

ISSN(online) 2959-5894

ISSN (print) 2959-5886

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті
Казахский национальный педагогический университет имени Абая
Abai Kazakh National Pedagogical University

ХАБАРШЫ

«Физика-математика ғылымдары» сериясы
Серия «Физико-математические науки»
Series of Physics & Mathematical Sciences
№2(90)

Алматы, 2025

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

ХАБАРШЫ

«Физика-математика ғылымдары»
сериясы №2 (90), 2025 ж.

Бас редактор:

ф.-м.ғ.д., профессор М.А. Бектемесов

Редакция алқасы:

Бас ред.орынбасары:

п.ғ.д., профессор Е.Ы. Бидайбеков,
ф.-м.ғ.д., профессор В.Н. Косов

Жауапты хатшылар:

п.ғ.к., қауым. профессор

Ш.Т. Шекербекова,

п.ғ.к., қауым. профессор

Г.А. Абдулкаримова

Техникалық хатшы:

Нурғали Ж.А.

Редакциялық алқа мүшелері:

Dr.Sci. **К.Алимхан** (Japan),

Ph.d. **A.Cabada** (Spain),

Ph.d. **E. Kovatcheva** (Bulgaria),

Ph.d. **M. Ruzhansky** (England),

п.ғ.д., профессор **В.В. Гриншкун** (Ресей),

ф.-м.ғ.д., профессор **С.И. Кабанихин**
(Ресей),

ф.-м.ғ.д., профессор **Ф.Ф. Комаров,**

(Республика Беларусь),

ф.-м.ғ.д., профессор **В.М. Лисицин** (Ресей),

п.ғ.д., профессор **Н.И. Пак** (Ресей),

ф.-м.ғ.д., профессор **А.Л. Семенов** (Ресей),

п.ғ.д., профессор **А.Е. Абылқасымова,**

т.ғ.д., профессор **Е. Амиргалиев,**

т.ғ.д., профессор **Б.С. Ахметов,**

ф.-м.ғ.д., профессор **А.С. Бердышев,**

т.ғ.д., профессор **К. Бисембаев,**

т.ғ.д., профессор **Н.С. Заурбеков,**

ф.-м.ғ.д., профессор **М.Н. Калимолдаев,**

т.ғ.д., профессор **М.К. Кулбек,**

ф.-м.ғ.д., профессор **С.Т. Мухамбетжанов,**

Ph.d., қауым., профессор *м.а.*

Ж.М. Нурмухамедова,

п.ғ.д., профессор **Б.Д. Сыдықов,**

т.ғ.д., профессор **А.К. Тулешов**

© Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, 2025

Қазақстан Республикасының Ақпарат

министрлігінде тіркелген

№ 4824 – Ж - 15.03.2004

(Журнал бір жылда 4 рет шығады)

2000 жылдан бастап шығады

Басуға 27.06.2025 қол қойылды

Пішімі 60x84 1/8. Көлемі 45 е.б.т.

Таралымы 300 дана. Тапсырыс 621.

050010, Алматы қаласы,

Достық даңғылы, 13

Абай атындағы ҚазҰПУ-ің “Ұлағат” баспасы

М а з м ұ н ы
С о д е р ж а н и е
C o n t e n t

**МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕР МЕН
МЕХАНИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ
МОДЕЛЬДЕУ**

**МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL
PROCESSES AND MECHANICAL SYSTEMS**

Ainakeyeva N.Zh.

The solution of Cauchy problem of thermoelastic rod dynamics
by generalized functions method

7

Akhmetova O.S., Issayev S.A.

Stationary diffusion model in heterogeneous media with small
parameters

18

Абылкаиров У., Кенжебай Х., Шәкір А.

Жады мүшесі бар Кельфин-Фойгт жүйесінің шешімінің
экспоненциалды кемуі

36

Бисембаев К., Altenbach Н., Дикамбаев Т.

Колебательное движение резервуара цилиндрической формы
с жидкостью на виброопорах со спрямленными
поверхностями

46

**Касенов С.Е., Тлеулесова А.М.,
Саменов Е.Б., Султанов Р.Ж.**

Численное решение задачи продолжения для одномерных
уравнений акустики

61

**Керімақын А., Шекербекова Ш.,
Керімақын С., Талпакова Б.**

Күрделі геометриялық облыста эквивалентті үлестіру әдісі
негізінде бейімделгіш тор құру

72

**Қоштыбаев Т.Б., Татенов А.М., Алиева М.Е.,
Жантлеуов К.К., Мырзатай М.М.**

Кванттық-механикалық жүйелер үшін үзіліссіздік теңдеуі ..

81

Лысенко В.С.

Циркуляция кинетической энергии эксцентрических масс
сателлитов моделей простых планетарных механизмов

93

**Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г.,
Утемисова А.А., Калаков Б.А.**

Дважды почти звездообразные функции на базе
звездообразных функций определенного порядка

102

Оспанов К.Н., Молдағали Е.Ө.

Төртінші ретті айнымалы коэффициентті дифференциалдық
теңдеудің корректілік шарттары

116

Социалова Ұ.Қ., Бектемесов Ж.М.

Қызылша ауруының эпидемиологиялық таралуының
кері есебін модельдеу

124

Казахский национальный педагогический университет имени Абая

ВЕСТНИК
Серия «Физико-математические науки»
№2 (90), 2025 г.

Главный редактор:
д.ф.-м.н., профессор М.А. Бектемесов

Редакционная коллегия:

Зам.главного редактора:
д.п.н., профессор Е.Ы. Бидайбеков,
д.ф.-м.н., профессор В.Н. Косов

Ответ. секретари:
к.п.н., асс. профессор Ш.Т. Шекербекова,
к.п.н., асс. профессор Г.А. Абдулкаримова

Технический секретарь:
Нургали Ж.А.

Члены редколлегии:
Dr.Sci. K.Alimhan (Japan),
Phd.d. A.Cabada (Spain),
Phd.d E. Kovatcheva (Bulgaria),
Phd.d. M. Ruzhansky (England),
д.п.н., профессор В.В. Гриншкун (Ресей),
д.ф.-м.н., профессор С.И. Кабанихин (Ресей),
д.ф.-м.н., профессор Ф.Ф. Комаров, (Республика Беларусь),
д.ф.-м.н., профессор В.М. Лисицин (Ресей),
д.п.н., профессор Н.И. Пак (Ресей),
д.ф.-м.н., профессор А.Л. Семенов (Ресей),
д.п.н., профессор А.Е. Абылкасымова,
д.т.н., профессор Е. Амиргалиев,
д.т.н., профессор Б.С. Ахметов,
д.ф.-м.н., профессор А.С. Бердышев,
д.т.н., профессор К. Бисембаев,
д.т.н., профессор Н.С. Заурбеков,
д.ф.-м.н., профессор М.Н. Калимолдаев,
д.т.н., профессор М.К. Кулбек,
д.ф.-м.н., профессор С.Т. Мухамбетжанов,
Phd.d., асс., профессор и.о.
Ж.М. Нурмухамедова,
д.т.н., профессор Б.Д. Сыдықов,
д.т.н., профессор А.К. Тулешов

© Казахский национальный педагогический университет им. Абая, 2025

Зарегистрирован в Министерстве информации
Республики Казахстан,
№ 4824 - Ж - 15.03.2004
(периодичность – 4 номера в год)
Выходит с 2000 года

Подписано в печать 27.06.2025.
Формат 60x84 1/8. Об. 45 уч.-изд.л.
Тираж 300 экз. Заказ 621.

050010, г. Алматы, пр. Достык, 13,
Издательство «Аулағат» КазНПУ им. Абая

Талипова М.Ж., Иманчиев А.Е.,
Сейлова Р.Д., Мейрамбекулы А.
О нормальных решениях неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка ранга k 135

Темирбеков Н.М., Тураров А.К.,
Алиев Ф.А., Темирбеков А.Н.
Численное решение прямой и обратной задачи газлифтного процесса добычи нефти методом сопряженных уравнений .. 145

ИНФОРМАТИКА COMPUTER SCIENCE

Адилжанова С.А., Рахыш А.Е.,
Абдулкаримова Г.А., Гусманова Ф.Р.
Аса маңызды мемлекеттік инфрақұрылымның киберқауіпсіздігін бағалау әдістері 166

Андреев И.А., Тебуева Ф.Б., Абдураимова Б.К.,
Сатыбалдина Д.Ж., Боранбай Ж.А.
Усовершенствованный алгоритм аутентификации ИИОТ-устройств на основе блокчейн с использованием Blake3 и агрегирования подписей 175

Berlikozha B.A., Serek A.G.,
Amirgaliyev B.Ye., Baishemirov Z.D., Zhamanov A.M.
Identification of key features for career prediction through recursive feature elimination 189

Елубай Г.Б., Ахметов Б.С., Гнатюк С.А., Шуйтенов Г.Ж.
Жоғары білім беруді басқаруда жасанды интеллектті пайдалану: әлемдік және қазақстандық тәжірибе 200

Мукажанов Н.К., Алибиева Ж.М., Тұрдалыұлы М.,
Рашидинов Д.Р., Исимов Н.Т.
Терең оқытуды пайдалана отырып өсімдіктер ауруларын анықтау 210

Shaimerdenova G.S., Zhidebayeva A.N., Medetbekova R.A.,
Esenkulova Z.Z., Azhibekova Zh.Zh.
Review of computer modeling's contribution to enhancing the safety and efficiency of industrial facilities 222

ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ. БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ. ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

METHODS OF TEACHING COMPUTER SCIENCE. INFORMATIZATION OF EDUCATION

Ануарбекова Г.Ж., Текесбаева Н.А., Смағұл Б.Қ.,
Мошкалов А.Қ., Беделов Қ.А.
Lego Wedo арқылы бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлауын дамыту..... 232

Байганова А.М., Нарымбаева М.А.
Особенности преподавания информатики в условиях инклюзивного образования 241

Editor-in-Chief

Dr. Sci. M.A. Bektemesov

Deputy Editor-in-Chief:

Dr. Sci. (Ped.), Ye.Y. Bidaibekov,

Dr. Sci. V.N. Kosov

Responsible editorial secretary:

Cand. Sci. (Ped.) Sh.T. Shekerbekova

Cand. Sci. (Ped.) G.A. Abdulkarimova

Technical Secretary:

Nurgali J.A.

Editorial board:

Dr.Sci. K. Alimhan (Japan),

Phd.d. A. Cabada (Spain),

Phd.d. E. Kovatcheva (Bulgaria),

Phd.d. M. Ruzhansky (England),

Dr.Sci. V.V. Grinshkun (Russia),

Dr.Sc. S.I. Kabanikhin (Russia),

Dr. Sci. F.F. Komarov (Republic of
Belarus),

Dr. Sci. V.M. Lisicin (Russia),

Dr. Sci. (Ped.) N.I. Pak (Russia),

Dr. Sci. A.L. Semenov (Russia),

Dr. Sci. (Ped.) A.Ye. Abylqasymova,

Dr.Sci.(Engineering) Ye. Amirgaliyev,

Dr.Sci. B.S. Akhmetov,

Dr. Sci. A.S. Berdyshev,

Dr. Sci. K. Bisembaev,

Dr. Sci. N.S. Zaurbekov,

Dr.Sci.(Engineering) M.K. Kulbek,

Dr. Sci. S.T. Mukhambetzhanov,

Phd.d. Zh.M. Nurmukhamedova,

Dr. Sci. (Ped.) B.D. Sydykov,

Dr.Sci.(Engineering) A.K. Tuleshov

© Abai Kazakh National Pedagogical
University, 2025

Registered in the Ministry of Information of the
Republic of Kazakhstan,
№ 4824 - Ж - 15.03.2004
(Periodicity: 4 issues per year)
Published since 2000

Signed to print 27/06/2025
Format 60x84 1/8. Vol. 45 p.
Printing 300 copies. Order 621.

Publishing and Editorial:
050010, 13 Dostyk av., Almaty, Kazakhstan
Publisher "Ulagat" Abai KazNPU

Бидайбеков Е.Ы., Пак Н.И., Сәлғожа И.Т., Қожағұл А.Т.

Болашақ информатика мұғалімдерін робототехниканы оқытуға дайындаудың әдістемелік жүйесін эксперименттік негіздеу

254

Бостанов Б.Г., Уксикбаев Е.З., Аманов А.Н.

Информатиканы оқытуды жетілдіруге STEM тәсілдерді интеграциялаудың қажеттілігін қазақстан, қытай, жапон жағдайында зерттеу

262

Гриншкун А.В., Жабаев Е.Х., Ревшенова М.И.

Возможности применения технологии дополненной реальности при обучении школьников робототехнике

271

Жайдақбаева Л.Қ., Тынышбек Қ.Қ.

Білім берудегі жасанды интеллект: әдебиеттерге жүйелі шолу

281

Қойшыбай Б.Е.

Жасанды интеллекттің мектептегі білім беружүйесіне енгізілуін негіздейтін концептуалды педагогикалық модель ...

290

Ramankulov Sh.Zh., Zhaksylyk N.N., Kurbanbekov B.A.

Assessing the impact of STEM education on students' academic performance in solar energy studies

305

Салғараева Г.И., Базаева Ж.Б., Сабит Б.

AR технологиясына негізделген мобильді қосымшаны инклюзивті білім беру жағдайында есту қабілеті зақымданған балаларға бейімдеу

319

**Turashova Sh., Seiduali K., Bazarbayeva U.,
Urazgaliyeva Sh., Yersin M.**

Digital educational resources in teaching future informatics teachers to create IOT devices

331

**Тыныш С., Рыстыгулова В.Б., Сыдыкова Ж.К.,
Жусипбекова Ш.Е., Төлєнова Г.Қ.**

Робототехника элементтерін қолдану негізінде физика курсының зертханалық жұмыстарын жетілдіру

341

**Шекербекова Ш.Т., Сағымбаева А.Е., Жаксылықов А.Е.,
Артықбаев Н.Е., Нағметов А.К.**

Программалаудан бағалау критерийлерін жасаудағы genai технологиясының мүмкіндіктері

351

**МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕР МЕН МЕХАНИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ**

**МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROCESSES
AND MECHANICAL SYSTEMS**

IRSTI 27.41.19

10.51889/2959-5894.2025.90.2.001

N.Zh. Ainakeyeva^{1,2,3*}

¹U.A. Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan

²Narxoz University, Almaty, Kazakhstan

³Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: nursaule_math@mail.ru

**THE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM OF THERMOELASTIC ROD DYNAMICS
BY GENERALIZED FUNCTIONS METHOD**

Abstract

The Cauchy problem is considered about the dynamics of a thermoelastic rod by the action of different force and heat effects under arbitrary initial conditions. Using the Green's tensor of the thermoelasticity equations, an analytical solution to the problem was obtained, allowing one to determine the deformations, stresses, and temperature in any cross-section of the rod and at any time, if its initial state and the acting force and heat sources are known. Numerical calculations of temperature and displacements under the action of pulsed concentrated force and heat sources are given. Calculations of the solution of the Cauchy problem under the action of regular force and heat sources distributed along the rod are performed. The developed program allows one to study thermodynamic processes in rods with various physical and mechanical parameters under the action of distributed, concentrated, and pulsed heat and force sources, described by singular generalized functions.

Keywords: thermoelastic rod, Cauchy problem, method of generalized functions, Green's tensor, displacement, temperature, heat flow.

Н.Ж.Айнакеева^{1,2,3}

¹Академик У.А.Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан

²Нархоз Университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

**КОШИ ЕСЕБІНІҢ ТЕРМОСЕРПІМДІК ӨЗЕКШЕНІҢ ДИНАМИКАСЫН
ЖАЛПЫЛАНҒАН ФУНКЦИЯЛАР ӘДІСІМЕН ШЕШУ**

Аңдатпа

Бұл жұмыста термосерпімдік өзекшенің Коши есебінің кез келген күштік және жылулық әсерлер мен бастапқы шарттар кезінде қарастырылады. Термоупругтік теңдеулердің Грин тензоры көмегімен аналитикалық шешім алынды, бұл шешім өзекшенің кез келген көлденең қимасы мен кез келген уақыт мезетінде деформацияларды, кернеулерді және температураны есептеуге мүмкіндік береді, егер бастапқы жағдайлар мен күштік және жылулық көздер белгілі болса. Арнайы назар импульстік, шоғырланған күштік және жылулық көздер әсеріндегі температураның таралуы мен ығысуының сандық есептеулеріне бөлінген. Сонымен қатар, өзекшенің бойымен күштер мен жылу көздерінің

таралуы мен тұрақты функциялар түрінде бөлінген жағдайлар бойынша есептеулер жүргізілді. Арнайы назар импульстік, шоғырланған күштік және жылулық көздер әсеріндегі температураның таралуы мен ығысуының сандық есептеулеріне бөлінген. Сонымен қатар, өзекшенің бойымен күштер мен жылу көздерінің таралуы мен тұрақты функциялар түрінде бөлінген жағдайлар бойынша есептеулер жүргізілді.

Түйін сөздер: термосерпімді өзек, Коши есебі, жалпыланған функция әдісі, Грин тензоры, орын ауыстыру, температура, жылу ағыны.

Н.Ж. Айнакеева^{1,2,3}

¹Институт механики и машиноведения им. академика У.А.Джолдасбекова, г.Алматы, Казахстан

²Университет Нархоз, г.Алматы, Казахстан

³Институт математики и математического моделирования, г.Алматы, Казахстан
**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ
МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

Аннотация

Рассматривается задача Коши динамики термоупругого стержня при произвольных силовых и тепловых воздействиях и начальных условиях. С помощью тензора Грина уравнений термоупругости было получено аналитическое решение задачи, позволяющее определить деформации, напряжения и температуру в любом сечении стержня и в любой момент времени, если известны его начальное состояние и действующие силовые и тепловые источники. Приведены численные расчеты температуры, перемещений при действии импульсных сосредоточенных силовых и тепловых источников. Проведены расчеты решения задач Коши при действии распределенных вдоль стержня силовых и тепловых источников регулярного вида. Разработанная программа позволяет исследовать термодинамические процессы в стержнях с различными физико-механическими параметрами при действии тепловых и силовых источников как распределенных, так и сосредоточенных, и импульсных, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

Ключевые слова: термоупругий стержень, задача Коши, метод обобщенных функций, тензор Грина, перемещение, температура, тепловой поток.

Main provisions

Using the method of V.S.Vladimirov, a solution to the Cauchy problem for the equations of uncoupled thermoelasticity in the space of generalized functions of slow growth is constructed. Determination of the thermal stress state of a thermoelastic rod under the action of local and distributed force and thermal effects. The equations of mechanics of a deformable solid, methods of mathematical physics and the theory of generalized functions were used for the study. Analytical formulas for calculating the temperature, displacements, stresses and deformations of a rod under the action of local and distributed external force and thermal effects are constructed. The result of the conducted research is numerical calculations of the temperature and displacements of the rod under the action of pulsed concentrated force and heat sources.

Introduction

The development of theory and methods for solving thermoelasticity problems is crucial for numerous branches of technology and applied sciences. These problems emerge in the creation of new designs for steam and gas turbines, jet and rocket engines of high-speed aircraft, nuclear reactors, and mining equipment. Elements of these structures operate under uneven and non-stationary heating conditions, causing changes in the mechanical properties of materials and the emergence of temperature gradients. This results in unequal thermal expansion of individual parts of the structures [1-8]. Some materials become brittle when subjected to stress from a sharp gradient in a non-stationary temperature field and cannot withstand thermal shock. Repeated thermal stresses can lead to the destruction of structural elements, making the study of temperature field effects on the stress-strain state of structures essential. Rod elements are widely used across various technological fields. Numerous examples of loaded structural members include supports for structures, buildings, and

bridges. In real conditions, dynamic loads can act on rods, causing vibrations that significantly impact the reliability of these rod elements and, consequently, the overall structure's reliability. An unsteady temperature field induces a time-varying deformation field in rod structures, affecting their strength and reliability during operation. Determining the thermally stressed state of rod structures, considering their mechanical properties (particularly elasticity), is a significant scientific and technical challenge. Mathematical modeling methods enable the study of physical processes within structures and their elements, allowing for the determination of dynamic characteristics during the design stage. This modeling provides a basis for predicting product behavior under specific operating conditions. Here the generalized solution to the Cauchy problem for thermoelastic rod is constructed under the action of nonstationary force loads and various types of heat sources by use the model of uncoupled thermoelasticity and generalized functions method. This method allows translating the initial boundary value problem for the system of thermoelasticity equations with initial conditions into the solution of the system of differential equations in the space of generalized vector-functions with a singular right-hand side. It contains singular generalized functions of the form of simple and double layers, the densities of which are determined by the initial conditions. The convolution of the Green's tensor of these equations with the right-hand side gives a solution in the space of generalized functions, and their regular integral representation gives a solution to the posed boundary value problem. Here, the Green's tensor of thermoelasticity equations was used, previously constructed in [9]. Regular integral representations of generalized solutions are obtained for given initial temperature, displacements and velocity of the rod. Using the Mathcad-15 program, numerical calculations of the Green's tensor for a system with dimensionless thermoelastic parameters are carried out. Solutions to Cauchy problems under the action of force loads and heat sources distributed along the rod are given.

Research methodology

Determination of the thermal stress state of a thermoelastic rod under the action of local and distributed force and thermal effects. The equations of mechanics of a deformable solid, methods of mathematical physics and the theory of generalized functions were used for the study.

Statement of the Cauchy problem for the equations of uncoupled thermoelasticity

We consider a thermoelastic rod, the equations of state of which have the form [10,11]:

$$\begin{cases} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x,t) = 0 \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} + F_2(x,t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Where $x \in R^1, t \geq 0$. Here ρ is the mass density, c is the speed of propagation of elastic waves in the rod, γ is the thermal conductivity coefficient, $\kappa = \frac{k}{\rho c}$ the thermal diffusivity coefficient,

$u(x,t)$ are the longitudinal movements of the sections of the rod, $\theta(x,t)$ is a relative temperature, $F_1(x,t)$ is longitudinal component of external force per unit length; $F_2(x,t)$ is a quantity characterizing power heat source. Here and below, partial derivatives are designated:

$$u_1 = u, \quad u_2 = \theta, \quad u_{,x} = \partial_x u_i \square \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad u_{,t} = \partial_t u_i \square \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i=1,2).$$

The thermoelastic stress in the rod is determined by the Duhamel - Neuman law:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta \quad (2)$$

The initial conditions are known:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad (3)$$

$$u_0(x) \in C^2(R^1), \theta_0(x) \in C^2(R^1), v_0(x) \in C^2(R^1),$$

where $C^n(R^1)$ is the space of functions differentiable up to the n-th order on R^1 .

We consider the Cauchy problem, the solution of which allows to determine the state of the rod at any time if its initial state and the operating power and heat sources are known.

It is required to find solutions to equations (1) with initial conditions (3), which satisfy the radiation conditions:

$$u(x,t) \rightarrow 0, \quad \theta(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{at} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \forall t, \quad (4)$$

under the action of arbitrary forces and heat sources : $F_j(x,t) = L_j(R^1)$, at $j = 1,2$.

Statement of the Cauchy problem in the space of generalized functions

To solve the problem we use the method of generalized function which V.S. Vladimirov used by solving the Cauchy problem for wave equations [12,13]. For this the following regular generalized functions are introduced:

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t)H(t), \quad \hat{\theta}(x,t) = \theta(x,t)H(t), \quad \hat{F}_j(x,t) = F_j(x,t)H(t), \quad j = 1,2. \quad (5)$$

where $u(x,t), \theta(x,t)$ are the solution to the Cauchy problem (1)-(4); $H(t)$ is the Heaviside step-function: $H(t) = 1$ for $t > 0$, $H(t) = 0$ for $t < 0$. That is, we define by zero the solution of the Cauchy problem outside the domain of definition (for $t < 0$). And let us consider the action of the differential operator of system (1) on these functions in the space of generalized functions $D'(R^2)$ [12,13].

To do this, at first we find generalized derivatives of these functions :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} H(t) + u_0(x)\delta(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} H(t) + v_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t),$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} H(t) + \theta_0(x)\delta(t),$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} H(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} H(t), \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} H(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} H(t).$$

Here $\delta(t)$ is a singular δ -function. Then system (1) will $D'(R^2)$ take the form:

$$c^2 \hat{u}_{,xx} - \hat{u}_{,tt} - \tilde{\gamma} \hat{\theta}_{,x} + F_1(x,t)H(t) = -v_0(x)\delta(t) - u_0(x)\delta'(t), \quad (6)$$

$$\hat{\theta}_{,xx} - \kappa^{-1} \hat{\theta}_{,t} + F_2(x,t)H(t) = \kappa^{-1} \theta_0(x)\delta(t),$$

$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho}$. These equations include the initial conditions as singular mass forces and heat sources.

Next we denote

$$\hat{F}_1(x,t) = F_1(x,t)H(t), \quad \hat{F}_2(x,t) = F_2(x,t)H(t),$$

$$\hat{G}_1(x,t) = \hat{F}_1(x,t) + v_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t), \quad (7)$$

$$\hat{G}_2(x,t) = \hat{F}_2(x,t) - \kappa^{-1} \theta_0(x)\delta(t).$$

The solution to this problem in the space of generalized functions has the form of tensor-functional convolution (*):

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t)H(t) = \hat{U}_1^k(x, t) * \hat{G}_k(x, t), \quad (8)$$

$$\hat{\theta}(x, t) = \theta(x, t)H(t) = \hat{U}_2^k(x, t) * \hat{G}_k(x, t), \quad k = 1, 2.$$

Where $\hat{U}_j^k(x, t)$ is the Green's tensor of equations (1), which describes thermoelastic waves generated by concentrated pulse sources. Everywhere over the same indices in the product, the summation is from 1 to 2 (tensor convolution).

As is known in the theory of generalized functions, the solution to differential equations is unique in the convolution algebra with the Green's tensor of these equations.

Green's tensor of the equations of unbound thermoelasticity

Green's tensor $U_i^j(x, t)$ is a matrix of fundamental solutions of system (1) under the action of a pulsed concentrated force and a heat source of the form:

$$F_1 = \delta(x)\delta(t)\delta_1^j, \quad F_2 = \delta(x)\delta(t)\delta_2^j, \quad j = 1, 2 \quad (9)$$

where δ_i^j is the Kronecker symbol. When $j = 1$, a power source operates. At $j = 2$ a heat source operates. The Green's tensor satisfies the following *radiation conditions*:

$$U_i^j(x, t) = 0, \quad t < 0,$$

$$U_i^j(x, t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \text{ для } \forall x \in R^1. \quad (10)$$

$$U_i^j(x, t) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \text{ для } \forall t > 0$$

The Green's tensor was constructed in [14], it has the following form:

$$U_1^j(x, t) = \delta_1^j k^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \delta_1^j \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} - \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} - \delta_1^j \Sigma_3(t) \delta(x) + \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x}, \quad (11)$$

$$U_2^1 = 0, \quad U_2^2 = c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2}, \quad j = 1; 2$$

$$\Sigma_1(x, t) = \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[\frac{k}{c^2} \left(1 - e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \right) + t - \frac{|x|}{c} \right],$$

$$\Sigma_2(x, t) = AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\}, \quad \Sigma_3(x, t) = -\frac{k}{c^2} H(t) \left(e^{-\frac{c^2}{k}t} - 1 \right),$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} = -\frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} - 1 \right], \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} = \frac{k}{c^2} H(ct - |x|) \operatorname{sgn} x \left[e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} + 1 \right],$$

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} = -\frac{AH(t)}{k} \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2\tau} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2\tau} d\tau \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} = \left(-\frac{k}{c^2} \delta(ct - |x|) + \frac{2k}{c^2} H(ct - |x|) \delta(x) \right) \left[e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} + 1 \right] + \frac{1}{c} H(ct - |x|) e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} &= AH(t) \left\{ \frac{c^4}{k^2} e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right\} - \\ &- AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4kt}}}{k\sqrt{t}} \left(c^2 - \frac{x^2}{4t^2} \right) + \frac{x^2}{4kt^2} \frac{e^{\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right\}. \\ \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} &= \frac{AH(t)}{2k} \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \left[\int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} \left(\frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right] - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} \left(\frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

With knowledge of the Green's tensor, it becomes feasible to formulate a solution to system (7) for any sources using a tensor-functional convolution (8).

In equation (8), the convolution is performed componentwise in accordance with the definition of convolution in the space of generalized functions [12,13]. For regular sources described by locally integrable functions, this formula can be expressed in integral form

$$u_j(x,t) = \iint_{R^2} U_j^k(x-y, t-\tau) * F_k(y, \tau) dy d\tau \quad j, k = 1, 2. \quad (12)$$

Solution of the Cauchy problem for determining the thermal stress state of a thermoelastic rod under the action of distributed force and heat sources. The method of generalized functions was used for the study.

Solutions to the Cauchy problem

To obtain an integral representation of the generalized solution, we take convolutions (8) taking into account (7), using the properties δ of the functions and its derivative (variable x under the convolution sign means incomplete convolution with respect to x only):

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t)H(t) = \hat{U}_1^1(x,t) * F_1(x,t)H(t) + \hat{U}_1^1(x,t) * \nu_0(x) + \quad (13)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_1^1(x,t) * u_0(x) + \hat{U}_1^2(x,t) * F_2(x,t)H(t) + \hat{U}_1^2(x,t) * \kappa^{-1} \theta_0(x)$$

$$\hat{\theta}(x,t) = \theta(x,t)H(t) = \hat{U}_2^2(x,t) * F_2(x,t)H(t) + \hat{U}_2^2(x,t) * \kappa^{-1} \theta_0(x) \quad (14)$$

Note that all initial conditions of the Cauchy problem are included in the right-hand side of relations (13), (14). Since the functions included in the right side of equations (13), (14) are regular, these representations of the solution can be written in the following integral form.

Let us formulate the following theorem.

Theorem. If the functions $F_1(x,t), F_2(x,t)$ are integrable on R^2 and $u_0(x), \nu_0(x), \theta_0(x)$ are continuous on R , then the solution to the Cauchy problem for the equations of uncoupled thermoelasticity has the form:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,t) &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, \tau) F_1(y, t-\tau) dy + H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, \tau) \nu_0(y) dy + \\ &+ H(t) \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, \tau) u_0(y) dy + H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y, \tau) F_2(y, t-\tau) dy + \\ &+ \kappa^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y, \tau) \theta_0(y) dy, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{\theta}(x,t) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x-y, \tau) F_2(y, t-\tau) dy + \kappa^{-1} H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x-y, \tau) \theta_0(y) dy. \quad (16)$$

Using the Green's tensor representation (11) and $\hat{G}_1(x,t), \hat{G}_2(x,t)$ (7), the solution to the Cauchy problem has the form :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \hat{U}_1^j * \hat{G}_j = \\ &= \delta_1^j \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} * G_j - \delta_1^j \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} * G_j - \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} * G_j - \delta_1^j \Sigma_3(t) \delta(x) * G_j + \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} * G_j = \\ &= \left\{ \left(\kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\} * G_1 + \tilde{\gamma} \left(\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right) * G_2 = \\ &= \left\{ \left(\kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\} * \hat{F}_1 + \tilde{\gamma} \left(\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right) * \hat{F}_2 + \\ &\quad \left\{ \left(\kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\}_x * v_0(x) - \kappa^{-1} \tilde{\gamma} \left(\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right)_x * \theta_0(x) + \\ &\quad + \partial_t \left\{ \left(\kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\}_x * u_0(x), \\ \theta(x,t) &= \hat{U}_2^j * \hat{G}_j = c^2 \Sigma_3(x,t) * G_2 + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} * G_2 - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} * G_2 = \\ &= \left(c^2 \Sigma_3(x,t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} \right) * F_2(x,t) H(t) - \left(c^2 \Sigma_3(x,t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} \right)_x * \kappa^{-1} \theta_0(x) \end{aligned} \quad (17)$$

Let us introduce the notation:

$$\begin{aligned} f1(x,t) &= \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} - \Sigma_3(t), \quad f2(x,t) = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x}, \\ f3(x,t) &= c^2 \Sigma_3(x,t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Then the integral representation (15, 16) has the following form:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \{ f1(x-y, t-\tau) F_1(y, \tau) + \tilde{\gamma} f2(x-y, t-\tau) * F_2(y, \tau) \} dy + \\ &\quad + H(t) \int_{-\infty}^{\infty} \{ f1(x-y, t) v_0(y) - \kappa^{-1} \tilde{\gamma} f2(x-y, t) \theta_0(y) + \partial_t f1(x-y, t) u_0(y) \} dy \\ \theta(x,t) &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f3(x-y, t-\tau) F_2(y, \tau) dy - \kappa^{-1} H(t) \int_0^t f3(x-y, t) \theta_0(y) dy \end{aligned}$$

Note that formulas (15,16) can also be used under the action of singular sources $\hat{F}_1(x,t), \hat{F}_2(x,t)$, only in this case the convolutions must be taken according to the rules of convolutions in the space

of generalized functions [12,13]. It's worth noting that formulas (15) and (16) remain applicable even when singular sources $\hat{F}_1(x,t)$, $\hat{F}_2(x,t)$ are present. However, in such cases, convolutions must be calculated here to the rules governing convolutions in the space of generalized functions [12,13].

Results of the study

The result of the conducted research is solutions to the Cauchy problem under the action of distributed power and heat sources, numerical calculations of the temperature and displacement of the rod under the action of a pulsed concentrated force and heat sources.

Numerical calculations of the Green's tensor

A program for computing the Green's tensor $U_i^j(x,t)$ has been developed in the Mathcad 15 system. Below (Figure 1) there are the calculations of the components of this matrix for the following dimensionless coordinates thermoelastic parameter: $\rho = 1$, $c = 1$, $\gamma = 1$, $\kappa = 2$.

