материалдарына мәдени спецификаны қосуға әсерін тигізген, студенттерге академиялық тілге үйрететін және өзара-әрекет етудің қажетті нысанын қамтамасыз ететін кеңес қолдауын айтуға болады. Интерактивтіліктің нысандарына тек жетекшімен жеке сабақтар мен өзіндік жұмыстарды тыныш жерде орындауға мүмкіндік қана емес, сөз жауабы бар автоматтандырылған диалог жүйесі жатады. Бұл модельге алдын-ала шарт қажет – үшінші жақтың материалдарына институт халықаралық құқыққа ие болуы керек. Ол қымбатқа түсетін және қомақты уақыт көлемін алатын процедура болып табылады. Үлкен масштабтағы нарыққа негізделген институттармен ғана жүзеге асырылады.

Екінші модель – серіктестік – бір серіктес оқу материалдарын дайындап шығарады, студенттерден емтихан қабылдап, куәлік береді, ал екінші серіктес білім беру үдерісін, қолдау көрсету жүйесі мен жергілікті басқаруды қамтамасыз етеді. Мысал ретінде Оңтүстік Австралия университетінің Гонконгтің баптистік колледжімен және Малайзиядағы Сепангтік технологиялық институтымен серіктестігін; Пенангидегі Дистед колледжінің бірнеше Австралиялық, британдық және канадалық институттарымен серіктестігін келтіруге болады. Студенттер барлық курстарды өз жерлерінде өтулері мүмкін немесе соңғы курстарын шетелде оқуға да мүмкіндіктері бар. Бұл жүйе негізінен баспа материалдарына және автономды компьютер негізіндегі материалдарға негізделген. Әдетте білім беру мен оқу ағылшын тілінде жүзеге асырылады, және кейбір жергілікті серіктестер студенттерге ағылшын тілін үйрену

бойынша даярлау курстарын немесе тағы да басқа тілді үйрену бойынша қолдау нысандарын ұсынады.

Қазіргі уақытта үшінші модель де даму үстінде – телевизия мен немесе компьютерлік байланысқа негізделген «виртуалды оқу жүйелері». Ол көп жағдайда серіктестік моделіне ұқсас, себебі ақпараттық технологиялардың геосаяси шекараларды өткере алатындағына қарамастан, студенттер бұрынғыдай билікпен ұсынылатын жергілікті қолдауға мұқтаж болатыны анық.

Виртуалды білім алудың кеңінен таралуы осындай оқу ұйымдастырушылардың пайда алуға деген ынтасымен түсіндіріледі. Онлайн оқуды ұйымдастыру алғашқыда үлкен шығындарды талап еткен, алайда кейін келе дәстүрлі білім беру нысанына қарағанда сырттай оқу шығындары азая түседі, яғни сырттай оқу провайдерлерінің аз емес табысқа ие болады деген сөз. Сырттай оқуды дәстүрлі жоғары оқу орындары мен жеке білім беру құрылымдары ғана емес, сонымен қатар ірі медиа-компаниялар да ұйымдастыратыны кездейсоқ емес.

Виртуалды оқудың болашағына келетін болсақ, батыстық эксперттердің пікірі бойынша сырттай оқу ең алдымен ересек жұмыс істейтін халықтың кәсіби біліктілігін көтереді, сонымен қатар жеке дайындалып, оқуды ұнататындардың қажеттіліктерін қанағаттандыратын болады. Онлайн оқудың дамуы пайдалы болмақ, егер де жаңа педагогикалық әдістер, көзқарастар енгізілсе, білім алудың сапасы көтерілсе және тұтынушылардың алуан түрлі қажеттіліктері қанағаттандырылатын болса. Ғаламтор арқылы білім алу жүйелері студенттердің оқу үдерісін байытуы мүмкін, оны белсенді және интерактивті ете отырып. Қосымша онлайн оқу материалдарын қолдану оқу үдерісін ұйымдастыру шығындарының азайтуын қамтамасыз етеді.

Алайда, виртуалды модель қосымша қызметтер мен электрондық рұқсат құралдарын қамтамасыз етуші делдал мен жабдықтаушы қызметін жергілікті ұйымдар атқаратын аймақтық және панжаһандық компаниялар мен консорциумдардың құрылуын қарастырады. Ұлттық масштабта бұл модельдің бастамасын Австралия мен Ұлыбританияның ашық университеттер жүйесі сияқты консорциумдардан көруге болады. Басқа бастама ретінде өзінің жоғары техникалық білім берудің телевизиялық және компьютерлік бағдарламаларын АҚШ-тан Азия-Тынық мұхиты аймағына ілгерлетуге ұмтылатын Ұлттық технологиялық университетті айтуға болады. Бірқатар азиялық орталықтардағы кабельдік телевизияның операторлары қашықтықтан оқыту ұйымдарымен бірге ғана емес, халықаралық және коммерциялық серіктестікте “оқыту каналдарын” құруды қарастыруда. Алғашында олар қарапайым кабельдік телевизия немесе сұраныс бойынша телевизия ретінде қызмет атқаруы мүмкін, бірақ видеоконференциябайланыс, компьютерлік коммуникация мен ақпаратты онлайн режимінде алмасуға тез арада көшеді. Мұндай жүйелердің эволюция қарқыны ұлттық техникалық инфрақұрылымның жағдайына тікелей қатысты; нық, тез әсер ететін, қолжетімді және жоғары сапалы жалпақтықты жолақ жиіліктері міндетті шарт болып табылады. [1, 19-24]

Неміс Б.Розе ғалымы компьютерлік желілер арқылы әлемдік сырттай оқыту орталығын ашу туралы жоспарымен бөлісті. Америкалық ғалымдар К.Чик мен Н.Картер болашақ оқуының жүйесін құрумен айналысуда, Нью-Йорк-ң технолгиялық университетінің вице-президенті, Н.Картер, жоғары білім жөніндегі маман компьютерлік магистрлерді әлемдік масштабта оқу бағдарламаларын сату үшін қолданбақ. Олардың көзқарасында ол белгілі бір телеуниверситет, барлық негізгі орталықтардан жиналған оқу материалдары таратылады.

Олардың пікірінше, аталмыш оқытудың жаһандық желісі (Global Learn Network, GLN) ақпаратты қалпына келтіре алатын жеке компьютерлерді бір-бірімен жалғау негізінде құрылуы керек. Белгілі халықаралық университеттердің эксперттері осы желіні

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

құру үшін қолданылатын мультимедиамен жабдықталған оқыту бағдарламаларын құруды жүзеге асыруда. GLN орталық басқаруын Швейцарияда орналыстыру жоспарлануда, онда оқу материалдарымен үнемі толықтырылатын компьютерлік ақпараттардың бас банкі орналасады.

«Білім әлемнің барлық халқына беріледі», - деп GLN төрағасының мүшесі ретінде Картер мәлімдеме жасаған кезінде сөз берді. «Ең алдымен, бұл желі арқылы бірыңғай біліммен қатар академиялық бағдарламалар таратылады. Университеттердің оқытушылары, әсіресе, әлемдік элитаға кіретін жаратылстану мен техникалық ғылымдар, медицина, қоршаған орта мен энергетика салаларының оқытушылары өздерінің ноу-хауларын GLN желісі арқылы тарататын болады». Оқу жоспарлары мен тематикаларын халықаралық кеңес бекітеді. Бүгінгі өзінде білім алғаны жөнінде құжаттарды берудің бірыңғай жүйесін құру туралы сауал қойылуда.

Желінің қызмет атқаруы ISDN-ге телефон каналдарымен Женевадағы бас базаға қосылу арқылы қамтамасыз етіледі. Сосын қажетті бағдарлама тұтынушы компьютеріне жіберіледі және оқытудың индивидуалды типіне сәйкес интерактивті түрде сәйкестендіріледі. Кейін келе компьютер, видеокамера мен белгі беру сызығының арқасында тиісті оқытушымен тікелей қатынас жүзеге асырылады. Сонымен қатар ауқымды көркем дерекқорға рұқсат қарастырылған.

Одан басқа, тиісті инфрақұрылымы жоқ «үшінші елдерге» арналған аталмыш теленұсқалар жоспарланған. Бұл автоматтандырылған жұмыс орындарымен оқу құрылымдары спутник арқылы жоғары деңгейдегі ноу-хауға қол жетімділігі бар. Университеттер мен кәсіпорындарда мұндай теленұсқалар, сонымен қатар, білім беру мен кәсіби біліктілікті көтеру үшін қолданылуы мүмкін.

GLN құрудың ынтагерлері – 50-ге жуық ғалымдар, ғылыми ұжымдар, кәсіпорындар, сонымен қатар, ұлттық және халықаралық ұйымдардың өкілдері. Олардың ішінде: ЮНЕСКО, Женевадағы телекоммуникациялардың Халықаралық бірлестігі (International Telecommunication Union), сонымен қатар, АҚШ-та, Швейцарияда, ОАР мен Ұлыбританияда орналасқан 120 университеттер; америкалық телекоммуникациялық гигант АТТ мен «Силикон График» компьютерлерін өндіруші кәсіпорындары GLN желісін мультимедиалық компьютерлермен қамтамасыз етуге жәрдемдеседі.

Чик пен Картердің ойлары тек бір кедергіге тіреледі – қаржыландыру сауалы – әлі де ашық. Эксперттер алғашқы инвестициялар құнын 200 млн. жуық деп анықтады. GLN коммерциялық ұйым ретінде қызмет ететін болады. Бағдарламалар сатылатын болады.

Алғашқы инвестициялар құны білім беру саласындағы Нью-Йорктік революционерлерді қорқытпайды. Олар бұл жоба танымал болатыны соншалықты, кейін келе желіні дамыту үшін қаржыландыру акцияларын шығаратынына сенеді. Миллиардтаған долларлар, олардың көзқарасынша, осы акциялардың эмиссиясы кезінде ғана қайтарылады. [2, 85]

Мақсаттарының бірі мүше-елдермен серіктестік арқылы жоғары сапалы білімнің дамуына жәрдемдесу болып табылатын ЕҰ пен ЭДЫҰ сияқты халықаралық ұйымдар, білім алуға қол жетімділікті кеңейту мен азаматтардың біліктілігін көтерудегі негізгі фактор ретінде қашықтықтан оқытуды қарастырады. Ол ЕҰ-ң 1995-1999 жж. жүзеге асырылған бағдарламаларында, сонымен қатар 2000-2006 жж. жоспарланған жаңа бағдарламаларында да көрініс тапты. ЕҰ-ға мүше-елдер мен бұл ұйымға кірмейтін мемлекеттер де білім саласындағы ақпараттық және коммуникациялық технологияларды дамытуға жәрдемдесу жобаларын жасау бойынша жаңа бастамалар қамдануда.