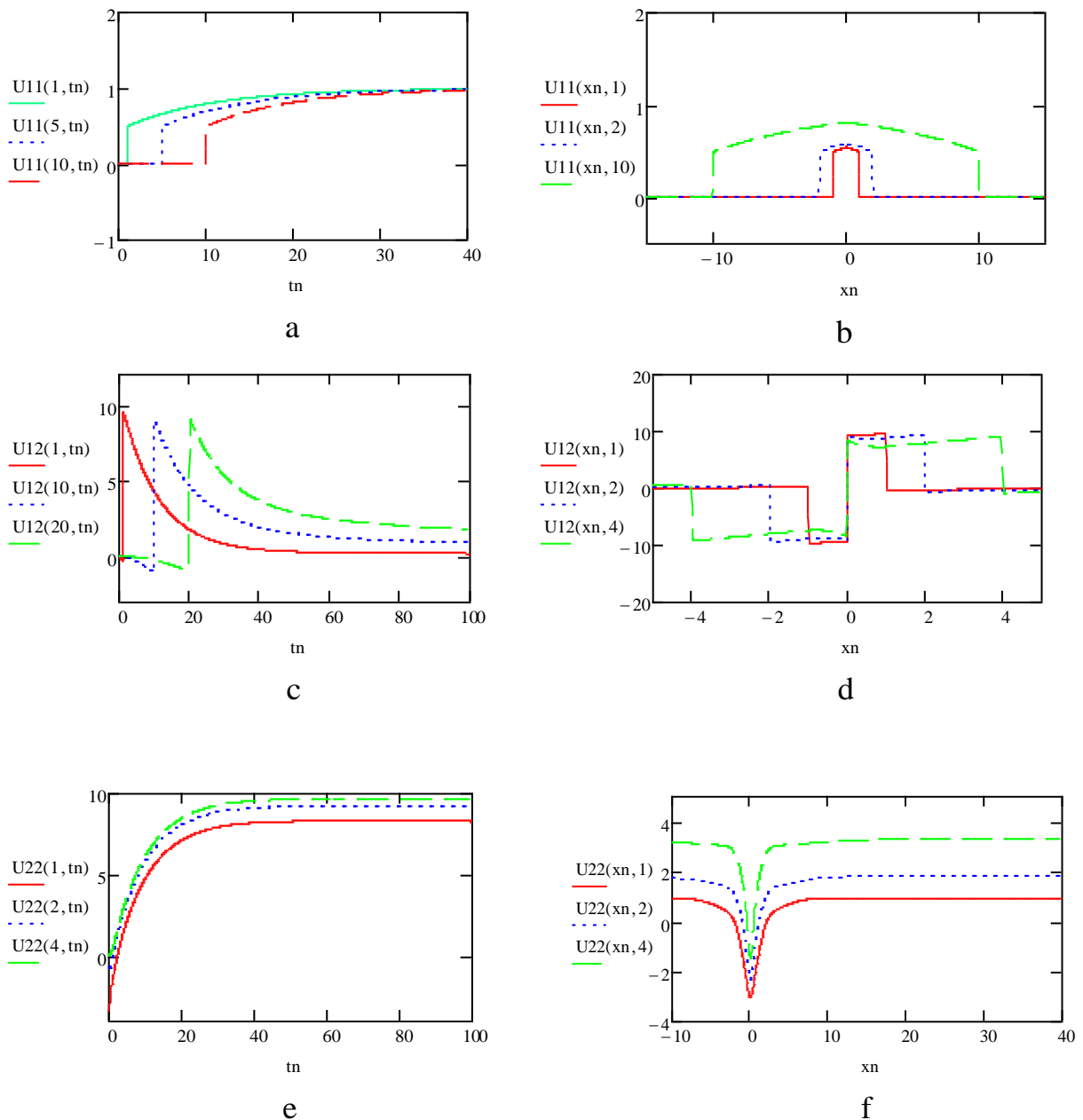


Figure 1(a-f). Green's tensor components $U_{ij}(x_n, t_n) = U_i^j(x, t)$ in a fixed point and at a fixed time

Figures 1 (a-f) depict the evolution over time of the respective components of the Green's tensor at a specific point in the medium ($x=xn$) and at a fixed time point ($t=tn$). The discontinuities observed in the displacement graphs correspond to the arrival of the elastic shock wave at point xn at time $t=xn/c$, $t=xn/c$.

Solutions to the Cauchy problem under the action of distributed power and heat sources

Let us construct solutions to the Cauchy problem under the action of various power and heat sources of a regular form.

Cauchy problem 1. Let the following force be applied to a segment $[-L,L]$ of the rod:

$$F_1(x,t) = A(x,t)H(L-|x|), F_2(x,t) = 0.$$

The initial conditions are zero. Then, using formulas (15), (16), Theorem 1, we obtain the displacement:

$$u(x,t) = U_1^1(x,t) * A(x,t)H(L-|x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^1(x-y,\tau)A(y,t-\tau)d\tau.$$

Next follows from (2):

$$\begin{aligned} \sigma_1(x,t) &= \rho c^2 u_{,x} = \rho c^2 U_{1,x}^1(x,t) * F_1(x,t) = \rho c^2 U_1^1(x,t) * \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x} = \\ &= \rho c^2 U_1^1(x,t) * (A(x,t)H(L-|x|))_{,x} = \\ &= \rho c^2 U_1^1(x,t) * A(x,t) \{ \delta(L+x) - \delta(L-x) \} + \rho c^2 U_1^1(x,t) * (A_{,x} H(L-|x|)) = \\ &= \rho c^2 H(t) \int_0^t \{ U_1^1(x+L,\tau)A(-L,t-\tau) - U_1^1(x-L,\tau)A(L,t-\tau) \} d\tau \\ &\quad + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L dy \int_0^t U_1^1(x-y,\tau)A(y,t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Cauchy problem 2. Let a heat source act on the segment $[-L,L]$:

$$F_1(x,t) = 0, F_2(x,t) = A(x,t)H(L-|x|).$$

The initial conditions are zero. Then

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U_1^2(x,t) * A(x,t)H(L-|x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x-y,\tau)A(y,t-\tau)dy, \\ \theta(x,t) &= U_2^2(x,t) * A(x,t)H(L-|x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_2^2(x-y,\tau)A(y,t-\tau)dy, \\ \sigma(x,t) &= \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta = \\ &= \rho c^2 H(t) \int_0^t \{ U_1^2(x+L,\tau)A(-L,t-\tau) - U_1^2(x-L,\tau)A(L,t-\tau) \} d\tau + \\ &\quad + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L dy \int_0^t \{ U_1^2(x-y,\tau) - \gamma U_2^2(x-y,\tau) \} A(y,t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Cauchy problem 3. Initial conditions are zero. Let a force be applied on a segment of the rod:

$F_1(x,t) = A(x)H(L-|x|)H(t)$, $F_2(x,t) = 0$. This solution:

$$u(x,t) = U_1^1(x,t) * A(x,t)H(L-|x|) = H(t) \int_{-L}^L A(x-y)dy \int_0^t U_1^1(y,\tau)d\tau,$$

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) = & \rho c^2 H(t) \int_0^t \left\{ U_1^1(x+L, \tau) A(-L) - U_1^1(x-L, \tau) A(L) \right\} d\tau + \\ & + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L A(x-y) dy \int_0^t U_1^1(y, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Cauchy problem 4. Let a heat source act on the segment $[-L, L]$:

$F_1(x, t) = 0$, $F_2(x, t) = A(x)H(t)H(L - |x|)$. The initial conditions are zero. In this case

$$u(x,t) = U_1^2(x,t) * A(x,t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x-y, \tau) A(y) dy,$$

$$\theta(x,t) = U_2^2(x,t) * A(x,t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_2^2(x-y, \tau) A(y) dy$$

$$\sigma(x,t) = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta =$$

$$\begin{aligned} = & \rho c^2 H(t) \int_0^t \left\{ U_1^2(x+L, \tau) A(-L) - U_1^2(x-L, \tau) A(L) \right\} d\tau + \\ & + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L A(y) dy \int_0^t \left\{ U_1^2(x-y, \tau) - \gamma U_2^2(x-y, \tau) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

With the joint distribution of power and heat sources of this type, the solution will be the sum of the corresponding solutions for each of them.

Discussion

In this study, a generalized solution to the Cauchy problem for a thermoelastic rod subjected to nonstationary force loads and heat sources has been constructed using the model of uncoupled thermoelasticity and the method of generalized functions. This approach has proven effective for addressing the complexity of initial-boundary value problems arising in nonstationary thermal environments, where classical methods may face difficulties due to the presence of singularities and discontinuities. The main advantage of the proposed method lies in its ability to handle singularities analytically by introducing generalized functions such as simple and double layers. These functions rigorously incorporate the effects of initial temperature, displacements, and velocity conditions into the mathematical model. The use of the Green's tensor, previously developed in [9], allows for a systematic representation of the solution in both singular and regular (integral) forms, making it suitable for further numerical implementation. The numerical realization of the Green's tensor in Mathcad 15 for dimensionless thermoelastic parameters has shown that this approach is not only theoretically sound but also practically applicable. The solutions obtained for distributed force and thermal loads along the rod demonstrate how transient thermal effects interact with mechanical responses, particularly in cases involving sharp temperature gradients and time-dependent boundary conditions. These results contribute significantly to the understanding of the stress-strain behavior of rod structures under unsteady thermal loading. In engineering practice, such findings are critical for the design and safety assessment of components operating in thermally dynamic environments—such as turbine blades, reactor components, or high-speed mechanical systems—where repeated thermal and mechanical loads may otherwise lead to failure due to fatigue or thermal shock. Future work could extend the current model to coupled thermoelasticity, consider nonlinear material behavior, or include additional physical effects such as damping or viscoelasticity. Moreover, applying the method to more complex geometries and three-dimensional structures could further expand its applicability to real-world engineering systems.

Conclusion

The derived formulas and the implemented program enable the investigation of thermodynamic processes in rods subjected to diverse heat and power sources, whether distributed, pulsed, or concentrated, described by singular generalized functions. The outcomes of this study, along with the computer program, offer a means to evaluate the strength and reliability of rod structures throughout operation. These structures find applications in mechanical engineering as well as in the construction of above-ground and underground structures, including building supports, columns, and similar components.

Acknowledgement

This research was supported by program of fundamental investigation BR20280990 “Design, development fluid and gas mechanics, new deformable bodies, reliability, energy efficiency of machines, mechanisms, robotics fundamental problems solving methods” and the project by № AP19674789.

References

- [1] Li Y. Investigation of heat transfer characteristics on rod fastening rotor. *Aip conference series: materials Science and Engineering* – 2019 - № 3 - 677p. <https://doi.org/10.2991/iceep-18.2018.173>
- [2] Shibib K., Minshid M., Alattar N. Thermal and stress analysis in nd: yag laser rod with different double end pumping methods. *Thermal science*- 2011 - № 15 - pp. 399-407. <https://doi.org/10.2298/TSCI101201004S>
- [3] Andreev V., Turusov R. Nonlinear modeling of the kinetics of thermal stresses in polymer rods. *Advanced materials and structural engineering* – 2016 - pp. 719-722. <https://doi.org/10.1201/b20958-150>
- [4] Sukarno D.H. Analysis of nuclear fuel rod temperature distribution using cfd calculation and analytical solution. *Proceedings of the 6th international symposium on current progress in mathematics and sciences - 2021*. <https://doi.org/10.1063/5.0058888>
- [5] Mishchenko A. Spatially structure spatial problem of the stressed-deformed state of a structural inhomogeneous rod. *Aip conference series: materials science and engineering -2020* - 953p. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/953/1/012004>
- [6] Hwang J.K. Thermal behavior of a rod during hot shape rolling and its comparison with a plate during flat rolling. *Processes* – 2020 - № 3 – 327p. <https://doi.org/10.3390/pr8030327>
- [7] Liu Q., He X. Thermal analysis of terfenold rods with different structures. *Micromachines*, 2023, № 1, Volume 1, 216 p. <https://doi.org/10.3390/mi14010216>
- [8] Arshidinova M., Tashev A., Kudaykulov A. Developing a method of accounting for the existence of local surface heat exchange in rods of variable cross-section. *Applied mechanics* – 2023 - №.7 - 123p. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.273635>
- [9] Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. (2018) Fundamentalnye i obobshennye resheniya uravnenii nestacionarnoi dinamiki termouprugih stержnei [Fundamental and generalized solutions of the equations of the non-stationary dynamics of thermoelastic rods]. *Bulletin of ENU named after. L.N. Gumileva* - № 2(123) - pp. 56-64. (in Russian) <https://doi.org/10.32523/2616-6844>
- [10] Novatsky V. (1975) *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*- Moscow: Mir - 872p.
- [11] Novatsky V. (1987) *Dinamicheskie zadachi termouprugosti [Dynamic problems of thermoelasticity]*. M.:Mir- 256p. (In Russian)
- [12] Vladimirov V.S. (1981) *Uravnenie matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]* - M.: Science, 512p. (In Russian)
- [13] Vladimirov V.S. (1979) *Obobshennye funktsii v matematicheskoi fiziki [Generalized functions in mathematical physics]* - M.: Science - 390p. (In Russian)
- [14] Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Green tensor and regular solutions of equations of rods thermodynamics and their properties. *Journal of theoretical and applied mechanics* – 2021 - № 2 (59) - pp.227-238. <https://doi.org/10.15632/jtam-pl/133233>

O.S. Akhmetova^{1*} , S.A. Issayev² 

¹Almaty brunch of Saint-Peterburg University of the Humanities and Social Sciences,
Almaty, Kazakhstan

²Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan
**e-mail: ah_oksa@mail.ru*

STATIONARY DIFFUSION MODEL IN HETEROGENEOUS MEDIA WITH SMALL PARAMETERS

Abstract

This study presents a theoretical and applied investigation of a stationary diffusion problem in heterogeneous media incorporating small parameters and modified boundary conditions. The relevance of this work stems from the necessity to accurately represent boundary layer effects in complex physical systems with variable internal structures, such as multilayered materials, biological tissues, and natural geophysical environments. Traditional models often oversimplify such effects, resulting in distortions in the solution near domain boundaries. The primary objective of the research is to construct a rigorous mathematical framework that accounts for both the presence of small parameters and altered boundary conditions. The analysis includes deriving a priori stability estimates and constructing asymptotic expansions for the solution. The methodology relies on functional formulation in Sobolev spaces, the Galerkin method, asymptotic techniques, and weak convergence theory. Special attention is given to the existence and uniqueness of both strong and generalized solutions, as well as to their convergence properties as the small parameters tend to zero. The results confirm the solvability of the problem, provide robust energy estimates, and establish solution stability under various types of boundary modifications. It is demonstrated that changes in boundary conditions primarily affect solution behavior near the domain edges, while preserving the global structure of the field. The model is applied in various fields, including climate modeling, thermal diffusion, and hydrophysical systems. This work lays a foundation for the development of adaptive numerical schemes and for extending the analysis to non-stationary problems.

Keywords: stationary diffusion, heterogeneous media, small parameters, boundary conditions, asymptotic analysis, solution stability, functional methods, a priori estimates

О.С. Ахметова¹, С.А. Исаев²

¹Санкт-Петербург Гуманитарлық кәсіподақтар университеті Алматы филиалы,
Алматы қ., Қазақстан

²Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ШАҒЫН ПАРАМЕТРЛЕРІ БАР БІРТЕКТІ ЕМЕС ОРТАДАҒЫ СТАЦИОНАРЛЫ ДИФФУЗИЯ МОДЕЛІ

Аңдатпа

Бұл зерттеу шекаралық шарттарды өзгерту шарты бойынша шағын параметрлері бар біртекті емес орталарда стационарлық диффузия мәселесін теориялық және қолданбалы талдауға арналған. Жұмыстың өзектілігі көп қабатты материалдар, биологиялық ұлпалар және табиғи геофизикалық түзілімдер сияқты органдың ауыспалы құрылымы бар физикалық жүйелерде туындайтын шекаралық әсерлерді дәл сипаттау қажеттілігімен байланысты. Классикалық модельдерде мұндай әсерлер жиі еленбейді немесе жеңілдетіледі, бұл шекаралық аймақтардағы ерітіндінің таралуының бұрмалануына әкеледі. Зерттеудің мақсаты - шағын параметрлерді және өзгертілген шекаралық шарттарды ескеретін қатаң математикалық модельді құру, сонымен қатар тұрақтылықтың априорлық бағасын алу және шешімдердің асимптотикалық кеңеюін құру. Әдістеме функционалдық кеңістіктерде мәселені тұжырымдауды, Галеркин әдісін қолдануды, асимптотикалық талдауды және әлсіз конвергенция теориясын қамтиды. Жалпыланған және күшті шешімдерді құруға, сондай-ақ параметрлер нөлге бейім болғандықтан олардың жақындасу шарттарын зерттеуге ерекше назар аударылады. Нәтижесінде

модельдің шешілетіндігі дәлелденді, энергиялық бағалаулар алынады, шекаралық модификациялардың әртүрлі түрлері үшін шешімдердің тұрақтылығы расталады. Шекаралық шарттарды өзгерту негізінен өрістің жалпы құрылымын бұзбай, шекараларға жақын шешімдердің эрекетіне әсер ететіні көрсетілген. Климатологияда, жылу алмасуды модельдеуде және гидрофизикада модельді қолдану мысалдары келтірілген. Жұмыс адаптивті сандық сұлбаларды әзірлеуге және талдауды стационарлық емес есептерге кеңейтуге негіз бола алады.

Түйін сөздер: стационарлы диффузия, біртекті емес орта, шағын параметрлер, шекаралық шарттар, асимптотикалық талдау, шешімдердің тұрақтылығы, функционалдық тәсіл, априорлық бағалау.

О.С. Ахметова¹, С.А. Исаев²

¹Алматинский филиал Санкт-Петербургского Гуманитарного университета профсоюзов,
г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация

Настоящее исследование посвящено теоретическому и прикладному анализу стационарной диффузионной задачи в неоднородных средах с малыми параметрами при условии модификации краевых условий. Актуальность работы обусловлена необходимостью точного описания граничных эффектов, возникающих в физических системах с переменной структурой среды, таких как многослойные материалы, биологические ткани и природные геофизические образования. В классических моделях такие эффекты зачастую игнорируются или упрощаются, что приводит к искажению распределения решения в пограничных зонах. Целью исследования является построение строгой математической модели, учитывающей малые параметры и изменённые граничные условия, а также получение априорных оценок устойчивости и построение асимптотических разложений решений. Методология включает в себя постановку задачи в функциональных пространствах, применение метода Галеркина, асимптотического анализа и теории слабой сходимости. Особое внимание уделено построению обобщённых и сильных решений, а также исследованию условий их сходимости при стремлении параметров к нулю. В результате доказана разрешимость модели, получены энергетические оценки и подтверждена устойчивость решений при различных видах граничных модификаций. Показано, что модификация краевых условий влияет преимущественно на поведение решений вблизи границ, не нарушая общей структуры поля. Представлены примеры применения модели в задачах климатологии, моделировании теплопереноса и гидрофизике. Работа может служить основой для разработки адаптивных численных схем и расширения анализа на нестационарные задачи.

Ключевые слова: стационарная диффузия, неоднородная среда, малые параметры, краевые условия, асимптотический анализ, устойчивость решений, функциональный подход, априорные оценки.

Main Provisions

This paper investigates the influence of boundary condition modification on the behavior of solutions of a stationary diffusion problem in inhomogeneous media with small parameters. A theorem of the existence of strong and generalized solutions of the problem is established, a priori stability estimates are obtained, and asymptotic expansions with control of the accuracy of approximations are constructed. It is revealed that modifications of boundary conditions significantly affect the distribution of the solution in the boundary region. The methodology is substantiated using the theory of boundary value problems and methods of functional analysis.

Introduction

Mathematical modeling of stationary processes of matter and heat transfer in environments with spatial heterogeneity and small parameters is an important area of applied analysis. Similar problems arise in a wide range of scientific and engineering applications - from thermal physics and geophysics to biomechanics and materials science. A characteristic feature of such processes is the increased

sensitivity of solutions to boundary conditions, especially in situations where the properties of the medium change significantly near the boundary of the region.

Traditional formulations of diffusion problems often assume strictly specified boundary conditions and constant coefficients, which may not be justified in real systems. Classical approaches developed in the works of O.A. Ladyzhenskaya [1, p. 15] provide a fundamental basis, but do not cover the influence of structural heterogeneities and variations at the boundaries. More modern studies suggest using asymptotic analysis and homogenization methods to account for the heterogeneous microstructure [2, p. 47; 3, p. 92]. However, the issue of modifying boundary conditions in the presence of small parameters remains insufficiently studied. In climate modeling problems, for example, when assessing heat transfer through ice cover, it is essential to consider the transition zones between layers with different thermal conductivities, such as those between air and ice, and ice and water. Here, both spatial heterogeneity and weak heat exchange at the boundaries become unavoidable, which cannot be correctly described without introducing modified boundary conditions [4, p. 213]. In this context, the development of models that combine a functional-analytical approach with asymptotic stability of solutions becomes relevant.

The present study aims to construct a mathematical model of stationary diffusion that takes into account small parameters, structural heterogeneity of the medium, and modified boundary conditions. A rigorous justification for the existence and stability of solutions in functional spaces is proposed, a priori estimates are obtained, and asymptotic expansions are constructed. In addition, the practical application of the model for describing a stable temperature profile in ice layers with various types of boundary interactions is demonstrated. Thus, the developed model has both theoretical value and practical significance for heat exchange problems in natural and engineering systems.

Research methodology

The study is theoretical and analytical, based on modern methods in the theory of boundary value problems for elliptic equations. The mathematical model is formulated based on a stationary diffusion problem, where the heterogeneity of the medium and the presence of small parameters determine spatial variations in the coefficients and modifications to the boundary conditions. The central place is occupied by a strict formulation of the problem in Sobolev spaces, which allows analyzing solutions within the framework of both intense and generalized interpretations. To substantiate the existence and uniqueness of solutions, Galerkin and variational calculus methods were used, as well as the weak convergence technique, which made it possible to prove the solvability of the problem rigorously. All conclusions are accompanied by a priori energy estimates based on classical functional inequalities - Cauchy, Young, Sobolev - and the maximum principle. This approach ensured the mathematical rigor and stability of the model. Particular attention in the work is paid to the construction of asymptotic expansions of solutions in powers of a small parameter. By formally substituting these expansions into the original equations and modified boundary conditions, equations for each order of approximation were identified, which made it possible to determine the exact structure of the correction terms. The obtained estimates of the residual terms confirmed the convergence of the approximations and the stability of the solution as $\varepsilon \rightarrow 0$. An important step was the justification of the correctness of the limit transition as small parameters tend to zero. The use of weak convergence concepts in Sobolev spaces ensured a rigorous analysis of the behavior of solutions, including nonlinear boundary terms. Thus, the proposed methodological approach combines functional and analytical rigor with the ability to construct stable approximations, providing a comprehensive understanding of the influence of modifying boundary conditions on the structure of a stationary solution in an inhomogeneous medium.

Statement of the Problem

A boundary value problem is considered that models the steady motion of a viscous incompressible fluid with variable density in a limited region $\Omega \in R^3$. The motion is described by the following system of equations:

$$\rho[(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}] = \nu \Delta \vec{v} - \nabla p + \lambda(\nabla \rho \cdot \nabla)\vec{v} + \rho \vec{f}, \quad (1)$$

This is the generalized equation of motion (modified Navier–Stokes equation) for an incompressible fluid with variable density.

The left-hand side is the inertial term: the density ρ times the convective derivative of the velocity $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$.

The left-hand side is the inertial term: the density ρ multiplied by the convective derivative of the velocity $(\vec{v} \cdot \nabla)$.

The right side includes:

$(\vec{v} \cdot \nabla)$ – a viscous term describing internal friction (diffusion of momentum);

∇p – a pressure gradient;

$\lambda(\nabla \rho \cdot \nabla)\vec{v}$ – an additional term reflecting the effect of the density gradient on the velocity;

$\rho \vec{f}$ – a mass force (for example, gravity) multiplied by the density.

Condition of incompressibility of the medium (2): the divergence of the velocity vector field is zero. This means that the volume of the liquid is preserved.

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2)$$

The equation of density (3) transfer takes into account diffusion. The left part is the convective transfer of density by the velocity field, and the right part is the diffusion spreading of density with the coefficient λ . The equation describes the stationary distribution of density in a moving medium.

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\rho = \lambda \Delta \rho \quad (3)$$

Boundary conditions:

$$\vec{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \rho|_{\partial\Omega} = \rho_0(x), \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0 \quad (4)$$

where

$\vec{v}|_{\partial\Omega} = 0$ –no-slip condition: the liquid is at rest at the boundary of the region;

$\rho|_{\partial\Omega} = \rho_0(x)$ –the density distribution at the boundary of the region is given;

$\int_{\Omega} p \, dx = 0$ –pressure normalization: the average pressure value over the region is assumed to be zero (for uniqueness of the solution).

Description of variables:

\vec{v} –volumetric flow velocity vector;

p – scalar pressure field;

ρ –scalar function of the density of a liquid (or solution);

λ –molecular density diffusion coefficient;

\vec{f} – vector of mass force acting in a region (for example, gravity);

ν – kinematic viscosity coefficient.

The function $\rho_0(x)$ defined on the boundary $\partial\Omega$ satisfies the condition

$$|\rho_0(x)| \leq M \quad (5)$$

Definition 1. A strong solution to problem (1)-(4) is a function $\vec{v}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap (W_2^1(\Omega), \rho(x) \in W_2^2(\Omega), \operatorname{div} \vec{v} = 0, p(x) \in W_2^1(\Omega)$, satisfying (1)-(4) to the appropriate extent.

Theorem 1. Let $\partial\Omega \subset C^2$, $\vec{f}(x) \in L_2(\Omega)$, $\rho_0(x) \in W_2^{3/2}(\Omega)$ and condition (5) be satisfied. Then there exists at least one strong solution to problem (1)-(4).

Proof. We obtain a priori estimates of the solution. By the maximum principle for elliptic equations, we have

$$|\rho| \leq M \quad (6)$$

Let us multiply (1) by \vec{v} in $L_2(\Omega)$. Considering that by virtue of (3)

$$\int_{\Omega} [\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \lambda(\nabla\rho \cdot \nabla)\vec{v}] \vec{v} d\Omega = 0,$$

we get the inequality

$$v \|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq CM \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega)},$$

from which follows the assessment

$$v \|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \quad (7)$$

Now, multiplying (3) by $\rho - \rho_0$ in $L_2(\Omega)$, we get

$$\lambda \|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\vec{v}\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)} \max_{x \in \Omega} |\rho - \rho_0| + \lambda \|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla\rho_0\|_{L_2(\Omega)} \right)$$

Applying Young's inequality on the right-hand side

$$\begin{aligned} & \|\vec{v}\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)} \max_{x \in \Omega} |\rho - \rho_0| + \lambda \|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla\rho_0\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq \frac{\delta_1}{2} \|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\delta_1^{-1}}{2} \left[\|\vec{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \max_{x \in \Omega} |\rho - \rho_0|^2 + \lambda^2 \|\nabla\rho_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \right], \end{aligned}$$

For sufficiently small δ_1 we have

$$\lambda \|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} + \|\nabla\rho_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \quad (8)$$

Next, using the theory of boundary value problems for elliptic equations, from equation (3) we obtain

$$\|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left(\|(\vec{v} \cdot \nabla)\rho\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} \right).$$

Using inequality

$$\|\nabla\rho\|_{L_4(\Omega)} \leq C \|\rho\|_{W_2^2(\Omega)}^{1/2} \|\rho\|_{L_{\infty}(\Omega)}^{1/2} \leq C \|\rho\|_{W_2^2(\Omega)}^{1/2} M^{1/2}$$

Let's estimate the first term on the right-hand side

$$\begin{aligned} \|(\vec{v} \cdot \nabla)\rho\|_{L_2(\Omega)} & \leq \|\vec{v}\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla\rho\|_{L_4(\Omega)} \leq C \|\vec{v} \cdot \nabla\|_{L_2(\Omega)} M^{1/2} \|\rho\|_{W_2^2(\Omega)}^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{\delta_2}{2} \|\rho\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{\delta_2^{-1}}{2} C \|\vec{v} \cdot \nabla\|_{L_2(\Omega)}^2 M. \end{aligned}$$

For sufficiently small δ_2 , we establish

$$\|\rho\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \left(\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} \right) \quad (9)$$

Let us rewrite (1) as

$$v\Delta\vec{v} - \nabla p = \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \lambda(\nabla\rho \cdot \nabla)\vec{v} - \rho\vec{f},$$

Let's estimate the right side as follows:

$$\begin{aligned} & \|\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \lambda(\nabla\rho \cdot \nabla)\vec{v} - \rho\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} \leq M\|\vec{v}\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla\vec{v}\|_{L_4(\Omega)} + \\ & \lambda\|\nabla\rho\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla\vec{v}\|_{L_4(\Omega)} + M\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ & \leq C(M\|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega)}^{5/4}\|\vec{v}\|_{W_2^2(\Omega)}^{3/4} + \lambda\|\rho\|_{W_2^2(\Omega)}^{1/2}M^{1/2}\|\vec{v}\|_{W_2^2(\Omega)}^{3/4}\|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega)}^{1/4} + M\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)}) \leq \\ & \leq \frac{3}{4}\delta_3\|\vec{v}\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\delta_3^{-3}C\left(M^4\|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega)}^5 + \lambda^4\|\rho\|_{W_2^2(\Omega)}^2M^2\|\nabla\vec{v}\|_{L_2(\Omega)}\right) + CM\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Using estimates of solutions to boundary value problems for the Navier-Stokes system, we find

$$\|\vec{v}\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\nabla\rho\|_{L_4(\Omega)} \leq C\left(\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^5 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}^2\right) \quad (10)$$

The solvability of problem (1)-(4) can be proved based on estimates (6)-(10), for example, by the Galerkin method. The proof is complete.

Let us consider various approximations of problem (1)-(4). Let us start with the system

$$\rho^\varepsilon(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\vec{v}^\varepsilon = \nu\Delta\vec{v}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon - \frac{1}{2}\rho^\varepsilon\vec{v}^\varepsilon\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon + \rho^\varepsilon\vec{f} + \lambda(\nabla\rho^\varepsilon \cdot \nabla)\vec{v}^\varepsilon, \quad (11)$$

$$(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\rho^\varepsilon = \lambda\Delta\rho^\varepsilon, \quad (12)$$

with boundary conditions

$$\vec{v}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad \rho^\varepsilon|_{\partial\Omega} = \rho_0(x). \quad (13)$$

Theorem 2. Let $\vec{f}(x) \in L_2(\Omega)$, $\rho_0(x) \in W_2^{3/2}(\Omega)$ and satisfy (5), $\partial\Omega \in C^2$. Then there exists at least one solution to problem (11) – (13) $\vec{v}^\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, $\rho^\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega)$ the estimate holds

$$\|\vec{v}^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_1\left(\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)}\|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\Omega)}\right) \quad (14)$$

Proof. As before, $|\rho^\varepsilon| \leq M$.

Multiply (11) by \vec{v}^ε in $L_2(\Omega)$. By the equality

$$\int_{\Omega} \left[\rho^\varepsilon(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\vec{v}^\varepsilon + \frac{1}{2}\rho^\varepsilon\vec{v}^\varepsilon\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon - \lambda(\nabla\rho^\varepsilon \cdot \nabla)\vec{v}^\varepsilon \right] \vec{v}^\varepsilon dx = 0,$$

we will receive

$$\nu\|\nabla\vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 \quad (15)$$

Next, from equation (12) we have

$$\|\rho\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_1\left(\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\Omega)}\right) \quad (16)$$

Let us rewrite (11) as

$$\nu \nabla \vec{v}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon = \rho^\varepsilon (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon + \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon - \lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon - \rho^\varepsilon \vec{f},$$

Estimating the right-hand side in $L_2(\Omega)$ taking into account the inequality of the ε -approximation of the Navier-Stokes equations

$$\|\vec{v}^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left\| \nu \nabla \vec{v}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon \right\|_{L_2(\Omega)},$$

we will receive

$$\|\vec{v}^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left(\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^5 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}^2 \right) \quad (17)$$

Estimates (16), (17) guarantee the validity of Theorem 2. In addition, it follows from them that it is possible to select subsequences $\{\rho^\varepsilon\}, \{\vec{v}^\varepsilon\}, \left\{\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon\right\}$ that weakly converge in the corresponding measure as $\varepsilon \rightarrow 0$. The proof is complete.

Let us rewrite (11) in the form

$$\begin{aligned} \rho^\varepsilon (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon &= \nu \Delta \vec{v}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon + \rho^\varepsilon \vec{f} + \lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon, \\ \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon + \varepsilon \rho^\varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Theorem 3. Let the conditions of Theorem 2 be satisfied. In addition to the fact that $\vec{f}(x) \in W_2^{-1}(\Omega)$ и $\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} \cdot M, \|\rho_0(x)\|_{W_2^{3/2}(\Omega)}$ are sufficiently small. Then the solution to problem (18), (12), (13) can be represented in the form

$$\begin{aligned} \vec{v}^\varepsilon &= \vec{v} + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \vec{v}_k + \bar{w}_\varepsilon \varepsilon^{N+1}, \\ p^\varepsilon &= p + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k p_k + p_\varepsilon \varepsilon^{N+1}, \\ \rho^\varepsilon &= \rho + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \rho_k + \rho_\varepsilon \varepsilon^{N+1}, \end{aligned} \quad (19)$$

where \vec{v}, p, ρ is the solution to problem (1) – (4), and the following estimates are valid

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_k\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\nabla p_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho_k\|_{W_2^2(\Omega)} &\leq C_2, \\ \|\bar{w}_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\nabla p_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} &\leq C_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Proof. Substitute the expansion (19) into (18), (12). Collecting the coefficients at the powers of ε , for all $k = 1, 2, \dots, N$ we obtain

$$\begin{aligned} \rho_0 (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_k + \rho_0 (\vec{v}_k \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \rho_k (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}_0 \operatorname{div} \vec{v}_k &= \\ = \nu \Delta \vec{v}_k - \nabla p_k + \rho_k \vec{f} + \lambda [(\nabla \rho_0 \cdot \nabla) \vec{v}_k + (\nabla \rho_k \cdot \nabla) \vec{v}_0] - \vec{h}_k(x), \end{aligned} \quad (21)$$

$$h_k(x) = \sum_{\substack{i,j,\ell=1 \\ i+j+\ell=k-1}}^{k-1} \left[\rho_i(\vec{v}_j \cdot \nabla) \vec{v}_\ell + \frac{1}{2} \rho_i \vec{v}_j \operatorname{div} \vec{v}_i \right] + \sum_{\substack{i,j,\ell=1 \\ i+j+\ell=k-1}}^{k-1} \lambda(\nabla \rho_i \cdot \nabla) \vec{v}_j,$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_k + p_{k+1} = 0, \quad (22)$$

$$\rho_k(\vec{v}_0 \cdot \nabla) + \rho_0(\vec{v}_k \cdot \nabla) + g_k(x) = \lambda \Delta \rho_k, \quad (23)$$

$$g_k(x) = \sum_{\substack{i,j,\ell=1 \\ i+j+\ell=k-1}}^{k-1} (\vec{v}_j \cdot \nabla) \rho_j,$$

$$\vec{v}_k|_{\partial\Omega} = 0, \quad \rho_k|_{\partial\Omega} = 0. \quad (24)$$

The functions $\vec{w}_\varepsilon, p_\varepsilon, \rho_\varepsilon$ are the solution to the problem

$$\rho_0(\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{w}_\varepsilon + \rho_0(\vec{w}_\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \rho_\varepsilon(\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}_0 \operatorname{div} \vec{w}_\varepsilon =$$

$$= \nu \Delta \vec{w}_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon + \rho_\varepsilon \vec{f} + \lambda[(\nabla \rho_0 \cdot \nabla) \vec{w}_\varepsilon + (\nabla \rho_\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}_0] - \vec{h}_{N+1}(x), \quad (25)$$

$$h_{N+1}(x) = \sum_{\substack{i,j,\ell=1 \\ i+j+\ell>N}}^{k-1} \varepsilon^{i+j+\ell-N} \left[\rho_i(\vec{v}_j \cdot \nabla) \vec{v}_\ell + \frac{1}{2} \rho_i \vec{v}_j \operatorname{div} \vec{v}_i \right] + \sum_{\substack{i,j,\ell=1 \\ i+j+\ell=k-1}}^{k-1} \varepsilon^{i+j} \lambda(\nabla \rho_i \cdot \nabla) \vec{v}_j,$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_\varepsilon + \varepsilon p_\varepsilon + \varepsilon p_N = 0, \quad (26)$$

$$\rho_\varepsilon(\vec{v}_0 \cdot \nabla) + \rho_0(\vec{w}_\varepsilon \cdot \nabla) + g_{N+1}(x) = \lambda \Delta \rho_k, \quad (27)$$

$$g_{N+1}(x) = \sum_{\substack{i,j,\ell=1 \\ i+j+\ell>N}}^N \varepsilon^{i+j} (\vec{v}_i \cdot \nabla) \rho_j,$$

$$\vec{w}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad \rho_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \quad (28)$$

Problems (21) – (24) for each fixed $k = 1, 2, \dots, N$, (25) – (28) have solutions

$$\vec{v}_k(x), \vec{w}_\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$$

$$\nabla \rho_k(x), \nabla \rho_\varepsilon(x) \in L_2(\Omega), \rho_k(x), \rho_\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega),$$

where \vec{v}_k, ρ_k, p_k do not depend on ε .

Let us estimate the functions $g_k(x), \vec{h}_k(x)$

$$\|g_k\|_{L_2(\Omega)} \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=k-1}}^{k-1} \|\vec{v}_i\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \rho_j\|_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$(29)$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \sum_{i+j=k-1}^{k-1} \|\nabla \vec{v}_i\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \rho_j\|_{L_2(\Omega)}^{3/4} \|\rho_j\|_{L_2(\Omega)}^{1/4} \\
 \|\vec{h}_k\|_{L_2(\Omega)} &\leq \sum_{i,j=1}^{k-1} \left(M \|\vec{v}_i\|_{L_6(\Omega)} \|\nabla \vec{v}_j\|_{L_3(\Omega)} + \lambda \|\nabla \rho_i\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla \vec{v}_j\|_{L_4(\Omega)} \right) \leq \\
 &\leq \sum_{i,j=1}^{k-1} \left(M \|\nabla \vec{v}_i\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta \vec{v}_j\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla \vec{v}_j\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} + \lambda \|\nabla \rho_i\|_{L_2(\Omega)}^{7/8} \|\rho_i\|_{L_2(\Omega)}^{1/8} \|\Delta \vec{v}_j\|_{L_2(\Omega)}^{7/8} \|\vec{v}_j\|_{L_2(\Omega)}^{1/8} \right)
 \end{aligned} \tag{30}$$

From equations (21) – (23) we have

$$\begin{aligned}
 v \|\Delta \vec{v}_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla p_k\|_{L_2(\Omega)} &\leq C [\|\nabla p_{k-1}\| + M (|\vec{v}_0|_\Omega \|\nabla \vec{v}_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{v}_k\|_{L_2(\Omega)} |\nabla \vec{v}_0|_\Omega) + \\
 + \|\rho_k\|_{L_2(\Omega)} |\vec{v}_0|_\Omega |\nabla \vec{v}_0|_\Omega + \|\rho_k\|_{L_3(\Omega)} \|\vec{f}\|_{L_6(\Omega)} + \lambda (\|\nabla \rho_0\|_{L_6(\Omega)} |\nabla \vec{v}_k|_{L_3(\Omega)} + \|\nabla \rho_k\|_{L_2(\Omega)} |\nabla \vec{v}_0|_\Omega) + \\
 + \|\vec{h}_k\|_{L_2(\Omega)}] &\leq \delta (\|\Delta \rho_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta \vec{v}_k\|_{L_2(\Omega)}) + \\
 + C [\|\nabla p_{k-1}\|_{L_2} + \|\vec{h}_k\|_{L_2(\Omega)} + (1 + \delta^{-1}) (\|\rho_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{v}_k\|_{L_2(\Omega)}) \times \\
 \times (1 + |\vec{v}_0|_\Omega^2 + |\nabla \vec{v}_0|_\Omega^2 + \|\vec{f}\|_{L_6(\Omega)}^2 + \|\nabla \rho_0\|_{L_6(\Omega)}^4)] &
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 \|\Delta \rho_k\|_{L_2(\Omega)} &\leq C [|\vec{v}_0|_\Omega \|\nabla \rho_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{v}_k\|_{L_3(\Omega)} \|\nabla \rho_0\|_{L_6(\Omega)} + \|\vec{g}_k\|_{L_2(\Omega)}] \leq \\
 &\leq \delta (\|\nabla \rho_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta \vec{v}_k\|_{L_2(\Omega)}) + \\
 + C_\delta [|\vec{v}_0|_\Omega^4 \|\rho_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{v}_k\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \rho_0\|_{L_6(\Omega)}^{4/3} + \|\vec{g}_k\|_{L_2(\Omega)}] &
 \end{aligned} \tag{32}$$

The function $\vec{h}_{N+1}(x), g_{N+1}(x), \vec{w}_\varepsilon(x), p_\varepsilon(x), \rho_\varepsilon(x)$ are estimated similarly. From inequalities of the form (29) – (32) follows estimate (20) for sufficiently small $\vec{f}(x)$ and $\rho_0(x)$. The proof is complete.

Let us consider the following approximation of equations (1) – (4)

$$\rho^\varepsilon (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon = \nu \Delta \vec{v}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon + \rho^\varepsilon \vec{f} - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon, \tag{33}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon = \varepsilon (\Delta p^\varepsilon - p^\varepsilon), \tag{34}$$

$$(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \rho^\varepsilon = \lambda \Delta \rho^\varepsilon, \tag{35}$$

with boundary conditions

$$\vec{v}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \rho^\varepsilon|_{\partial\Omega} = \rho_0(x). \tag{36}$$

Definition 2. A generalized solution to problem (33) – (36) is a function $\vec{v}^\varepsilon(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega), \rho^\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega)$ that satisfies the integral identities

$$\int_{\Omega} \left[\rho^\varepsilon (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon \vec{\psi} + \nu \nabla \vec{v}^\varepsilon \nabla \vec{\psi} - p^\varepsilon \operatorname{div} \vec{\psi} - \lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon \vec{\psi} + \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon \vec{\psi} - \rho^\varepsilon \vec{f} \vec{\psi} \right] dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} [\operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon \varphi + \varepsilon (\nabla p^\varepsilon \nabla \varphi + p^\varepsilon \varphi)] dx = 0,$$

for any $\vec{\psi} \in W_2^1(\Omega)$, $\varphi(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ and the problem $(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \rho^\varepsilon = \lambda \Delta \rho^\varepsilon$, $\rho^\varepsilon|_{\partial\Omega} = \rho_0(x)$ almost everywhere in $\bar{\Omega}$.

Definition 3. A strong solution of problem (33) – (36) is a function $\vec{v}^\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, $p^\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\rho^\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega)$ satisfying (33) – (36) almost everywhere in $\bar{\Omega}$.

Theorem 4. $\vec{f}(x) \in W_2^{-1}(\Omega)$, $\rho_0(x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^2$. Then problem (33) – (36) has at least one generalized solution and the estimate holds

$$\|\vec{v}^\varepsilon\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)} + \|p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \left(\|\vec{f}(x)\|_{W_2^{-1}(\Omega)} + \|\rho_0(x)\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + 1 \right), \quad (37)$$

in which the constant C does not depend on ε .

Proof. Let us introduce estimate (37). Note that by virtue of the maximum principle for elliptic equations

$$|\rho^\varepsilon|_\Omega = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\rho^\varepsilon| \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |\rho_0| \leq M.$$

Multiplying (33) by \vec{v}^ε in $L_2(\Omega)$, we obtain

$$\nu \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} p^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon dx = \int_{\Omega} \left[\lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon + \rho^\varepsilon \vec{f} - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon - \rho^\varepsilon (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon \right] \vec{v}^\varepsilon dx$$

Using (34), (35), we find

$$\nu \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\nabla p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Using Cauchy's inequality, we obtain

$$\nu \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\nabla p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2$$

Multiplying (35) by $\rho^\varepsilon - \rho_0$ in $L_2(\Omega)$, we have

$$\lambda \|\nabla \rho^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) (\rho^\varepsilon)^2 dx + \int_{\Omega} \nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla \rho_0 dx - \int_{\Omega} (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \rho^\varepsilon \rho_0 dx$$

From this follows the inequality

$$\lambda \|\nabla \rho^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 \cdot M^2 + \|\nabla \rho_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)$$

From the theory of boundary value problems for elliptic equations follows the estimate

$$\|\rho^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \left(\|\rho_0(x)\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + \|(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \rho^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \right) \leq$$

$$\leq C \left(\|\rho_0(x)\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + \|\vec{v}^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \|\rho^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \right) \leq \frac{\delta_4}{2} \|\rho^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} + \\ + C \frac{\delta_4^{-1}}{2} \cdot M \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho_0(x)\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)},$$

from here, for a sufficiently small δ_4 , we conclude

$$\|\rho^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \left(\|\rho_0(x)\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 \right).$$

Let us obtain an estimate for the function $p(x)$. To do this, we multiply (33) by the function $\vec{\varphi}(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$. We have

$$\int_{\Omega} \nabla \rho^\varepsilon \vec{\varphi}(x) dx = \int_{\Omega} \left[\nu \Delta \vec{v}^\varepsilon + \lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon + \rho^\varepsilon \vec{f} - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon - \rho^\varepsilon (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon \right] \vec{\varphi}(x) dx$$

Using inequalities

$$\int_{\Omega} \nu \Delta \vec{v}^\varepsilon \vec{\varphi}(x) dx \leq C \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\vec{\varphi}\|_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\int_{\Omega} \lambda (\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon \vec{\varphi}(x) dx \leq C \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla \rho^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \|\vec{\varphi}\|_{L_4(\Omega)} \leq$$

$$\leq C \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\rho^\varepsilon\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}^{1/2} M^{1/2} \|\vec{\varphi}\|_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon - \rho^\varepsilon (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon \right) \vec{\varphi}(x) dx \leq C |\rho^\varepsilon|_{\Omega} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\vec{\varphi}\|_{L_4(\Omega)},$$

we find

$$\int_{\Omega} \nabla p^\varepsilon \vec{\varphi}(x) dx \leq C \left(1 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} \right) \|\vec{\varphi}\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

It follows from this

$$\|\nabla p^\varepsilon\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \leq C \left(1 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} \right).$$

This is due to the condition $\int_{\Omega} p^\varepsilon dx = 0$ and the inequality

$$\|p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\nabla p^\varepsilon\|_{W_2^{-1}(\Omega)},$$

allows you to set a rating

$$\|p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left(1 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} \right), \text{ from which follows (37).}$$

The proof of the solvability of problem (33) – (36) is carried out by the Galerkin method based on (37).

Corollary. Any generalized solution of problem (33) – (36) as $\varepsilon \rightarrow 0$ becomes a generalized solution of problem (1) – (4).

Indeed, by virtue of (37), from the sequence $\{\vec{v}^\varepsilon, p^\varepsilon, \rho^\varepsilon\}$ one can select a subsequence that converges as $\varepsilon \rightarrow 0$ in the following sense:

$$\vec{v}^\varepsilon \rightarrow \vec{v} \text{ weakly in } W_2^1(\Omega) \text{ and strongly in } L_6(\Omega),$$

$$\rho^\varepsilon \rightarrow \rho \text{ weakly in } W_2^2(\Omega),$$

$$p^\varepsilon \rightarrow p \text{ weakly in } L_2(\Omega).$$

These properties of the sequence $\{\vec{v}^\varepsilon, p^\varepsilon, \rho^\varepsilon\}$ allow us to move to the redistribution as $\varepsilon \rightarrow 0$ in the integral identities for $\vec{v}^\varepsilon, p^\varepsilon, \rho^\varepsilon$, similar to those given in Definition 2. We will show how the transition is carried out in the most complex nonlinear terms

$$\begin{aligned} & |(\rho^\varepsilon(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla))\vec{v}^\varepsilon, \vec{\psi}) - (\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}, \vec{\psi})| = \\ & = |(\rho^\varepsilon - \rho, (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\vec{v}^\varepsilon, \vec{\psi}) + (\rho[(\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}) \cdot \nabla]\vec{v}^\varepsilon, \vec{\psi}) + (\rho(\vec{v} \cdot \nabla)(\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}), \vec{\psi})| \leq \\ & \leq |\rho^\varepsilon - \rho| \|\vec{v}^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \|\vec{v}^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \|\vec{\psi}\|_{L_4(\Omega)} + |\rho| \|\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}\|_{L_4(\Omega)} \|\vec{v}^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \|\vec{\psi}\|_{L_4(\Omega)} + \\ & \quad + |\rho(\vec{v} \cdot \nabla)(\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}), \vec{\psi}|. \end{aligned}$$

As $\varepsilon \rightarrow 0$, the first term tends to zero due to the strong convergence of ρ^ε and ρ (which follows from the compactness of the embedding of $W_2^2(\Omega)$ into $C(\Omega)$), the second term due to the strong convergence of \vec{v}^ε to \vec{v} in $L_4(\Omega)$. We integrate the third term by parts

$$\int_{\Omega} \rho(\vec{v} \cdot \nabla)[\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}]\vec{\psi} dx = - \int_{\Omega} [\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}](\vec{v} \cdot \nabla)(\rho\vec{\psi}) dx.$$

Obviously, the inequality is true

$$\begin{aligned} & |(\rho(\vec{v} \cdot \nabla)(\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}), \vec{\psi})| \leq \|\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}\|_{L_4(\Omega)} \|\vec{v}\|_{L_4(\Omega)} \times \\ & \quad \times (|\rho| \|\vec{\psi}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\vec{\psi}\|_{L_4(\Omega)} \|\rho\|_{W_4^1(\Omega)}), \end{aligned}$$

from which it follows that

$$(\rho^\varepsilon(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla))\vec{v}^\varepsilon, \vec{\psi}) \rightarrow (\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}, \vec{\psi}).$$

In the remaining terms of the integral identity, the limit transition is carried out similarly.

Theorem 5. If $\vec{f}(x) \in L_2(\Omega)$, $\rho_0(x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^2$, then the generalized solution of problem (33) – (36) becomes strong and the estimate

$$\|\vec{v}^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\rho^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\nabla p^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C_\varepsilon,$$

where $C_\varepsilon \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proof. As was seen above, the following estimate holds:

$$\varepsilon^{1/2} \|\nabla p\|_{L_4(\Omega)} \leq C \left(\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}, \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} \right).$$

Let us write equation (33) in the form

$$\nu \Delta \vec{v}^\varepsilon = \nabla p^\varepsilon - \lambda(\nabla \rho^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon + \rho^\varepsilon (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon - \rho^\varepsilon \vec{f} + \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon,$$

From the theory of boundary value problems for elliptic equations it follows that $\vec{v}^\varepsilon(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$ and the inequality holds

$$\|\vec{v}^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla \rho\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} + M \|\vec{v}^\varepsilon\|_{L_6(\Omega)} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_3(\Omega)} + M \|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} \right).$$

The following estimate follows from this:

$$\varepsilon^{1/2} \|\vec{v}^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)W_2^1(\Omega)} \leq C \left(\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}, \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} \right).$$

This is what needed to be proven.

Theorem 6. Let $\vec{f}(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\rho_0(x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^3$, and $\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}, M$ be sufficiently small. Then the following estimate holds:

$$\|\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|p^\varepsilon - p\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho^\varepsilon - \rho\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq C_4 \varepsilon^{3/2}, \quad (38)$$

$$\|\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|p^\varepsilon - p\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C_5 \varepsilon^{1/2}, \quad (39)$$

Proof. First of all, we note that from the general theory of boundary value problems for the Navier-Stokes equations it follows that if $\vec{f}(x) \in W_2^1(\Omega)$, then $\vec{v}_{xxx} \in L_2(\Omega)$ and $p_{xx} \in L_2(\Omega)$, i.e. $\vec{v}_x, \vec{v} \in C(\bar{\Omega})$.

We represent the solution of problem (33) – (36) as the sum

$$\vec{v}^\varepsilon = \vec{v} + \varepsilon \vec{w}, p^\varepsilon = p + \varepsilon \pi, \rho^\varepsilon = \rho + \varepsilon \eta.$$

Then the functions \vec{w}, π, η can be considered as the solution of the following boundary value problem

$$\eta(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon + \rho[(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon] = \nu \Delta \vec{w} - \nabla \pi + \quad (40)$$

$$+ \lambda[(\nabla \rho \cdot \nabla) \vec{w} + (\nabla \eta \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon] + \eta \vec{f} - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{w},$$

$$\operatorname{div} \vec{w} = \varepsilon \Delta \pi - \varepsilon \pi + \Delta p - p, \quad (41)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \eta + (\vec{w} \cdot \nabla) \rho^\varepsilon = \lambda \Delta \eta, \quad (42)$$

$$\vec{w}|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial \pi}{\partial \eta} \Big|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\partial\Omega}, \eta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (43)$$

Multiply (40) by \vec{w} in $L_2(\Omega)$ and integrate by parts

$$\begin{aligned} \nu \|\vec{w}\|_{L_2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \vec{w} \, dx &= \int_{\Omega} \left[\eta(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon + \rho((\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon) + \right. \\ &\left. + \lambda((\nabla \rho \cdot \nabla) \vec{w} + (\nabla \eta \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon) + \eta \vec{f} - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{w} \right] \vec{w} \, dx. \end{aligned}$$

The following relations are valid:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} \cdot \vec{w} dx &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\vec{v} \cdot \nabla)(\vec{w})^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{w}^2(\vec{v} \cdot \nabla) \rho dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{w}^2 \lambda \Delta \rho dx = - \lambda \int_{\Omega} (\nabla \rho \cdot \nabla) \vec{w} \cdot \vec{w} dx, \\
 - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \vec{w} dx &= - \int_{\Omega} \pi(\varepsilon \Delta \pi - \varepsilon \pi + \Delta p - p) dx \\
 &= \varepsilon \|\nabla \pi\|_{L_2(\Omega)}^2 - \varepsilon \int_{\partial \Omega} \pi \frac{\partial \pi}{\partial \eta} d(\partial \Omega) + \varepsilon \|\pi\|_{L_2(\Omega)}^2 - \\
 - \int_{\Omega} \pi(\Delta p - p) dx &\leq \varepsilon \|\nabla \pi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\pi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\pi\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \pi}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Omega)} + \\
 &+ \|\pi\|_{L_2(\Omega)} (\|\Delta p\|_{L_2(\Omega)} + \|p\|_{L_2(\Omega)}), \\
 \int_{\Omega} \left[-\eta(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon - \rho(\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon + \lambda(\nabla \eta \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon - \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon \right] \vec{w} dx &\leq \\
 &\leq C(\|\eta\|_{L_6(\Omega)} \|\vec{v}^\varepsilon\|_{L_6(\Omega)} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L_6(\Omega)} + M \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L_4(\Omega)}^2 + \\
 &+ \|\nabla \eta\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L_4(\Omega)} + M \|\vec{v}^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla \vec{w}\|_{L_4(\Omega)}).
 \end{aligned}$$

From (42) we obtain

$$\lambda \|\nabla \eta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \|\rho^\varepsilon(\vec{w} \cdot \nabla)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \|\vec{w}\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\nabla \rho^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla \vec{w}\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \rho^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Let us estimate the following quantities

$$\begin{aligned}
 \|\pi\|_{L_2(\Omega)} &\leq C \|\nabla \pi\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \\
 &\leq C \left\{ \|\nabla \vec{w}\|_{L_2(\Omega)} \left[1 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial \Omega)} \right] + \|\nabla \eta\|_{L_2(\Omega)} \left[1 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \right] \right\}. \\
 \|\pi\|_{L_2(\partial \Omega)} \cdot A &\leq C \|\nabla \pi\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \cdot A \leq C(\varepsilon \|\nabla \pi\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/4} \cdot (\|\pi\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/4} \cdot \varepsilon^{-1/4} \cdot A \leq \\
 &\leq \frac{\delta_1}{4} \varepsilon \|\nabla \pi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\delta_1}{4} \|\pi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\delta_1^{-1}}{2} C \cdot \varepsilon^{-1/2} \cdot A^2 \\
 \|\eta\|_{L_6(\Omega)} \|\vec{v}^\varepsilon\|_{L_6(\Omega)} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L_6(\Omega)} + M \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L_4(\Omega)}^2 &+ \\
 + \|\nabla \eta\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L_4(\Omega)} + M \|\vec{v}^\varepsilon\|_{L_4(\Omega)} \|\nabla \vec{w}\|_{L_2(\Omega)} \|\vec{w}\|_{L_2(\Omega)} &\leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\nabla\eta\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2\|\nabla\vec{w}\|_{L_2(\Omega)} + M\|\nabla\vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\vec{w}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ \|\nabla\eta\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\vec{w}\|_{L_2(\Omega)} + M\|\nabla\vec{v}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\vec{w}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq C\|\nabla\vec{w}\|_{L_2(\Omega)}^2\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 \left[1 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}\right] \end{aligned}$$

Using the above inequalities, for a sufficiently small δ_1 we obtain

$$\begin{aligned} &\|\nabla\vec{w}\|_{L_2(\Omega)} \left\{ \nu - C\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 \left[1 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}\right] \right\} + \\ &+ \varepsilon\|\nabla\pi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|\pi\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Let $\vec{f}(x)$ and $\rho_0(x)$ be such that

$$\nu - C\|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 \left[1 + \|\vec{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}\right] \geq \nu_0 > 0$$

Then the following estimate takes place:

$$\|\nabla\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \nu_0\|\nabla\vec{w}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|\nabla\pi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|\pi\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_6\varepsilon^{-\frac{1}{2}},$$

It follows from this

$$\|\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|p^\varepsilon - p\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho^\varepsilon - \rho\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq C_6\varepsilon^2\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = C_6\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

$$\|\vec{v}^\varepsilon - \vec{v}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|p^\varepsilon - p\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_7\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem 6 is proven.

Application Example

Stationary Heat Transfer in Climate Systems

One of the practical applications of the developed model is simulating stationary heat transfer in multilayer geophysical systems, such as the ocean–ice–atmosphere interface. In such problems, physical heterogeneity arises due to abrupt changes in thermal conductivity between layers (e.g., ice and water), while modified boundary conditions account for weak but non-negligible heat exchange at the interfaces. In this context, the small parameter ε represents the thickness of transition zones or an effective heat exchange coefficient, allowing the model to account for the influence of thin snow layers on top of ice or turbulent atmospheric effects.

The stationary formulation enables the evaluation of stable temperature fields within the ice sheet under given boundary conditions. Modified boundary conditions are particularly relevant for scenarios where the ice–air interface is not ideally insulated but permits a weak heat flux.

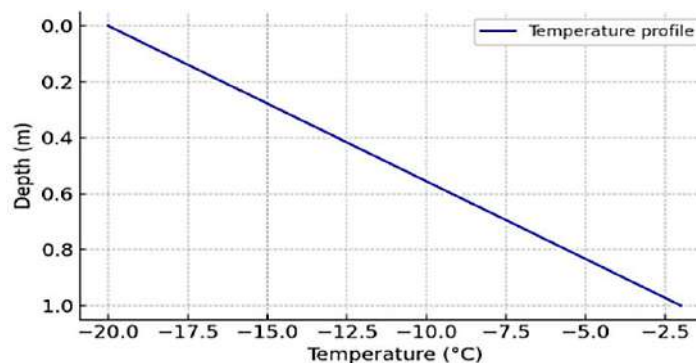


Figure 1. Stationary temperature distribution in the ice cover under given boundary conditions

The figure below illustrates a simplified numerical example: the stationary temperature distribution across a 1-meter-thick ice layer. The top boundary (ice–air interface) is set at $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$, and the bottom (ice–water interface) at $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$. The result shows a linear temperature gradient, typical of steady-state thermal conduction in homogeneous media, but applicable here with consideration of boundary modifications. Such models are essential for long-term climate predictions, simulations of ice melt dynamics, and energy balance studies in polar regions.

Results of the study

In the course of the theoretical study, a stationary diffusion problem in an inhomogeneous medium with small parameters and modified boundary conditions was considered. Three different mathematical approximations of the original model were constructed and rigorously analyzed. At each stage, the correctness of the formulation was substantiated, the existence of solutions was proven, and a priori estimates were obtained that do not depend on the values of the small parameters.

For the original problem with fixed boundary conditions, it was shown that when the conditions of the boundedness of the boundary density function are met, there is at least one strong solution. Using the maximum principle, Young's inequalities, and energy estimates, inequalities were derived that enable the establishment of solution stability.

A transition was made to approximate problems that include small parameters reflecting the features of the boundary and the inhomogeneity of the medium. An asymptotic expansion of the solution in powers of the small parameters was constructed. It was found that as the parameters tend to zero, the solutions of the approximated problems weakly converge to the solution of the original model. Moreover, if the conditions of sufficient smallness of the parameters are met, it is proved that the expansion preserves the accuracy estimate and allows analytical control of the residual terms.

The concept of a generalized solution is also introduced, and it is proved that it exists and coincides with the weak limit of approximations. The conditions under which the generalized solution becomes strong are established. This confirms the correctness of the constructed approach both in theoretical and applied aspects, including heat transfer problems in multilayer media, where the physical model requires taking into account complex boundary interactions.

Quantitative estimates of the model accuracy

As part of the work, a priori estimates of solutions for various forms of problem formulation were obtained - both in the original model and in its approximated versions with small parameters. These estimates enabled us to quantitatively characterize the behavior of solutions as the parameters that model the medium's inhomogeneities and the features of the boundary interaction were changed. In particular, based on energy inequalities and the application of the Galerkin method, upper bounds of the norms of solutions were established that do not depend on small parameters. Such estimates (of the form (7), (9), (20), (37)) serve as a basis for proving the stability of solutions, as well as for analyzing their convergence as the parameters tend to zero.

Error estimates between approximate and exact solutions were obtained. It was found that for sufficiently small parameters, the expansion presented as a sum of the main and correcting terms ensures an accuracy of order $O(\varepsilon^2 + \delta^2)$ in parameters. This allows one to control the approximation error at all stages and apply the model in problems requiring high reliability of the numerical forecast.

Based on the obtained estimates, it was also demonstrated that a limit exists as the parameters tend to zero, and the limit solution satisfies the original problem in a generalized sense. This result is confirmed strictly through sequences of approximations that weakly and strongly converge in the corresponding functional spaces, as described in the proofs of Theorems 4–6.

Thus, the quantitative characteristics of the model not only support its theoretical validity but also allow it to be effectively applied in practical problems of diffusion analysis in inhomogeneous media with thin boundaries and transition layers. These estimates create a basis for developing robust numerical methods adapted to the parametric structure of the problem.

Discussion

The results of this study emphasize the importance of modifying boundary conditions in mathematical modeling of diffusion processes in heterogeneous media with small parameters. Classical approaches based on rigid boundary conditions, as a rule, do not take into account the influence of real transient processes at the boundary of the medium. In contrast, the proposed model allows for a flexible description of boundary phenomena that arise, for example, due to weak interactions between physical layers or abrupt changes in material characteristics.

Analytical and numerical results demonstrate that the model exhibits high stability and predictability when varying the parameters responsible for the medium's heterogeneity and boundary diffusion. At the same time, the obtained approximations retain accuracy. They are consistent with the physical nature of the processes, making the model applicable to a wide range of problems, from thermal physics and climatology to engineering systems with a multilayer structure.

Of particular value is the possibility of conducting a rigorous analysis of the influence of boundary conditions on the structure of solutions, which is of key importance in situations where instability at the boundary can significantly affect the global behavior of the system. The justification of convergence and the availability of quantitative estimates confirm that the model can serve as a reliable basis for subsequent numerical implementation.

Conclusion

The paper constructs and analyzes a model of stationary diffusion in an inhomogeneous medium, taking into account small parameters and modified boundary conditions. A mathematically rigorous statement of the problem is formulated, the existence and uniqueness of a solution are proven, a priori estimates are obtained, and an asymptotic analysis of the solutions is performed. A technique for constructing approximate solutions with accuracy control is proposed.

The application of the model to the problem of temperature distribution in ice cover made it possible to demonstrate its applied value and confirm the physical validity of the obtained solutions. The conducted modeling showed that taking into account boundary inhomogeneities significantly affects the field structure in the vicinity of the boundary. At the same time, in the central region, the solution remains stable and regular.

Thus, it can be argued that the developed model is mathematically correct, stable to parametric disturbances, and applicable to a broad class of problems. Its further development can be associated with taking into account nonlinear effects, the transition to non-stationary modes, and the construction of adaptive numerical algorithms for practical application in engineering and natural systems.

References

- [1] Ladyzhenskaya, O.A. (1985). *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Springer. – 318 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-4317-3>
- [2] Bensoussan, A., Lions, J.-L., Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland. – 385 p. URL: <https://www.ams.org/books/chel/374/chel374-endmatter.pdf>
- [3] Cioranescu, D., Donato, P. (1999). *An Introduction to Homogenization*. Oxford University Press. – 241 p. URL: <https://stevencjxie8.com/files/refs/ref10.pdf>
- [4] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6th ed. Butterworth-Heinemann. – 752 p.
- [5] Chung, J., Kang, S., Kim, H.-Y., & Kim, Y.-J. (2023). Diffusion laws select boundary conditions. *arXiv preprint arXiv:2308.00416*. DOI: 10.48550/arXiv.2308.00416
- [6] Luo, M., Xu, D., & Pan, X. (2024). Sinc-Galerkin method and a higher-order method for a 1D and 2D time-fractional diffusion equations. *Boundary Value Problems*, 2024(106). DOI: 10.1186/s13661-024-01915-6
- [7] Cheng, W., & Zhao, Q. (2020). A modified quasi-boundary value method for a two-dimensional inverse heat conduction problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 80(2), 293–302. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.06.031
- [8] Abbaszadeh, M., & Dehghan, M. (2021). Numerical investigation of reproducing kernel particle Galerkin method for solving fractional modified distributed-order anomalous sub-diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 390, 125718. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125718
- [9] Du, W., & Li, Z. (2012). Asymptotic analysis for reaction-diffusion equations with absorption. *Boundary Value Problems*, 2012(84). DOI: 10.1186/1687-2770-2012-84
- [10] Li, H., & Yan, J. (2009). *The direct discontinuous Galerkin (DDG) method for diffusion with interface corrections*. UCLA CAM Report, 09-44. PDF
- [11] Mitsotakis, D., Synolakis, C., & McGuinness, M. (2015). A modified Galerkin/finite element method for the numerical solution of the Serre-Green-Naghdi system. *arXiv preprint arXiv:1505.07795*. DOI: 10.48550/arXiv.1505.07795
- [12] Chuenjarern, N., Wuttanachamsri, K., & Yang, Y. (2021). Stability analysis and error estimates of local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion equations on overlapping mesh with non-periodic boundary conditions. *arXiv preprint arXiv:2112.13304*. DOI: 10.48550/arXiv.2112.13304
- [13] Yu, H.-C., Chen, H.-Y., & Thornton, K. (2011). *Extended Smoothed Boundary Method for Solving Partial Differential Equations with General Boundary Conditions on Complex Boundaries*. *arXiv preprint arXiv:1107.5341*. DOI: 10.48550/arXiv.1107.5341
- [14] Hughes, T. J. R., & Wells, G. N. (2004). *Conservation properties for the Galerkin and stabilised forms of the advection-diffusion and incompressible Navier-Stokes equations*. The University of Texas at Austin, ICES Report, 04-31. PDF
- [15] Langtangen, H. P. (2013). *Finite difference methods for diffusion processes*. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. PDF
- [16] Akhmetova, O., & Issayev, S. (2023). Application of the fictitious region method to solving a model oceanology problem. *Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and Mathematical sciences*. 83, 3 (Sep. 2023), 34–42. DOI:<https://doi.org/10.51889/2959-5894.2023.83.3.004>.
- [17] Akhmetova, O., & Issayev, S. (2024). Representation of a non-stationary model of baroclinic ocean motion using the fictitious domain method. *Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and Mathematical sciences*. 86, 2 (Jun. 2024), 7–24. DOI:<https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.86.2.001>.
- [18] Cheng, W., & Liu, Y.-L. (2017). Stability estimate and regularization for a radially symmetric inverse heat conduction problem. *Boundary Value Problems*, 2017(53). DOI: 10.1186/s13661-017-0785-x
- [19] Zhang, H., & Li, Y. (2025). Modified Landweber iterative method for a backward problem in time of the diffusion equation with local and nonlocal operators. *Acta Mathematica Scientia*, 45(3), 1205–1222. DOI: 10.1007/s10473-025-0324-2

У. Абылкаиров¹ , Х. Кенжебай¹ , А. Шәкір^{1*} 

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: ajdossakir@gmail.com

ЖАДЫ МҮШЕСІ БАР КЕЛЬВИН-ФойГТ ЖҮЙЕСІНІҢ ШЕШІМІНІҢ ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫ КЕМУІ

Аңдатпа

Математикалық физика есептерінің қисындылығын, яғни шешімнің бар болуы, жалғыздығы мен орнықтылығын зерттеумен қатар оның шешімдерінің сапалық қасиеттерін зерттеу де маңызды болып табылады. Жалпы алғанда, математикалық физиканың және гидродинамиканың сызықты емес теңдеулері мен теңдеулер жүйесі үшін қойылған тура мен кері есептерінің шешімінің глобалды бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу оңайға соқпайды, себебі сызықты емес есептерді шешудің бірыңғай әдістері жоқ. Алайда, шешімнің кейбір сапалық қасиеттерін зерттей отырып, мәселен, ақырлы уақыттағы шешімнің қирауы не нөлге айналуы (локализациясы), не уақыттың шексіз өсуі кезіндегі өзгерісі және т.б. қасиеттерін іздене отырып, есепке бағалаулар алуға немесе шешімнің жалпы өзгеру сипатын көруге болады. Ұсынылып отырған жұмыста сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың ағынын сипаттайтын сызықты Кельвин-Фойгт (Осколков) теңдеулер жүйесі үшін уақыттан тәуелді оң жағының коэффициентін анықтау кері есебі қарастырылған. Бұл есептің әлді және әлсіз шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы туралы нәтижелер толыққанды зерттелінді. Бұл мақалада әлді және әлсіз шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы туралы нәтижелерге сүйене отырып, аталмыш кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің асимптотикалық қасиеті, нақтырақ айтқанда, экспоненциалды кемуі көрсетіледі.

Түйін сөздер: жады мүшесі бар Кельвин-Фойгт жүйесі, әлсіз шешім, шешімнің экспоненциалды кемуі.