ЭДЫҰ шеңберінде білім беру саласында ақпараттық және коммуникациялық технологияларды дамыту бойынша жұмыс топтары ұйымдастырылуда. Топ міндеті –

тұтынушылардың серіктестігін жеңілдету мақсатында технологиялар нарығына талдау жасау үшін ақпараттық технологиялардың сапа критерийлерін анықтау. Үздіксіз білім алудың дамуымен байланысты қашықтықтан оқуға үлкен көңіл бөлінеді.[3, 4-5]

90-шы жылдары қашықтықтан оқумен айналысатын бірқатар ұйымдар құрылды, соның ішінде:

EADTU – European association of distance teaching universities (Университеттердегі қашықтықтан оқу Еуропалық ассоциациясы);

EDEN – European distance education network (Қашықтықтан оқудың Еуропалық желісі);

ICDE – International council for distance education (Қашықтықтан оқу бойынша Халықаралық кеңес).

1. Моран Л. Дистанционное образование, авторское право и коммуникация в информационном обществе // Бюллетень по авторскому праву. - М., 1999. - Т.32, №4. — С.3-31.
2. Roze B7 Weltuniversitat. Nur ein Haken // Wirtschaftswoche. - Dusseldorf, 1994, - 17Juni. - Jg748, N25. - S.82, 84-85.
3. Paye J.C. Making life-long learning a reality for all // OECD-observer. - P., 1995. - N 193. - P.4-5.
4. Гольдштейн Б. С., Пинчук А. В., Суховицкий А. Л. IP-телефония. М.: Радио и связь, 2001.
5. Гольцман В. Skype: бесплатные звонки через Интернет. Начали! СПб.: Питер, 2009.

Аннотация. В статье рассматривается международная модель дистанционного обучения, партнерства и организация обучения. Развитие дистанционного обучения основывается на двух факторах. Социально-экономические потребности общества, обработка и раздача информации, научно-технический прогресс в коммуникационных отраслях. Рассмотрены темпы развития системы непрерывного образования. А также сделан подробный анализ развития открытых университетов со всего мира. Система оценки и методы компьютерного управления при организации обучения дистанционного обучения открытых университетов.

Ключевые слова: дистанционное обучение, технология, модель, обучение, виртуальность, университет.

Abstract. In this article the international model of distance learning, partnership and a tutoring organization is considered. Development of distance learning is based on two factors. Social and economic requirements of society, processing and distribution of information, scientific and technical progress in communication branches. Rates of development of system of the continuous education are considered. And also the detailed analysis of development of open universities from around the world is made. System of assessment and methods of computer management at the organization of tutoring of distance learning of open universities.

Keywords: distance learning, technology, model, tutoring, virtuality, university.

ӨОЖ 519.6:378

А.Р. Турганбаева, Ф.Р. Гусманова, М.А. Скиба¹

Е-ПОРТФОЛИОНЫ ҚАМТИТЫН АҚПАРАТТЫҚ РЕСУРСТАРҒА ҚОЙЫЛАТЫН ТАЛАПТАР

(Алматы қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ¹«Нархоз» университеті)

***Аңдатпа.** Мақалада сайт құрылымы – ақпараттық-білім беру ортасының құраушысы және программалық құрал ретінде беруге болатын оқытудың ақпараттық-білім беру ортасы қарастырылады. Жұмыста құзырлылық пен рефлексиялардың қолдауымен материалдар толықтырылған білім алушылардың қызметтерінің жалпы түрін біріктіретін портфолио құрылымының бар тәсілдері көрсетілген. Портфолио қызметтердің әр түрінде тұлғалық жеткен нәтижелерді ескеруге мүмкіндік береді. Сондықтан е-портфолио сайтының ұсынылып отырған құрылымының негізгі ерекшелігі құзырлылық пен дәл байланыс болып табылуы керек. Авторлар ұжымы мақалада е-портфолиоға қойылатын талаптардың құрылымын анық береді: сайттың (порталдың) беттеріндегі ұйымдасмыру-әдістемелік құраушы, білім беру құраушы, техникалық құраушы, программалық құраушы, ақпараттық құраушы, тұлғалық құраушының бейнесі.*

***Түйін сөздер:** е-портфолио, құзырлылық, ақпараттық-білім беру ортасы, сайт құрылымы, портал.*

Қазақстан бірдей жағдайда халықаралық білім беру кеңістігінің бәсекелестік үрдісіне қатысады. Енді бәсекелестіктегі артықшылық адамдардың зердесі мен ақпараттық ресурстарына негізделеді. Барлық әлеуеттік институттардың ішінен білім беру институты кез келген қоғамның әлеуметтік-экономикалық және мәдени дамуы болғандықтан заманауи әлемде ережесі мен мелекетті, және адамды қоғамда анықтайды. Білім беруді және тұтасымен алғанда заманауи өмір мен мәдениетті жаңғыртудағы маңызды аспектілердің бірі жаңа ақпараттық технологиялар мүмкіндіктерін, студентке бағытталған оқытуды жүзеге асыруға арналған ақпараттандырудың әдістері мен құралдарын, кәсіби құзырлылықты қалыптастыру үрдісінің анықтылығын пайдалануды ұсынатын ақпараттандыру үрдісі болып табылады.

Ақпараттық-коммуникациялық технологиялардың (АКТ) көмегімен ұйымдастырылған мақсатты бағытталған, кезең-кезеңімен, студентке бағытталған білім беру үрдісі жоғары оқу орнындағы кәсіби құзырлылықты қалыптастырудың негізгі факторы болып табылады. Е-портфолио технология ретінде осы талаптарға жауап береді және студенттерге кәсіби құзырлылықты қалыптастырумен қамтамасыз етуге қабілетті. Анықтылық пен объективтілік е-портфолионың басты жетістіктерінің бірі болып табылады.

Е-портфолионы кіретін білім беруді ақпараттандыру жаңа ақпараттық технологиялар құралдарының мүмкіндіктерін жүзеге асыру негізінде дамитын білім берушілер мен білім алушылар (оқытушылар мен студенттер) қызметтерінің зияткерлендіру үрдісі ретінде қарастырған дұрыс, бұл жерде пәндік сала мен ортаны қоршау (әлеуметтік, экологиялық, ақпараттық және т.б.) заңдылықтарын тану үрдісінің интеграциялық тенденциясын қолдайды. Е-портфолио технологиясы студенттерге педагогикалық әсер етудің көпқырлылығы мен оқыту нәтижесінің құзырлылықпен өрнектелген, кепілденген жетістігін қамтитындай оқытудың жекешеленуі мен саралауының артықшылығын үйлестіреді.

Портфолио шетелдік білім беру ұйымдарында белсенді түрде қолданылады және

білім беру үрдісінде олардың әр түрлі типтері құрылады және пайдаланылады.

Білім беруде пайдаланылатын электрондық портфолионың түрлерін талдай отырып аздаған авторлар ғана портфолионы кәсіби жетістіктерін мақұлдайтын ақпараттар салынған буманың иесі ретінде бастапқы түсінікті ұстанады. Қазір тек қана «бума» ұғымы (иесмінің – білім алушының немесе педагогтың ерекшелігімен жиналған әр түрлі ақпараттар кешенін білдіретін) қалды, ал оның құрылымы мен толтыру тәсілдерін әркім өз түсініктері бойынша көреді. Бұл жерде портфолио

- әр түрлі саладағы портфолио иесінің ынтасын, алға басуы мен жетістіктерін көрсететін жұмысы мен нәтижесінің топтамасы;
- білім беру технологиясы;
- стратегия;
- түпнұсқалық бағалау формасы;
- критикалық ойлауды даму технологиясы;
- білім алушының оқу-таным қызметінің үлгілері мен өнімдерін ұйымдастыру формасы мен үрдісі;
- «өзін-өзі навигациялау» ортасы, құралы;

Әлеуметтік салада білім алуды қалыптастыру үрдісіне және мақсаттық Портфолио деп әдетте белгілі бір жұмыстарды бір мәліметтер қорына бекіту тәсілі түсініледі. Портфолио оқу, әлеуметтік, шығармашылық және кәсіби сияқты қызметтің әр түрлі салаларында пайда болады. Портфолио мақсаты әр текті түрдегі жұмысты жағдайы бар тапсырыс берушілергенәтижелерді көрсету мақсатында бірыңғай жүйе ретінде жоспарлау қарастырылады. Портфолио маман ретінде орындаушының даму деңгейін анықтау немесе мақұлдау құралы болып табылады. Портфолионың құрылуына қатысты (кеі мағынада) – бұл білім алушының белгілі бір оқу аралығында жеке жетістіктерін бекіту, толықтыру және бағалау технологиясы. портфолионың тағайындалуы болып табылады.

Білім берудің мәнді «суретін», білім алушының жеке траекториясын қадағалауды, оның құзырлылығының қалыптасу деңгейі мен білім алушылардың нәтижесін бағалауды көрсететін оқыту үрдісі бойынша есепті беру портфолио тағайындалуы болып табылады.

Авторлардың пікірі бойынша портфолионың кез келген түрі гипермәтіндік сипатта болғандықтан және оның құраушылары айқын емес байланыста ғана болып қоймай, сонымен қатар белсенді гиперсілтеме сипатында да болатындықтан е-портфолионы құру үшін желілік ресурстарды пайдалану оңтайлы болып табылады. Е-портфолио технологиясы желілік кеңістікті білім беру үрдісінің әр түрлі субъектілерімен интербелсенді сұқбаттасу құралы ретінде пайдалануға мүмкіндік береді. Е-портфолио пәнді оқыту мақсатын көрсете отырып, білім алушылар үшін білім беру ортасын құра отырып, олардың нәтижелері мен жетістіктерін белгілеп білім беру үрдісі мен оларды басқаруды ұйымдастыруға арналған әкімшілік құралының қызметін атқара алады. Е-портфолио технологиясын пайдалану студенттерде оны кәсіби және жеке мақсатта пайдалану қабілеттілігін қалыптастырады, кез келген уақытта, кез келген жерден интербелсенді толтыру мүмкіндігін береді және оқытушымен кері байланысты жүзеге асыруды жеңілдетеді.

Осының бәрі е-портфолио технологиясын пайдалануға бағдарланған ақпараттық-білім беру ортасына (АББО) қойылатын талаптарға да әсер етеді. Біздің ойымызша үздіксіз білім берудің тұлғалық-бағдарланған үрдісі жүргізілетін, оның бағасының критерийін сипаттайтын АББО олардың жетістіктерінің нәтижелері мен әдістерін дәл сипаттайды. Ол келесі компоненттерді қамтиды:

Әдіснамалық компонент білім беру ұйымдарының даму тенденциясын ескере отырып АББО қалыптастыру және даму әдіснамасын анықтайды.