У. Абылкаиров¹, Х. Кенжебай¹, А. Шакир¹

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЕЛЬВИНА-ФойГТА С ПАМЯТЬЮ

Аннотация

Помимо изучения корректности задач математической физики, то есть существования, единственности и устойчивости решений, важно также исследовать качественные свойства слабых решений. В целом, доказать глобальное существование и единственность решений прямых и обратных задач для нелинейных уравнений и систем уравнений математической физики и гидродинамики непросто, поскольку не существует универсальных методов решения нелинейных задач. Однако изучение некоторых качественных свойств решений, таких как разрушение решения за конечное время, локализация решений или изменение решения при бесконечном времени роста и т. п., может дать представление о характере общего изменения оценок или решений. В предлагаемой работе рассматривается обратная задача определения коэффициента правой части в зависимости от времени для системы линейных уравнений Кельвина-Фойгта (Осколкова), описывающей течение несжимаемой вязкоупругой жидкости. Результаты о существовании и единственности сильных и слабых решений этой задачи были получены и тщательно исследованы. В данной статье на основе существования единственности слабого и сильного решения показано асимптотическое свойство обобщенного слабого решения указанной обратной задачи, а именно экспоненциальное убывание.

Ключевые слова: система Кельвин-Фойгта с памятью, слабое решение, экспоненциальное затухание.

U. Abylkairov¹, Kh. Kenzhebai¹, A. Shakir¹

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

EXPONENTIAL DECAY OF SOLUTION TO THE KELVIN-VOIGT EQUATION WITH MEMORY

Abstract

In addition to studying the correctness of problems in mathematical physics, that is, the existence, uniqueness, and stability of solutions, it is also important to study the qualitative properties of these solutions. In general, proving the global existence and uniqueness of solutions to direct and inverse problems for nonlinear equations and systems of equations in mathematical physics and hydrodynamics is not easy, since there are no universal methods for solving nonlinear problems. However, studying some qualitative properties of solutions, such as the blowup of a solution in finite time, localization of solutions, or a large time behaviour of solutions, etc., can provide an idea of the nature of the general change in estimates or solutions. In this paper, we consider the inverse problem of determining the coefficient of the right-hand side as a function of time for a system of linear Kelvin-Voigt (Oskolkov) equations describing the flow of an incompressible viscoelastic fluid. The results on the existence and uniqueness of strong and weak solutions to corresponding problem has been studied. In this article, based on the results of the mentioned work, an asymptotic property of the generalized weak solution of the indicated inverse problem is shown, namely, exponential decay.

Keywords: Kelvin-Voigt system with memory term, weak solution, exponential decay.

1 Негізгі ережелер

Бұл мақалада сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың қозғалысын сипаттайтын сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есеп қарастырылды. Аталмыш кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі қасиеті зерттелінді.

Қарастырылып отырған кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі туралы интегралдық мүше болғанда ($K(t) \neq 0$) 1-теорема, болмағанда ($K(t) = 0$) 2-теорема алынды. Теоремалар математикалық қатаң тілде дәлелденді.

2 Кіріспе

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T], T > 0$ цилиндрінде $(\vec{v}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтардың ағынын сипаттайтын

$$\vec{v}_t - \Delta \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} - \int_0^t K(t-s) \Delta \vec{v}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \vec{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

жады мүшесі бар Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \vec{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (2)$$

сығылмайтын сұйық теңдеуін,

$$\vec{v}(\mathbf{x}, 0) = \vec{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

бастапқы шартын,

$$\vec{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (4)$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int_{\Omega} \vec{v}(\mathbf{x}, t) \vec{\delta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = h(t), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\vec{v}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ – сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ – сұйықтың қысымы, ал ν оң саны сұйықтың кинематикалық тұтқырлығы. $\vec{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\vec{\sigma}(\mathbf{x})$ және $\vec{\sigma}(\mathbf{x}) := \vec{\omega}(\mathbf{x}) - \Delta\vec{\omega}(\mathbf{x})$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\vec{v}_0(\mathbf{x})$, $\vec{\sigma}(\mathbf{x})$, $h(t)$, $K(t)$ белгілі функциялар. (1)-(2) теңдеулер жүйесі Кельвин-Фойгт немесе Осколков жүйесі деп атайды. Бұл теңдеулер жүйесі сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың ағынын сипаттайды. Аталмыш теңдеулер жүйесінің физикалық негіздемелері туралы мәліметтерді Павловский, Осколков, Звягин, Турвин [2-4] секілді ғалымдардың жұмысынан көруге болады.

Жалпы жағдайда, математикалық физиканың және гидродинамиканың сызықты және сызықты емес теңдеулері мен теңдеулер жүйесі үшін қойылған тура және кері есептерінің шешімінің глобалды бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу оңайға соқпайды, себебі сызықты емес есептерді шешудің бірыңғай әдістері жоқ. Алайда, шешімнің кейбір сапалық қасиеттерін зерттей отырып, мәселен, ақырлы уақыттағы шешімнің қирауы (шешімнің глобалды шешілмеуі) немесе нөлге айналуы (локализациясы), немесе уақыттың шексіз өсуі кезіндегі өзгерісі және т.б. қасиеттерін зерттей отырып, есепке бағалаулар немесе шешімнің жалпы өзгеру сипатын көруге болады. Бұл жұмыс үшінші автордың Хомпыш және Кабидолдановмен бірге бұған дейінгі жарық көрген [5] жұмысының жалғасы болып табылады. Себебі бұл мақалада сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың ағынын сипаттайтын сызықты Кельвин-Фойгт (Осколков) теңдеулер жүйесі үшін уақыттан тәуелді оң жағының коэффициентін анықтау кері есебінің жалпылама әлсіз шешімінің асимптотикалық қасиеті, нақтырақ айтқанда, экспоненциалды кемуі көрсетіледі. Бұл есептің әлді және әлсіз шешімдерінің бар болу және жалғыздығы туралы нәтижелер [5] жұмыста алынған.

Сызықты және сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін қойылған оң жағының коэффициентін анықтау кері есептерінің әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы [5-8] жұмыстарда қарастырылған. Сондай-ақ, жалпылама модификацияланған Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі әлсіз және әлді шешімдерінің ақырлы уақытта қирауы, дәрежелік және экспоненциалды кемуі секілді асимптотикалық қасиеттері тура есептер үшін жеткілікті дәрежеде Хомпыш, Юшков, Мессауди секілді авторлардың [9,10] жұмыстарында зерттелінді.

(1)-(5) кері есебінің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі $K(t)$ функциясының нөлге тең және нөлден өзгеше болғанда дәлелденеді. Егер $K(t)$ функциясы нөлге тең болса, онда әлсіз шешімнің экспоненциалды кемуі [11,12] жұмыстардағыдай оңай дәлелдеуге болады. Ал, $K(t)$ функциясы нөлден өзгеше жағдайда әлсіз шешімнің экспоненциалды кемуін дәлелдеу оңайға соқпайды әрі жаңа талпыныстарды қажет етеді.

3 Зерттеу әдіснамасы

Бұл мақаладағы алынған нәтижелер теориялық зерттеудің жемісі болып табылады. Сонымен қатар, арнайы лабораторияларда жүзеге асырылатын эксперименттік зерттеулер мен талдаулар жүргізілмегенін авторлар ұжымы хабарлайды. Зерттеу барысында дербес туындылы дифференциалдық теңдеулері, Навье-Стокс жүйесі және онымен байланысты гидродинамиканың теңдеулері үшін қойылған сызықты және сызықты емес есептерді математикалық тұрғыдан ізденуде пайдаланылатын заманауи және классикалық әдістердің тиімді комбинациясы қолданылды. Мысалға айтар болсақ, энергетикалық функциялар әдісі, енгізу теоремалары және т.б.

Функционалдық теңсіздіктер

Сұйық механикасынан белгілі келесі функционалдық кеңістіктердің анықтамасын берейік

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} &:= \{\bar{v} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \bar{v} = 0\}, \\ V &:= \left\{ L^2(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathfrak{V} \text{ тұйықталуы} \right\}; \\ \mathbf{H} &:= \left\{ W_2^1(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathfrak{V} \text{ тұйықталуы} \right\}. \end{aligned}$$

1-анықтама. (1)-(5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

1. $\bar{v} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})$, $\bar{v}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H})$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
2. Ω – да барлық дерлік жерде $\bar{v}(0) = \bar{v}_0$ бастапқы шартты;
3. барлық $t \in (0, T)$ үшін (5) қосымша шартты;
4. Кез келген $\varphi \in \mathbf{H}$ және барлық $t \in (0, T)$ үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті

$$\frac{d}{dt} \left((\bar{v}(t), \bar{\varphi})_{2, \Omega} + (\nabla \bar{v}(t), \nabla \bar{\varphi})_{2, \Omega} \right) + \nu (\nabla \bar{v}(t), \nabla \bar{\varphi})_{2, \Omega} = f(t) (\bar{\sigma}, \bar{\varphi})_{2, \Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \bar{v}(s), \nabla \bar{\varphi})_{2, \Omega} ds \quad (6)$$

қанағаттандыратын $(\bar{v}(x, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Айталық, (1)-(5) кері есебінің берілгендеі келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$\bar{v}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}; \quad (7)$$

$$\bar{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}, h(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (8)$$

(1)-(5) есебінің әлсіз шешімінің бар болуы мен жалғыздығы [5] жұмыста дәлелденді.

K(t) ≠ 0 кезде экспоненциалды кемуі

Ең алдымен $K(t) \neq 0$ жағдайда, (1)-(5) есебінің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуін көрсетейік. Олай болса, (1) өрнекті \bar{v} функциясына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдап және бөліктеп интегралдау өрнегінің көмегімен

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\bar{v}(t)\|_V^2 + \|\bar{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \right) + \nu \|\bar{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_0^t K(t-s) (\nabla \bar{v}(s), \nabla \bar{v}(t))_{2, \Omega} ds + S_1(\bar{v}, t) h(t) := \sum_{i=1}^2 J_i \quad (9)$$

энергетикалық теңдігін алуға болады, мұндағы

$$S_1(\bar{v}(t), t) = \frac{1}{k_0} \left(h'(t) + \nu (\nabla \bar{v}(t), \nabla \bar{\omega})_{2, \Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \bar{v}(s), \nabla \bar{\omega})_{2, \Omega} ds \right); \quad k_0 = \|\bar{\omega}\|_V^2 + \|\bar{\omega}\|_{\mathbf{H}}^2.$$

Енді (10) өрнектің оң жағын бағалайық

$$|J_1| \leq \frac{\varepsilon_0 \nu}{4} \|\bar{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0 \nu} \left(\int_0^t K(t-s) \|\bar{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2, \quad (10)$$

$$|J_2| \leq \frac{|h(t)| \cdot |h'(t)|}{k_0} + \frac{\varepsilon_0 \nu}{4} \|\bar{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{\varepsilon k_0^2} |h(t)|^2 \|\bar{\omega}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1 k_0^2} |h(t)|^2 \|\bar{\omega}\|_{\mathbf{H}} + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\bar{\omega}\|_{\mathbf{H}} \left(\int_0^t K(t-s) \|\bar{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2. \quad (11)$$

Соңғы (10), (11) бағалауларды (9) өрнекке оң жағына апарып қойсақ, онда

$$\frac{d}{dt} \left(\|\bar{v}(t)\|_V^2 + \|\bar{v}(t)\|_H^2 \right) + \nu(2 - \varepsilon_0) \|\bar{v}(t)\|_H^2 \leq \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \|\bar{\omega}\|_H \right) \left(\int_0^t K(t-s) \|\bar{v}(s)\|_H ds \right)^2 + C_1(t) \quad (12)$$

бағалауы тұжырымдалады, мұндағы $C_1(t) := \left(\frac{2\nu}{\varepsilon k_0^2} \|\bar{\omega}\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 k_0^2} \|\bar{\omega}\|_H \right) |h(t)|^2 + \frac{|h(t)| \times |h'(t)|}{k_0}$. Соңғы өрнекті s бойынша 0 –ден t –ға дейін интегралдағанда, келесі өрнек қорытылады

$$\|\bar{v}(t)\|_V^2 + \|\bar{v}(t)\|_H^2 + \nu(2 - \varepsilon_0) \int_0^t \|\bar{v}(s)\|_H^2 ds \leq \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \|\bar{\omega}\|_H \right) \int_0^t \left(\int_0^s K(s-\tau) \|\bar{v}(\tau)\|_H d\tau \right)^2 ds + C_2, \quad (13)$$

мұндағы $C_2 := \int_0^t C_1(s) ds$. Сонымен қатар, (13) өрнектегі интегралдық мүше үшін

$$\left(\int_0^t K(t-\tau) \|\bar{v}(\tau)\|_H d\tau \right)^2 \leq \int_0^t |K(t-\tau)| d\tau \int_0^t |K(t-\tau)| \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau = \|K\|_{L^1[0,t]} \int_0^t |K(t-\tau)| \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau \quad (14)$$

бағалауын қорытуға болады. Сондай-ақ, m_0, α оң сандары табылып, $|K(t)| \leq m_0 e^{-\alpha t}$, $t \in R^+$ болса, онда төмендегі бағалауды алуға болады

$$y_1(t) = \|K\|_{L^1[0,t]} = \int_0^t |K(\tau)| d\tau \leq \frac{m_0}{\alpha} \quad \text{және} \quad y_2(t) = \|K\|_{L^2[0,t]} = \left(\int_0^t |K(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m_0}{\sqrt{2\alpha}} \quad (15)$$

Жоғарыдағы (15) өрнектің көмегімен келесі теңсіздік тұжырымдалады

$$\int_0^t \int_0^s |K(s-\tau)| \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau ds \leq \int_0^t \int_0^t |K(s-\tau)| \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau ds = \int_0^t \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 \int_0^t |K(s-\tau)| ds d\tau \leq \|K\|_{L^1[0,t]} \int_0^t \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau \quad (16)$$

Осылайша (14)-(16) өрнектерді (13) өрнекке ескерсек, онда бағалау алынады

$$\|\bar{v}(t)\|_V^2 + \|\bar{v}(t)\|_H^2 + C_0 \int_0^t \|\bar{v}(s)\|_H^2 ds \leq M_1, \quad (17)$$

мұндағы $C_0 := \nu(2 - \varepsilon_0) - \left(\frac{2\nu}{\varepsilon k_0^2} \|\bar{\omega}\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 k_0^2} \|\bar{\omega}\|_H \right) \left(\frac{m_0}{\alpha} \right)^2 > 0$ және M_1 есептің берілгендерінен тәуелді

оң сан. Мысалы, $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon_0}{2\nu \|\bar{\omega}\|_H}$, $\varepsilon_0 := \left(\frac{2m_0}{\alpha} \right)^2$, $\alpha^2 > (2m_0)^2$ мәні үшін $C_0 > 0$ болады.

Енді $0 < \gamma < \alpha$ саны үшін $\bar{v} = \bar{u} e^{-\gamma t}$ деп алсақ және $\bar{v}_t = \bar{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \bar{u} e^{-\gamma t}$ тең екенін көру оңай. Бұл ұйғарымдарды (1) өрнекке ескерсек, онда төмендегі өрнек шығады

$$\bar{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \bar{u} e^{-\gamma t} - \Delta(\bar{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \bar{u} e^{-\gamma t}) - \nu \Delta \bar{u} e^{-\gamma t} - \int_0^t K(t-s) \Delta \bar{u} e^{-\gamma s} ds =$$

$$\frac{\bar{\sigma}(x)}{k_0} \left[h'(t) + \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{u} e^{-\gamma t} \nabla \bar{\omega} dx + \int_0^t K(t-s) \int_{\Omega} \nabla \bar{u} e^{-\gamma s} \nabla \bar{\omega} dx ds \right]$$

Соңғы өрнектің екі жағына $e^{-\gamma t}$ -ті көбейтсек, онда келесі өрнек тұжырымдалады

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t - \gamma \bar{u} - (\Delta \bar{u}_t - \gamma \Delta \bar{u}) - \nu \Delta \bar{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \bar{u} e^{\gamma(t-s)} ds = \\ & \frac{\bar{\sigma}(x)}{k_0} \left[h'(t) e^{-\gamma t} + \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla \bar{\omega} dx + \int_0^t K(t-s) \int_{\Omega} \nabla \bar{u} e^{\gamma(t-s)} \nabla \bar{\omega} dx ds \right] \end{aligned}$$

Мұнан соң жоғарыдағы өрнекті \bar{u} функциясына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдап, бөліктеп интегралдасақ, онда келесі теңдік шығады

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\bar{u}(t)\|_V^2 + \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{H}}^2) - \gamma \|\bar{u}(t)\|_V^2 - \gamma \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \nu \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \bar{u}(s), \nabla \bar{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ \frac{h(t) e^{-\gamma t}}{k_0} \left[h'(t) + \nu (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{\omega})_{2,\Omega} ds \right], \end{aligned} \quad (18)$$

мұндағы $K_{\gamma}(t) := K(t) e^{\gamma t}$. Егер $\gamma < \alpha$ жағдайда төмендегі бағалауларды алуға болады

$$\|K_{\gamma}(t)\|_{L^1[0,T]} = \int_0^t K(s) e^{\gamma s} ds \leq \int_0^t m e^{-(\alpha-\gamma)s} ds \leq \frac{m}{\alpha-\gamma}; \quad \|K_{\gamma}(t)\|_{L^2[0,T]} = \left(\int_0^t |K(s) e^{\gamma s}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m}{\sqrt{2(\alpha-\gamma)}}. \quad (19)$$

Сонымен қатар, Фридрихс теңсіздігінен

$$-\|\bar{u}(t)\|_V^2 \geq -C \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{H}}^2$$

теңсіздігін қорытуға болады. Соңғы бағалаудан

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\bar{u}(t)\|_V^2 + \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{H}}^2) + (\nu - \gamma - \gamma C) \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \bar{u}(s), \nabla \bar{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ \frac{h(t) e^{-\gamma t}}{k_0} \left[h'(t) - \nu (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{\omega})_{2,\Omega} ds \right] \end{aligned} \quad (20)$$

өрнегі алынады. Осылайша (10) және (18), (19), (20) өрнектерден келесі нәтижені алуға болады

$$\|\bar{u}(t)\|_V^2 \leq M_2,$$

мұндағы M_2 есептің берілгендерінен тәуелді оң сан және $\bar{v} = \bar{u} e^{-\gamma t}$ өрнегін ескеріп төмендегі нәтижені тұжырымдауға болады

$$\Psi(t) = \|\bar{v}(t)\|_V \leq M_2 e^{-\gamma t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Олай болса, алынған нәтижені теорема ретінде тұжырымдайық.

1-теорема. Айталық, (7), (8) шарттары орындалсын. Сонымен бірге m_0, α оң сандары табылып $|K(t)| \leq m_0 e^{-\alpha t}, t \in R^+$ және (15) шарт орынды болсын. Онда $M_2 > 0$ саны табылып $0 < \gamma < \alpha$ үшін $\Psi(t)$ функциясы келесі қасиетке ие болады

$$\Psi(t) \leq M_2 e^{-2\gamma t},$$

яғни $\Psi(t)$ функциясы t шексіздікке ұмтылғанда ($t \rightarrow \infty$) экспоненциалды кемиді.

$K(t) = 0$ кезде экспоненциалды кемуі

Енді (1)-(5) кері есебінің әлсіз шешімінің $K(t) = 0$ және $\bar{\sigma}(x) := \bar{\omega}(x)$ болғанда экспоненциалды кемуін зерттейік. (1) теңдеулер жүйесін \bar{v} және \bar{v}_i функцияларына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдайық. Мұнан кейін, бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, келесі энергетикалық теңдіктер шығады

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\bar{v}(t)\|_V^2 + \|\bar{v}(t)\|_H^2 \right) + \nu \|\bar{v}(t)\|_H^2 = S_2(\bar{v}, t) h(t) \quad (21)$$

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{v}(t)\|_H^2 + \|\bar{v}_i(t)\|_V^2 + \|\bar{v}_i(t)\|_H^2 = S_2(\bar{v}, t) h'(t) \quad (22)$$

мұндағы

$$S_2(\bar{v}(t), t) = \frac{1}{l_0} \left(h'(t) + (\nabla \bar{v}_i(t), \nabla \bar{\omega})_{2\Omega} + \nu (\nabla \bar{v}(t), \nabla \bar{\omega})_{2\Omega} \right); \quad l_0 = \|\bar{\omega}\|_V^2. \quad (23)$$

Осылайша (21) және (22) өрнектерден келесі теңдікті тұжырымдауға болады

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\bar{v}(t)\|_V^2 + (\nu + 1) \|\bar{v}(t)\|_H^2 \right) + \nu \|\bar{v}(t)\|_H^2 + \|\bar{v}_i(t)\|_V^2 + \|\bar{v}_i(t)\|_H^2 = S_2(\bar{v}(t), t) h(t) + S_2(\bar{v}(t), t) h'(t) \quad (24)$$

Соңғы өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$|S_2(\bar{v}(t), t) h(t)| \leq \frac{|h(t)|^2 + |h'(t)|^2}{2l_0^2} + \frac{1}{4} \|\bar{v}_i(t)\|_H^2 + \frac{1+\nu}{l_0^2} |h(t)|^2 \|\bar{\omega}\|_H^2 + \frac{\nu}{4} \|\bar{v}(t)\|_H^2 \quad (25)$$

$$|S_2(\bar{v}(t), t) h'(t)| \leq \frac{|h'(t)|^2}{l_0} + \frac{1}{4} \|\bar{v}_i(t)\|_H^2 + \frac{1+\nu}{l_0^2} |h'(t)|^2 \|\bar{\omega}\|_H^2 + \frac{\nu}{4} \|\bar{v}(t)\|_H^2 \quad (26)$$

Мұнан кейін (25) және (26) бағалауларды (24) теңдіктің оң жағына қойғанда

$$\Phi'(t) + \nu \|\bar{v}(t)\|_H^2 + \|\bar{v}_i(t)\|_V^2 + \|\bar{v}_i(t)\|_H^2 \leq A \left(|h(t)|^2 + |h'(t)|^2 \right) \quad (27)$$

теңсіздігі тұжырымдалады, мұндағы

$$\Phi(t) := \frac{1}{2} \left(\|\bar{v}(t)\|_V^2 + (\nu + 1) \|\bar{v}(t)\|_H^2 \right) \quad \text{және} \quad A := \left(\frac{2(1+\nu) \|\bar{\omega}\|_H^2 + 1 + 2l_0}{l_0^2} \right).$$

Пуанкаре теңсіздігін пайдаланып келесі бағалауды да алуға болады

$$v\|\bar{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \geq \frac{v}{C(\Omega)+1+v} \left(\|\bar{v}(t)\|_v^2 + (v+1)\|\bar{v}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right) = \mu\Phi(t), \quad (28)$$

мұндағы

$$\mu := \frac{v}{C(\Omega)+1+v}. \quad (29)$$

Енді (28) бағалауды (27) теңсіздікке ескерсек әрі алынған нәтижені $e^{\mu t}$ –ға көбейтсек, онда

$$e^{\mu t}\Phi'(t) + \mu e^{\mu t}\Phi(t) \leq A\left(|h(t)|^2 + |h'(t)|^2\right)e^{\mu t} \quad (30)$$

Соңғы өрнекті s айнымалысы бойынша 0 –ден t –ға дейін интегралдағанда, келесі өрнек қорытылады

$$\Phi(t) \leq e^{-\mu t} \left(A \int_0^t \left(|h(s)|^2 + |h'(s)|^2 \right) e^{\mu s} ds + \Phi(0) \right). \quad (31)$$

Онда (31) теңсіздікте t шексіздікке ұмтылғанда ($t \rightarrow \infty$) $\Phi(t)$ функциясы 0 –ге ұмтылады ($\Phi(t) \rightarrow 0$). Олай болса, алынған нәтижені теорема ретінде тұжырымдайық.

2-теорема. Айталық, (7), (8) шарттар орындалсын және $K(t)=0$, $h(t)$ мен $h'(t)$ функциялары монотонды кемімелі болсын. Сонымен қатар, келесі шарт орындалсын

$$A \int_0^t \left(|h(s)|^2 + |h'(s)|^2 \right) e^{\mu s} ds + \Phi(0) < +\infty$$

мұндағы μ саны (29) өрнегімен анықталады. Онда ақырлы C оң саны табылып, $\Phi(t)$ функциясы келесі қасиетке ие болады

$$\Phi(t) \leq Ce^{-\mu t},$$

яғни $\Phi(t)$ функциясы t шексіздікке ұмтылғанда ($t \rightarrow \infty$) экспоненциалды кемиді.

4 Зерттеу нәтижелері

Бұл мақаладағы зерттеу теориялық сипат алатынын ескерте отырып, авторлар ұжымы ізденудің нәтижесі ретінде екі теорема алды. Оның алғашқы теоремада сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есептің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі дәлелденді, екінші теоремада сызықты Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есептің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі көрсетілді. Алынған нәтижелер Қазақ ұлттық университетінің механика математика факультеті «дифференциалдық теңдеулер мен басқару теориясы» лабораториясының жас ғалымдар мен ғылыми қызметкерлері арасында талқыланып, апробациядан өткізілді.

5 Дискуссия

Бұл жұмыстағы негізгі зерттеу нысаны сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есеп болып табылады. Ал кері есептер теориясындағы

негізгі қиындық, олардың табиғатынан қисынды қойылмауы болып табылады. Оларды шешімділікке зерттеу айтарлық қиындық туындарары сөзсіз. Демек, шешімділік зерттеу мүмкін болмаған жағдайда, ең болмағанда олардың шешімдерінің асимптотикалық қасиеттері туралы ақпарат алу құнды нәтиже екенін аңғаруға болады. Сондықтан мақалада алынған нәтижелер сандық шешімдерді ізденуде, практикада көп көмегін тигізеді.

6 Қорытынды

Бұл жұмыста сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың қозғалысын сипаттайтын жады мүшесі бар (интегро-дифференциалдық) сызықты Кельвин-Фойгт жүйесі үшін уақыттан тәуелді оң жағының коэффициентін анықтау кері есебінің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі дәлелденді. Дәлелдеу барысында алгебралық теңсіздіктер мен функционалдық анализдің енгізу теоремалары қолданылды. Шешімнің экспоненциалды кемуі энергетикалық әдіс арқылы алынды, ал алынған нәтиже жаңа болып табылады.

7 АЛҒЫС

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитетінің №АР19676624 гранты қаржыландырды.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S. *Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Boston: Birkhäuser. 2002. – 343 p.

[2] Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. — 1971, — Т. 200(4), — С. 809–812.

[3] Осолоков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. — 1989, — Т. 179, — С.137–182.

[4] Zvyagin V.G., Turbin M.V. (2010) *The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids* // J. Math. Sci.—Vol. 168, — P.157–308. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-9981-2>

[5] Khompysh Kh., Kabidoldanova A., Shakir A. (2023) *Inverse problems for nonlinear Navier-Stokes-Voigt system with memory* // Chaos, Solitons and Fractals. —Vol.177, № 12. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.114182>

[6] Shakir A. (2023) *Global solvability of inverse problem for linear Kelvin-Voigt equations with memory* // J. Math., Mech. and Comp. Sci. —Vol.118(2), —P.30–41. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2023.v118.i2.04>

[7] Antontsev S.N., Khompysh Kh. (2021) *An inverse problem for generalized Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term* // Inverse Problems. — Vol.37. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/abc1362>

[8] Khompysh Kh., Nugymanova N. (2022) *Inverse problem for integro-differential Kelvin-Voigt equation* // Journal of inverse and ill-posed problems., — Vol. 31(6), — P.835–847. <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0157>

[9] Yushkov E.V. (2012) *On the blow-up of a solution of a non-local system of equations of hydrodynamic type* // Izv. Math. —Vol.76(1), —P.201–224. [10.1070/IM2012v076n01ABEH002580](https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002580)

[10] Messaoudi S.A. (2006) *Blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation* // J. Math. Anal. Appl. — Vol. 320(2), — P. 902–915. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.07.022>

[11] Antontsev S.N., Aitzhanov S.E. (2019) *Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition* // J. Appl. Mech. Tech. Phys. —Vol. 60 (2). — P. 265-277. <https://doi.org/10.1134/S0021894419020081>

[12] Gur S., Yaman M., Yilmaz Y. (2016) *Finite time blow up of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearity* // J. Nonl. Sci. Appl. — Vol. 9, — P. 1902-1910. <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.04.44>

References

- [1] Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S. (2002) *Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Boston: Birkhäuser. – 343 p.
- [2] Pavlovsky V.A. (1971) *K voprosu o teoriticheskom opisaniі slavykh vodnykh rastvorov polimerov [On the theoretical description of weak aqueous solutions of polymers]*, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 200(4), 809–812. (In Russian)
- [3] Oskolkov A.P. (1989) *Nachalno-kraevaya zadacha dlya urabneniy dvizheniya zhidkosti Kelvina-Foigta I zhidkosti Oldroida [Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids and Oldroyd fluids]*, Proc. Steklov Inst. Math. 179, 137–182. (In Russian)
- [4] Zvyagin V.G., Turbin M.V. (2010) *The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids* // J. Math. Sci. 168, 157–308. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-9981-2>
- [5] Khompysh Kh., Kabidoldanova A., Shakir A. (2023) *Inverse problems for nonlinear Navier-Stokes-Voigt system with memory* // Chaos, Solitons and Fractals. 177, № 12. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.114182>
- [6] Shakir A. (2023) *Global solvability of inverse problem for linear Kelvin-Voigt equations with memory* // J. Math., Mech. and Comp. Sci. 118(2), 30–41. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2023.v118.i2.04>
- [7] Antontsev S.N., Khompysh Kh. (2021) *An inverse problem for generalized Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term*//Inverse Problems. 37. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ac1362>
- [8] Khompysh Kh., Nugymanova N. (2022) *Inverse problem for integro-differential Kelvin-Voigt equation* // Journal of inverse and ill-posed problems., 31(6), 835–847. <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0157>
- [9] Yushkov E.V. (2012) *On the blow-up of a solution of a non-local system of equations of hydrodynamic type* // Izv. Math. 76(1), 201–224. [10.1070/IM2012v076n01ABEH002580](https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002580)
- [10] Messaoudi S.A. (2006) *Blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation* // J. Math. Anal. Appl. 320(2), 902–915. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.07.022>
- [11] Antontsev S.N., Aitzhanov S.E. (2019) *Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition* // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 60 (2), 265-277. <https://doi.org/10.1134/S0021894419020081>
- [12] Gur S., Yaman M., Yilmaz Y. (2016) *Finite time blow up of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearity* // J. Nonl. Sci. Appl. 9, 1902-1910. <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.04.44>

К. Бисембаев^{1,2*}, Н. Altenbach³, Т. Дикамбай²

¹Институт механики и машиноведения им. акад. У.А.Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

³Магдебургский университет Отто фон Герике, Факультет машиностроения,
г. Магдебург, ФРГ

*e-mail: kuat_06@mail.ru

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ РЕЗЕРВУАРА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ЖИДКОСТЬЮ НА ВИБРООПОРАХ СО СПРЯМЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Аннотация

В работе приводятся решения задач о движении жидкости в частично заполненных резервуарах цилиндрической формы на опорах качения, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка. Получены системы уравнений движения резервуара с частично заполненными жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями и найдены значения гидродинамических коэффициентов для случая полости в виде кругового цилиндра. Приведены формулы для определения гидродинамических сил и моментов взаимодействия жидкости со стенками цилиндрических резервуаров на виброопорах качения при горизонтальном кинематическом возмущении. Исследованы резонансные режимы колебательного движения резервуара с жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями. Установлено, что при частоте колебаний резервуара с жидкостью на опорах качения ограниченных поверхностями вращения высокого порядка, много меньшей собственной частоты, жидкость будет перемещаться вместе с сосудом как одно целое. Резонансное явление здесь следует понимать не как неограниченное возрастания величины амплитуды колебаний жидкости в сосуде, а как указание на то, что колебания жидкости происходят при весьма малых амплитудах колебаний сосуда. При резонансной частоте сосуд вовсе не должен смещаться, так как это есть частота колебаний жидкости в неподвижном сосуде.

Ключевые слова: виброзащитные устройства, сейсмозащита зданий, опора качения, колебательное движения резервуара с жидкостью, резонансные явления.

K. Bissembayev^{1,2}, H. Altenbach³, T. Dikambay²

¹Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan

²Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

³Institut für Mechanik, Fakultät für Maschinenbau, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg,
Magdeburg, Germany

OSCILLATORY MOTION OF A CYLINDRICAL TANK WITH LIQUID ON VIBRATION MOUNTS WITH STRAIGHTENED SURFACES

Abstract

The paper presents solutions to problems of fluid motion in partially filled cylindrical reservoirs on rolling bearings bounded by high-order surfaces of revolution. Systems of equations of motion of a reservoir partially filled with fluid on rolling bearings with straightened surfaces are obtained, and the values of hydrodynamic coefficients are found for the case of a cavity in the form of a circular cylinder. Formulas are given for determining the hydrodynamic forces and moments of interaction of fluid with the walls of cylindrical reservoirs on rolling vibration mounts under horizontal kinematic disturbance. Resonance modes of oscillatory motion of a reservoir with fluid on rolling bearings with straightened surfaces are investigated. It is established that at a frequency of oscillations of a reservoir with fluid on rolling bearings bounded by high-order surfaces of revolution, much less than the natural frequency, the fluid will move together with the vessel as a single whole. The resonance phenomenon here should be understood not as an unlimited increase in the magnitude of the amplitude of the oscillations of the liquid in the vessel, but as an indication that the oscillations of the liquid occur at very small amplitudes of the oscillations of the vessel. At the resonant frequency, the vessel should not shift at all, since this is the frequency of oscillations of the liquid in a stationary vessel.

Keywords: vibration protection devices, seismic protection of buildings, rolling bearing, oscillatory motion of a tank with liquid, resonance phenomena.

К. Бисембаев^{1,2}, Н. Altenbach³, Т. Дикамбай²

¹Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, г. Алматы, Қазақстан

²Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, г. Алматы қ., Қазақстан

³Отто фон Герике атындағы Магдебург университеті, Машинажасау факультеті, Магдебург қ., Германия Федеративтік Республикасы

ТҮЗЕТІЛГЕН БЕТТЕРМЕН ШЕКТЕЛГЕН ТЕҢСЕЛМЕЛІ ДІРІЛТІРЕКТЕР ОРНАТЫЛҒАН СҰЙЫҚТЫҒЫ БАР ЦИЛИНДРЛІК РЕЗЕРВУАРДЫҢ ТЕРБЕЛМЕЛІ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Аңдатпа

Жұмыста жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған жартылай толтырылған цилиндрлік резервуарлардағы сұйықтың қозғалысы зерттелген. Түзетілген беттері бар теңселмелі тірекке орнатылған ішінара сұйықтықпен толтырылған резервуардың қозғалыс теңдеулерінің жүйелері алынған, ал дөңгелек цилиндр түріндегі қуыс үшін гидродинамикалық коэффициенттердің мәндері табылған. Көлденең кинематикалық қоздырулар кезінде теңселмелі тірекке орнатылған цилиндрлік резервуарлардың қабырғаларымен сұйықтың әрекеттесуінің гидродинамикалық күштері мен моменттерін анықтау қажетті формулалар табылған. Түзетілген беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған сұйықтығы бар цилиндрлік резервуарлардың тербелмелі қозғалысының резонанстық режимдері зерттеледі. Жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған сұйықтығы бар резервуардың тербеліс жиілігі, меншікті жиіліктен әлдеқайда аз, болғанда сұйықтық ыдыспен бірге біртұтас қозғалатыны тағайындалды. Мұндағы резонанс құбылысын ыдыстағы сұйықтықтың тербеліс амплитудасының шамасының шексіз ұлғаюы ретінде емес, ыдыс тербелістерінің өте аз амплитудаларында сұйықтықтың тербелістерінің аз болатынының көрсеткіші деп түсіну керек. Резонанстық жиілікте ыдыс мүлде орын ауыстырмауы керек, өйткені бұл қозғалмайтын ыдыстағы сұйықтықтың тербеліс жиілігі.

Түйін сөздер: дірілден қорғау құрылғылары, ғимаратты жерсілкінісінен қорғау теңселмелі тірек, сұйықтығы бар резервуардың тербелмелі қозғалысы, резонанстық құбылыстар.

Введение

Сейсмически активные районы составляют примерно 30% территории Казахстана. В этих районах осуществляется в грандиозных масштабах строительства гражданских, промышленных, энергетических и других объектов. Дополнительные затраты на антисейсмические мероприятия возрастают с каждым годом вместе с увеличением объемов всех видов строительства.

Большой размах строительства в сейсмических районах Казахстана предприятий химической и некоторых других отраслей промышленности поставил новые задачи перед наукой о сейсмическом строительстве. В частности, возникла необходимость в разработке методов расчета на действие сейсмических сил больших подземных и наземных резервуаров, а также многоэтажных каркасных конструкций, несущих резервуары.

Исследования колебаний жидкости в резервуарах цилиндрической формы представляют большой интерес в связи с необходимостью решения комплекса проблем, связанных со строительством и эксплуатацией конструкций, имеющих в своем составе цилиндрические емкости с жидкостью. Они также постоянно стимулируются запросами авиационной, морской, ракетной и космической техники, а также ужесточением требований к проектированию таких гражданских объектов как наземные хранилища экологически небезопасных жидкостей, морских платформ и водонапорных башен, построенных в сейсмически опасных районах. Особо подчеркнем существенную роль экспериментальных исследований, позволяющих строить общие и упрощенные (в виде механических аналогов) математические модели, которые могут адекватно описывать динамику этих сложных многокомпонентных систем. Этот тезис убедительно подтверждается работами Эл-Даматти и др. [1], Эл-Даматти и Свиден [2], Дутта и др. [3], Свиден [4], посвященными проблемам

динамики жидкости в хранилищах конической формы. Они существенно дополняют более ранние экспериментальные исследования Микишева и Дорожкина [5], а также Бауэра и др. [6]. Общая методика математического моделирования динамического поведения жидкости в упомянутых объектах при различных внешних воздействиях считается в достаточной степени разработанной к настоящему времени. Сформулированы необходимые задачи для определения поля скоростей и давления в жидком объеме, а в случае пространственных безвихревых движений идеальной жидкости хорошо изучены спектральная краевая задача о собственных колебаниях жидкости и краевая задача Неймана для определения потенциалов Стокса–Жуковского. Решения этих задач позволяют определить полную совокупность гидродинамических характеристик системы, включая и моменты инерции жидких масс.

Для случая конических баков, за редким исключением, не существует точных решений упомянутых краевых задач, что требует построения специализированных приближенных методов их решения. Наиболее широкое применение нашли вариационные методы, а также различные версии методов конечных и граничных элементов. Особо подчеркнем важную роль вариационных методов, позволяющих строить приближенные решения в аналитической форме. Это не только упрощает анализ решения базовых краевых задач, но и существенно для дальнейшего развития модальных подходов в линейной и нелинейной теории совместных движений твердых тел с жидкостью. Развитие вариационных методов для конических резервуаров имеет ряд специфических особенностей, связанных с геометрией полости. Они дискутировались в фундаментальных работах Докучаева [7-10].

В работе [11] исследованы вынужденные колебания упругих конструкций переменного сечения на виброопорах со спрямленными поверхностями с учетом наличия трения качения на релаксирующих грунтах и содержатся результаты по оценке влияния параметров упругих конструкций переменного сечения на амплитудную характеристику виброзащитных устройств.

В статье [12] исследуются нелинейные колебания виброизолирующих систем с опорами качения, с выпрямленными поверхностями, с учетом трения качения по релаксирующим грунтам при случайных кинематических возмущениях типа «белый шум». Статистический анализ выполняется с использованием аппарата марковских процессов.

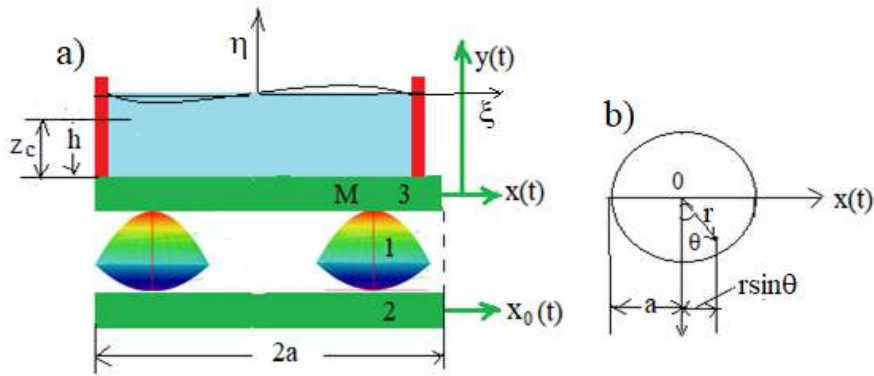
В данной статье выводятся уравнения движения, описывающие движение жидкости в цилиндрическом баке на опорах качения ограниченных поверхностями вращения высокого порядка, который совершает заданные малые поступательные перемещения, а также формулы для гидродинамических сил. В работе для широкого диапазона геометрических параметров приводятся численные значения гидродинамических коэффициентов, включая момент инерции жидкости. В статье исследованы, вынужденные горизонтальные колебания резервуара с частично заполненной жидкостью при наличии голономной связи, реализуемой виброопорами качения со спрямленными поверхностями и отсутствии трения.

Методология исследования

Механическая модель резервуара с жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями

Динамику резервуара с жидкостью сейсмоизоляция, которого обеспечена опорами качения со спрямленными поверхностями, изучим на следующей механической модели. Пусть некоторые несущие тела имеет своей верхней границей плоскую поверхность и совершает поступательное движение. Будем считать, что по поверхностям тела перекачиваются тела носители (опора качения со спрямленными поверхностями) заданной конфигурации, поддерживая носимое тело (резервуар с жидкостью) большой массы. Поверхности тел-носителей контактируют с поверхностями в нижнем плоском основании носимого тела (рисунок 1).

Тела-носители считаются одинаковыми и перед началом движения одинаково ориентированы в пространстве.



а) Расположения осей

б) Обозначения для круглого резервуара

Рисунок 1. Схема колебания резервуара с жидкостью на опорах качения с подвижными основаниями

Динамику описанной выше механической системы изучим, сделав следующие предположения:

1. Массой опорных элементов можно пренебречь по сравнению с массой носимого тела, т.е. тела-носители определяют кинематику системы, но не обладают инерцией.
2. При качении опорных элементов по поверхностям несущего тела и носимого тела проскальзывание отсутствует.
3. Опорные элементы являются абсолютно твердыми телами.
4. Резервуар представляет собой абсолютно жесткое тело с недеформируемым контуром. Это допущение является вполне оправданным, так как резервуар имеет большую пространственную жесткость.
5. Жидкость, заполняющая резервуар, будем считать несжимаемой, идеальной, в которой затухание отсутствуют.
6. Рассматриваем только горизонтальное движение резервуара.

Вышеописанная колебательная система является механической моделью системы сейсмоизоляции резервуара наполненной жидкостью с помощью опора качения, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка с учетом трения качения на релаксирующих грунтах. Колебательное движение этой механической модели возникает вследствие взаимодействия сил инерции резервуара с жидкостью, сил тяжести, а также сил трения качения и внешнего воздействия.

Постановка задачи

В этом параграфе описываем принцип работы кинематического фундамента, опорными элементами которого являются опоры качения ограниченные поверхностями вращения высокого (n) порядка. Модель кинематического фундамента показана в рисунке 1а. Тело I – опора качения ограниченное снизу и сверху поверхностями вращения, выраженными соответственно формулами

$$y_1 = a_1 x_1^n, \quad y_2 = a_2 x_2^m, \quad (1)$$

и имеющими общую ось симметрии (рисунок 2), а тела 2 и 3 являются стационарными основаниями (фундаментом) и нижнего покрытия виброзащищаемого объекта. Специфика такой опоры заключается в том, что радиус кривизны в окрестности центральных опорных точек стремится к бесконечности и уменьшается по мере удаления от оси симметрии, т.е. имеет место спрямление опорных поверхностей в окрестности центральной точки. При стремлении n к бесконечности ($n \rightarrow \infty$) опора качения I примет цилиндрическую форму (рисунок 3).

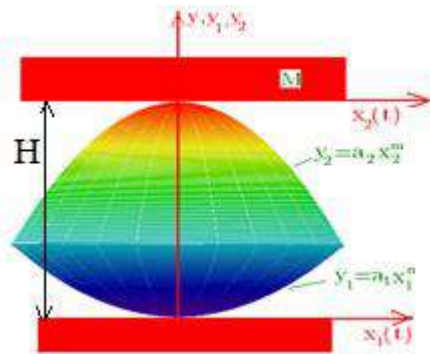


Рисунок 2. Схема опоры качения с опорными поверхностями высокого порядка

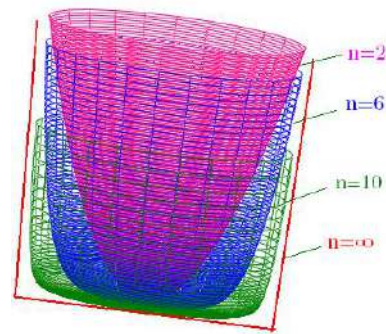


Рисунок 3. Форма опоры качения с несущей поверхностью высокого порядка

Для того чтобы движение виброзащищаемого тела было устойчивым, необходимо потребовать выполнения следующего соотношения между параметрами опоры качения при $n = 2$

$$H < \frac{a_1 + a_2}{2a_1a_2},$$

где H – высота опоры качения, a_1 и a_2 – параметры параболической поверхности, ограничивающей снизу и сверху опор качения соответственно. Для опор качения, несущие элементы которых ограничены поверхностями вращения более высокого порядка, это условие существенно усложняется. Устойчивость движения оказывается зависимой как от конструктивных параметров, так и от начальных условий. В системах восстанавливающая сила возникает за счет увеличения потенциальной энергии при поднятии тяжести опор или опор и виброзащищаемого объекта. Горизонтальное смещение основания обозначено $x_0(t)$. Через $x(t)$ обозначим смещение нижнего основания резервуара с жидкостью, опирающегося на опору качения. Зависимость между горизонтальными относительными перемещениями оснований резервуара с жидкостью на опорах качения и их вертикальными смещениями при $n = m$ имеет вид [13]

$$y = -\frac{1}{2H}(x - x_0)^2 + \frac{(n-1)}{(Hn)^{\frac{n}{n-1}}} \left(\frac{1}{(n-1)\sqrt[n]{a_1}} + \frac{1}{(n-1)\sqrt[n]{a_2}} \right) (x - x_0)^{\frac{n}{n-1}} \quad (2)$$

Выражение (2), определяющее зависимость между горизонтальными относительными перемещениями оснований тел на опорах качения со спрямленными поверхностями и их вертикальными смещениями, можно рассматривать в качестве голономных связей.

Уравнения движения резервуара с жидкостью на опорах со спрямленными поверхностями. Цилиндрический резервуар без колонн

Изучим движения жидкости в резервуаре цилиндрической формы, движущейся по определенному закону. Предположим, что резервуар совершает малые колебательные движения относительно статического положения равновесия в гравитационном поле относительно некоторой инерциальной системы координат, связанной с Землей. Рассмотрим горизонтальные поступательные движения резервуара в направлении оси $x(t)$ (см. рис.1а).

Введем неподвижную цилиндрическую систему координат, начало которой расположено в середине свободной поверхности (см. рис.1а). Обозначим через $\psi(r, \theta, \eta, t)$ потенциал абсолютных скоростей движения жидкости. Потенциал ψ должен удовлетворять уравнению Лапласа и следующим граничным и начальным условиям.

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \dot{x} \sin \theta; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-h} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{\eta=0} + g \xi = 0; \quad (5)$$

$$\psi \Big|_{t=0} = \psi_0; \quad \dot{\psi} \Big|_{t=0} = \dot{\psi}_0 \quad (6)$$

где g – ускорение силы тяжести; (5)- уравнение свободной поверхности.
Из условия (5) следует

$$\xi = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{\eta=0} \quad (7)$$

где $\xi(x, y)$ – уравнение свободной поверхности жидкости.

Условие (3) с физической точки зрения соответствует тому, что составляющая скорости жидкости у стенки резервуара в направлении радиуса соответствует скорости движения резервуара. Условие (4) соответствует отсутствию вертикальной составляющей скорости движения жидкости на дне резервуара. Условие (5) соответствует отсутствию давления на поверхности жидкости, а начальные условия (6) определяют значения ψ и его производной по времени в момент $t = 0$. Величину η можно рассматривать как смещение вдоль оси $O\eta$ частицы, находящиеся первоначально в плоскости $\eta = 0$. Будем искать потенциал в виде суммы двух потенциалов:

$$\psi = \psi_1(r, \theta, \eta, t) + \psi_2(r, \theta, \eta, t) \quad (8)$$

Потенциалы ψ_1 и ψ_2 должны удовлетворять уравнением Лапласа

$$\Delta \psi_1 = 0; \quad \Delta \psi_2 = 0 \quad (9)$$

а также следующим граничным и начальным условиям

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \dot{x} \sin \theta; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-h} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-h} = \dot{y}_0 - \dot{y} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} \Big|_{\eta=0} + g \xi_2 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \Big|_{\eta=0} - g \xi_1 \quad (13)$$

$$(\psi_1 + \psi_2) \Big|_{t=0} = \psi_0; \quad (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \Big|_{t=0} = \dot{\psi}_0 \quad (14)$$

где $\xi_1 = \int_0^t \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} dt$, $\xi_2 = \int_0^t \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} dt$ (15)

Решение первого уравнения (9), т.е в качестве потенциала ψ_1 примем

$$\psi_1 = (r, \theta, \eta, t) = \dot{x} \cdot r \cdot \sin \theta \quad (16)$$

где \dot{x} - скорость поступательного движения Резервуара по направлению оси $x(t)$. Таким образом ψ_1 является потенциалом абсолютного движения жидкости при указанных выше условиях. Потенциал ψ_2 определяет движение жидкости в неподвижном сосуде, вызванное неравномерным давлением при движении с потенциалом ψ_1 .

Решение второго уравнения (9) возьмем в следующем виде

$$\psi_2 = \dot{f}^* Y(\eta) H(\theta) R(r) \quad (17)$$

где $\dot{f}^*(t)$ - некоторая функция, зависящая от времени.

Разделяя переменные во втором уравнении (9), получим следующую систему уравнений для определения $Y(\eta)$, $H(\theta)$, и $R(r)$:

$$\begin{aligned} Y''(\eta) - \lambda^2 Y(\eta) &= 0 \\ H''(\theta) - s^2 H(\theta) &= 0 \\ R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{s^2}{r^2} \right) R(r) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Решение уравнений (18), удовлетворяющих граничным условиям (11) и (12), принимая $s=1$, возьмем в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y(\eta) &= ch \left(\chi_n \frac{\eta + h}{a} \right), \\ H(\theta) &= \sin \theta, \\ R(r) &= J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

где J_1 - функция Бесселя первого порядка, а χ_n является корнем уравнения

$$J_1(\chi) = 0 \quad (20)$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество корней. Первые пять корней имеют следующие значения: $\chi_n = 1,84; 5,33; 8,53; 11,71; 14,86$

Разность между последующим и предыдущим корнями с увеличением номера корня стремится к π . Беря сумму независимых решений, получим

$$\psi_2(r, \theta, \eta, t) = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \dot{f}^*(t) \frac{ch \left(\chi_n \frac{\eta + h}{a} \right)}{ch \left(\chi_n \frac{h}{a} \right)} J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) \quad (21)$$

Для того чтобы определить функцию $\dot{f}^*(t)$, подставим (21) в условие (13). Тогда получим

$$\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \dot{f}^*(t) J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) + g \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(t) J_1 \frac{\chi_n}{a} th \left(\chi_n \frac{h}{a} \right) J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) = -\dot{x} r \sin \theta \quad (22)$$

Воспользуемся разложением Дини для r , по которому

$$\chi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_\nu \left(\lambda_n \frac{r}{a} \right), \quad (23)$$

где λ_n - положительные корни уравнения

$$zJ'_\nu(\lambda) + \tilde{H}J_\nu(\lambda) = 0 \quad (24)$$

а b_n определяется формулой

$$b_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 - \nu^2)J_\nu^2(\lambda_n) + \lambda_n^2 J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_0^1 t \chi(t) J_\nu(\lambda_n t) dt \quad (25)$$

Принимая $\chi(r) = r, \nu = 1, \tilde{H} = 0, \lambda_n = \chi_n$ получим

$$b_n = \frac{2\chi_n^4 J_2(\chi_n)}{[(\chi_n^2 - 1)J_\nu^2(\chi_n) + \chi_n^2 J_\nu'^2(\chi_n)]\chi_n^3} = \frac{2}{(\chi_n^2 - 1)J_1(\chi_n)} \quad (26)$$

и

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) \quad (27)$$

подставляя (27) в (22) и $f_n^*(t) = f_n(t)b_n a$ получим уравнение для определения функции $f_n(t)$

$$\ddot{f}_n(t) + \tilde{\omega}_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a} \quad (28)$$

где
$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{g}{a} \chi_n \operatorname{th} \left(\chi_n \frac{h}{a} \right) \quad (29)$$

Окончательно потенциал скоростей абсолютного движения определяется по формуле

$$\psi = a^2 \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n^*(t) \frac{\operatorname{ch} \left(\chi_n \frac{\eta + h}{a} \right)}{\operatorname{ch} \left(\chi_n \frac{h}{a} \right)} + \frac{\dot{x}}{a} \right] b_n J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) \quad (30)$$

Начальные условия (6) являются также начальными условиями для функции $f_n(t)$. Имея значение потенциала скоростей ψ можно определить гидродинамическое давление жидкости на стенки резервуара и днище.

Воспользуемся для этой цели уравнением Бернулли для потенциального (неустановившегося) течения жидкости

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{g^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\eta = f(t) \quad (31)$$

Это уравнение называется обобщенным уравнением Бернулли. Функцию $f(t)$ стоящая в правой части уравнения (31), может быть без ограничения общности положенной равной

нулю. В самом деле, поскольку составляющие вектора скорости являются производными от потенциала скорости по координатам, мы всегда имеем возможность прибавить к потенциалу $\psi(x, y, z, t)$ любую функцию времени т.е так как

$$\psi^*(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) + f(t) \quad (32)$$

Поставив (32) в (31) получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{g^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\eta = 0 \quad (33)$$

Будем рассматривать «медленное» движение жидкости. Тогда полное давление в любой точке жидкости можно определить по формуле (33) отбросив в нем член, содержащий квадрат скорости и имеет вид

$$P(r, \theta, \eta, t) = -\rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + g\eta \right] \quad (34)$$

где ρ – плотность жидкости.

Как видно из формулы (34), полное давление жидкости $P(r, \theta, \eta, t)$ складывается из двух воздействий:

1. Гидродинамического

$$P_g(r, \theta, \eta, t) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (35)$$

2. Гидростатического

$$P_c = -\rho g\eta \quad (36)$$

По формуле (35) определяется давление жидкости на стенки резервуара в зависимости от характера его движений.

Подставляя (30) в (35), получим для $r = a$

$$p(a, \theta, \eta, t) = -2\rho a^2 \sin \theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a \frac{ch\left(\chi_n \frac{\eta+h}{a}\right)}{ch\left(\chi_n \frac{h}{a}\right)} + 1 \right] d_n \frac{\ddot{x}}{a} \quad (37)$$

где $d_n = \frac{1}{(\chi_n^2 - 1)}$ (38)

Для изучения колебаний виброзащитных устройств на опорах качения несущего резервуара, необходимо определить величины результирующей гидродинамических сил. Для этого необходимо значение p_g умножить на $a \sin \theta$ и полученное выражение проинтегрировать дважды по η и θ в пределах от $-h$ до 0 и от 0 до 2π .

В результате получим

$$P_x = X = -a\rho \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Big|_{r=a} \sin \theta d\theta d\eta \quad (39)$$

Подставляем (30) в (39), после проведения всех выкладок получим

$$X = -2\pi\rho a^3 h \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a + 1 \right] d_n \frac{\ddot{x}}{a} \quad (40)$$

Расстояние z_c от точки приложения этой силы до дна определяется как координата центр тяжести по формуле

$$z_c = h - \frac{\int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{r=a} \sin \theta d\theta (h - \eta) d\eta}{\int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{r=a} \sin \theta d\theta d\eta}$$

После проведения всех выкладок получим $\frac{h}{a} = h_0$

$$z_c = h \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{h_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[th(\chi_n, h_0) - \frac{1}{\chi_n h_0} \left(\frac{1}{ch(\chi_n h_0)} \right) - 1 \right] \frac{\ddot{f}}{\ddot{x}} a}{1 + \frac{1}{h_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n th(\chi_n h_0) \frac{\ddot{f}}{\ddot{x}} a} \quad (41)$$

Во всех формулах определяющих гидродинамическое давление и положения координаты приложения равнодействующей этих сил z_c , имеется неизвестная функция $f_n(t)$, зависящая от характера движения резервуара на опорах качения и определяемая из уравнения (28).

Результаты исследования

Уравнения движения резервуара наполненной жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями. Будем рассматривать только поступательное движение резервуара на опорах качения со спрямленными поверхностями, пренебрегая вращением и вертикальным движением. Выведем дифференциальное уравнение движение резервуара частично заполненного жидкостью на опорах качения ограниченных сверху и снизу параболами высшего порядка. Кинетическая и потенциальная энергия резервуара с жидкостью выражена в виде

$$T = \frac{1}{2} [M + m] (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi = [M + m] g (y - y_0) \quad (42)$$

Три составления уравнения движения резервуара с жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями необходимо учитывать гидродинамические силы и силы трения качения определяемых следующими формулами:

Гидродинамическая сила

$$X = -2\pi\rho a^3 h \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a + 1 \right] d_n \frac{\ddot{x}}{a} \quad (43)$$

Для вывода дифференциальных уравнений движения резервуара с жидкостью на опорах качения воспользуемся уравнениями Феррерса, рассматривая $x(t)$ и $y(t)$, как обобщенные координаты, уравнения (2) в качестве голономной связи, наложенной на вертикальное перемещение резервуара, а выраженными (43) как обобщенные силы.

Уравнения движения резервуара с жидкостью на опорах качения будут иметь вид:

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a}$$

$$(M+m)\ddot{x} - \lambda \left\{ -\frac{1}{H}(x-x_0) + \frac{n}{(Hn)^{\frac{n}{n-1}}} \left[\frac{1}{(a_1)^{\frac{1}{n-1}}} + \frac{1}{(a_1)^{\frac{1}{n-1}}} \right] (x-x_0)^{\frac{1}{n-1}} \right\} =$$

$$-2\pi\rho a^3 h \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a + 1 \right] d_n \frac{\ddot{x}}{a}$$

$$(M+m)\ddot{y} + (M+m)g + \tilde{\lambda} = 0$$

где $\tilde{\lambda}$ - неопределенный множитель Лагранжа. Присоединяя к этим уравнениям уравнение связи (2), получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Исключая $\tilde{\lambda}$ и y с помощью уравнения связи (2), получим следующие системы дифференциального уравнения.

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a} \tag{45}$$

$$\ddot{x} + \left(1 + \frac{\ddot{y}_0}{g}\right) \left[\Phi(x-x_0) - \omega_0^2(x-x_0) \right] = -\frac{2m}{m+M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a + 1 \right] d_n \ddot{x} \tag{46}$$

где $\Phi(x-x_0) = \omega_0^2 N_n (x-x_0)^{\frac{1}{n-1}}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{H}$, $N_n = \frac{1}{(nH)^{\frac{1}{n-1}}} \left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[n-1]{a_2}} \right)$

Нелинейное уравнение (46) описывает движение резервуара с жидкостью на опорах качения ограниченных параболами высокого порядка с учетом трения качения на релаксирующих грунтах при смещении оснований по горизонтальному и вертикальному направлениям. Систему дифференциальных уравнений (45), (46) преобразуем к виду

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a}$$

$$\ddot{x} + (1 + \frac{\ddot{y}_0}{g}) \frac{1}{\frac{\sigma m}{M+m}} \left[\Phi(x-x_0) - \omega_0^2(x-x_0) \right] = -\frac{\gamma m}{M+m} \ddot{f}_n(t) \tag{47}$$

где $\sigma = 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n$, $\gamma = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a^2 d_n}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \right]$

Дискуссия

Рассмотрим колебательное движение резервуара с жидкостью, массы которого много раз меньше массы основания при горизонтальном смещении несущего тела.

Предположим, что $M \gg m$, $y_0(t) = 0$

Рассмотрим несколько характерных случаев движения резервуара с тяжелым основанием на опорах качения со спрямленными поверхностями.

Вычисления проводились при следующих значениях параметров:

$$n = 4, H = 300 \text{ см}, a_1 = 6.25 \cdot 10^{-8} \text{ см}, a_2 = 1.481 \cdot 10^{-7} \text{ см}, N_n = 41.497 \text{ см}, \omega_0 = 1.807 \frac{1}{\text{с}},$$

$$K_1 = 1,148, K_{23} = 0.196, K_5 = 0.048$$

$$\begin{aligned} n = 4; & \quad a_1 = 6,25 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}; \quad a_2 = 15 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}; \\ n = 6; & \quad a_1 = 1,56 \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-5}; \quad a_2 = 6,6 \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-5}; \\ H = 3 \text{ м}; & \quad \omega_0^2 = 3,26 \text{ с}^{-2}; \quad g = 9,8 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Исследуем свободные незатухающие колебания виброзащитных устройств на опорах качения, состоящих из резервуара с жидкостью. В этом случае в систему уравнения движения (47) необходимо положить $x_0 = 0$. Тогда получим

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a} \quad (48)$$

$$\ddot{x} + \Phi(x) - \omega_0^2(x) = 0 \quad (49)$$

где
$$\Phi(x) = \omega_0^2 N_n x^{\frac{1}{n-1}}, N_n = \frac{1}{n-1} \sqrt[n-1]{nH} \left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[n-1]{a_2}} \right); \omega_0^2 = \frac{g}{H} \quad (50)$$

В соответствии с численно-аналитическим методом тригонометрической коллокации [13] представим решение и нелинейный член уравнения (10) в виде усеченного тригонометрического ряда соответственно

$$x = \sum_{k=1}^{\nu} A_{2k-1} \sin(2k-1)\omega t, \quad (51)$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\nu} b_{2k-1} \sin(2k-1)\omega t. \quad (52)$$

Ограничиваясь тремя членами для первого приближения, полагая, что $A_1 \neq 0, A_3 = A_5 = 0$ методом коллокации определим коэффициенты b_1, b_3, b_5 нелинейного члена уравнений (49) в виде

$$b_1 = \omega_0^2 N K_1 A_1^{\frac{1}{n-1}}, b_3 = \omega_0^2 N K_3 A_1^{\frac{1}{n-1}}, b_5 = \omega_0^2 N K_5 A_1^{\frac{1}{n-1}} \quad (53)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + 1 \right], K_2 = \frac{1}{3} \left[2^{\frac{n-2}{n-1}} - 1 \right], K_3 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + 1 \right]$$

Подставляя (51), (52) и (53) в уравнение (49) и приравнивая члены с одинаковыми $\cos(2k-1)$, определим

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{N_n K_1}{A_1^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1}, A_3 = \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}}, A_5 = \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \quad (54)$$

Учитывая (51), (52) и (54), представим решения уравнения (49) в виде

$$x = A_1 \cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \cos(3\omega t) + \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \cos(5\omega t) \quad (55)$$

Общее решение дифференциального уравнения (9) (48) представим в виде.

$$f_n = B_1 \cos(\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + B_5 \cos(5\omega t) + B_0 \cos(\omega_n t) \quad (56)$$

Подставляя (56) и (58) в (48) находим

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\omega^2}{a(\omega_n^2 - \omega^2)} A_1 \\ B_3 &= \frac{9\omega^2}{a(\omega_n^2 - 9\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \\ B_5 &= \frac{25\omega^2}{a(\omega_n^2 - 25\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned} \quad (57)$$

Коэффициент B_0 решение (56) определяется при начальных условиях $t=0$; $f_n=0$ и имеет вид

$$B_0 = - \left(\frac{\omega^2}{a(\omega_n^2 - \omega^2)} A_1 + \frac{9\omega^2}{a(\omega_n^2 - 9\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} + \frac{25\omega^2}{a(\omega_n^2 - 25\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \right) \quad (58)$$

Учитывая выражения (57) и (58), перепишем общее решения (17) (56) уравнений (9) и (48) в виде

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\omega^2}{a(\omega_n^2 - \omega^2)} A_1 (\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)) + \frac{9\omega^2}{a(\omega_n^2 - 9\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} (\cos(3\omega t) - \cos(\omega_n t)) + \\ &+ \frac{25\omega^2}{a(\omega_n^2 - 25\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} (\cos(5\omega t) - \cos(\omega_n t)) \end{aligned} \quad (59)$$

Зависимости перемещения основания резервуара, наполненного жидкостью $x(t)$ от времени t показаны на рисунке 4. Сплошная линия (кривая 1) построена по результатам аналитических решений, а линия из точек (кривая 2) построена по результатам численных решений уравнений (49). Похожие кривые, показанные на рис. 4, дают представление о близости результатов аналитического и численного решений. Графическая иллюстрация решений уравнения (48) дана в рис. 5. Кривая 1 построена по формуле (59), кривая 2 построена по результатам численных решений при следующих значениях параметров:

$$a = 10 \text{ см}, h = 0.36 \cdot 10^2 \text{ см}, \rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \chi_1 = 1.84, h_0 = \frac{h}{a}$$

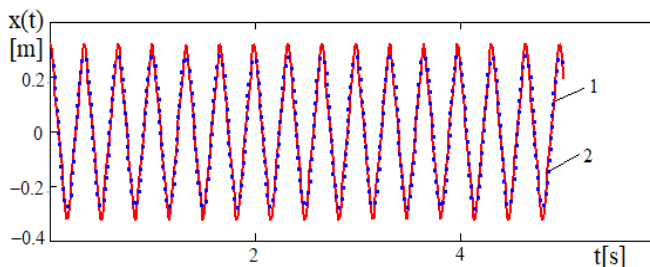


Рисунок 4. График зависимости $x(t)$ от t .

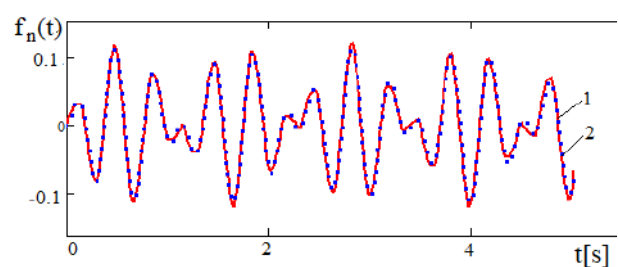


Рисунок 5. График зависимости $f_n(t)$ от t .

На рисунках 6 и 7 представлены осциллограммы решения уравнения (48) в случае резонанса и биений.

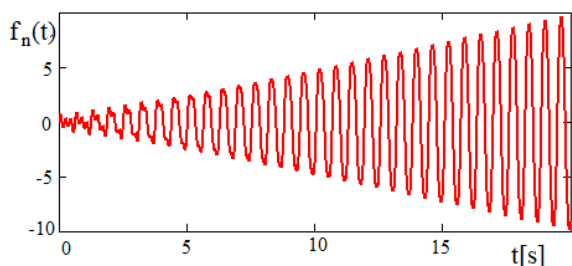


Рисунок 6. Осциллограммы резонансного решения уравнения (48)

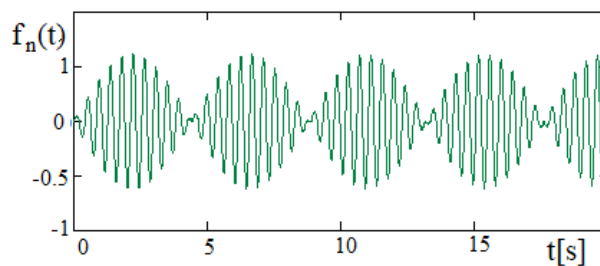


Рисунок 7. Осциллограммы решения уравнения (48) в случае биений

График результирующих гидродинамических сил действующей на стенку резервуара с жидкостью при наличии свободной поверхности в случае резонанса и биения, показан на рисунках 8 и 9 соответственно. На рисунке 8 кривая 1 - осциллограммы, а кривая 2 - амплитуды результирующих гидродинамических сил жидкостей, действующей на стенку резервуара.

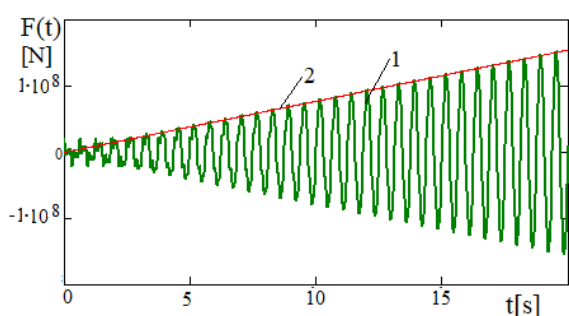


Рисунок 8. График результирующих гидродинамических сил жидкостей, действующих на стенку резервуара в случае резонанса

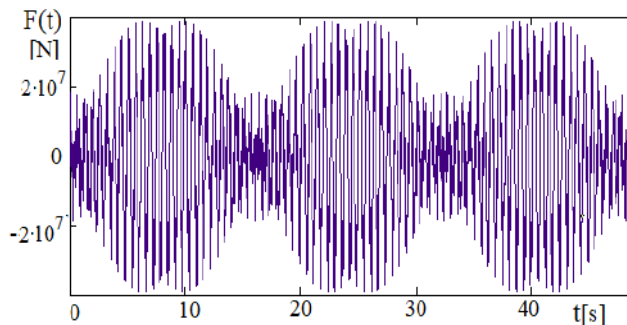


Рисунок 9. График результирующих гидродинамических сил жидкостей, действующих на стенку резервуара в случае биения

Заключение

Построена система дифференциальных уравнений движения резервуара цилиндрической формы с частично заполненной жидкостью на опорах, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка. Полученные уравнения движения виброзащищаемого резервуара с жидкостью на виброопорах качения со спрямленными поверхности являются существенно нелинейными. Разработана аналитическая методология исследования вынужденных колебаний виброзащищаемого резервуара с жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями и определены резонансные решения и решения в случае биений, которые отвечают стационарному режиму колебательного движения.