Ғылыми компонент педагогикалық ортаның ресурстық қамтамасыздандыру

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

құрамын, субъектілердің ғылыми-зерттеу қызметін ұйымдастыру ретін, осы қызметтің нәтижелерін талдау мен есептеуді, алдыңғы қатарлы тәжірибелерді таралымын ұйымдастыруды, біліктілікті арттыруды қалыптастырады.

Басқару компоненті өріс элементтерінің иерархиясын құрайды, білім беру субъектісінің рөлін, функцияны табыстау мен өкілдігін, жүйенің қызмет істеу ережесін анықтайды.

Әдістемелік компонент тәрбиелеу және білім беру үрдістерін, ұйымдастырудың ретін, формалары мен әдістерін айқындайды, оқыту мақсатынан алынатын олардың есептерін қалыптастырады.

Қызмет көрсету компоненті АББО-дағы элементтердің функциясын және педагогикалық ортадағы барлық ықтималдық өрістегі оқиғалардың ретін анықтайды.

Ұйымдастыру компоненті АББО-дағы оқиғаларды алғашқы құжаттандыру ретін, өңдеу және талдау тәсілдерін, жүйедегі құжат айналымының ережесін береді.

Техникалық компонент білім беру мекемесінің сәтериалдық-техникалық қорының құрамын қалыптастырады, орнатылған ретке сәйкес берілген режимдегі жүйенің барлық элементтерінің қызмет атқаруын қамтамасыз етеді.

Мазмұнды компонент ақпараттық ресурстардың мазмұнын анықтау әдістемесін, білім алушының білім беру траекториясын құруға бағытталған ережелеп мен шарттарды анықтайды.

«Адамзат ресурстар» компоненті білім алушылардың, оқытушылардың, кеңесшілердің білім беру үрдісіне қатысушыларға талаптар қояды.

Коммунткативті компонент педагогикалық ортадағы ақпараттық ағымдардың сұлбасын, байланыс типтерін, АББО элементтерінің арасындағы коммуникация каналдарын, сыртқы ортамен коммуникация ретін анықтайды.

Креативті компонент АББО субъектілерінің шығармашылық күш салысуды ынталандыру ретін құрайды, педагогикалық ортаның барлық кеңістігінде жасампаздық қызметін ұйымдастыру үшін жағдайларды қалыптастырады.

Тұлғалық компонент сайт пайдаланушысының даралығын бейнелеу мүмкіндігін береді [1-8].

Е-портфолто порталына қойылатын талаптар құрылымы:

1) Ұйымдастыру-әдістемелік құраушы:

- білім берудің сәйкес деңгейінің нормативті-құқықтық қоры;
- білім беру деңгейі, біліктіліктің ұлттық жүйесі, кәсіби стандарттар туралы мәліметтер;
- оқыту нәтижелері мен оларды мағлұмдау формалары туралы мәліметтер;
- білім беру үрдісінің субъектілерін (білім алушылар мен профессор оқытушылар құрамы) өзін-өзі беру құралдары;
- жүзеге асыру үшін құрал-жабдықтар;
- білім берудің тағайындалуындағы ақпараттық өзара әсерлесу технологиясының сипаттамасы;
- білім беру контенті мен оның құрылымына қойылатын талаптар;

2) білім беру (педагогикалық) құраушы:

- педагогикалық өзара әсер етудің формалары мен әдістерін жүзеге асыруға мүмкіндік беретін құралдар;
- авторлық білім беру әдістемесі мен технологиясын беретін сайт беттері;
- өзіндік таным қызметін ұйымдастыру және жүзеге асыру бойынша ұсыныстар;

- білім берудің сәйкес деңгейінде оқу үрдісі бойынша әдістемелік ұсыныстар;
 - құзырлылықты презентация бойынша әдістемелік ұсыну;
 - білім беру үрдісінің нәтижелерін сипаттау: маман моделі, құзырлылық тізімі және т.б.;
- 3) сайтты (порталды) қолдайтын техникалық құраушы:**
- сервер,
 - дербес компьютерлер;
 - кең жолақты каналдар;
 - білім беру ұйымдарындағы жергілікті желілер
 - байланыстың электрондық орталары;
- 4) сайтты (порталды) қолдайтын программалық құрал:**
- оқу тағайындалуындағы программалық орта;
 - білім беру тағайындалуындағы web-қосымшалар;
 - ақпараттық ресурстарға, ақпарат алмасуға, оны жөнелту мен таратуға қатынау тәсілдері;
 - пайдаланушының өзін-өзі идентификациялау құралы;
 - компьютерлік визуализациялау құрал-жабдықтары;
 - жасанды интеллект жүйесі;
 - мәліметтер қоры мен білім банкілері;;
 - ақпараттық өзара әсерлесуді жүзеге асырудың құралдары;;
 - телекоммуникациялық технологиялар;
 - экспертті оқыту жүйесі;
- 5) сайтта (порталда) орналасқан ақпараттық құраушы:**
- біліктіліктің ұлттық жүйесі мен құзырлылық тәсілінің білім қоры;
 - ғылыми-педагогикалық, әдістемелік, инструктивтік, хрестоматиялық, техникалық ақпараттардың (электрондық кітапхана, медиатека және т.б.) үлестірілген мәліметтер қоры;
 - оқу, оқу-әдістемелік, әдістемелік және анықтамалық әдебиет;
 - үлестірмелі Интернет ақпараттық ресурстар;
 - берілген пәндік сала мен олардың арасындағы байланыстардың ақпараттық нысандары;
 - білім беру сайттары мен порталдарына пайдалы сәлтемелер;
- 6) сайт (портал) беттерінде тұлғалық құраушылардың бейнеленуі:**
- профессор-оқытушылар құрамының е-портфолиосы;
 - білім алушылардың е-портфолиосы.

Осылайша оқытудың ақпараттық-білім беру ортасы сайтының құрылымын арнайы ұйымдастырылған, синергетикалық эффектті қамтитын жасанды құрылған, ұйымдастыру-әдістемелік, білім беру (педагогикалық), техникалық, ақпараттық, тұлғалық құраушы мен программалық құралдардың жиынтығымен бейне ретінде беруге болады.

Әр түрлі білім беру деңгейі мен әр түрлі пән салалары бойынша оқыту нысанын қамтитын аппараттық-программалық оқытушы кешенін, компьютермен түйіндесу құралын, өзінің компьютері мен программалық-әдістемелік құралдарын құру ұсынылады.

Білім беру ұйымының ғылыми-білім беру сайтының (порталының) құрылымын құру құрылымды толтыру, соның ішінде ақпараттық, навигациялық және сервистік бөлімдерді толтыруды қарастырады.

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

Е-портфолио құрылымы әр түрлі электрондық ресурстармен айқын және айқын емес сілтемелер арқылы тығыз байланысты және құзырлылықтарды мақсатты бағытта қалыптастыру үшін бар ресурстарды пайдалануға мүмкіндік береді. Білім беру үрдісіндегі әр түрлі рөлдерді орындайтын портфолио портфолионың әр түрлі форматтарының/түрлерінің бар болуын ұсынады [9].

Е-портфолио нәтижелерді мониторингілеу мен бағалау жолдары мен тәсілдерін үздіксіздігін, жүйелілігін, көптігін қамтамасыз ететіндей өзгертуге, бағалаудың сапалы критерийін, иілгіштігін, рефлексиясын, уақытында бағалау, ақпаратты беру шапшаңдығын пайдалануға мүмкіндік береді. Портфолио құрылымына қатысты бар тәсілдер білім алушының қызметтерінің жалпы түрлерімен: материалдарды толықтыру, құзырлылық пен рефлексияны қолдайтын түрлерімен біріктіріледі.

Білім алушының білім берудегі қызметтерінің барлық нәтижелерін жүйелендеру және оларды оқытушыға бекіту портфолионың негізгі ерекшелігі болып табылады. Портфолио білім беру үрдісінің тұлғалық нәтижесін, соның ішінде білім мен құзырлылықтың қалыптасу деңгейінің тәуелсіз бағалау нәтижесін қамтиды.

Практикалық-бағдарланған қызметте қолданылатын және е-портфолиода берілген артефакт негізінде жеке және кәсіби құзырлылықтың қалыптасуын бағалауды қарастыратын бағалау түрі ретінде түсінілетін аутентикалық бағалау е-портфолионың негізгі ерекше мінездемесі болып табылады. Осылайша, портфолио оқу бітіруші түлектің кәсіби құзырлылығының, соның ішінде жалпы және арнайы құзырлылығының фракталды бейнесі болып табылады. Портфолио қызметтің әр түріндегі – оқу, шығармашылық, әлеуметтік, коммуникативтік және т.б. түрлері жеке жеткен нәтижелерін ескеруге мүмкіндік береді. Құзырлылықтармен дәл байланыс е-портфолио сайтының ұсынылып отырған құрылымының негізгі ерекшелігі болып табылуы керек.

Е-портфолио бірінші кезекте құзырлылықты ұсыну, тұлға қызметінің нәтижелерін беру, оларды жүйелендіру және ұсыну үшін дайындалады. Портфолио құрамына әр түрлі типтегі файлдар (аудио, видео, графика, мәтіндік), эксплнғ орындалған жұмыстардың үлгілері, бағалар, түйіндеме, сабақ жоспарлары мен жеке ойлаулар жатады. Е-портфолио сайт пайдаланушыларының кең спектрдегі, соның ішінде студенттік қоғамдастық үшін және оқу құралы ретінде пайдаланатын материалдарын мұрағаттандыруға, содан кейін осы материалдарды таратуға мүмкіндік береді.

Сонымен, е-портфолио технологиясын әрбір білім алушыға бар ресурстардың негізінде өзінің қарқынын, оқыту траекториясы мен технологиясын таңдауға және қабылданатын шешімдердің айқындылығы мен объективтілігін қамтамасыз етуге мүмкіндік беретін білім берудің ашық жүйесін құру тәсілі ретінде қарастыруға болады

Мақала 3639/ГФ4 тақырыбы бойынша «Ақпараттық және телекоммуникациялық технологиялар» бағытындағы қолданбалы ғылыми зерттеулерді орындау барысында грант қаржыландыруымен қолдау көрсетіледі.

1. <http://www.portfoliobox.net>
2. <http://www.dunked.com>
3. <http://www.squarespace.com>
4. <http://www.tumblr.com>
5. <http://www.twitter.com>
6. <http://www.blogger.com>
7. <http://www.4portfolio.ru>
8. <http://www.researchgate.net>
9. Скиба М.А., Турганбаева А.Р. Оценка е-портфолио выпускника на основе

применения таксонов Блума // Казахский национальный педагогический университет имени Абая. Вестник. Серия «Физико-математические науки». №4(52), Алматы, 2015.