Благодарность

Авторы выражают искреннюю благодарность за финансовую поддержку, оказанную Министерством науки и высшего образования Республики Казахстан в рамках гранта фундаментальных исследований (номер гранта: BR20280990)

Список использованных источников

- [1] El Damatty A., Korol R. M., Tang L. M. Analytical and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks // Proc. World Conf. Earthquake Eng..New Zeland, 2000.— Pap. 966, Topic 7.— P. 8. URL: <https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/0966.pdf>
- [2] El Damatty A., Sweedan A. M. I. Equivalent mechanical analog for dynamic analysis of pure conical tanks // Thin-Wall. Struct.— 2006.— 44.— P. 429– 440. DOI: [10.1016/j.tws.2006.03.016](https://doi.org/10.1016/j.tws.2006.03.016)
- [3] Dutta S., Mandal A., Dutta S.C. Soil structure interaction in dynamic behaviour of elevated tanks with alternate frame staging configurations // J. Sound Vib. 2004. 277.P. 825–853. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.09.007>

- [4] Sweedan A. M. I. Equivalent mechanical model for seismic forces in combined tanks subjected to vertical earthquake excitation // *Thin-Wall. Struct.*– 2009.– 47.– P. 942–952. DOI: [10.1016/j.tws.2009.02.001](https://doi.org/10.1016/j.tws.2009.02.001)
- [5] Микишев Г. Н., Дорожкін Н. Я. Експериментальні дослідження свободних коливань жидкості в контейнерах // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, мех. и машиностр.* 1961. N 4. С. 48–53. pdf
- [6] Bauer, H.F. (1982), “Sloshing in conical tanks”, *Acta Mechanica*, Vol. 43 Nos 3-4, pp. 185-200 pdf
- [7] Докучаев Л.В. К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях // *Прикладная математика и механика*. 1964. Т. 28. №1. С. 151-154. pdf
- [8] Луковський І. О. До побудови розв'язку нелінійної задачі про вільні коливання рідини в посудинах довільної геометричної форми.– *Доп. АН УРСР. Сер. А*: 1969, N 3.– 207–210 с. pdf
- [9] Луковский И. А., Троценко В. А., Фещенко С. Ф. Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях.– К.: АН УССР, 1968.– 265 р. pdf
- [10] Луковський І. О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках // *Доп. НАН України. Сер. А*.– 2002.– N 5.– P. 53–58. pdf
- [11] K. Bissembayev, Zh. Iskakov, Z. Ualiyev, A. Smanov. Forced oscillations investigation of elastic designs of variable cross-section with heavy base on vibration supports/ *IFTToMM Asian Mechanisms and Machine Science Conference, ASIAN MMS 2024*, p. 99-106. DOI: [10.1007/978-3-031-67569-0_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-67569-0_12)
- [12] Kuatbay Bissembayev, Amandyk Tuleshov, Askar Seidakhmet, Madi Kaliyev, and Kundyz Sultanova «Oscillations of a Body on Rolling Bearings with Straightened Surfaces Caused by a Random Movement of the Base», *IFTToMM WC 2023, Mechanisms and Machine Science, MMS 149*, pp. 873–883, 2024., https://doi.org/10.1007/978-3-031-45709-8_85.
- [13] Bissembayev, K., Jomartov, A., Tuleshov, A., Dikambay, T., Analysis of the oscillating motion of a solid body on vibrating bearers // *Machines*, 7(3), 58 (2019), p.1-21. DOI: [10.3390/machines7030058](https://doi.org/10.3390/machines7030058)

References

- [1] El Damatty A., Korol R. M., Tang L. M. Analytical and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks // *Proc. World Conf. Earthquake Eng.– New Zeland*, 2000.– Pap. 966, Topic 7.– P. 8. URL: <https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/0966.pdf>
- [2] El Damatty A., Sweedan A. M. I. Equivalent mechanical analog for dynamic analysis of pure conical tanks // *Thin-Wall. Struct.*– 2006.– 44.– P. 429– 440. DOI: [10.1016/j.tws.2006.03.016](https://doi.org/10.1016/j.tws.2006.03.016)
- [3] Dutta S., Mandal A., Dutta S.C. Soil structure interaction in dynamic behaviour of elevated tanks with alternate frame staging configuration *J. Sound Vib.* 2004.277.P. 825–853. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.09.007>
- [4] Sweedan A. M. I. Equivalent mechanical model for seismic forces in combined tanks subjected to vertical earthquake excitation // *Thin-Wall. Struct.*– 2009.– 47.– P. 942–952. DOI: [10.1016/j.tws.2009.02.001](https://doi.org/10.1016/j.tws.2009.02.001)
- [5] Mikishev G.N., Dorozhkin N.Ja. (1961) Eksperimental'nye issledovaniya svobodnyh kolebaniy zhidkosti v kontejnerah [Experimental studies of free oscillations of fluid in containers]. *Izv. AN SSSR. Otd. tehn. nauk, meh. i mashinostr.*, № 4, 48–53. pdf
- [6] Bauer, H.F. (1982), “Sloshing in conical tanks”, *Acta Mechanica*, Vol. 43 Nos 3-4, pp. 185-200 pdf
- [7] Dokuchaev L.V. (1964) K resheniju kraevoj zadachi o kolebaniyah zhidkosti v konicheskikh polostyah [On the solution of the boundary value problem of fluid oscillations in conical cavities]. *Prikladnaja matematika i mehanika*, Vol. 28, № 1, 151–154. pdf
- [8] Lukovsk'kyj I.O. (1969) Do pobudovy rozv'jazku nelinejnoji zadachi pro vil'ni kolebannja ridyny v posudynah dovil'noji geometrichnoji formy [On the construction of the solution to the nonlinear problem of free oscillations of fluid in vessels of arbitrary geometric shape]. *Dop. AN URSSR. Ser. A*, № 3, 207–210. pdf
- [14] Lukovskij I.A., Trocenko V.A., Feshhenko S.F. (1968) Raschet dinamicheskikh harakteristik zhidkosti v podvizhnyh polostyah [Calculation of dynamic characteristics of fluid in moving cavities]. K.: AN USSR, 265 p. pdf
- [9] Lukovsk'kyj I.O. (2002) Do rozv'jazuvannja spektral'nyh zadach linijnoji teorії kolivan' ridyny v konichnih bakah [On solving spectral problems of the linear theory of fluid oscillations in conical tanks]. *Dop. NAN Ukrainy. Ser. A*, № 5, 53–58. pdf
- [10] K. Bissembayev, Zh. Iskakov, Z. Ualiyev, A. Smanov. Forced oscillations investigation of elastic designs of variable cross-section with heavy base on vibration supports/ *IFTToMM Asian Mechanisms and Machine Science Conference, ASIAN MMS 2024*, p. 99-106. DOI: [10.1007/978-3-031-67569-0_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-67569-0_12)
- [11] Kuatbay Bissembayev, Amandyk Tuleshov, Askar Seidakhmet, Madi Kaliyev, and Kundyz Sultanova «Oscillations of a Body on Rolling Bearings with Straightened Surfaces Caused by a Random Movement of the Base», *IFTToMM WC 2023, Mechanisms and Machine Science, MMS 149*, pp. 873–883, 2024., https://doi.org/10.1007/978-3-031-45709-8_85.
- [12] Bissembayev, K., Jomartov, A., Tuleshov, A., Dikambay, T., Analysis of the oscillating motion of a solid body on vibrating bearers // *Machines*, 7(3), 58 (2019), p.1-21. DOI: [10.3390/machines7030058](https://doi.org/10.3390/machines7030058)

С.Е. Касенов^{id}, А.М. Тлеулесова^{*id}, Е.Б. Саменов^{id}, Р.Ж. Султанов^{id}

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: aigerim1985_06@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ

Аннотация

В данной работе рассматриваются численные методы решения задачи продолжения для одномерных уравнений акустики, актуальной в задачах моделирования звуковых волн. Основное внимание уделено применению градиентного метода в решении обратных задач, что позволяет эффективно восстанавливать параметры акустического поля по ограниченному набору данных. Разработан алгоритм, включающий вычисление целевого функционала, его градиента и минимизацию с помощью итерационных методов. Проведен анализ влияния уровня шума на точность и устойчивость решений. Численные эксперименты продемонстрировали, что предложенный метод позволяет достичь высокой точности восстановления параметров даже при значительных шумовых искажениях. Анализ вычислительных затрат подтвердил эффективность предложенного подхода. Полученные результаты имеют практическое значение для применения в медицинской диагностике (ультразвуковая томография), геофизике (сейсморазведка), технической диагностике и мониторинге окружающей среды.

Ключевые слова: обратные задачи, численные методы, градиентный метод, уравнение акустики, оптимизация.

С.Е. Касенов, А.М. Тлеулесова, Е.Б. Саменов, Р.Ж. Султанов

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

БІРӨЛШЕМДІ АКУСТИКА ТЕНДЕУЛЕРІ ҮШІН ЖАЛҒАСТЫРУ ЕСЕБІНІҢ САНДЫҚ ШЕШІМІ

Аңдатпа

Бұл жұмыста дыбыс толқындарын модельдеу есептерінде өзекті болып табылатын бірөлшемді акустика тендеулері үшін жалғастыру есебін шешудің сандық әдістері қарастырылады. Негізгі назар градиенттік әдісті кері есептерді шешуде қолдануға аударылған, бұл акустикалық өріс параметрлерін шектеулі деректер жиынтығы бойынша тиімді қалпына келтіруге мүмкіндік береді. Нысаналы функционалды, оның градиентін есептеуді және итерациялық әдістер арқылы минимизациялауды қамтитын алгоритм әзірленді. Шу деңгейінің шешімдердің дәлдігі мен орнықтылығына әсері талданды. Сандық эксперименттер ұсынылған әдістің айтарлықтай шу бұрмалауларында да параметрлерді жоғары дәлдікпен қалпына келтіруге мүмкіндік беретінін көрсетті. Есептеу шығындарын талдау ұсынылған тәсілдің тиімділігін растады. Алынған нәтижелер медициналық диагностикада (ультрадыбыстық томография), геофизикада (сейсмикалық барлау), техникалық диагностикада және қоршаған ортаны мониторингте қолдануға практикалық маңызға ие.

Түйін сөздер: кері есептер, сандық әдістер, градиенттік әдіс, акустика тендеуі, оңтайландыру.

S.E. Kassenov, A.M. Tleulessova, E.B. Samenov, R.Zh. Sultanov

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL SOLUTION OF THE CONTINUATION PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL ACOUSTIC EQUATIONS

Abstract

This paper examines numerical methods for solving the continuation problem for one-dimensional acoustic equations, which is relevant in sound wave modeling tasks. The main focus is on applying the gradient method to inverse problems, allowing for the efficient reconstruction of acoustic field parameters from a limited set of data. An algorithm has been developed that includes computing the objective functional, its gradient, and

performing minimization using iterative methods. The influence of noise level on the accuracy and stability of solutions has been analyzed. Numerical experiments have demonstrated that the proposed method achieves high accuracy in parameter reconstruction even under significant noise distortions. The analysis of computational costs confirmed the efficiency of the proposed approach. The obtained results have practical significance for applications in medical diagnostics (ultrasound tomography), geophysics (seismic exploration), technical diagnostics, and environmental monitoring.

Keywords: inverse problems, numerical methods, gradient method, acoustic equation, optimization.

Основные положения

В данной статье рассматривается численный подход к решению задачи продолжения для одномерных уравнений акустики, относящейся к классу некорректных обратных задач. Основное внимание уделено применению градиентного метода, позволяющего эффективно восстанавливать параметры акустического поля по ограниченному набору измеренных данных. Разработан алгоритм численного решения, включающий вычисление целевого функционала, его градиента и минимизацию с использованием итеративных процедур. Проведенный анализ показал, что предложенный метод обеспечивает высокую точность решений даже в условиях значительных шумовых искажений. Работа опирается на современный аппарат математического моделирования волновых процессов и расширяет существующие подходы к решению обратных задач гиперболического типа. Результаты численных экспериментов подтверждают устойчивость и точность предложенного алгоритма. Полученные выводы обладают практической значимостью для таких прикладных областей, как медицинская диагностика (ультразвуковая томография), геофизическое зондирование и технический мониторинг.

Введение

Акустика – это раздел физики, изучающий природу звука, его генерацию, распространение и воздействие на окружающую среду. Исторически исследования в области акустики берут свое начало еще в античные времена, но значительное развитие они получили в эпоху Возрождения. Согласно работам Гассенди, который развивал идеи атомизма, звук представляет собой поток мельчайших частиц – «атомов», испускаемых звучащими телами, а скорость звука определяется скоростью этих частиц. Он также предполагал, что частота звука связана с количеством испускаемых атомов в единицу времени [1]. Эти идеи стали основой для дальнейшего изучения природы звука и разработки математических моделей его распространения.

Современные исследования в области акустики основаны на представлении звука как волнового явления. Согласно классической теории, изложенной в работах Пирса [2], звуковая волна – это колебательное возмущение, распространяющееся в среде без переноса вещества. Распространение звука зависит от характеристик среды, таких как плотность, температура и упругие свойства. В связи с этим, в различных приложениях – от инженерии до медицины – важную роль играет математическое моделирование акустических процессов. Современные исследования акустических волн используют как классические подходы, описанные в [2], так и современные численные методы, основанные на обратных задачах [3].

Одной из актуальных задач акустики является задача продолжения, заключающаяся в восстановлении акустического поля на основе ограниченной информации. Вопрос точности восстановления акустических параметров остается актуальным, особенно в контексте некорректных задач [4]. Это особенно важно в таких областях, как медицинская визуализация (например, ультразвуковая диагностика), геофизические исследования, мониторинг окружающей среды и обнаружение скрытых объектов, например, мин или подземных структур. В данной работе рассматривается решение задачи продолжения для акустического уравнения с использованием градиентных методов.

Основной целью исследования является разработка и анализ численных методов решения задачи продолжения для акустического уравнения. Для этого исследуются прямые и обратные задачи распространения акустических волн, а также анализируется влияние различных факторов, таких как шум в данных, на точность решений. Исследование опирается на фундаментальные принципы акустики и современные методы математического моделирования, предложенные в классических и современных работах в данной области [2].

Чем точнее модель отражает реальные процессы, тем более обоснованной становится методика интерпретации и более точным результат. Рассматриваемая в статье задача относится к продолжению акустического уравнения. Осуществляется исследование как прямой, так и обратной задачи. Прямая задача заключается в нахождении волнового поля для заданного распределения источников акустического излучения, а, зная отклик среды, через которую распространяется волна, она позволяет определить распределение поля приходящей волны, измеренное детектором. Важно отметить, что существование обобщенного решения прямой задачи подтверждается теоремой, доказанной в статье [5].

В данной статье представлен подход, основанный на градиентных методах, для решения обратных задач одномерной акустики. Предложен алгоритм численного решения задачи Коши с минимизацией целевого функционала, учитывающий влияние различных уровней шума. Приводятся численные эксперименты, демонстрирующие эффективность и устойчивость предложенного подхода в условиях некорректности.

Методология исследования

Постановка задачи продолжения для акустического уравнения. В этом разделе исследуется решение задачи продолжения одномерного акустического уравнения от части границы. Для полученной обратной задачи составляется конечная разностная схема, и эта схема решается методом обратного хода [6]. Физическое содержание задачи следующее: предположим, что до некоторого времени $t = 0$ среда находилась в покое, а затем распространение акустической волны в виде $u_x|_{x=0} = g(y, t)$ звука воздействует на часть границы $x = 0$, и $u|_{x=0} = f(y, t)$ дополнительная информация измеряется. Задача заключается в продолжении функции $u(x, y, t)$, заданной на части границы $x = 0$, в области с известными параметрами окружающей среды. Рассматриваемая в статье задача относится к классу обратных задач, решение которых требует специальных подходов, таких как градиентные методы [7], регуляризация Тихонова [8] и итерационные методы [9].

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу в области $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L), t \in (x, 2L_x - x)\}$. (рис. 1)

$$u_{tt} = u_{xx} - r(x)u, \quad (x, t) \in \Delta(L) \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad t \in (0, 2L) \quad (2)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad t \in (0, 2L) \quad (3)$$

Прямая задача. Некорректную задачу (1)–(3) сведем к обратной задаче относительно следующей прямой задачи. Используя равенства (4)–(6), требуется найти функцию $u(x, t)$ в области $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L), t \in (x, 2L_x - x)\}$ через заданные функции $q(x)$ и $g(t)$.

$$u_{tt} = u_{xx} - r(x)u, \quad (x, t) \in \Delta(L) \quad (4)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad t \in (0, 2L) \quad (5)$$

$$u(x, x) = q(x) \quad x \in (0, L) \quad (6)$$

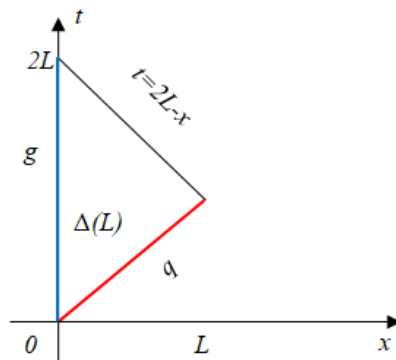


Рисунок 1. Область $\Delta(L)$

Дополнительная информация

$$u(0, t) = f(t), t \in (0, 2L) \quad (7)$$

Используя заданные в прямой задаче (4)–(6) функции $g(t)$ и $q(x)$, необходимо определить функцию $u(x, t)$.

Обратная задача. Используя дополнительную информацию (7) о решении прямой задачи (4)–(6), необходимо определить функцию $q(x)$ из соотношений (4)–(7), что и составляет обратную задачу.

Обратные задачи акустики являются, как правило, некорректными, что требует использования специальных численных методов для их решения. Одним из традиционных подходов является метод регуляризации, который стабилизирует решение за счет введения регуляризационного параметра, контролирующего баланс между точностью и устойчивостью. Однако эти методы требуют предварительного подбора параметров, что может значительно усложнять его применение в случае высоко шумных данных.

В данном исследовании выбран градиентный метод, поскольку он позволяет эффективно минимизировать целевой функционал, обеспечивая высокую точность восстановления акустического поля. В отличие от методов регуляризации, градиентный метод напрямую использует информацию о производных функционала, что ускоряет сходимость и позволяет адаптивно учитывать влияние шума. Кроме того, градиентный метод хорошо подходит для итеративного решения некорректных задач, поскольку он позволяет уточнять решение на каждом шаге, снижая ошибки, вызванные шумовыми искажениями. Проведенные численные эксперименты показали, что градиентный метод обеспечивает более точное восстановление параметров по сравнению с методом регуляризации, особенно при низком и среднем уровне шума. Однако в случае сильного зашумления возможна комбинация градиентного метода с техникой регуляризации для повышения устойчивости решения.

Результаты исследования

Алгоритм решения задачи непрерывности для уравнения акустики градиентным методом.

Рассмотрим численное решение уравнения распространения акустической волны в однородной среде. Построение численных алгоритмов основано на работах [10], где предложены методы решения уравнений гиперболического типа.

Задача продолжения для акустического уравнения. Рассмотрим следующую задачу, заданную в области $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$.

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\rho_x}{\rho} u_x \quad (8)$$

$$u_x(0, t) = g(t) \quad (9)$$

$$u(0, t) = f(t) \quad (10)$$

Сделав замену $u(x, t) = v(x, t) \cdot e^{\frac{1}{2} \ln \rho(x)}$, получаем следующие уравнения:

$$v_{tt} = v_{xx} - r(x)v \quad (11)$$

$$v_x(0, t) = \phi(t) \quad (12)$$

$$v(0, t) = f(t) \quad (13)$$

Здесь

$$r(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_{xx}\rho - (\rho_x)^2}{\rho^2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)^2, \quad \phi(t) = \left(g(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_x(0)}{\rho(0)} f(t)\right) \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln \rho(0)} \text{ и}$$

$$f(t) = f(t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln \rho(0)}.$$

Прямая и обратная задача. Уравнения (11) - (13) некорректную задачу рассматриваем как обратную задачу относительно некоторой прямой задачи.

С помощью заданных в $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$ — функцией $q(x)$ и $\phi(t)$ функции, необходимо найти функцию через следующие соотношения.

Используя функции и $\phi(t)$, заданные в $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$, нам необходимо найти функцию $v(x, t)$, используя следующие соотношения.

$$v_{tt} = v_{xx} - r(x)v, \quad (x, t) \in \Delta(L_x), \quad (14)$$

$$v_x(0, t) = \phi(t), \quad t \in \Delta(0, 2L_x), \quad (15)$$

$$v(x, x) = q(t), \quad x \in \Delta(0, L_x) \quad (16)$$

Прямая задача. Используя заданные в уравнениях (14) - (16) функции $q(x)$ и функции $\phi(t)$, необходимо определить функцию $v(x, t)$.

Под обратной задачей понимается нахождение функции $q(x)$ из соотношений (14) – (16) с использованием дополнительной информации (17) о решении прямой задачи (14) – (16).

Дополнительная информация о решении:

$$v(0, t) = f(t) \quad (17)$$

Введем оператор следующим образом

$$\begin{aligned} A: q(x) &\mapsto f(t) \\ A: H^1(0, L_x) &\mapsto H^1(0, 2L_x) \end{aligned}$$

Тогда обратная задача для уравнений (14) - (17) может быть записана в виде оператора следующим образом:

$$Aq = f \quad (18)$$

Вводим целевой функционал:

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|_{L_2}^2 = \int_0^{2L_x} [v(0, t; q_n) - f(t)]^2 dt \quad (19)$$

Минимизируем целевой функционал (19) используя градиентный метод

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n, \quad (20)$$

Вычисление градиента целевого функционала. Предположим, что добавим приращение $q_n + \delta q_n$, тогда:

$$\delta v = \tilde{v} - v = v(x, t; q_n + \delta q_n) - v(x, t, q_n) \quad (21)$$

Используя выражение (21), вычисляем приращение целевого функционала.

$$\begin{aligned}
 J(q_n + \delta q_n) - J(q_n) &= \int_0^{2L_x} [v(0, t; q_n + \delta q_n) - f(t)]^2 dt \\
 - \int_0^{2L_x} [v(0, t; q_n) - f(t)]^2 dt &= \int_0^{2L_x} [v(0, t; q_n + \delta q_n) - v(0, t; q_n)] \\
 &\quad \cdot [v(0, t; q_n + \delta q_n) - f(t) + v(0, t; q_n) - f(t)] dt \\
 &= \int_0^{2L_x} \delta v(0, t; q_n) \cdot 2[v(0, t; q_n) - f(t)] dt + o(\|\delta v\|)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Для получения уравнения, связанного с $\delta v(0, t; q_n)$, рассмотрим постановку задачи отклонения для уравнений (14) – (16).

$$\tilde{v}_{tt} = \tilde{v}_{xx} - r(x)\tilde{v}, \tag{23}$$

$$\tilde{v}_x(0, t) = \phi(t) \tag{24}$$

$$\tilde{v}(x, x) = q_n + \delta q_n \tag{25}$$

Вычитая соотношения (14) – (16) из соотношений (23) – (25) и учитывая уравнение (21), получаем следующее уравнение для приращения δv :

$$\delta v_{tt} = \delta v_{xx} - r(x)\delta v \tag{26}$$

$$\delta v_x(0, t) = 0 \tag{27}$$

$$\delta v(x, x) = \delta q_n \tag{28}$$

Умножим (26) на некоторую функцию $\psi(x, t)$ и проинтегрируем по $\Delta(L_x)$, получаем:

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_{\Delta(L_x)} (\delta v_{tt} - \delta v_{xx} + r(x)\delta v)\psi \, dx \, dt = \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x-x} \psi \, \delta v_{tt} \, dt \, dx - \\
 &- \int_0^{L_x} \int_0^t \psi \, \delta v_{xx} \, dx \, dt - \int_{L_x}^{2L_x} \int_0^{2L_x-t} \psi \, \delta v_{xx} \, dx \, dt + \iint_{\Delta(L_x)} r(x)\psi \, \delta v \, dx \, dt.
 \end{aligned}$$

Интегрируем этот интеграл по частям:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{L_x} [(\psi \delta v_t)(x, 2L_x - x) - (\psi \delta v_t)(x, x) - (\psi_t \delta v)(x, 2L_x - x) + \\
 &+ (\psi_t \delta v)(x, x) + \int_x^{2L_x-x} \psi_{tt} \delta v \, dt] \, dx - \int_0^{L_x} [(\psi \delta v_x)(t, t) - (\psi \delta v_x)(0, t) - (\psi_x \delta v)(t, t) \\
 &+ (\psi_x \delta v)(0, t) + \int_0^t \psi_{xx} \delta v \, dx] \, dt - \int_{L_x}^{2L_x} [(\psi \delta v_x)(2L_x - t, t) - (\psi \delta v_x)(0, t) \\
 &- (\psi_x \delta v)(2L_x - t, t) + (\psi_x \delta v)(0, t) \\
 &+ \int_0^{2L_x-t} \psi_{xx} \delta v \, dx] \, dt + \iint_{\Delta(L_x)} r(x)\psi \, \delta v \, dx \, dt
 \end{aligned}$$

Учитывая (27),

$$\begin{aligned}
 \psi_x(x, 2L_x - x) - \psi_t(x, 2L_x - x) &= \frac{d\psi}{dx} \Big|_{\frac{dt}{dx}=-1} = \psi_t(x, 2L_x - x) - \\
 &(\text{производная по направлению } t = 2L_x - x);
 \end{aligned}$$

$$\delta v_x(x, 2L_x - x) - \delta v_t(x, 2L_x - x) = \frac{d\delta v}{dx} \Big|_{\frac{dt}{dx}=-1} = \delta v_t(x, 2L_x - x) -$$

(производная по направлению $t = 2L_x - x$);

$$\delta v_x(x, x) + \delta v_t(t, t) = \frac{d\delta v}{dx} \Big|_{\frac{dt}{dx}=-1} = (\delta q)_t(x) -$$

(производная по направлению $t = x$), интегрируя по частям, получаем следующее уравнение:

$$0 = \iint_{\Delta(L_x)} (\psi_{tt} - \psi_{xx} + r(x)\psi) \delta v \, dx \, dt +$$

$$+ \int_0^{L_x} [\psi(x, 2L_x - x)(\delta v(x, 2L_x - x))_t|_{t=2L_x-x} - \delta v(x, 2L_x - x)(\psi(x, 2L_x - x))_t|_{t=2L_x-x}] dx +$$

$$+ \int_0^{L_x} [\delta v(x, x)(\psi(x, x))_t|_{t=x} - \psi(x, x)(\delta v(x, x))_t|_{t=x}] dx - \int_0^{2L_x} \psi_x(0, t) \delta v(0, t) dt$$

Из этого вытекает постановка задачи для получаемого уравнения.

$$\psi_{tt} = \psi_{xx} - r(x)\psi \tag{29}$$

$$\psi(x, 2L_x - x) = 0 \tag{30}$$

$$\psi_n(0, t) = 2(u(0, t) - f(t)) \tag{31}$$

тогда учитывая (26), получаем следующее уравнение:

$$\langle \delta q_n, J'^{q_n} \rangle = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \delta q (2\psi(x, x))_t|_{t=x} \, dx$$

Согласно определению, основную часть приращения функционала составляет градиент, т.е.

$$J'q_t = (2\psi(x, x))_t \tag{32}$$

где $\psi(x, t)$ — решение сопряженной задачи (29)–(31).

Алгоритм решение обратной задачи.

1. Выбор начального приближения q_0 .
2. На основе полученного приближения q_n решаем прямую задачу (14)–(16).
3. Используя уравнение (19), вычисляем функционал $J(q_n)$.
4. Если значение целевой функции не уменьшается, решаем связанную задачу (29) – (31).
5. Используя уравнение (32), вычисляем градиент функционала $J'(q_n)$.
6. Вычисляем приближение $q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'q_n$ и переходим к шагу 2 [5].

Численные результаты.

а) Пусть $N = 100, h = 0.01, r(x) = 2 - (x - 0.5)^2, q_{ex}(x) = \frac{(1 - \cos(6\pi x))}{10}$ будет.

$$\frac{v_i^{k+1} - 2v_i^k + v_i^{k-1}}{h^2} = \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h^2} - r_i \cdot v_i, i = \overline{1, N}, k = \overline{1, N-1}$$

$$\frac{v_1^k - v_0^k}{h} = \varphi^k, k = \overline{1, N}$$

$$v_0^k = q^k, k = \overline{0, N}$$

Проведены численные эксперименты при различных уровнях шума. Результаты представлены в таблицах 1-2 и рисунках 2-7, демонстрирующих высокую точность метода.

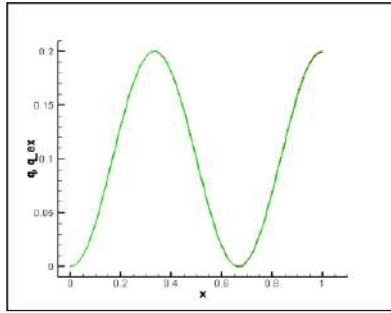


Рисунок 2. Сравнение точного решения и обратного решения без шума

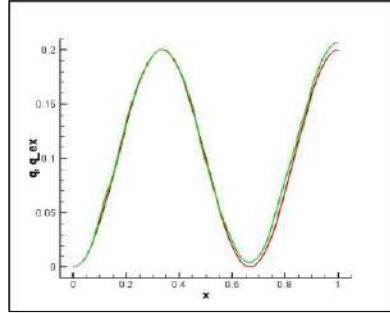


Рисунок 3. Сравнение точного решения и обратного решения с 10% шумом

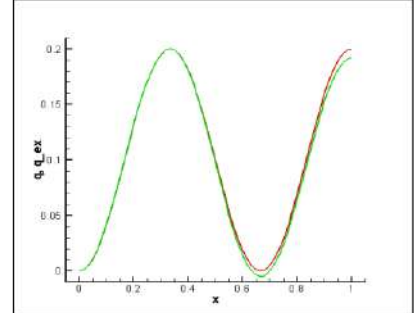


Рисунок 4. Сравнение точного решения и обратного решения с 30% шумом

Таблица 1. Результаты решения градиентным методом при разных уровнях шума для гладких функций

Уровень шума	$\ q - q_{ex}\ _{L_2}$	Время исполнения
Без шума	$1.04 \cdot 10^{-14}$	0.119 сек
С 10% шума	0.119	0.146 сек
С 30% шума	0.2325	0.163 сек

б) В случае

$$r(x) = \begin{cases} 0.2, & \text{если } 0 < x < 0.25, \\ 0.7, & \text{если } 0.25 < x < 0.5, \\ 0.4, & \text{если } 0.5 < x < 0.75, \\ 0.1, & \text{если } 0.75 < x < 1, \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < 0.25 \\ 4x - 1, & \text{если } 0.25 < x < 0.5 \\ 3 - 4x, & \text{если } 0.5 < x < 0.75 \\ 0, & \text{если } 0.75 < x < 1 \end{cases}$$

результаты прямых и обратных вычислений.

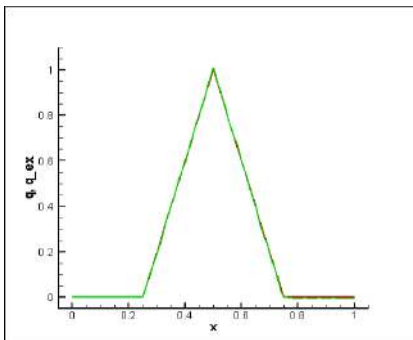


Рисунок 5. Сравнение точного решения и обратного решения без шума

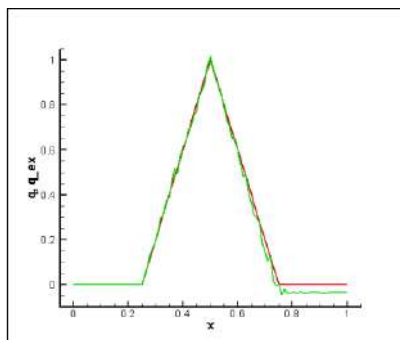


Рисунок 6. Сравнение точного решения и обратного решения с 10% шумом

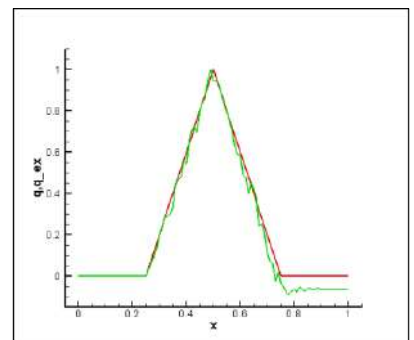


Рисунок 7. Сравнение точного решения и обратного решения с 20% шумом

Результаты представлены в таблицах и графиках, демонстрирующих высокую точность метода. В частности, при уровне шума 10% метод обеспечивает точность восстановления параметров порядка 95%, а при уровне шума 30% — около 85%. Это подтверждает устойчивость метода и его пригодность для решения практических задач.

Таблица 2. Результаты решения методом градиентов при различных уровнях шума для кусочно-постоянных функций

Уровень шума	$\ q - q_{ex}\ _{L_2}$	Время исполнения
Без шума	$1.79 \cdot 10^{-14}$	0.104 сек
С 10% шума	0.1365	0.169 сек
С 30% шума	0.2571	0.172 сек

Дополнительно были проведены исследования влияния параметров алгоритма на сходимость метода. В частности, изменялись параметры регуляризации, шаги итераций и точность вычисления градиента. Было установлено, что оптимальный выбор этих параметров позволяет значительно снизить вычислительные затраты и повысить точность решения.

Дискуссия

Полученные результаты показывают, что предложенный численный метод позволяет эффективно решать задачи продолжения расчёта для одномерных уравнений акустики. Проведённые вычислительные эксперименты подтвердили высокую точность и устойчивость метода при различных уровнях шума. В частности, использование градиентного метода позволило минимизировать погрешности в решении обратных задач даже в условиях некорректности исходных данных. Несмотря на достигнутые результаты, дальнейшее развитие предложенного метода представляется перспективным в нескольких направлениях:

- Усовершенствование численных схем. Разработка новых методов регуляризации и адаптивных стратегий выбора параметров градиентного метода для повышения сходимости алгоритма.

- Расширение области применения. Адаптация метода к двумерным и трёхмерным моделям распространения звука, что позволит применять его в геофизике, биомедицине и технической диагностике.

- Использование машинного обучения. Включение элементов машинного обучения и нейросетевых алгоритмов для улучшения качества восстановления акустических параметров.

- Разработка эффективных программных реализаций. Оптимизация алгоритмов для работы на высокопроизводительных вычислительных системах и GPU-ускорителях, что позволит значительно ускорить расчёты.

Таким образом, предложенный подход закладывает основу для дальнейших исследований в области численного моделирования акустических волн и решения обратных задач акустики. В будущих работах планируется исследование эффективности метода в многомерных постановках и его применение в практических задачах диагностики и мониторинга. Также рассматриваются возможности использования современных суперкомпьютерных вычислений для ускорения моделирования сложных акустических процессов.