Аннотация. В статье рассматривается структура сайта информационно-образовательной среды обучения, которую можно представлять как отражение ее составляющих и программных средств. В работе показано, что существующие подходы к структуре портфолио объединяются общими видами деятельности обучающегося: накоплением материалов, подтверждением компетентности (сбор артефактов) и рефлексией. Портфолио позволяет учитывать результаты, достигнутые личностью в разнообразных видах деятельности, поэтому основным отличием предлагаемой структуры сайта e-портфолио должна являться четкая связь с компетенциями. Авторами подробно представлена структура требований к порталу e-портфолио: организационно-методическая составляющая, образовательная составляющая; техническая составляющая, программные средства; информационная составляющая; отражение личностной составляющей на страницах сайта (портала).

Ключевые слова: e-портфолио, компетенции, информационно-образовательная среда, структура сайта, портал.

Abstract. The article discusses the structure of the site information and educational learning environment, which can be thought of as a reflection of its components and software. It is shown that the existing approaches to the structure of the portfolio combined general student activities: the accumulation of materials, evidence of competence (collection of artifacts) and reflection. Portfolio allows you to take into account the results achieved by the individual in a variety of activities, so the main difference between the proposed structure of the site i.e. portfolio should be a clear link to the competencies. The authors detail the structure of the requirements of the portal e-portfolio: organizational and methodological component, educational component; technical component; software; information component; personal reflection component on the site (portal).

Keywords: e-portfolio, competencies information and educational environment, site structure, portal.

ӘОЖ 004.3

И.М. Уалиева, Д.А. Аязбаев*

ЖҮРЕКТІҢ ӨТКІЗГІШ ЖҮЙЕСІН BOARD ЖИНАҒЫМЕН БАҚЫЛАУ

(Алматы қ., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті,*- магистрант)

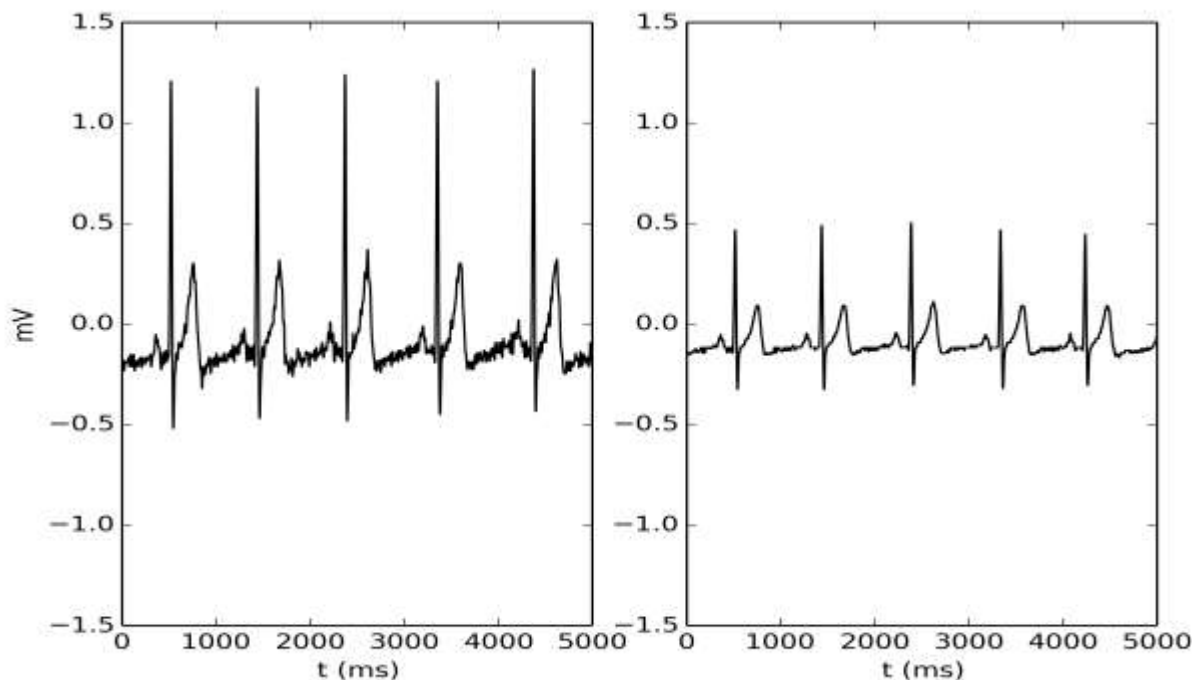
Аңдатпа. Электрокардиограмма арқылы жүректің өткізгіш жүйесін бақылауға болады. Мақала адамның электрокардиограммасын, электромиограммасын өлшей алатын Board жинағымен таныстырады. Жұмыс барысында Board жинағының сигналдарын график ретінде көрсету үшін және сақтау үшін OpenSignals (r)evolution бағдарламасы қолданылды. Мақалада OpenSignals (r)evolution бағдарламасының мәтін пішіміндегі файлдың мәтінінің суреті көрсетілді. Мақалада мәтін пішімінің өңделуі көрсетілді. Сонымен қатар, мақалада электрокардиограмманы өлшеу кеңестері жайлы жазылған.

Түйін сөздер: электрокардиограф, “Board” жинағы, электрокардиограмма, OpenSignals (r)evolution бағдарламасы, электрокардиограмма тіркемесі.

Ырғақ жүргізуші жүректің оң жүрекшесінде орналасады. Ол электр импульстерін

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

шығарып, оларды жүректің өткізгіш жүйесіне бағыттайды. Электрокардиограмма осы электр импульстерінің потенциалдарының айырымын тіркейді [1]. Ал электрокардиограмманы жазатын құралды электрокардиограф деп атайды. Электрокардиограмма арқылы келесі ақпараттарды білуге болады: жүректің пульсін, жүрек соғуының ырғақсыздығын, миокард инфарктыға немесе ишемиялық миокардқа зақым келуін, жүректің сол жақ қарыншасының гипертрофиясының бар-жоғын. 1-суретте PLUX құралымен өлшеген электрокардиограмманың суреті көрсетілді (Board жинағын PLUX компаниясы шығарады).



Сурет 1. 2 электродпен қолда тіркелген электрокардиограмма(сол жақта), 3 электродпен көкіректе тіркелген электрокардиограмма(оң жақта)

Электрокардиограмманы өлшегенде электрокардиографтың маңында электрлік бөгеттер тудыратын заттар болмау керек. Мысалы, өлшеу рентген кабинеттерден, физиотерапия кабинеттерден алыс жерде орындалу тиіс. Электродпен терінің контактісін бекіту үшін терінің майын кетіріп, электродтың басына электр тоғын өткізетін пастаны жағуға болады. Электрокардиограф сигналдарды толқындар арқылы жіберсе, толқындардың ортада таралуын ескеру керек.

Бүгінгі таңда электрокардиографтың көптеген түрлері бар. Мысалы: Medilog AR-12 plus, Кардиоджет, HeartOne, MICROVIT MT-101/200[2]. Бұл электрокардиографтардың өзіне тән ерекшеліктері бар. MICROVIT MT-101/200 электрокардиографтың интерфейсі 20 астам тілдерде жазылса, HeartOne электрокардиографы қолданғанға ыңғайлы: электрокардиограмманы жазу үшін қолданушы екі бас бармағын электродтарға қойып, тиісті түймені басу керек. Келесі электрокардиограмманы өлшей алатын құралдың аты – Board жинағы.

Board жинағы

Board жинағы келесі құрауыштардан тұрады: MCU, Bluetooth, зарядтау модулі, электрокардиограф, EMG, EDA құралдары, акселерометр құралы, сәуле шығаратын диод, аккумулятор және 5 алдын-ала геледенген электродтардан. Board жинағымен адамның электрокардиограммасын, электромиографиясын, электр

өткізгіштігін анықтауға болады. Board платформасы Arduino платформаларымен үйлесімді. Яғни қажет болған жағдайда, Board жинағының Micro Controller Unit-ін Arduino-ның Micro Controller Unit-імен ауыстыруға болады. Board жинағының сигналдарын әр түрлі бағдарламалар қабылдай алады. Оның бірі – OpenSignals (r)evolution тірегі (каркас).

OpenSignals (r)evolution бағдарламасының интерфейсі келесі пункттерден тұрады: таңдалған арнадан сигналдарды қабылдауды бастау, қабылдаған ақпаратты көрсету, қабылданған сигналдарды сақтау, сигналдарды жіберушінің диспетчері (Device manager for device configurations), байланыстың баптаулары, BITalino ғаламтор дүкені, OpenSignals (r)evolution бағдарламасын пайдалануға көмек. OpenSignals (r)evolution бағдарламасы ақпараттарды American Standard Code for Information Interchange(ASCII) мәтін немесе Hierarchical Data Format(HDF) пішімінде сақтай алады. Бағдарламашылар осы файлдар негізінде қосымшалар жаза алады. 2-суретте ASCII пішімінде сақталынған файлдың мәтінінің суреті көрсетілді.

```

1 # OpenSignals Text File Format
2 # {"98:D3:31:80:48:2D": {"sensor": ["EMGBIT", "EDABIT", "ECGBIT", "ACC", "LUX", "RAW"],
3 "device name": "98:D3:31:80:48:2D",
4 "column": ["nSeq", "I1", "I2", "I3", "I4", "A1", "A2", "A3", "A4", "A5", "A6"],
5 "sync interval": 2, "time": "17:44:3.717", "comments": "",
6 "device connection": "BT98:D3:31:80:48:2D", "channels": [1, 2, 3, 4, 5, 6],
7 "date": "2016-4-7", "mode": 0, "digital IO": [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1],
8 "firmware version": 771, "device": "bitalino", "position": 0,
9 "sampling rate": 100, "label": ["A1", "A2", "A3", "A4", "A5", "A6"],
10 "resolution": [4, 1, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 10, 6, 6], "special": [{"}, {}, {}, {}, {}, {}]}
11 # EndOfHeader
12 0 1 1 1 1 12 5 0 316 0 0
13 1 1 1 1 1 1 9 5 0 313 0 0
14 2 1 1 1 1 1 9 5 0 312 0 0
15 3 1 1 1 1 1 9 5 0 313 0 0
16 4 1 1 1 1 1 12 6 0 313 0 0
17 5 1 1 1 1 1 9 5 0 315 0 0
18 6 1 1 1 1 1 9 5 0 312 0 0
19 7 1 1 1 1 1 12 6 0 312 0 0
20 8 1 1 1 1 1 12 6 0 313 0 0
21 9 1 1 1 1 1 9 5 0 313 0 0
22 10 1 1 1 1 1 9 5 0 313 0 0
23 11 1 1 1 1 1 9 5 0 312 0 0
24 12 1 1 1 1 1 9 5 0 312 0 0
25 13 1 1 1 1 1 4 5 0 312 0 0
26 14 1 1 1 1 1 9 5 0 310 0 0
27 15 1 1 1 1 1 9 5 0 311 0 0
28 16 1 1 1 1 1 9 5 0 312 0 0

```

Сурет 2. OpenSignals (r)evolution бағдарламасы құрастырған ASCII мәтін пішімі

Суретте көрсетілгендей ASCII мәтін пішімі құралдың атынан , жазылымның бастау уақытысынан(жуық), дискреттеу жиілігінен және т.б. ақпараттарынан тұрады.

Электрокардиограммаға талдау

OpenSignals (r)evolution бағдарламасының ASCII мәтін пішімінің мәндерінің соңғы алты бағаналарына сәйкесінше EMG, EDA, ECG, ACC, LUX, RAW құралдар сәйкес келеді (мысалы: 316,313,312 мәндері акселерометр құралының өлшеген мәндері). Электрокардиограмма құралының өлшеген мәндерін вольт өлшем бірлігіне айналдыру үшін 1-формуланы пайдалану керек:

$$ECG(V) = \frac{\left(\frac{ADC}{2^n} - \frac{1}{2}\right) * VCC}{G_{ECG}} \quad (1)$$

Бұл формулада VCC 3.3 вольтқа, ADC арнаның мәніне(файлда көрсетілген мән), G_{ECG} 1100-ге, n 10-ға тең. 2-суреттің 12-жолында ADC мәні 0-ге тең. Бұл мәнді вольт өлшем бірлігіне айналдыру үшін 1-формуланы пайдаланамыз. Мысалы,

$$ECG(V) = \frac{\left(\frac{0}{2^{10}} - \frac{1}{2}\right) * 3.3 \text{ В}}{1100} = -1.5 \text{ мВ (12-жол үшін)}$$

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

$$ECG(V) = \frac{\left(\frac{813}{2^{10}} - \frac{1}{2}\right) * 3.3 \text{ В}}{1100} \approx 0.882 \text{ мВ (басқа мысал)}$$

Егер OpenSignals бағдарламасының баптауында дискреттеу жиілігінің мәні 1000 жазылым секундына қойылса, әр жазылымның арасы 1 миллисекундтай болады. Ал дискреттеу жиілігі 100 жазылым секундына қойылса, әр жазылымның арасы 10 миллисекундтай болады. Мысалы, 2-суретте 12 мен 13- жазбалардың(жолдардың) арасы 10 миллисекундтай.

Жүректің пульсін тіркеуінің бірнеше жолдар бар: электрокардиограмманың R тісшелерінің 1 минутта тіркелуін санау; R-R арақашықтықты секунд өлшем бірлігінде өлшеп, R-R арақашықтықты алпыс секундқа бөлу. Электрокардиограмманың R тісшесін анықтайтын алгоритмдер бар[3]. Алгоритмдер электрокардиограмманың тісшелерінің енілерін, тіркелу уақыттарын анықтайды. Яғни, осы алгоритмдер арқылы біз жүректің соғуын бақылай аламыз.

Электрокардиограмманың тіркемелері

Электрокардиограмманы өлшеу үшін өлшейтін тіркемені таңдау керек. Электрокардиограмманың тіркемесі – электрокардиограмманы өлшеу үшін потенциалдардың айырымын өлшеу. Тіркемелердің келесі түрлері бар: I, II, III стандартты, aVR, aVL, aVF, V1-V6. Стандартты тіркеме электр өрісінің екі нүктелерінің және маңдайлы жазықтықтағы нүктелердің потенциалдарының айырымын анықтайды. Электрокардиограмманы I стандартты тіркемеде өлшеу үшін сол қолға плюс электродты, оң қолға теріс электродты, жерге тұйықтау электродын оң аяққа қою керек. Ал электрокардиограмманы II стандартты тіркемеде өлшеу үшін сол аяққа оң электродын, оң қолға теріс электродын, оң аяққа жерге тұйықтау электродын қою керек. III стандартты тіркемеде сол аяққа плюс электроды, оң аяққа жерге тұйықтау электроды, сол қолға теріс электроды қойылады. Басқа тіркемелер жайлы [4] оқуға болады.

Қорытынды

Board жинағы әр түрлі қолданбалы бағдарлама интерфейстерді(API) пайдалана алады. Мысалы: Java, Unity, Arduino, C++, Matlab, Python, C#. Board жинағының Freestyle, Plugged, HeartBIT деген нұсқалары бар. Жинақтың қолданушысының мақсатына қарай Board жинағы әр түрлі жобаларда қолданылуы мүмкін. Board жинағында аналогтік, сандық кірістер\шығыстар(входы\выходы) бар. Board жинағы туралы ақпараттарды [5,6] сайттарында алуға болады.

Электрокардиограммаға талдау тісшелердің амплитудаларын, енілерін және тісшелердің тіркелулерін анықтауын қажет етеді. [3] көрсетілген туынды негізінде алгоритм, Пан-Томпкинс, нөлді қию саны негізінде, алгоритмдер электрокардиограммадан R тісшесін анықтайды.

Алгоритмнің дәлдігіне электрокардиографтың дұрыс пайдалануы әсер етеді. Өйткені, электрокардиографты дұрыс пайдаланбаған жағдайда, электрокардиограмма тісшелерге қатысты емес сигналдардан тұруы мүмкін. Бұндай сигналдар келесі жағдайларда пайда болуы мүмкін: адамның электродтарды жылжытуы, сигнал тасымалданғанда оған сыртқы ортаның әсері.

1. Зудбинов, Ю.И.Азбука ЭКГ. – третье издание. Стилистика текста [Текст]: учеб. пособие/ Ю.И.Зудбинов. — Ростов н/Д, 2003. – 160с. – ISBN 5-222-02964-6.
2. Уалиева И.М., Маншарипова А.Т., Аязбаев Д.А.The portable electrocardiograph “Komekshy” as means of heart vascular system monitoring. Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Хабаршы. – 2016. – №2. – Сс.144-147.

3. А.В. Рослякова, П.Г. Чупраков, Сравнительный анализ алгоритмов обнаружения R-зубца электрокардиосигнала. Вятский медицинский вестник. 2012. №2. С. 29-35.
4. Руководство по кардиологии: Учебное пособие в 3 т. / Под ред. Г.И. Сторожакова, А.А. Горбаченкова. – 2008. – Т.1. – 672 с.:ил.
5. Bitalino [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.bitalino.com
6. Bitalino Board Kit [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.mindtecestore.com/en/shopstart-en/176/1/shop/bitalino-board-kit-detail>

Аннотация. С помощью электрокардиографа можно наблюдать за проводящей системы сердца. В статье рассмотрен электрокардиограф набора Board. Набор Board может измерять электрокардиограмму, электродермальную активность и электромиограмму человека. Для визуализации и сохранения сигналов платформы было использовано программное обеспечение OpenSignals (r)evolution. В статье авторы показали, как можно обработать значения текстового формата. Особенности измерения электрокардиограммы также рассмотрены в статье.

Ключевые слова: электрокардиограф, набор «Board», электрокардиограмма, программное обеспечение OpenSignals (r)evolution, отведение электрокардиограммы.

Abstract. Heart conducting system can be monitored by electrocardiograph. The article introduces electrocardiograph of Board kit. Board kit can measure person's electrocardiogram, electrodermal activity and electromyogram. OpenSignals (r)evolution software was used to visualize and save signals of Board kit. The article contains figure of text of file, which is in text format of OpenSignals (r)evolution software. In article authors showed examples of processing text format values. In addition, article contains advices for measuring electrocardiogram.

Keywords: electrocardiograph, "Board" kit, electrocardiogram, OpenSignals (r) evolution software, electrocardiogram lead.

ӘОЖ 378.18:378.4

К.З. Халықова

ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРЫНДАРЫНДА ПРОГРАММАЛАУ ТІЛДЕРІН ҚАТАРЫНАН ОҚЫТУДЫ ЖҮЗЕГЕ АСЫРУ

(Алматы қ., Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті)

Аңдатпа. Мақалада болашақ информатика мұғалімдерін даярлаудағы программалау тілдерін оқыту мәселесі қарастырылады. Қазақстан Республикасындағы аталған мәселенің өзектілігі талданған. Студенттердің зерттеу іс-әрекеті және инновациялық технологиялар ұғымдары туралы баяндалған. Программалау тілдерін қатар оқытуды жүзеге асыру жолдары келтірілген. Аталған әдісті жүзеге асырудың негізіне жобалық әдіс алынып, мысалдар келтірілген.

Түйін сөздер: студенттердің зерттеу іс-әрекеті, инновациялық технологиялар, программалау тілдері, лекция, зертханалық сабақ, алгоритм

Бүгінгі таңда елімізде білім беру жүйесін дамытудың катализаторына айналған ақпараттандыру үдерісі мен білім беру саласына инновациялық технологияларды енгізудің негізгі бағыттары және идеялары, еліміздің тұрақты экономикалық дамуына негіз болатын бәсекеге қабілетті мамандар даярлау мәселелері Қазақстан Республикасының 2005-2010 жылдарға арналған білім беруді дамытудың мемлекеттік

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

білім бағдарламасында, Қазақстан Республикасының 2015 жылға дейінгі білім беру тұжырымдамасында, «Қазақстан – 2030» стратегиясында, 2020 жылға дейінгі Қазақстан Республикасының Стратегиялық даму жоспарында, "Нұрлы Жол - Болашаққа бастар жол" (2014 ж.), "Қазақстан жаңа ауқымды шынайылықта: өсім, реформалар, даму" атты Ел Басы Н.Ә.Назарбаевтың халыққа Жолдауларында айрықша аталып көрсетілді.

Жоғары білім беру саласында: «...еңбек нарығының қажеттілігін, жеке тұлғаның, елдің индустриалды-инновациялық даму міндеттерін қанағаттандыратын және білім беру саласында әлемдік практикаға сәйкес білім берудің жоғарғы деңгейдегі сапасына қол жеткізу қажеттілігі» аталып көрсетілген [1].

"100 нақты қадам" атты Ұлт Жоспарының негізінде жасалған "Қазақстан Республикасында Білім мен ғылымды дамытудың 2016-2019 жж. арналған мемлекеттік бағдарламасында" [2] білім беру мен ғылымды ары қарай дамыту шаралары нақты көрсетілген. Бағдарламаның негізгі мақсаты - білім беру мен ғылымның бәсекеге қабілеттілігін арттыру, экономиканың орнықты дамуы үшін адам капиталын дамыту болып табылады. Қойылған мақсатты жүзеге асыруды қамтамасыз ететін нақты міндеттер де аталып көрсетілген. Бағдарламадағы негізгі мәселелердің бірі үш тілді қатар меңгеруді жүзеге асыру болып табылады.