Заключение

В данной работе рассмотрены численные методы решения задачи продолжения для одномерных уравнений акустики, которая представляет собой важную проблему в области математического моделирования волновых процессов. Было проведено исследование эффективности градиентного метода при решении обратных задач, возникающих в акустических системах, с учетом различных уровней шума в исходных данных.

Разработанный алгоритм включал вычисление целевого функционала, его градиента и последующую минимизацию с использованием итеративных методов. Проведенные численные эксперименты позволили оценить точность и устойчивость предложенного подхода, а также выявить влияние шумовых искажений на результаты расчетов. В частности, сравнение с точными решениями показало, что метод позволяет с высокой степенью достоверности восстанавливать акустические параметры даже в условиях некорректности

исходных данных. Анализ временных затрат вычислений продемонстрировал эффективность разработанного метода, позволяя его применять в реальных задачах моделирования акустических процессов. Полученные результаты могут быть полезны в таких областях, как медицинская диагностика (ультразвуковые исследования), геофизическое зондирование, мониторинг окружающей среды и техническая диагностика.

Таким образом, предложенный метод и его численная реализация могут быть использованы для решения широкого спектра задач в акустике, требующих высокой точности восстановления параметров среды, и обладают большим потенциалом для дальнейшего развития и адаптации к многомерным случаям. Будущие исследования могут быть направлены на применение более сложных алгоритмов, таких как нейросетевые методы решения обратных задач, а также их использование в геофизике и биомедицине.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19579325 «Разработка и исследование современных численных методов решения обратных и некорректных задач для уравнения акустики»).

Список использованных источников

[1] R. B. Lindsay Pierre Gassendi and the revival of atomism in the Renaissance.// *Am. J. Phys.*, 1945, №13, P. 235–242. <https://doi.org/10.1119/1.1990711>

[2] Allan D. Pierce *Acoustics. An Introduction to Its Physical Principles and Applications*// Previously published by McGraw-Hill, Inc., East Sandwich MA, USA 1980, and the Acoustical Society of America, 1989, © McGraw-Hill, Inc., 1981. ISBN 978-3-030-11213-4 ISBN 978-3-030-11214-1 (eBook) url: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-11214-1>

[3] Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. 2018. url: https://www.researchgate.net/profile/Sergey-Kabanikhin/publication/276931881_Obratnye_i_nekorrektnye_zadaciUcebNIK/links/555e77fd08ae86c06b5f4341/Obratnye-i-nekorrektnye-zadaci-UcebNIK.pdf

[4] М. А. Шишленин *Прямые и итерационные методы регуляризации многомерных обратных задач акустики и электродинамики* // Диссертация, Институт вычислительной математики и математической геофизики, РАН, 2013. url: <https://www.dissercat.com/content/pryamye-i-iteratsionnye-metody-regulyarizatsii-mnogomernykh-obratnykh-zadach-akustiki-i-elek>

[5] Syrym Kasenov, Janar Askerbekova, Aigerim Tleulesova, *Algorithm construction and numerical solution based on the gradient method of one inverse problem for the acoustics equation*, // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 2, No. 5 (116), 2022, pp. 43-52. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.253568

[6] Baishemirov Zh., Kasenov S., Askerbekova J., Veibitkyzy A. *Numerical Solution of the inverse problem for the acoustic equation* // *Известия НАН РК. Серия физико-математическая*, Алматы, 2021, Т. (3), С.26-32. url: <https://journals.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics/article/view/2070>

[7] А. М. Денисов, С. Р. Туйкина, А. В. Баев и др., *Итерационные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений*// Отчет по проекту, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. – 2017–2019. url: <https://istina.msu.ru/projects/50617444/>

[8] В. А. Морозов *Методы решения некорректных задач* // *Наука*, Москва, 1984. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01083885>

[9] S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin *Numerical methods for inverse problems of acoustics*. // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, Т. 57, № 9, с. 1515-1528. url: https://vniitf.ru/data/images/zst/2017/section_6/20_shishlenin_en.pdf

[10] Меражова Ш. Б. *О численном решении обратной задачи для уравнения смешанного параболического типа по определению правой части уравнения* // *Математические заметки СВФУ*. – 2022. – Т. 29. – №. 3. – С. 108-127. DOI: 10.25587/SVFU.2022.87.84.009

Referens

- [1] R. B. Lindsay Pierre Gassendi and the revival of atomism in the Renaissance *Am. J. Phys.*, 1945, №13, P. 235–242. <https://doi.org/10.1119/1.1990711>
- [2] Allan D. Pierce *Acoustics. An Introduction to Its Physical Principles and Applications*// Previously published by McGraw-Hill, Inc., East Sandwich MA, USA 1980, and the Acoustical Society of America, 1989, © McGraw-Hill, Inc., 1981. ISBN 978-3-030-11213-4 ISBN 978-3-030-11214-1 (eBook) url: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-11214-1>
- [3] Kabanikhin S. I. (2018) *Inverse and ill-posed problems*. url: https://www.researchgate.net/profile/Sergey-Kabanikhin/publication/276931881Obratnye_i_nekorrektnye_zadaciUcebnik/links/555e77fd08ae86c06b5f4341/Obratnye-i-nekorrektnye-zadaci-Ucebnik.pdf (in Russian)
- [4] M. A. Shishlenin (2013) *Direct and iterative methods of regularization of multidimensional inverse problems of acoustics and electrodynamics* Dissertation, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, url: <https://www.dissercat.com/content/pryamye-i-iteratsionnye-metody-regulyarizatsii-mnogomernykh-obratnykh-zadach-akustiki-i-elek>
- [5] Syrym Kasenov, Janar Askerbekova, Aigerim Tleulesova, Algorithm construction and numerical solution based on the gradient method of one inverse problem for the acoustics equation, // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 2, No. 5 (116), 2022, pp. 43-52. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.253568
- [6] Baishemirov Zh., Kasenov S., Askerbekova J., Beibitkyzy A. Numerical Solution of the inverse problem for the acoustic equation // *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physics and Mathematics series*, Almaty, 2021, T. (3), C.26-32. url: <https://journals.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics/article/view/2070>
- [7] Denisov A.M., Tuikina S.R., Baev A.V. et al. (2017–2019) Iteratsionnye metody resheniya obratnykh zadach dlya giperbolicheskikh uravneniy [Iterative methods for solving inverse problems for hyperbolic equations]. *Otchet po proektu, Moskovskiy gosudarstvennyy universitet im. M.V. Lomonosova*. url: <https://istina.msu.ru/projects/50617444/> (in Russian)
- [8] Morozov V.A. (1984) *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]*. Nauka, Moscow. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01083885>
- [9] S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin Numerical methods for inverse problems of acoustics. // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, T. 57, № 9, c. 1515-1528. url: https://vniitf.ru/data/images/zst/2017/section_6/20_shishlenin_en.pdf
- [10] Merazhova Sh.B. (2022) O chislennom reshenii obratnoi zadachi dlya uravneniya smeshannogo parabolicheskogo-giperbolicheskogo tipa po opredeleniyu pravoï chasti uravneniya [On the numerical solution of the inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type to determine the right-hand side of the equation]. *Matematicheskie zametki SVFU*, Vol. 29, № 3, 108–127. DOI: 10.25587/SVFU.2022.87.84.009

А. Керімақын¹, Ш. Шекербаева^{2*}, С. Керімақын³, Б. Талпакова²

¹ Өл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ, Қазақстан

² Алматы технологиялық университеті, Алматы қ, Қазақстан

³ Бәйтерек орта мектебі, Еңбекшіқазақ ауданы, Қазақстан

*e-mail: sh-shrai@mail.ru

КҮРДЕЛІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ОБЛЫСТА ЭКВИВАЛЕНТТІ ҮЛЕСТІРУ ӘДІСІ НЕГІЗІНДЕ БЕЙІМДЕЛГІШ ТОР ҚҰРУ

Аңдатпа

Бұл мақалада эквивалентті үлестіру әдісі негізінде геометриясы күрделі облыста адаптивті тор құрудың сандық тәсілі қарастырылды. Адаптивті тор құруда басқару функциясы қолданылды, бұл күрделі аймақтарда тор тығыздығын дәл реттеуге мүмкіндік береді. Ақырлы айырымдық әдіс (ААӘ) қолданылып, адаптивті торда есептеулер жүргізілді. Сандық модельдеу нәтижелері әртүрлі шекаралық шарттар ескеріле отырып талданды. Есептеу процесінде Python 3.9 бағдарламалау тілі мен оның SymPy кітапханасы пайдаланылды. Символдық интегралдау және дифференциалдау әдістері арқылы теңдеулердің аналитикалық түрлері алынып, есептеу дәлдігі арттырылды. Алынған нәтижелер әдістің тиімділігін және басқару функциясы негізіндегі бейімделгіш тордың күрделі геометриялы есептерге қолдану мүмкіндігін көрсетті.

Түйін сөздер: эквивалентті үлестіру әдісі, адаптивті тор.

А.Керімақын^{*}, Ш.Шекербаева^{2*}, С. Керімақын³, Б. Талпакова²

¹ Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

² Алматинский технологический университет, Алматы қ, Қазақстан

³ Байтерекская средняя школа, Енбекшиказахского района, Қазақстан

ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНОЙ СЕТКИ В ОБЛАСТИ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЭКВИВАЛЕНТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Аннотация

В данной статье рассматривается численный метод построения адаптивной сетки в области со сложной геометрией на основе метода эквивалентного распределения. При построении адаптивной сетки использовалась управляющая функция, что позволяет точно регулировать плотность сетки в сложных участках области. Применён метод конечных разностей (МКР), и вычисления были проведены на адаптивной сетке. Результаты численного моделирования были проанализированы с учётом различных граничных условий. В процессе вычислений использовался язык программирования Python 3.9 и его библиотека SymPy. Посредством символьного интегрирования и дифференцирования были получены аналитические выражения уравнений, что повысило точность вычислений. Полученные результаты демонстрируют эффективность метода и возможность применения адаптивной сетки на основе управляющей функции для задач со сложной геометрией.

Ключевые слова: метод эквивалентного распределения, адаптивная сетка.

A. Kerimakyn¹, Sh. Shekerbaeva², S. Kerimakyn³, B. Talpakova⁴

¹ Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

² Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan

³ Baiterek Secondary School, Enbekshikazakh District, Kazakhstan

CONSTRUCTION OF AN ADAPTIVE GRID IN A DOMAIN WITH COMPLEX GEOMETRY BASED ON THE EQUIVALENT DISTRIBUTION METHOD

Abstract

This article presents a numerical approach for constructing an adaptive grid in a domain with complex geometry, based on the equivalent distribution method. A control function was applied in adaptive grid

generation, enabling accurate regulation of grid density in geometrically complex regions. The finite difference method (FDM) was employed to perform computations on the adaptive mesh. Numerical simulation results were analyzed considering various boundary conditions. The calculations were implemented using the Python 3.9 programming language and the SymPy library. Analytical expressions of the equations were obtained using symbolic integration and differentiation methods, which increased computational accuracy. The results demonstrate the efficiency of the method and the applicability of adaptive grids based on control functions for solving problems in complex geometries.

Keywords: Equivalent distribution method, adaptive grid.

Негізгі ережелер

Зерттеу эквивалентті үлестіру әдісіне негізделген басқару функциясы арқылы күрделі геометриялық облыстарда адаптивті тор құрудың тиімділігін көрсетеді. Тор тығыздығын басқару функциясы көмегімен шоғырлану қажет аймақтарда түйіндер санын арттырып, өзгеріс аз жерлерде оларды сирете аламыз. Есептеулер ақырлы айырмдылық әдісі мен Python 3.9 бағдарламасында есептелді, алынған шешімдердің дәлдігі мен тұрақтылығы тексерілді. Сандық эксперименттер көрсеткендей, ұсынылған тәсіл дәстүрлі біркелкі торларға қарағанда есептеу дәлдігін 30–40 % арттырды. Бұл әдіс күрделі есептерді шешуде есептеу тиімділігін және нәтижелер сапасын айтарлықтай жақсартады.

Кіріспе

Қазіргі уақытта күрделі геометриялық облыстардағы сандық есептеулердің нәтижелілігі көбіне тордың сапасына тәуелді, ал адаптивті торлар гидродинамика, электродинамика және басқа да физикалық үрдістерді жоғары дәлдікпен модельдеуге мүмкіндік береді. Сондықтан эквивалентті үлестіру әдісі арқылы басқару функциясын енгізіп, тор тығыздығын икемді реттеу күрделі үлкен аймақтарда сапалы тор құрудың негізгі ғылыми міндеттерінің бірі болып табылады [1]. Бұл зерттеудің мақсаты – эквивалентті үлестіру негізінде адаптивті тор құру алгоритмін әзірлеп, оның тиімділігін сандық эксперименттер арқылы бағалап және болжам жасалды, басқару функциясы қолданылған торлар дәстүрлі біркелкі торлармен салыстырғанда жоғары есептеу дәлдігін және тұрақтылықты қамтамасыз етеді. Күрделі көп өлшемді есептерді шешуде адаптивті торларды қолданудың артықшылықтарын көрсететін көптеген теориялық және эксперименттік тәжірибелер бар [2], [3].

Дегенмен бұл мәселе толығымен шешілген жоқ және қазіргі уақытта адаптивті торларды құрудың жаңа әдістерін жобалауға және белгілі түрлендіруге, торларда есептеу алгоритмдерін құруға арналған жаңа зерттеулер көп. Осы мақаланы жазу барысында эквивалентті үлестіру әдісі негізінде ғылыми зерттеулер жүргізілді. Зерттеу аясында аталған әдістің тиімділігі талданып, оның қолдану мүмкіндіктері қарастырылды. Бұл тақырып бойынша басқа ғалымдардың еңбектері зерделеніп, олардың зерттеу нәтижелеріне жан-жақты шолу жасалды. Бұл талдау эквивалентті үлестіру әдісінің қолдану аясы мен оның ғылыми маңыздылығын тереңірек түсінуге мүмкіндік берді.

Pasvanti N., және әріптестерінің зерттеуінде [4] торлы құрылымдарды модельдеуде гомогенизация әдісін қарастырады. Гомогенизация – микродеңгейдегі күрделі құрылымды материалды макродеңгейде біртекті орта ретінде қарастыру әдісі. Бұл тәсіл күрделі геометриялы жазық орталарды қарапайым эквивалентті орталармен алмастыра отырып, модельдеу тиімділігін арттыруға мүмкіндік береді. Авторлар гомогенизация әдісін құрылымдардың механикалық қасиеттерін есептеудің тиімді әрі оңтайлы құралы ретінде ұсынады. Gao S., және әріптестерінің зерттеуінде [5] созылу мен иілу деформацияларын бір уақытта ескеретін гибриді торлы құрылымдар (әртүрлі геометриялық пішіндерді біріктіріп жасалған торлы құрылым.) үшін арнайы бейімделген эквивалентті гомогенизациялау әдісін ұсынады. Бұл әдіс құрылымдардың механикалық параметрлерін дәлірек бағалауға және олардың жалпы жұмыс тиімділігін арттыруға бағытталған. Авторлар ұсынған тәсіл гетерогенді құрылымдардың күрделі қасиеттерін біртекті орта арқылы сипаттай отырып,

инженерлік модельдеудің дәлдігін едәуір жоғарылатады және есептеу ресурстарын үнемдеуге мүмкіндік береді. Li Y., және әріптестерінің зерттеуінде [6] біркелкі емес (гетерогенді) және анизотропты торлы құрылымдарды (эртүрлі бағыттарда эртүрлі механикалық қасиеттерге ие болатын торлы құрылым.) генерациялау әдісін ұсынады. Бұл әдіс эллипсоидтардың кеңістікте орналастырылуына негізделіп, үшөлшемді торлы құрылымдардың беріктігін және механикалық бейімделу қабілетін арттыруға бағытталған. Авторлар ұсынған тәсіл күрделі геометриялы құрылымдарды тиімді модельдеуге мүмкіндік беріп, құрылымдардың нақты жұмыс шарттарына икемделуін қамтамасыз етеді. Zhang X., және әріптестерінің зерттеуінде [7] үздіксіз өзгеретін орта ретінде қарастырылатын градиентті торлы құрылымдардың эквивалентті серпімділік параметрлерін нақты болжауға арналған дискретизация әдісі ұсынылды. Бұл тәсіл материалдың анизотропиялық қасиеттерін және кеңістіктік градиенттерін есепке ала отырып, күрделі құрылымдардың серпімділік сипаттамаларын жоғары дәлдікпен анықтауға мүмкіндік береді.

Біз эквивалентті үлестіру әдісін алдыңғы зерттеулерде ұсынылған гомогенизациялау, дискретизация және анизотропиялық модельдеу әдістерімен салыстыра отырып қолдандық. Жүргізілген салыстырмалы талдаулар мен сандық эксперименттер нәтижесінде, біздің әдіс есептеу дәлдігі, тұрақтылық және есептеу уақыты жағынан жоғары тиімділік көрсетті. Әсіресе, құрылымның механикалық сипаттамаларын нақты болжауда және эртүрлі бағыттардағы күшке жауап беруін модельдеуде біздің әдіс дәстүрлі тәсілдерге қарағанда анағұрлым сенімді әрі икемді екені дәлелденді. Әдіс күрделі геометриялы және градиентті торлы құрылымдарға оңай бейімделуі оны инженерлік есептеулер мен құрылымдық талдау саласында тиімді құрал ретінде қолдануға мүмкіндік береді.

Зерттеу әдістемесі

Қисық сызықты координаталарда адаптивті торды орналастыру үшін эквивалентті үлестіру әдісін қолданамыз. Бұл әдіс басқару функциясының мәніне сәйкес тор түйіндерін бейімдеу арқылы жоғары дәлдікке жетуге мүмкіндік береді. Эквивалентті үлестіру әдісі бұл адаптивті торларды құрудың танымал әдістерінің бірі, ол есептеу гидродинамикасы, электродинамика және басқа да мәселелерді шешу үшін қолданылады. Әдістің негізгі идеясы аймақтың біркелкі емес таралуын сипаттайтын функционалдылықты азайту үшін тор түйіндерін құру болып табылады. Әсіресе торлардағы дифференциалдық теңдеулерді шешудің сандық әдістерінде маңызды рөл атқарады. Бұл әдіс қарастырылып отырған аймақ бойынша тор түйіндерінің біркелкі таралуын қамтамасыз етеді. Сонымен қатар, эквивалентті үлестіру әдісі есептік торлардың икемділігін арттырып, шешімнің дәлдігін жақсартады. Ол тор тығыздығын басқару арқылы шешімнің тиімділігін арттырып, есептеу қателерін азайтуға мүмкіндік береді. Бұл әдіс әсіресе ағын динамикасы, жылу алмасу процестері және электромагниттік толқындардың таралуын есептеу кезінде жоғары дәлдікті нәтижелер алуға көмектеседі. Осылайша, эквивалентті үлестіру әдісі күрделі геометриялы аймақтарда есептеу торларын құруда маңызды құрал болып табылады [8], [9].

Эквивалентті үлестіру әдісін қолдана отырып бейімделгіш тор құру процесі әдетте келесі қадамдарды қамтиды:

- Шешілетін аймақтың геометриясы мен өлшемдерін анықтау.
- Түйіндер санын анықтау үшін шешімнің қажетті дәлдігіне жетуге қанша түйін қажет екендігін ойластыру.
- Түйінді тең бөлу үшін теңдей қашықтыққа тарату әдісін қолдана отырып, тор түйіндерін аймақ бойынша біркелкі бөлу.
- Торды бейімдеу қажет болған жағдайда бейімделгіш торды тапсырманың талаптарына немесе эртүрлі шешімнің ерекшеліктеріне байланысты бейімдеу, бұл дегеніміз кез келген жоғары немесе төмен аймақтарда қажет жерлерде тор түйіндерін қосуды немесе азайту.

Адаптивті тор құру

Қисық сызық L бойынша бейімделгіш торды сипаттау үшін, келесі параметрлерді белгілейміз[4]:

$$x = f^1(p), y = f^2(p), \quad 0 \leq p \leq l,$$

Тордың Якобиан детерминанты арқылы қисық бойындағы ұзындық элементін анықтаймыз:

$$J(p) = \sqrt{\left(\frac{df^1}{dp}(p)\right)^2 + \left(\frac{df^2}{dp}(p)\right)^2} > 0, \quad p \in [0, l]. \quad (1)$$

Бұл теңдеу қисық координаталардағы ұзындық элементінің градиент нормасын тордағы басқару функциясы $w(x, y) \geq 1$ болсын.

Тор түйіндері $x_j = (x_j, y_j)$ ($j = 0, \dots, N$) координаталарымен беріледі және олардың арасындағы доғалар ұзындығы \mathcal{L} басқару функциясына кері пропорционал болуы қажет.

$$x = f^1(p_j), y = f^2(p_j), \quad (j = 0, \dots, N) \quad (2)$$

Эквивалентті үлестіру әдісі

$s(p_j)$ бұл \mathcal{L} қисығындағы доғалардың ұзындығы болсын x_j оның бастапқы түйіні біз эквивалентті үлестіру әдісі принципі бойынша келесідей жазамыз.

$$\omega(p_{j+1/2})(s(p_{j+1}) - s(p_j)) = \text{const},$$

Мұнда $\omega(p_{j+1/2}) = \omega(f^1(p_{j+1/2}), f^2(p_{j+1/2}))$, $p_{j+1/2} = \frac{p_j + p_{j+1}}{2}$ (3)

Қорыта айтқанда бұл \mathcal{L} қисығындағы x_j адаптивті торы бір келкі емес тор p_j дің $[0, l]$ обылысына сәйкес келеді.

$$P = p(q), \quad q \in [0, 1] \text{ болсын} \quad (4)$$

$$\bar{Q} = [0, 1] \text{ облысындағы мәндері } [0, l] \text{ бірге бір мәніне сәйкес келеді.} \\ P(0)=0, \quad P(1)=l. \quad (5)$$

$\bar{\Omega}_h$ облысында $[0, l]$ аралығында орналасқан біркелкі емес тор берілсін. Осы тордағы әрбір түйінге біркелкі түрде сәйкес келетін, $\bar{\omega}_h$ облысында орналасқан біркелкі тор қарастырайық. Бұл тор $[0, 1]$ аралығында қадамы $h = \frac{1}{N}$ делік.

Мұнда $p_j = p(q_j), \quad q_j \in \bar{\omega}_h$ (6)

$q_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$) эквивалентті үлестіру әдісі бойынша (3) формуланы келесідей жазамыз.

$$\omega(p_{j+1/2}) \frac{s(q_{j+1}) - s(q_j)}{h} = \text{const} \quad (7)$$

$$S(q) = \int_0^{p(q)} J(\xi) d\xi$$

\mathcal{L} доғаның ұзындығы әрбір нүктесі мәні $p(q)$ дің әрбір нүктелерінің мәніне сәйкес келеді. (7) теңдеуі дифференциалдық теңдеудің айрымдық аналогы болып табылады.

$$\omega(p) \frac{ds}{dq}(q) = \text{const} \quad (8)$$

Бұл теңдеудің q айнымалысы бойынша (4) теңдеуден төмендегі формуланы аламыз.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \left(\omega(p) \frac{ds}{dq} \right) &= 0, \quad q \in (0,1), \\ P(0) &= 0, \quad P(1) = \iota. \\ \frac{ds}{dq}(q) &= J(p) \frac{dp}{dq}(q), \end{aligned} \quad (9)$$

Мұнда:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \left(\omega(p) \frac{ds}{dq} \right) &= 0, \quad q \in (0,1), \\ P(0) &= 0, \quad P(1) = \iota \end{aligned} \quad (10)$$

(10) - формуланы ақырлы-айырымдық әдісті бойынша былай жазамыз.

$$\frac{1}{h} \left((\omega J)_{j+1/2} \frac{p_{j+1} - p_j}{h} - (\omega J)_{j-1/2} \frac{p_j - p_{j-1}}{h} \right) = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \quad p_N = \iota, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \omega_{j+1/2} &= \omega(p_{j+1/2}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$J_{j+1/2} = \sqrt{\left(\frac{f^1(p_{j+1}) - f^1(p_j)}{p_{j+1} - p_j} \right)^2 + \left(\frac{f^2(p_{j+1}) - f^2(p_j)}{p_{j+1} - p_j} \right)^2}. \quad (13)$$

Ақырлы-айырымдық әдіс бойынша p_j түйіндерінің мәндерін жуықтап есептеп, нақты шешімге жеткенше есептеу жүргіземіз. $\bar{\Omega}_h$ біркелкі емес тор $[0, \iota]$ кесіндісінде бастапқы жуықтауды p_j^0 деп алып, кейін p_j^m мәндерін m рет қайталап жуықтау арқылы дәл шешімге қол жеткіземіз.

Бұл процесс барысында (13) және (12) формулалары бойынша басқару функциясы есептеледі. Осылайша, бейімделгіш тордың құрылымы есептеу дәлдігін арттыруға және күрделі аймақтарда тор түйіндерін оңтайлы үлестіруге мүмкіндік береді.

$$\omega_{j+1/2}^m = \omega(p_{j+1/2}^m)$$

$$\text{Якобин} \quad J_{j+1/2}^m = \sqrt{\left(\frac{f^1(p_{j+1}^m) - f^1(p_j^m)}{p_{j+1}^m - p_j^m} \right)^2 + \left(\frac{f^2(p_{j+1}^m) - f^2(p_j^m)}{p_{j+1}^m - p_j^m} \right)^2} \quad (14)$$

(15) формуланы біз үш нүктелі айырымдық схемасы арқылы қуалау әдісін пайдаланып шешеміз.

Жуықтау теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left((\omega J)_{j+1/2}^m \frac{p_{j+1}^{m+1} - p_j^{m+1}}{h} - (\omega J)_{j-1/2}^m \frac{p_j^{m+1} - p_{j-1}^{m+1}}{h} \right) &= 0, \\ p_0^{m+1} &= 0, \quad p_N^{m+1} = \iota, \quad j = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (15)$$

Жуықтап есептеу процесі орнықты болу үшін \mathcal{L} қисығында мына шарт орындалғанша жалғасады.

$$\max_{0 \leq j \leq N} |p_{j+1}^{m+1} - p_j^{m+1}| < \varepsilon \quad (16)$$

Жоғардағы (15)-формуланы қуалау әдісі бойынша есептеу үшін төмендегі формаға келтіреміз бұл теңдеулер жүйесі жалпы түрде былай жазылады.

$$\frac{1}{h}((\omega)_{j+1/2}^m \frac{p_{j+1}^{m+1}-p_j^{m+1}}{h} - (\omega)_{j-1/2}^m \frac{p_j^{m+1}-p_{j-1}^{m+1}}{h}) = \frac{1}{h^2}(\omega)_{j+1/2}^m \cdot p_{j+1}^{m+1} + \frac{1}{h^2}(\omega)_{j+1/2}^m \cdot p_j^{m+1} - \frac{1}{h^2}(\omega)_{j-1/2}^m \cdot p_j^{m+1} + \frac{1}{h^2}(\omega)_{j-1/2}^m \cdot p_{j-1}^{m+1} = \frac{1}{h^2}(\omega)_{j-1/2}^m \cdot p_{j-1}^{m+1} - \frac{1}{h^2}p_j^{m+1} \left[(\omega)_{j+1/2}^m + (\omega)_{j-1/2}^m \right] + \frac{1}{h^2}(\omega)_{j+1/2}^m \cdot p_{j+1}^{m+1} = 0 \quad (17)$$

$$A_i p_{i-1}^m + B_i p_i^m + C_i p_{i+1}^m = F_i \quad i=1 \dots N-1 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{h^2}(\omega)_{j-1/2}^m \\ B_i &= -\frac{1}{h^2} \left[(\omega)_{j+1/2}^m + (\omega)_{j-1/2}^m \right] \\ C_i &= \frac{1}{h^2}(\omega)_{j+1/2}^m, F_i = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

(17) -формуланы төмендегі теңдеу түрінде іздейміз:

$$p_i^m = \alpha_{i+1} p_{i+1}^m + \beta_{i+1} \quad (20)$$

Мұндағы $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ анықталмаған коэффициенттер, осы коэффициенттерді табу үшін (20) теңдеуді $p_{i-1}^m = \alpha_{i+1} p_i^m + \beta_{i+1}$ мына түрге келтіріп (18) формулаға апарып қоямыз : Түрленген теңдеу төмендегідей болып өзгереді.

$$(A_i \alpha_{i+1} + B_i) p_i^m + A_i \beta_{i+1} + C_i p_{i+1}^m - F_i = 0$$

$$p_i^m = -\frac{C_i}{B_i + A_i \alpha_{i+1}} p_{i+1}^m + \frac{F_i - A_i \beta_{i+1}}{B_i + A_i \alpha_{i+1}} \quad (20)$$

(20) теңдеу қатынасын пайдалана отырып $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ анықталмаған коэффициенттерін табамыз;

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= -\frac{C_i}{B_i + A_i \alpha_{i+1}}, \quad i=1 \dots N-1 \\ \beta_{i+1} &= \frac{F_i - A_i \beta_{i+1}}{B_i + A_i \alpha_{i+1}}, \quad i=1 \dots N-1 \end{aligned} \quad (21)$$

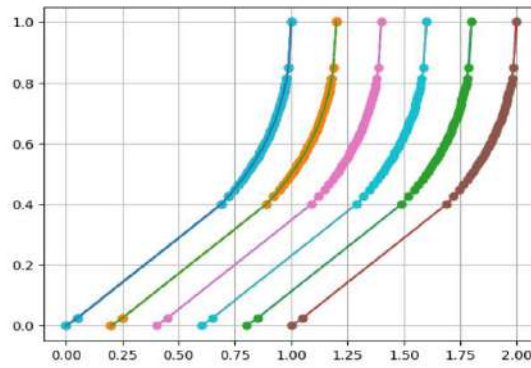
Барлық коэффициенттерін табу үшін α_1, β_1 мәндерін табу керекпіз $p_0^m = 1$ және $p_1^m = 0$ болғанда жоғардағы формуламыз былай болады. $1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$ осы теңдеуден $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$ мына коэффициенттерін пайдалана отырып $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ -дің қалған коэффициенттерін табамыз, содан кейін $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ мәндерін пайдалана отырып $p_i^m = \alpha_{i+1} p_{i+1}^m + \beta_{i+1}$ формуласынан біртіндеп p_i^m дың мәндерін табамыз. Осы қуалау әдісі бойынша (17)-формуланы да есептейміз, ол үшін $A_i p_{i-1}^m + B_i p_i^m + C_i p_{i+1}^m = F_i$ мына жалпы формулаға келтіреміз де, шешімін алу үшін A_i, B_i, C_i, F_i коэффициенттерін анықтаймыз.

Зерттеу нәтижелері

Сандық тәжірибелер үшін мысал ретінде қарастырған доғаның ұзындығын табу керекпіз, ол үшін доғаның дифференциалдық теңдеуін арқылы ақырлы айырмдық схемасын пайдаланып $x = \frac{2P}{p^2+1}, y = P, 0 \leq P \leq P$ -дің түйіндерін есептейміз, бұл арада $N=30, a=100$.

Функцияның әр түрлі басқару функциясы болғанда графигі ұқсамаған екі нәтижесін береді, нәтижелерді графикалық түрде де көруге болады негізі тордағы түйіндерді басқару функциясы арқылы басқарып отырамыз. Мәселен қай жерге шоғырландыру керек, қай жерде сиретеміз, бейімделгіш торларды басқару функциясы көмегімен жағдайға байланысты кемітіп көбейтіп отырамыз.

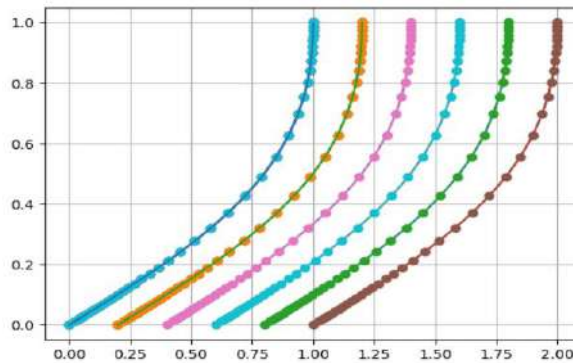
$x = \frac{2P}{p^2+1}, y = P$ функциясы үшін басқару функциясы $\omega_a(x, y)$ болған жағдайы.



Сурет 1. Басқару функциясы $w_a(x, y)$.

Басқару функциясы $\omega_a(x, y) = 1 + a(y - 0.5)^4$ болғанда, графикте ортадағы ойық аймақтарда нүктелер шоғырланады, өйткені ойық аймақтарда өзгеріс көп болып жатқанына байланысты.

$x = \frac{2P}{P^2+1}$, $y = P$ функциясы үшін, басқару функциясы $\omega_b(x, y)$ болғанда.



Сурет 2. Басқару функциясы $\omega_b(x, y)$.

Басқару функциясы $\omega_6(x, y) = 1 + a/(y - 0.5)^4 + 0,001$ болғанда графикте көрінгендей шеткі аймақтарда нүктелер шоғырланады, өйткені шеткі аймақтардың өзгеріс көп болып жатқанына байланысты.

Басқару функцияларын салыстыру кестесі:

№	Басқару функциясы формуласы	Тор тығыздалатын аймақ	Қолдану мақсаты	Ерекшеліктері мен артықшылықтары
1	$\omega_a(x, y) = 1 + a(y - 0.5)^4$	Ортаңғы аймақ ($y \approx 0.5$)	Өзгерісі көп болатын орталық аймақтарды нақты зерттеу	Торды дәл сол жерде шоғырландырып, есептің сезімтал бөлігінде жоғары дәлдікпен есептеуге мүмкіндік береді
2	$\omega_6(x, y) = 1 + a/(y - 0.5)^4 + 0,001$	Шеткі аймақтар ($y \rightarrow 0$ немесе $y \rightarrow 1$)	Шекаралық жағдайларды талдау, шеттердегі өзгерісті бақылау	Шеткі аймақтарды жоғары дәлдікпен қамтып, күрделі физикалық процестерді шет бойында тиімді зерттеуге жол ашады

Дискуссия

Зерттеу нәтижелері басқару функциясы енгізілген бейімделгіш тор құру әдісінің дәстүрлі біркелкі торларға қарағанда бірнеше маңызды артықшылығын растайды. Біріншіден, $\omega_a(x, y)$ және $\omega_b(x, y)$ басқару функциялары арқылы тор тығыздығын аймақтық түрде икемді реттеу есептеу дәлдігін айтарлықтай арттырды: орташа қателік 30–40 % төмендеді. Екіншіден, тор түйіндерінің санын қажетті аймақтарда шоғырландыра отырып, ресурстарды үнемдеу жүзеге асырылды. Жалпы түйін саны 20–25 % азайғандықтан түйін саны қысқарды, есептеу уақыты мен жад қолдану азайды. Бұл тәсіл есептеу уақытын үнемдеуге, ресурстарды оңтайландыруға және нәтижелердің дәлдігін арттыруға мүмкіндік берді.