Қазіргі уақытта Назарбаев интеллектуалдық мектептерінің тәжірибесі кең ауқыммен республиканың барлық мектептеріне таратылу үстінде. Елімізде педагог мамандарды дамытудың жаңа құрылымы енгізілуде, оның негізіне мұғалімнің зерттеу іс-әрекеті алынып отыр. Мұғалімнің зерттеу іс-әрекетін қалыптастыру мәселесі педагогикалық ЖОО-дағы мамандар даярлаудағы бүгінгі таңда алдыңғы кезекте шешілетін маңызды мәселелердің бірі болып отыр. Бұл педагогикалық жоғары оқу орындарында студенттердің зерттеу іс-әрекетін ұйымдастырудан бастау алуы тиіс.

Студенттердің зерттеу іс-әрекеті - өзекті мәселені шешуге бағытталған нақты ғылыми пән саласындағы элементтер, байланыстар мен қатынастардың жиынтығы болып табылады. Студенттердің оқу зерттеу іс-әрекетінің ғылыми зерттеу іс-әрекетінен айырмашылығы қоршаған ортадағы белгілі объектілер, қасиеттер мен құбылыстарды зерттеуге арналған ерекше жағдайлардың құрылуымен сипатталады [3].

Педагогикалық жоғары оқу орындарында болашақ мамандарды оқу зерттеу іс-әрекетіне баулу тек сабақ кестесіндегі оқу уақытымен шектелмейді. Бұл мәселе кредиттік технологиямен оқыту жағдайында студенттердің өз бетіндік оқу іс-әрекетімен ұласып, олардың өзіндік жұмыстары арқылы мамандық пәндері бойынша терең білім алуға мүмкіндік туғызады. Өйткені студенттердің зерттеу іс-әрекеті олардың өз бетінділігін, әртүрлі қызмет саласында шығармашылықпен жұмыс істеп, үнемі еңбектене білу іскерлігін қалыптастыруды қамтамасыз етеді.

Кәсіби шеберлігі қалыптасқан шығармашыл ұстаз оқыту процесін студент білім мен іскерлікті өз бетімен орындай алатындай жағдайды құра отырып, ұйымдастырады. Ол алдымен студенттің қызығушылығын оятып, одан кейін оны іс-әрекетке жұмылдыратын жағдай құра отырып, бұрын алған білім мен іскерліктерінің негізінде, жаңа білім мен іскерліктерді меңгеруге өз бетімен меңгеруі қажет. Одан кейін алынған нәтижелерді ашық түрде қорғауға мүмкіндік беру және педагог студенттің алған білімі мен іскерлігінің деңгейін, барлық зерттеу іс-әрекетінің нәтижесін бақылап отыруы тиіс.

Педагогикалық жоғары оқу орындарында студенттердің зерттеу іс-әрекетін ұйымдастыруда қазіргі инновациялық технологиялардың жетістіктері мен мүмкіндіктерін басшылыққа аламыз. Сөйтіп, оқу процесін инновациялық технологияларды пайдалануға негіздей отырып, ұйымдастырғанда ғана студенттердің зерттеу іс-әрекетін дұрыс жолға қоямыз. Сонымен, ұсынылып отырған мақалада болашақ информатика мамандарын даярлаудағы арнайы пәнді оқытуды

ұйымдастырудың бір инновациялық әдісін қарастырамыз.

Ал, инновациялық технологиялар - бұл бүгінгі білім берудің мақсаттары мен міндеттерін ескере отырып, дәстүрлі технологиялардан туындаған, түрлендірілген технологиялар болып табылады.

Қазіргі уақытта информатика мамандарын даярлау сапасын арттыру білім беру жүйесіндегі өзекті мәселелердің біріне айналып отыр.

Программалауды оқыту "Информатика" мамандығы бойынша педагогикалық білім беруде болашақ информатика мұғалімдерін даярлау жүйесіндегі негізгі пәндердің бірі болып табылады. Сондықтан Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті "Информатика" мамандығы студенттері үшін "Алгоритмдеу және программалау негіздері" деп аталатын курс енгізді. Аталған курсты оқыту негізінде болашақ информатика мұғалімдерін алгоритмдеу және программалау негіздеріне даярлау жүзеге асырылады. Жалпы білім беретін орта мектепте информатиканы оқытудың негізгі мақсаты информатиканың іргелі жаратылыстану пәні екендігі туралы ғылыми болжамды қалыптастыру болып табылады. "Алгоритмдеу және программалау" мазмұндық бағыты жалпы білім беретін орта мектептегі информатика курсының негізгі іргелі құраушыларының бірі болып табылады.

Сонымен қатар, болашақ информатика мұғалімдерін даярлау процесінде олардың арнайы және кәсіби пәндерді жеткілікті деңгейде меңгеруі алгоритмдеу және программалау саласы бойынша дайындық деңгейлеріне тәуелді.

Педагогикалық жоғары оқу орындарында программалау пәнін оқыту тәжірибесі көрсеткеніндей, студенттердің алгоритмдік ойлау дағдысының жеткілікті деңгейде қалыптаспағандығынан бірқатар мәселелер туындайды. Осындай мәселенің негізгілерінің бірі - программалау курсының шеңберінде тек бір ғана императивті программалау тілін меңгеріп қана қоймай, декларативті программалау - объектіге бағытталған программалауды оқыту да қарастырылады. Программалаудың бір түрінен екіншісіне көшкенде студенттерде қиындықтар туындайды, қойылған есепті шешу әдісін ғана емес, сонымен бірге, студенттің ойлау іс-әрекетін өзгертетіндей тәсілді пайдалануды талап етеді.

Педагогикалық жоғары оқу орындарында программалау тілдерін оқытуға байланысты жүргізілген зерттеулерде екі түрлі көзқарасты ерекшелеуге болады: біріншісі әртүрлі программалау тілдерін бірінен кейін бірін сызықтық түрде оқыту болса [4,5], екінші тәсіл [6,7] әртүрлі программалау тілдерін қатарынан оқыту.

Ал, біз императивті программалаудың өзін оқытуда екі программалау тілінің синтаксисін қатар меңгертуді ұсынамыз. Жалпы практикада екі программалау тілін бірінен кейін бірін оқығанда екі есе уақыт кететіні белгілі. Неліктен екі программалау тілінің синтаксисін меңгеру қажет? Біріншіден, аталған "Информатика" мамандығы бойынша жоғары оқу орындарының көпшілігі C/C++ программалау тілдерін оқытады. Екіншіден, жалпы білім беретін орта мектепте әлі күнге дейін мемлекеттік білім беру стандарты бойынша Паскаль программалау тілі оқытылады. Ал, практика көрсеткеніндей, орта мектептен ешқандай программалау тілін оқымай келген студент үшін программалау тілін C/C++ тілінен бастап меңгеру айтарлықтай қиындық туғызады. Ал, Паскаль тілі программалаудың негізін түсіндіруге жеңіл, әрі ыңғайлы тіл.

Екі программалау тілін қатар оқытуды төмендегідей жүзеге асыруға болады.

Оқыту лекция және зертханалық сабақтар негізінде жүзеге асырылады. Сонымен бірге, студенттердің өзіндік оқу іс-әрекетін ұйымдастыруға арналған тапсырмалар дайындалады.

Егер программалау тілі бірінен кейін бірі оқытылатын болса, программаның құрылымы, мәліметтер типі, алгоритмнің негізгі түрлерін оқытуға жеке-жеке уақыт әрі

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

лекция сабағына, әрі зертханалық сабақтарға бөлінетін еді. Ал, екі тілді қатар оқыту кезінде, аталған теориялық материалдарды оқытуға бір ғана уақыт кетеді, негізгі есепті шығару алгоритмдері талданып, блок схемасы құрылып, оның программалау тіліндегі программасы екі тілде бастапқы кезеңде ұсынылады. Ал кейіннен лекция сабағы кезінде уақытты ұту үшін талданған негізгі алгоритмдердің бірінің программасы Паскаль тілінде берілсе, келесі мысал C/C++ тілінде ұсынылады. Мұндай тәсіл студенттің программалау курсының негізгі алгоритмдерін жеткілікті деңгейде түсінуіне және есте сақтауына тиімді екенін практика көрсетті.

Мысалға лекция сабағындағы Евклид алгоритмі бойынша екі санның ең үлкен ортақ бөлгішін (ЕҮОБ) табуы қарастырайық. ЕҮОБ табу алгоритмі төмендегідей және оны дербес жағдай үшін қарастырайық. ЕҮОБ(36,45) сандары үшін ең үлкен ортақ бөлгішті табу алгоритмін қадаммен жазып шығайық.

Бірінші санның үлкенінен кішісін аламыз $45 - 36 = 9$ да, оның айырмасын алғашқы екі санның үлкенімен алмастырып, жаңа екі сан аламыз, ол 9 және 36.

Қайтадан екі санның үлкенінен кішісін аламыз, $36 - 9 = 27$, оның айырмасын сол екі санның үлкенімен алмастырып, жаңа екі сан аламыз: 9 және 27.

Қайтадан екі санның үлкенінен кішісін аламыз, $27 - 9 = 18$, оның айырмасын сол екі санның үлкенімен алмастырып, жаңа екі сан аламыз: 9 және 18.

Қайтадан екі санның үлкенінен кішісін аламыз, $18 - 9 = 9$, оның айырмасын сол екі санның үлкенімен алмастырып, жаңа екі сан аламыз: 9 және 9.

Енді екі бірдей сан алдық, бұл сан 45 және 36 сандарының ЕҮОБ болып табылады. $ЕҮОБ(36,45) = 9$.

Бұдан бұл алгоритмнің мәні санның үлкенінен кішісін алып, ол санның үлкенін айырмамен алмастыру процесін ең соңғы нәтижелер теңескенше жалғастырумен түсіндіріледі. Екі сан теңескенде процесс тоқтайды да, берілген екі санның ЕҮОБ -ін береді. Енді осы алгоритмнің программалау тілдеріндегі программасын талдайық.

Программаның сипаттау бөлімінде:

Берілген екі бүтін санды сипаттау үшін a , b және берілген бастапқы екі санды сақтау үшін $a1$, $b1$ айнымалыларын сипаттаймыз.

Программа денесінде:

Шығару операторының көмегімен бүтін сандарды енгізу туралы хабарлама шығады.

Енгізу операторы арқылы a және b айнымалыларының мәндері енгізіледі. Олардың мәндері **меншіктеу** операторы арқылы $a1$ және $b1$ айнымалыларына меншіктеліп, жадыға орналасады.

While қайталану операторына жазылатын шарт әзір a -ның мәні b -ға тең емес және ол шарт бұзылғанша, дәлірек айтқанда, a -ның мәні b -ның мәніне теңелгенше қайталана береді.

Ал цикл денесінде бір ғана басқару операторы болады: егер a -ның мәні b -ның мәнінен үлкен болса, a -ға " $a - b$ " меншіктеледі, әйтпесе b -ға " $b - a$ " меншіктеледі. a -ның мәні b -ға тең болғанда қайталану процесі тоқтап, программадағы басқару келесі шығару операторына беріледі. Шығару операторы арқылы берілген екі санның ортақ бөлгіші экранға басылып шығады.

Енді программасын құрайық. ЕҮОБ-ін табу алгоритмінің Паскаль және C++ тілдеріндегі программаларын келтірейік.

Паскаль тіліндегі программасы:	C++ тіліндегі программасы:
<pre> Program Problem2b; uses Crt; var a, b, a1, b1 : integer; begin write('Enter first number '); readln(a); write('Enter second number '); readln(b); a1 := a; b1 := b; while a <> b do begin if a > b then a := a - b else b := b - a end; writeln('EUOB(', a1, ', ', b1, ')= ', a) ; end. </pre>	<pre> #include<iostream> #include<conio.h> using namespace std; int main() { int a, b, a1, b1; cout<<"Enter first number a="<<endl; cin>>a; cout<<"Enter second number b="<<endl; cin>>b; a1= a; b1= b; while (a!=b) {if (a > b) a=a - b; else b=b-a ; } cout<<"EYOB("<<a1<<","<<b1<<")="<<a<<endl; getch(); } </pre>

Зертханалық сабақта студент ұсынылған есептер жүйесін екі программалау тілінде орындайды. Әрбір зертханалық жұмыстан кейін студенттер тілдің синтаксисіне байланысты программаның жүзеге асырылу ерекшелігін салыстырып, оны шығару тиімділігі туралы қорытынды жасайды. Осы әдістемелік тәсілді пайдалана отырып, біз әрбір программалау тілінің ерекшелігін студенттердің саналы түрде түсінуіне қол жеткіземіз. Болашақта маман кез келген есепті қай тілде тиімді шығаруға болатынын өз бетімен анықтап, оны басқа программалау тілдеріне оңай аудара алатын болады. Мұндағы негізгі мәселе есепті шығарудың алгоритмін білу, түсіну болып табылады.

Программалау тілдерін қатар оқытуда зертханалық жұмыстарды бірнеше тәсілмен ұйымдастыруға болады.

Бірінші тәсіл бойынша әрбір студент зертханалық жұмыстардың тапсырмаларын екі программалау тілінде де орындайды, екі тілде бірдей тапсырмаларды орындай отырып, есеп шығару дағдыларын қалыптастырады. Екі программалау тілінде есепті шығару әдістеріне салыстырмалы, талдау жасап, ой қорытады. Бұл процесті студент әрбір зертханалық жұмысты өткізу кезінде демонстрациялап көрсетеді.

Екінші тәсіл бойынша студенттер бірнеше топшаға (үш немесе төрт) бөлініп, берілген тапсырмалар жүйесін әрбір топшадағы студенттер екі программалау тілінде орындайды. Бұл тәсіл бойынша ұсынылатын тапсырмалар жоба ретінде ұсынылады. Зертханалық жұмыстың соңында студенттер жобаларын қорғайды. Жобаны қорғау кезінде берілген есепті қанша тәсілмен шығаруға болатынын, алгоритмін талдап, блок схема түрінде көрсетіп, одан кейін оның екі тілдегі программасы орындалуымен демонстрацияланады. Сонымен қатар, қай тәсілдің қай программалау тілінде оңай жүзеге асырылатыны туралы студенттердің қорытынды пікірі айтылады. Жобаны қорғауды қорытындылауды оқытушы студенттермен бірлесе отырып, орындап аяқтайды. Әр топшадағы студенттердің пікірі міндетті түрде тыңдалады. Нәтижесінде студенттер берілген тапсырманы толық орындап, программаны екі программалау тілінде меңгеру дағдысын қалыптастырады. Екі программалау тілін салыстыра отырып оқыту тілдердің

**ИНФОРМАТИКА. ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ.
БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
ИНФОРМАТИКА, МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ
ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

синтаксистік құрылымын түсінуге және есте сақтауға мүмкіндік береді. Екі тәсіл бойынша да аяқталмаған зертханалық жұмыстарды студенттер үйде орындап, аяқтайды. Сонымен қатар, практикалық дағдыларды қалыптастыру үшін зертханалық жұмыстар кредиттік оқыту технологиясының ережесіне сай, студенттің өзіндік жұмысына арналған тапсырмалармен қамтамасыз етілген.

Екі программалау тілін қатар оқыту әдісі проблемалық оқыту, жобалық оқыту әдістері негізінде жүзеге асырылады және басқа да қазіргі инновациялық оқыту әдістеріне сүйенеді. Студенттер бірінші курстан бастап, электрондық портфолио жинақтауға дағдыланады. Екі программалау тілінде шығарылған есептері мен орындаған жобаларын өздерінің портфолиоларына жинақтайды.

1. Социально-экономическая модернизация – главный вектор развития Казахстана: послание Президента Республики Казахстан Н.А. Назарбаева народу Казахстана Астана, от 27 января 2012 г.
2. Қазақстан Республикасында Білім мен ғылымды дамытудың 2016-2019 жж. арналған мемлекеттік бағдарламасы//Ақорда:Астана, 1 наурыз, 2016 ж.
3. Халықова К.З. Болашақ информатика мамандарын даярлау процесінде студенттердің зерттеу іс-әрекетін ұйымдастыру/ Абай ат.ҚазҰПУ хабаршысы. № 1 (53), 2015. - 219-225бб.
4. Газейкина А.И. Стили мышления и обучение программированию студентов педагогического вуза. <http://ito.edu.ru/2006/moscow>.
5. Жужжалов В.Е. Основы интеграции парадигм программирования в курсе информатики. М.: Образование и информатика, 2004.
6. Пак Н.И., Степанова Т.А. Использование параллельных технологий обучения в курсах информатики // Новые информационные технологии в университетском образовании: Тезисы конференции. Новосибирск:СГУПС, ИДМИ, 2001.
7. Пак Н.И., Степанова Т.А. Параллельный способ обучения курсу "Численные методы">//Педагогическая информатика. 2001. №1.

***Аннотация.** В статье рассматриваются проблемы обучения языкам программирования в подготовке будущих учителей информатики. Проанализирована актуальность данного исследования в Республике Казахстан. Определены термины: исследовательская деятельность студентов и инновационные технологии. Приведены пути реализации параллельного изучения языков программирования. В основу реализации данного метода положен метод проектов, приведены примеры.*

***Ключевые слова:** исследовательская деятельность студентов, инновационные технологии, языки программирования, лекция, лабораторные занятия, алгоритм.*

***Abstract.** The article discusses The teaching problems of programming languages in the preparation of future teachers are considered in this article. the relevance of the study in the Republic of Kazakhstan are analyzed. The terms: the research activity of students and innovative technologies are defined. The ways for implementation of a parallel study of the programming language are given. The basis of the implementation of this method is the method of projects, and also examples are discussed.*

***Keywords:** research activity of students, innovative technologies, programming languages, lectures, laboratory classes, the algorithm.*

ҚҰРМЕТТІ ОҚЫРМАНДАР!

ҚР БЖҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетінің 2012 жылы 10 шілдедегі № 1082 Шешімімен Қазақстан Республикасының Білім және Ғылым министрлігінің Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетінің ұсынысымен Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің «Физика-математика ғылымдары» сериясы бойынша Хабаршы журналы ғылыми қызметтерінің негізгі нәтижелерін жариялау үшін келесі мамандықтар бойынша ұсынылатын басылымдар Тізіміне енгізілгенін хабарлаймыз:

- 01.01.00 топ мамандықтары бойынша – физика-математика ғылымдары (математика);
- 01.02.00 (01.02.01, 01.02.04, 01.02.06) мамандықтары бойынша – физика-математика ғылымдары (механика);
- 05.00.00 (05.02.18) мамандықтары бойынша – техникалық ғылымдар;
- 13.00.00 (13.00.02) мамандықтары бойынша – педагогика (оқыту және тәрбиелеу теориясы мен әдістемесі /математика, физика, информатика/) ғылымдары;
- 01.04.00 топ мамандықтары бойынша - физика-математика ғылымдары (физика).

2009 жылдан бастап Инженеринг және Технология Институтымен (Ұлыбритания) ақпараттық-қолдау қызмет көрсетуге жасалған келісім-шарттың (№2, 12.01.2009ж.) негізінде Абай атындағы ҚазҰПУ «Физика-математика сериясы» бойынша Хабаршы журналында жарияланатын мақалалардың реферативті ақпараты INSPEC электронды мәлімтер қорына енгізіледі.

Редакция ғылыми мақала материалдарын толығымен немесе жекелеп ғылыми дәйексөз индексімен қамтамасыз ететін қазақстандық және шетелдік мекемелерге беруге, сонымен қатар осы материалдарды журналдың интернет сайтына орналастыруға құқылы.

«ХАБАРШЫ. ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ҒЫЛЫМДАРЫ СЕРИЯСЫ» ЖУРНАЛЫНА БАСЫЛАТЫН МАҚАЛАЛАРДЫ БЕЗЕНДІРІЛУГЕ ҚОЙЫЛАТЫН ТАЛАПТАР

I. Қажетті материалдар

- 1.Парақтары төменгі жағында қарандашпен нөмірленген мақаланың қатты көшірмесі (2 дана), барлық авторлар мақала мәтінінің бір данасына қол қоюлары керек;
2. Мақаланың аты, мақалаға үш түрде (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде) жазылған аңдатпалардың, түйін сөздердің қатты көшірмесі (1 дана). Аңдатпада зерттеудің мақсаты мен әдіснамасын, негізгі жетістігі мен қорытындысын көрсету қажет. Аңдатпада 5-7 сөйлем болуы керек. Түйін сөздер саны электрондық іздеу жүйесінде мақала табылатындай 5-10 сөзден (сөз тіркесінен) тұруы керек.
- 3 Автор (авторлар – 4 адамнан артық болмау керек) жайында мәліметтердің қатты көшірмесі (1 дана): Ф.А.Ә. толығымен, жұмыс орны (ұжым аты, жоғары оқу орынның толық аты), атқаратын қызметі, жұмыс телефоны, үйдің мекен-жайы, үй телефоны, ғылыми дәрежесі, ғылыми атағы, e-mail.
4. Мақаланың, мақалаға жазылған аңдатпаның және түйін сөздердің электрондық түрі;

II. Мақаланы безендіру ережесі

- 1.Мақала мәтіні Word редакторында бірлік интервал арқылы терілу керек;
- 2.Парақ пішімі : 210 x 297 mm (A4);
3. Жоғары, төменгі, оң жақтағы, сол жақтағы өрістер: – 2,5 см;
- 4.Мақала беттері нөмірленбейді;
- 5.Шрифт: Times New Roman (қазақ, орыс, ағылшын тілдері үшін), өлшемі - 12 пт; Абзацтық жылжу– 1 см.;
6. Кестелер мен графикалық материалдар (суреттер, графикалар, фотосуреттер және т.б.) толассыз нөмірленулері және атаулары (кегль №11) болуы керек. Барлық кестелер мен графикалық материалдарға мақала мәтінінде сілтемелер болуы керек. Берілген нысандар сілтемелерден кейін орналасуы қажет. Word редакторында орындалған суреттер нысан ретінде қойылуы керек;
7. Мақала мәтіні ені бойынша форматталуы керек.

III. Формула жазуға қойылатын талаптар

Формулалардағы (Equation) символдар өлшемдері : Обычный – 11 пт, Крупный индекс – 6 пт, Мелкий индекс – 5 пт, Крупный символ – 24 пт, Мелкий символ – 4 пт; формулалар беттің ортасы бойынша орналастырылады. Сілтеме жасалатын формулаларды ғана нөмірлеу керек. Формулалар толассыз нөмірленеді. Формулалар нөмірлері оң жақ шетімен тегістеледі де, дөңгелек жақшаға алынады. Мәтінде де формулаларға сілтемелерді дөңгелек жақшаға жазады.

IV. Әдебиеттер тізімі

мақалада пайдаланылған әдебиеттер мәтінде пайдалану ретіне сәйкес қолжазбаның соңында келтіріледі. Мақаладағы әдебиетке сілтеу квадраттық жақшада беріледі, мысалы, [1], [2,3], [4-7].

V. Мақаланың түрі

1. Сол жақ жоғарғы бұрышта бас әріптермен ӘОК (кегль №13);
2. Жартылай қарайтылған кіші әріптермен (кегль №13) ортада автордың (авторлардың саны 4 адамнан аспауы керек) фамилиясы және аты-жөні;
3. Бір бос жолдан кейін жартылай қарайтылған бас әріптермен (кегль №13) мақала аты;
4. Бір бос жолдан кейін дөңгелек жақшада автор (авторлар) жұмыс істейтін немесе оқитын қала және ұжымның аты; егер автор (авторлар) білім алушы болса, * (жұлдызша) белгісінен кейін білім алушының статусы (студент, магистрант, докторант) жазылады (кегль №11);
5. Бос жолдан кейін мақала жазылған тілде 5-7 сөйлем көлемінде аңдатпа және 5-10 сөздер болатындай түйін сөздер (кегль №11, курсив);
6. Бір бос жолдан кейін мақала мәтіні (кегль №12);
7. Пайдаланылған әдебиеттер тізімі мәтіннен кейін екі бос жол тастап (кегль №11) кіші әріптермен келтіріледі. Бірлік интервал.
8. Бос жолдан кейін 2 тілде мақалаға аңдатпа және 5-10 сөздер (сөз тіркесі) болатындай түйін сөздер (кегль №11, курсив).

1-мысал. Мақаланы безендіру

ӘОЖ

ФИО, ФИО*

МАҚАЛАНЫҢ АТЫ

(қала, мекеменің аты, * - студент/магистрант/ докторант)

Аңдатпа. Мақала тілінде (5-7 сөйлем).

Түйін сөздер: Мақала тілінде (5-10сөз, сөз тіркесі)

Мақала мәтіні (5-7 бет)

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

Аңдатпа. Мақала тілінен өзге 2 тілде (5-7 сөйлем).

Түйін сөздер: Мақала тілінен өзге 2 тілде (5-10 сөз, сөз тіркесі)

VI. Мақалаларды жариялау тілдері – қазақ, орыс, ағылшын тілдері.

Редакцияға түскен мақалаларға білім саласы бойынша мамандар мен ғылымдар пікір береді. Пікір негізінде редакция алқасы авторға мақаланы тағы да толықтыруға (түзетуге) ұсыныс жасауы, не мүлдем қайтарып беруі мүмкін. Бұрын жарияланған немесе басқа баспаға жіберілген мақалалар қабылданбайды.

Мақала көлемі 5-7 бет. Көлемі 7 беттен артық болған жағдайда журнал редакциясымен хабарласып келісулері қажет. Мақала мәтініне енетін иллюстрациялардың, сұлбалардың және кестелердің көлемі мәтіннің жалпы көлеміне кіреді.

Мақаланы дайындау және жариялау бойынша пайда болған барлық сұрақтар бойынша журнал редакциясына хабарласыңыздар.

Мекен-жайы: Алматы қаласы, Төле би 86 көшесі, Абай атындағы ҚазҰПУ, Математика, физика және информатика институты, жұмыс телефоны - **8(727) -2 61-68-69, e-mail Vestnik_KazNPU@mail.ru**

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Информируем Вас, что Решением Комитета по контролю в сфере образования и науки МОН РК от «10» июля 2012 года № 1082 «Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая, Серия физико-математические науки» включен в Перечень изданий, рекомендуемых Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан для публикации основных результатов научной деятельности по следующим направлениям:

- по специальностям группы 01.01.00 – физико-математические науки (математика);
- по специальности 01.02.00 (01.02.01, 01.02.04, 01.02.06) – физико-математические науки (механика);
- по специальности 05.00.00 (05.02.18) – технические науки;
- по специальности 13.00.00 (13.00.02) – педагогические науки (теория и методика обучения и воспитания /математика, физика, информатика);
- по специальностям группы 01.04.00 – физико-математические науки (физика).

С 2009 г. действует Договор с Институтом Инжиниринга и Технологий (Великобритания), (№2 от 12.01.2009 г.) на оказание информационно-сопроводительных услуг, согласно которому реферативная информация о статьях, публикуемых в Вестнике КазНПУ имени Абая, вносится в электронную базу данных INSPEC.

Редакция имеет право частично или полностью предоставлять материалы научных статей в казахстанские и зарубежные организации, обеспечивающие индекс научного цитирования, а также размещать данные материалы на Интернет-сайте журнала.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ ПУБЛИКУЕМЫХ В ЖУРНАЛЕ «ВЕСТНИК. СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

I. Представление необходимых материалов

1. Текст статьи в твердой копии с пронумерованными, внизу по центру карандашом, страницами (2 экз.), один экземпляр текста статьи должен быть подписан всеми авторами.
2. Название статьи, аннотации к статье, ключевые слова (на 3-х языках: казахском, русском, английском) в твердой копии (1 экз.). В аннотации необходимо указывать цель и методологию исследования, основные достижения и выводы. Объем аннотации – 5-7 предложений. Ключевые слова: 5–10 слов (словосочетаний), по которым статьи могут быть найдены в электронных поисковых системах.
3. Сведения об авторе (авторах – не более 4 человек) в твердой копии на 3-х языках (1 экз.): фамилия, имя, отчество, место работы (город, название организации/вуза без сокращений), ученая степень и звание, должность, e-mail, контактный телефон.
4. Статья, аннотации к статье, ключевые слова в электронном виде.

II. Правила оформления статей.

1. Текст статьи должен быть набран в редакторе Word через одинарный интервал;
2. Формат листа: 210 x 297 mm (A4);
3. Поля: верхнее, нижнее, правое, левое – 2,5 см;
4. Страницы статьи не нумеруются;
5. Шрифт: Times New Roman (для каз., рус. и англ. языков), размер - 12 пт; Абзацный отступ – 1 см.
6. Таблицы и графические материалы (рисунки, графики, фотографии и др.) должны иметь сквозную нумерацию и названия (кегль №11). На все таблицы и графические материалы должны быть сделаны ссылки в тексте статьи. При этом расположение данных объектов должно быть после ссылок на них. Рисунки, выполненные в редакторе Word, должны быть вставлены как объект.
7. Текст статьи должен быть отформатирован по ширине.

III. Требования к написанию формул

Размеры символов в формулах (Equation): обычный – 11 пт, крупный индекс – 6 пт, мелкий – 5 пт, крупный символ – 24, мелкий – 4 пт; формулы располагают по центру страницы, Нумеровать следует только те формулы, на которые приводятся ссылки. Нумерация формул должна быть сквозной. Номер формулы располагают по правому краю страницы и заключают в круглые скобки. В тексте ссылку на формулу также приводят в круглых скобках.

IV. Список литературы, использованной в статье, составляется по ходу упоминания ее в тексте и приводится в конце рукописи. Ссылки на литературу в тексте указываются в квадратных скобках, например, [1], [2,3], [4-7].

V. Вид статьи

1. УДК в левом верхнем углу прописными буквами (кегель №13);
2. Полуужирными строчными буквами (кегель №13) по центру инициалы и фамилия автора (авторов не более 4 человек);
3. Через пустую строку полуужирными прописными буквами (кегель №13) название статьи;
4. Через пустую строку в круглых скобках, город и название организации, где работает или учится автор (авторы). Если автор (авторы) обучающиеся, то после знака * (звездочка) – указать статус обучающегося (студент, магистрант, докторант) (кегель №11);
5. Через пустую строку аннотация на языке публикации в 5-7 кратких предложениях (кегель №11);
6. Через пустую строку текст статьи (кегель №12);
7. Используемые источники, указываются после текста статьи, через две пустые строки строчными буквами (кегель №11). Интервал – одинарный;
8. Через пустую строку аннотации к статье на 2-х языках, ключевые слова: 5–10 слов (словосочетаний) (кегель №11, курсив).

Образец. Оформление статьи

УДК

ФИО, ФИО*

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

(город, название организации, *- студент/магистрант/докторант)

Аннотация. На языке статьи (5-7 предложений).

Ключевые слова: на языке статьи

Текст статьи (*не менее 5 и не более 7 стр.*)

Список литературы

Библиографический список

Аңдатпа.

Түйін создер:

Abstract.

Keywords:

VI. Языки издания статей – казахский, русский, английский.

Поступившие в редакцию статьи рецензируются ведущими специалистами и учеными по отраслям знаний. На основании рецензии редколлегии может рекомендовать автору доработать статью или отказать в публикации. Рукописи статей, опубликованных ранее или переданных в другие издания, не принимаются.

Рекомендуемый объем статьи – не менее пяти и не более семи страниц. В ином случае вопрос по объему статьи необходимо согласовать с редакцией журнала. Иллюстрации, схемы, таблицы, включаемые в текст статьи, учитываются в общем объеме текста.

По всем вопросам, связанным с подготовкой, представлением и публикацией материалов, необходимо обращаться в редакцию журнала.

Адрес: г. Алматы, ул. Толе би 86, КазНПУ им. Абая, Институт математики, физики и информатики
рабочий телефон 8(727) -2 61-68-69, e-mail Vestnik_KazNPU@mail.ru