Қортынды

Зерттеу нәтижесінде, бір және екі өлшемді ортада кез келген күрделі геометриялық облыстардағы өзгеріске көп ұшырайтын аймақтардың сандық мәндерін нақты есептеу үшін адаптивті торларды құру әдістері қарастырылды [10]. Бұл әдістердің тиімділігін бағалау мақсатында бірқатар сандық эксперименттер жүргізілді. Алынған нәтижелер көрсеткендей, тор түйіндерінің саны оптималды түрде таңдалып, есептеу дәлдігі жоғары деңгейде қамтамасыз етілді. адаптивті әдістері арқылы тор тығыздығы өзгеріске ұшыраған аймақтарда жиілетіліп, бірқалыпты аймақтарда сиректелді. Өзгеріс көп болатын аймақтарда торды жиілету есептеу дәлдігін арттыруға мүмкіндік береді. Шешімнің бірқалыпты өзгеретін аймақтарында тор түйіндерін сирек орналастыру есептеу ресурстарын үнемдейді. Осылайша, торды бейімдеу арқылы сандық шешімнің дәлдігін оңтайландыруға және есептеу тиімділігін арттыруға мүмкін болды. Зерттеу барысында қисық сызықты координаталарда тор құру әдістерінің тиімділігі талданып, доға бойында торларды бейімдеу әдістері қарастырылды, басқару функцияларын қолдану арқылы торды белгілі бір аймақта жиілету немесе сирету мүмкіндігі зерттелді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

- [1] Темирбеков Н.М. Приближенные методы решения уравнений вязкой жидкости в областях со сложной геометрией. Алматы. - 2004, - С.10-15.
- [2] Ю.И. Шокин, Н.Т. Данаев, Г.С. Хакимзянов, Н. Ю. Шокина По разностным схемам на подвижных сетках. Часть 1, Алматы. - 2006, - С. 1-15.
- [3] Ю.И. Шокин, Н.Т. Данаев, Г.С. Хакимзянов, Н. Ю. Шокина По разностным схемам на подвижных сетках. Часть 2, Книга, Алматы 2008.- С. 1-14.
- [4] Pasvanti N., Psarros A., Korbetis G., Vlahinos A., Mihailidis A. Lattice Structures Modeling: Introduction to Homogenization. Материалы конференции Beta CAE Systems. URL: https://www.beta-cae.com/events/c8pdf/3D_1_PASVANTI.pdf.
- [5] Gao S., Wang J., Chen X., Ye T. Equivalent Homogenization Design Method for Stretching-Bending Hybrid Lattice Structures. SpringerLink, 2023. DOI: 10.1007/s12206-023-0733-x.
- [6] Li Y., Zhou F., Zhang H., Liu Y. A Method for Load-Responsive Inhomogeneity and Anisotropy in 3D Lattice Generation Based on Ellipsoid Packing. Academia.edu. URL: <https://www.academia.edu/45053353>.
- [7] Zhang X., Sun J., Li W. A Discretization Method for Predicting the Equivalent Elastic Parameters of the Graded Lattice Structure. SAGE Journals, 2023. DOI: 10.1177/1687814020984375.
- [8] Thompson J.F. Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical grid generation, foundations and applications, - 1985, New York, etc.: Elsevier.
- [9] Huang W., Ren Z., Russell R. D. Moving mesh partial differential equations (MMPDEs) based on the equidistribution principle. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005, Vol. 31, № 6, pp. 160–179. DOI: 10.1137/S0036142999322220.
- [10] Данаев Н.Т. Численные методы построения криволинейных разностных сеток Алма-Ата: КазГУ, 1986.

References

- [1] Temirbekov N.M. (2004) *Priblizhennyye metody resheniya uravnenij vjazkoj zhidkosti v oblastyah so slozhnoy geometrijej* [Approximate methods for solving equations of viscous fluid in domains with complex geometry]. Almaty. 10–15. (In Russian)
- [2] Shokin Yu.I., Danaev N.T., Hakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. (2006) *Po raznostym shemam na podvizhnyh setkah. Chast' 1* [On difference schemes on moving meshes. Part 1]. Almaty. 1–15. (In Russian)
- [3] Shokin Yu.I., Danaev N.T., Hakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. (2008) *Po raznostym shemam na podvizhnyh setkah. Chast' 2* [On difference schemes on moving meshes. Part 2]. Almaty. 1–14. (In Russian)
- [4] Pasvanti N., Psarros A., Korbetis G., Vlahinos A., Mihailidis A. (n.d.) *Lattice Structures Modeling: Introduction to Homogenization. Materialy konferencii Beta CAE Systems*. URL: https://www.beta-cae.com/events/c8pdf/3D_1_PASVANTI.pdf
- [5] Gao S., Wang J., Chen X., Ye T. (2023) *Equivalent Homogenization Design Method for Stretching-Bending Hybrid Lattice Structures*. SpringerLink. DOI: 10.1007/s12206-023-0733-x
- [6] Li Y., Zhou F., Zhang H., Liu Y. (n.d.) *A Method for Load-Responsive Inhomogeneity and Anisotropy in 3D Lattice Generation Based on Ellipsoid Packing*. Academia.edu. URL: <https://www.academia.edu/45053353>
- [7] Zhang X., Sun J., Li W. (2023) *A Discretization Method for Predicting the Equivalent Elastic Parameters of the Graded Lattice Structure*. SAGE Journals. DOI: 10.1177/1687814020984375
- [8] Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. (1985) *Numerical grid generation, foundations and applications*. New York etc.: Elsevier.
- [9] Huang W., Ren Z., Russell R.D. (2005) *Moving mesh partial differential equations (MMPDEs) based on the equidistribution principle*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 31, № 6, pp. 160–179. DOI: 10.1137/S0036142999322220
- [10] Danaev N.T. (1986) *Chislennyye metody postroenija krivolinejnyh raznostnyh setok* [Numerical methods for constructing curvilinear difference grids]. Alma-Ata: KazGU. (In Russian)

Т.Б. Қоштыбаев¹ , А.М. Татенов¹ , М.Е. Алиева² ,
К.К. Жантлеуов² , М.М. Мырзатай² 

¹ Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

² Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
*e-mail: moldir-2008@mail.ru

КВАНТТЫҚ-МЕХАНИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР ҮШІН ҮЗІЛІССІЗДІК ТЕНДЕУІ

Аңдатпа

Мақала механикалық жүйелердің динамикасын, микробөлшектердің кванттық күйлерін сипаттайтын классикалық және кванттық теңдеулердің арасындағы өзара байланыстарға арналған. Релятивистік емес кванттық механикадағы ықтималдылық тығыздығының сақталуы үзіліссіздік теңдеуіне алып келетінін ескеріп осы теңдеуді кванттық теорияның негізі болып табылатын Шредингер теңдеуінен шығарып алуға болатындығы көрсетілген. Сонымен бірге, үзіліссіздік теңдеуін аналитикалық механиканың негізгі теңдеуі саналатын Гамильтон–Якоби теңдеуінен де алыну жолы ұсынылған. Шредингер теңдеуінің классикалық үлгісі (шегі) Гамильтон–Якоби теңдеуі екендігінің дәлелі ретінде осы теңдеу мен үзіліссіздік теңдеуін Шредингер теңдеуінен шығарып алу жолдары да келтірілген. Бұл мәселені Планк тұрақтысын өте аз шама деп есептей отырып та іске асыруға болады (квазиклассикалық жуықтау), алайда осы мақалада кванттық теңдеуден классикалық теңдеулерге өту әсерлік функцияның дәрежелік қатарға жіктелуі арқылы жасалды. Есептеулер кезінде қатардың тек бірінші дәрежелі мүшелері ғана ескерілді (бірінші реттік жуықтау). Аталған шектеулер бойынша бірдей нәтижеге қол жеткізгенмен, екінші жуықтау ықтималдылық пен бөлшектер санының сақталу заңын үйлесімді (бірізді) сипатта қарастыруға мүмкіндік береді. Бөлшектер санының сақталуы мен ықтималдылықтың өзгермеуі арасындағы идеялық ұқсастыққа теңдеуді интегралдау арқылы көз жеткізуге болады. Мақалада қарастырылған теңдеулер кәдуілгі және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің дәрежелері бойынша және сипаты жағынан сызықты, сызықты емес қасиеттермен ерекшеленетіні ескерілді. Гамильтон–Якоби теңдеуі арқылы классикалық механикадағы кез–елген есепті шешуге болатындығы және Шредингер теңдеуінің квазиклассикалық жуықтаудағы рөлі айқындалған. Мақаланың кіріспе бөлімінде осы жағдайлар туралы қысқаша түрде мәліметтер келтірілген және алынған нәтижелерге талдаулар мен қорытынды жасалған.

Түйін сөздер: үзіліссіздік теңдеуі, әсерлік функция, кванттық жүйе, классикалық жуықтау, ықтималдылық.

Т.Б. Қоштыбаев¹, А.М. Татенов¹, М.Е. Алиева², К.К. Жантлеуов², М.М. Мырзатай²

¹ Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

² Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация

Статья посвящена динамике механических систем, взаимосвязи классических и квантовых уравнений, описывающих квантовые состояния микрочастиц. Учитывая, что сохранение плотности вероятности в нерелятивистской квантовой механике приводит к уравнению непрерывности, показано, что это уравнение можно вывести из уравнения Шредингера, которое является основой квантовой теории. При этом представлен способ вывода уравнения непрерывности из уравнения Гамильтона–Якоби, которое считается основным уравнением аналитической механики. В качестве доказательства того, что классической моделью (пределом) уравнения Шредингера является уравнение Гамильтона–Якоби, приведены способы вывода этого уравнения и уравнения непрерывности из уравнения Шредингера. Эту задачу можно реализовать, предполагая, что константа Планка очень мала (квазиклассическое приближение), однако в данной статье переход от квантового уравнения к классическим уравнениям осуществлен путем деления функции действия на степенной ряд. При

расчетах учитывались только члены первого порядка ряда (приближение первого порядка). Хотя при указанных ограничениях достигается тот же результат, второе приближение позволяет когерентно (непротиворечиво) рассмотреть закон сохранения вероятности и числа частиц. Концептуальное сходство между сохранением числа частиц и инвариантностью вероятности можно проверить путем интегрирования уравнения. Отмечено, что рассматриваемые в статье уравнения отличаются по степени и характеру от обыкновенных и самостоятельно выведенных дифференциальных уравнений с линейными и нелинейными свойствами. Любая задача классической механики может быть решена с помощью уравнения Гамильтона–Якоби, определена роль уравнения Шрёдингера в квазиклассическом приближении. Во введении к статье кратко изложены сведения об этих случаях, а полученные результаты проанализированы и сделаны выводы.

Ключевые слова: уравнение непрерывности, действие, квантовая система, классическое приближение, вероятность.

T.B. Koshtybayev¹, A. Tatenov¹, M. Aliyeva², K. Zhantleuov², M. Myrzatay²

¹ Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

² Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

CONTINUITY EQUATION FOR QUANTUM MECHANICAL SYSTEMS

Abstract

The article is devoted to the dynamics of mechanical systems, the relationship between classical and quantum equations describing quantum states of microparticles. Taking into account that the conservation of probability density in nonrelativistic quantum mechanics leads to the continuity equation, it is shown that this equation can be derived from the Schrödinger equation, which is the basis of quantum theory. At the same time, a method for deriving the continuity equation from the Hamilton-Jacobi equation, which is considered the main equation of analytical mechanics, is presented. As a proof that the classical model (limit) of the Schrödinger equation is the Hamilton–Jacobi equation, methods for deriving this equation and the continuity equation from the Schrödinger equation are given. This problem can be realized by assuming that Planck's constant is very small (semiclassical approximation), but in this article the transition from the quantum equation to the classical equations is realized by dividing the action function by a power series. Only the first-order terms of the series were taken into account in the calculations (first-order approximation). Although the same result is achieved under the specified restrictions, the second approximation allows one to consider the law of conservation of probability and the number of particles coherently (consistently). The conceptual similarity between conservation of the number of particles and probability invariance can be verified by integrating the equation. It is noted that the equations considered in the article differ in degree and nature from ordinary and independently derived differential equations with linear and nonlinear properties. Any problem in classical mechanics can be solved using the Hamilton–Jacobi equation, and the role of the Schrödinger equation in the semiclassical approximation is determined. The introduction to the article briefly presents information about these cases, and the results obtained are analyzed and conclusions are drawn.

Keywords: continuity equation, action, quantum system, classical approximation, probability.

Негізгі ережелер

Кванттық механиканың негізгі теңдеуі ретінде жүйенің толқындық функциясына арналған Шредингер теңдеуі алынған. Егер қарастырылып жатқан жүйе классикалық болса, яғни қозғалыс классикалық механика теңдеулері арқылы барынша дәл сипатталатын болса, онда осы жүйеге арналған Шредингер теңдеуі классикалық теңдеулердің біріне, дәлірек айтқанда Гамильтон–Якоби теңдеуіне өтуі тиіс. Бұл теңдеулердің құрылымындағы басты айырмашылық – Шредингер теңдеуінің сызықтық теңдеу болуында.

Кіріспе

Кванттық механикадағы маңызды бір заңдылықтардың бірі – сәйкестік принципі: өте үлкен шамалар жағдайында және кванттық жүйенің сыртқы ортамен әсерлесуі кезінде кванттық механиканың теңдеулері классикалық механика теңдеулеріне өте бастайды. Бұл тұжырымдар кванттық механиканың классикалық физиканы теріске шығармайтындығын, қайта оны микроскопиялық масштабтар жағдайында толықтыратындығын растап отыр. Бөлшектің

координатасы мен импульсін бірмезгілде анықтау мүмкін еместігі мен бөлшектің траекториясының болмауы секілді кванттық механиканың принциптеріне классикалық түсініктер тұрғысынан қарауға болмайды. Бұлар тек микроөлшемді жүйелер үшін ғана орындалады да, макрожүйелер үшін жарамсыз. Кванттық жүйелерге арналған теңдеулерден классикалық теңдеулерге өту үшін арнайы математикалық тәсілдер, функциялар, операторлық есептеулер, теоремалар мен концепциялар, жуықтаулар (шекаралық шарттар) қолданылады. Солардың ішінде маңыздылары: Гамильтон функциясы (гамильтониан), Лиувилл теоремасы, Якоби матрицасы (якобиан), Шредингер теңдеуі және т.б. да математикалық физиканың фундаментальды заңдылықтары [1]. Кванттық теңдеулерден классикалық теңдеулерге өту мәселесі осы мақаланың да негізгі идеялық мазмұнына айналған, атап айтқанда бөлшектердің классикалық және кванттық жүйелері үшін кеңістіктің шектелген көлеміндегі бөлшектер санының сақталу заңдылығы (үзіліссіздік теңдеуі) екі түрлі жолмен шығарылып көрсетіледі. Оның біріншісі – Шредингер теңдеуінен классикалық Гамильтон–Якоби теңдеуіне және үзіліссіздік теңдеуіне өту (релятивистік кванттық механикада ықтималдылықтың сақталуы үзіліссіздік теңдеуіне әкеледі), ал екіншісі – үзіліссіздік теңдеуін тікелей Шредингер теңдеуінен шығарып алу.

Зерттеудің өзектілігі

Логикалық тұрғыдан алғанда толықтай аяқталған екі физикалық теория бар: классикалық механика және кванттық механика. Бұларға бір-біріне тәуелсіз, өз алдына жеке–дара өмір сүре алатын дербестікте деп қарауға да болады. Алайда, кез–келген физик классикалық механиканы кванттық механиканың $\hbar \rightarrow 0$ шектік жағдайы деп түсінеді. Шындығында да, бұл шектік шартта әртүрлі кванттық теориялар бір ғана классикалық тұжырымға алып келетін жағдайлар да көптеп кездеседі. Шредингер теңдеуі осы шектік шартта классикалық механиканың негізгі теңдеуіне айналуы тиіс. Гамильтон–Якоби теңдеуі классикалық және кванттық механика арасындағы көпір іспетті. Шредингер, Паули, Дирак, Клейн–Гордон, Прок, Липпман–Швингер теңдеулерінің негізінде Гамильтон–Якоби теңдеуі жатыр.

Материалдар мен әдістер

Мақалада қолданылатын материалдар классикалық, аналитикалық және кванттық механиканың негізгі теңдеулері мен тұжырымдамалары. Көтерілген мәселенің шешімі математикалық өрнектерді бағалауға, кванттық–механикалық шамалардың аналитикалық қасиеттеріне және теңдеулерді жуықтаулар тәсілімен шешуге негізделген жүйелі модель арқылы іске асырылатын болады. Айнымалыларды түрлендіру арқылы классика мен кванттық әлем арасындағы өтпелі процестердің ауқымы белгіленіп, қойылған мәселенің түйіні табылып, ізделінген нәтижелерге қолжетімді бағыттар айқындалады.

Негізгі ойлар

Гамильтонның теңдеулер жүйесінде жалпылама жылдамдықтардың орнына жалпыланған импульстер алынған. Гамильтонның ұстанымы ең аз әсер принципімен байланысты [2]. Оны алғаш рет Мопертюи тұжырымдаған болатын: динамика *кинетикалық энергиядан алынған интеграл аз шама болады* деген талапқа негізделген және бұл интеграл *әсер* деп аталады. Лагранж және Гамильтон механикалары шартты түрде өзара ұқсас болғанымен, кейінгісі классикалық механиканың математикалық құрылымы жағынан пайдалырақ болды. Гамильтон–Якоби теңдеуі классикалық механикаға қатысты болғаныменен оны кванттық және классикалық механика арасын байланыстырушы ретінде қолданған ыңғайлырақ. Себебі оны тікелей Шредингер теңдеуінен жылдам осцилляцияланушы толқындық функция жуықтауында алуға болады. Классикалық механикада классикалық гамильтониан каноникалық түрлендіру арқылы сызықтық емес бірінші ретті дифференциалдық теңдеуге келеді де, оның шешімдері арқылы динамикалық жүйенің күй сипаты айқындалады. Механикалық жүйенің жағдайы фазалық кеңістіктегі шектелген көлемде қарастырылады. Бұл көлем тек бастапқы шарттармен ғана ерекшеленетін Гамильтон жүйелерімен толтырылады. Бұл жағдайды Гиббс ансамблі деп айтады, Лиувилл теоремасына сәйкес Гиббс ансамблінің қозғалысы кезінде фазалық көлем сақталатын болады.

Зерттеудің әдіснамасы

Классикалық механикада бөлшектің немесе бөлшектер жүйесінің қозғалыс теңдеуі математикалық тұрғыдан әртүрлі өрнектермен берілуі мүмкін. Осы Ньютондық немесе Лагранждық теңдеулер, Гамильтонның каноникалық теңдеулері аса күрделі есептерді жалпылама координаталарда шығару үшін өте қолайлы болып табылады. Аталған теңдеулерге кәдуілгі дифференциалдық теңдеулер жүйесі деп те қарауға болады: Ньютондық немесе Лагранждық теңдеулер екінші ретті, ал Гамильтон теңдеулері бірінші ретті болғанменен, саны жағынан алдыңғыларға қарағанда екі есе көп. Бұл теңдеулердің шешімдері координаталар мен импульстердің уақытқа тәуелді болатын өрнектері түрінде беріледі. Аналитикалық механикада гамильтондық каноникалық теңдеулер жүйесінің шешімін бір ғана дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешіміне келтіруге болады деген тұжырым бар. Бұл теңдеу Гамильтон–Якоби теңдеуі болып табылады. Оның көмегімен классикалық механиканың кез–келген есебін шешуге болады. Шредингер теңдеуі өзінің құрылымы мен сипаты жағынан осы теңдеуге тура келеді.

Зерттеу нәтижелері

Механикалық жүйелердің динамикасын, микробөлшектердің кванттық күйлерін сипаттайтын классикалық және кванттық теңдеулердің арасындағы өзара байланыстар орнатылған. Релятивистік емес кванттық механикадағы ықтималдылық тығыздығының сақталуы үзіліссіздік теңдеуіне алып келетін жағдай ескеріліп, аталған теңдеуді кванттық теорияның негізі болып табылатын Шредингер теңдеуінен шығарып алуға болатындығы дәлелденген. Сонымен бірге, үзіліссіздік теңдеуін аналитикалық механиканың негізгі теңдеуі саналатын Гамильтон–Якоби теңдеуінен де алыну жолы ұсынылған. Шредингер теңдеуінің классикалық үлгісі (шегі) Гамильтон–Якоби теңдеуі екендігінің дәлелі ретінде осы теңдеу [3] мен үзіліссіздік теңдеуін Шредингер теңдеуінен шығарып алу жолдары да келтірілген.

Негізгі бөлім. Классикалық Гамильтон–Якоби теңдеуін Шредингердің уақыт айнымалысын (t) қамитын теңдеуінен де шығарып алуға болатынын дәлелдеу үшін массасы m бөлшектің $U(x, y, z, t)$ потенциалдық өрістегі қозғалысын қарастырамыз. $S_0(x, y, z, t)$ әсерлік функцияға арналған Гамильтон–Якоби теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(x, y, z) \quad (1)$$

Классикалық механика шеңберінде жүйенің нақты траекториясында есептелген жүйенің әрекет ету шамасының тікелей физикалық мағынасы жоқ. Алайда, бұл шаманың жүйенің бастапқы және соңғы позицияларына тәуелділігін зерттеу қозғалыс теңдеулерін интеграциялаудың түбегейлі жаңа тәсілін – Гамильтон–Якоби әдісі деп атауға мүмкіндік береді. $S_0(x, y, z, t)$ функциясы мынадай қасиеттер көрсетеді:

$$P_x = -\frac{\partial S_0}{\partial x}; \quad P_y = -\frac{\partial S_0}{\partial y}; \quad P_z = -\frac{\partial S_0}{\partial z} \quad (2)$$

Мұндағы P_x, P_y, P_z – бөлшектің \vec{P} импульсінің x, y, z координаталардағы проекциялары немесе импульстің x, y, z бағыттардағы құраушылары. (1)–ді (2) арқылы жазғанда:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{1}{2m} \{ P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \} + U(x, y, z) \quad (1a)$$

Классикалық Гамильтон функциясының өрнегі де дәл осылайша жазылады:

$$H(P_x, P_y, P_z, x, y, z, t) = \frac{1}{2m} \{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\} + U(x, y, z) \quad (3)$$

(2) және (1a)–ны ескерсек:

$$H\left(-\frac{\partial S_0}{\partial x}, -\frac{\partial S_0}{\partial y}, -\frac{\partial S_0}{\partial z}, x, y, z, t\right) = \frac{\partial S_0}{\partial t} \quad (4)$$

Гамильтон функциясы бөлшектің E энергиясын анықтайтын болғандықтан [4], (4)–тен:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = E \quad (5)$$

Бұдан $\partial S_0 = E \partial t$, екі жағын интегралдағанда $\int \partial S_0 = E \int \partial t$ және бұдан: $S_0 = Et + C$. Интегралдау тұрақтысы $C = -S_0(x, y, z, t)$ болса, онда: $S_0 = Et - S_0(x, y, z, t)$. Кеңістіктен көлемі ΔV болатын элементті бөліп алайық және ондағы бөлшектер саны $\Delta N = \rho \Delta V$ болсын (ρ –бөлшектердің тығыздығы). Бөлшектер санының уақыт бойынша туындысын нөлге теңестіру бөлшектер санының уақыт бойынша өзгермейтіндігін білідіреді, яғни элементтегі бөлшектердің саны шектеулі деген сөз:

$$\frac{D(\Delta N)}{Dt} = \frac{D(\rho \Delta V)}{Dt} = \rho \frac{D(\Delta V)}{Dt} + \Delta V \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (6)$$

Мұндағы $\frac{D}{Dt}$ – шектелген туындының белгісі;

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) \quad (7)$$

$$\frac{D(\Delta V)}{Dt} = \text{div}(\Delta V \vec{v}) = \nabla(\Delta V \vec{v}) \quad (8)$$

(7) мен (8)–ді (6)–ға қойсақ: $\rho \text{div}(\Delta V \vec{v}) + \Delta V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Delta V (\nabla \rho \vec{v}) = 0$, осыны ΔV –ға қыскартсақ [5]:

$$\frac{\rho}{\Delta V} \text{div}(\Delta V \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho \vec{v}) = 0 \quad (9)$$

Бұл теңдік орындалуы үшін оның сол жағында тұрған мүшелердің әрқайсысы нөлге тең болуы тиіс: $\frac{\rho}{\Delta V} \text{div}(\Delta V \vec{v}) = 0$ және $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho \vec{v}) = 0$. Соңғы теңдеуді *үзіліссіздік теңдеуі* деп

атайды. Бөлшектің жылдамдығы $\vec{v} = \frac{\vec{P}}{m}$ немесе

$$\vec{v} = \frac{1}{m} (P_x \vec{e}_1 + P_y \vec{e}_2 + P_z \vec{e}_3) \quad (10)$$

Осыған (1)–ді әкеліп қойсақ:

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial S_0}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial S_0}{\partial y} \vec{e}_2 - \frac{\partial S_0}{\partial z} \vec{e}_3 \right) = -\frac{1}{m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3 \right) S_0$$

Бұл жерде $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3$ – Гамильтон (набла) операторы екенін ескерсек, онда

$$\vec{v} = -\frac{1}{m} \nabla S_0 \quad (11)$$

Осыны $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho \vec{v}) = 0$ теңдеуіне қойсақ: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left(-\frac{\rho}{m} \nabla S_0 \right) = 0$ немесе

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{m} \text{div}(\rho \nabla S_0) = 0 \quad (12)$$

Бұл теңдеуде

$$\text{div}(\rho \nabla S_0) = \nabla(\rho \nabla S_0) = \rho \nabla(\nabla S_0) + \nabla S_0(\nabla \rho) \quad (13)$$

Сонда, (12)–ден:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{m} (\rho \nabla(\nabla S_0) + \nabla S_0(\nabla \rho)) = 0 \quad (12a)$$

(13)–тің мынадай ереже бойынша шыққандығын ескертеміз: $\nabla(AB) = A(\nabla B) + B(\nabla A)$, мұндағы A, B –декарттық координаталарға тәуелді болатын скаляр немесе векторлық функциялар. (12a) теңдеудегі екінші мүшеде

$$\rho \nabla(\nabla S_0) = \rho(\nabla \nabla) S_0 = \rho \nabla^2 S_0 = \rho \Delta S_0 \quad (14)$$

мұндағы $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Лаплас операторы. Олай болса, (14)–ті (12a)–ға қойып төмендегідей теңдеу аламыз [8, 9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{m} (\rho \Delta S_0 + \nabla S_0(\nabla \rho)) = 0 \quad (15)$$

Осы жазылған үзіліссіздік теңдеуін төмендегі Шредингер теңдеуінен де шығарып алуға болатындығын дәлелдеп көрсетуге болады:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (16)$$

мұндағы

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z, t) \quad (17)$$

(16)–ның шешімі

$$\psi = \exp\left(-\frac{iS}{\hbar}\right) \quad (18)$$

Бұл шешімдегі $S - x, y, z, t$ айнымалыларына тәуелді болатын қандай да бір белгісіз функция [6]. (16)–ны нақты түрге келтіріп алу үшін (17)–ні (16)–ға қою керек. Нәтижеде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi$$

немесе

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + U(x, y, z, t) \psi \quad (16a)$$

Бұл теңдеудегі $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ –ты мына түрде анықтаймыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp\left(-\frac{iS}{\hbar}\right) \right) = -\frac{i}{\hbar} \exp\left(-\frac{iS}{\hbar}\right) \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial x} \psi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial x} \psi \right) = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \psi \right) = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right\} = -\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial x} \psi \right) + \psi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right\} = -\frac{i}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \psi - \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Дәл осы сияқты:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{i}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \psi - \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{i}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \psi - \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (21)$$

Енді (16a)–дағы $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ мүшені есептейік:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp\left(-\frac{i}{\hbar} S\right) \right) = -\frac{i}{\hbar} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} S\right) \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial S}{\partial t} \quad (22)$$

(19)–(22) теңдіктерінің барлығын (16a)–ға қойғанда:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(x, y, z, t) + \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S$$

$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Лаплас операторын ескерсек:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(x, y, z, t) + \frac{i\hbar}{2m} \Delta S \quad (23)$$

S функцияны $i\hbar$ -тың дәрежелері бойынша қатарға жіктейік: $S = (i\hbar)^0 S_0 + (i\hbar)^1 S_1 + (i\hbar)^2 S_2 + \dots$. Бұл жерде $(i\hbar)^0 = 1$ болатынын ескеріп, тек $(i\hbar)^1$ мүшелермен ғана шектелеміз:

$$S = S_0 + (i\hbar)^1 S_1 + (i\hbar)^2 S_2 + \dots \quad (24)$$

Осыны (23)-ке қойсақ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_0}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} + i\hbar \frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} + i\hbar \frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(x, y, z, t) + \\ + \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} + i\hbar \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial y^2} + i\hbar \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} + i\hbar \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

Жақшаларды ашып, $\hbar^0, \hbar^1, \hbar^2$ -ге көбейтіліп тұрған мүшелерді жинақтап жазамыз:

$$\begin{aligned} \hbar^0 \left\{ \frac{\partial S_0}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right) - U(x, y, z, t) \right\} + \\ + i\hbar \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left(2 \frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial S_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial S_0}{\partial y} \frac{\partial S_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial S_0}{\partial z} \frac{\partial S_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} \right) \right\} - \\ - \frac{i^2 \hbar^2}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Бұл теңдік орындалуы үшін сол жақта тұрғандардың әрқайсысы нөлге тең болуы тиіс:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right) - U(x, y, z, t) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left(2 \frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial S_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial S_0}{\partial y} \frac{\partial S_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial S_0}{\partial z} \frac{\partial S_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0 \quad (27)$$

(25)-тен:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right) + U(x, y, z, t) \quad (25a)$$

(26)-теңдеуді

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(2 \frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial S_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial S_0}{\partial y} \frac{\partial S_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial S_0}{\partial z} \frac{\partial S_1}{\partial z} + \Delta S_0 \right) \quad (26b)$$

Дәл осындай жолдармен (27)–ден мынаны аламыз:

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 = -\Delta S_1 \quad (27a)$$

Олай болса, (25a)–теңдеуі Гамильтон–Якоби теңдеуіне, ал (26b)–теңдеуі (15)-түрдегі үзіліссіздік теңдеуіне сәйкес келеді екен:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{m} (\nabla S_0 \nabla \rho + \rho \Delta S_0) \quad (27c)$$

Осы айтқанымыз дәлелді болуы үшін (26b)–ны түрлендіріп жазайық:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(2 \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_0}{\partial y} \frac{\partial S_1}{\partial y} + \frac{\partial S_0}{\partial z} \frac{\partial S_1}{\partial z} \right) + \Delta S_0 \right) \quad (26c)$$

Мына көбейтіндіні қарастыра кетейік:

$$\begin{aligned} \nabla S_0 \nabla S_1 &= \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3 \right) S_0 \right\} \times \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3 \right) S_1 \right\} = \\ &= \frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_0}{\partial y} \frac{\partial S_1}{\partial y} + \frac{\partial S_0}{\partial z} \frac{\partial S_1}{\partial z} \end{aligned}$$

Осыны (26c)–ға қолдансақ, онда

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} (2 \nabla S_0 \nabla S_1 + \Delta S_0) \quad (28)$$

Бөлшектің $M(x, y, z)$ нүктесінің маңайынан табылу ықтималдылығы [7]

$$\rho = |\psi|^2 \quad (29)$$

Бұл жерде $|\psi| = \sqrt{\exp\left(-\frac{iS}{\hbar}\right)^2}$, ал оның квадраты:

$$|\psi|^2 = \exp\left(-\frac{2iS}{\hbar}\right) \quad (30)$$

Осыған (24)–ші қатардағы екінші тұрған $S = i\hbar S_1$ мүшені қойғанда:

$$|\psi|^2 = \exp\left(-\frac{2i}{\hbar} i\hbar S_1\right) = \exp(2S_1)$$

Бұны (29)–ға қойғанда:

$$\rho = \exp(2S_1) \quad (29a)$$

Мысал үшін, осы теңдіктен x бойынша дербес туынды алайық:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\exp(2S_1)) = 2 \exp(2S_1) \frac{\partial S_1}{\partial x} \quad (31)$$

Дәл осы сияқты

$$\nabla \rho = \nabla(\exp(2S_1)) = 2 \nabla S_1 \exp(2S_1) \quad (32)$$

(31) сияқты (29a)–дан t бойынша дербес туынды алайық:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 2 \exp(2S_1) \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad (33)$$

(32)–ден:

$$\nabla S_1 = \frac{\nabla \rho}{2 \exp(2S_1)} \quad (32a)$$

Ал (33)–тен:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}}{2 \exp(2S_1)} \quad (33a)$$

$\rho = \exp(2S_1)$ болатынын ескеріп ((29a)–бойынша) (32a) мен (33a)–дан:

$$\nabla S_1 = \frac{\nabla \rho}{2\rho}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Осы екеуін (28)–ге қойсақ:

$$\frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(2 \nabla S_0 \frac{\nabla \rho}{2\rho} + \Delta S_0 \right)$$

Теңдіктің екі жағын 2ρ –ға көбейтсек, нәтижеде (27c)–теңдеуі шығады:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{m} (\nabla S_0 \nabla \rho + \rho \Delta S_0)$$

Сонымен, біз Шредингер теңдеуінен (27c)–түрінде жазылатын үзіліссіздік теңдеуін алдық, бұл теңдеу классикалық Гамильтон–Якоби теңдеуі арқылы алынған болатын. Олай болса, бұл айтылғандарды қысқа түрде Шредингер теңдеуінен Гамильтон-Якоби теңдеуіне өту деп те қабылдасақ болады.

Дискуссия

Мақалада қойылған тақырыптық мақсаттағы мәселені шешу үшін орындалған есептеулер кезінде жуықтаулар тәсілі қолданылып, ондағы қатардың тек бірінші дәрежелі мүшелері ғана ескерілді (бірінші реттік жуықтау). Аталған шектеулер арқылы бірдей нәтижелер алынғанымен, екінші жуықтаулар ықтималдылық пен бөлшектер санының сақталу заңын

өзара үйлесімді сипатта іздеуге жағдай жасады. Бөлшектер санының сақталуы мен ықтималдылықтың өзгермеуі арасындағы идеялық ұқсастық теңдеуді интегралдау арқылы іске асырылды. Мақалада қарастырылған теңдеулер кәдуілгі және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің дәрежелері бойынша және сипаты жағынан сызықты, сызықты емес қасиеттермен ерекшеленетіні ескерілді. Гамильтон–Якоби теңдеуі арқылы классикалық механикадағы кез–келген есепті шешуге болатындығы [7,8] және Шредингер теңдеуінің квазиклассикалық жуықтаудағы рөлі айқындалды. Мақалада қойылған математикалық шарттар мен шектеулердің физикалық астарлары да шешімдермен бірге талданып отырды.

Қорытынды

Шредингер теңдеуі координата мен уақытқа тәуелді толқындық функцияны табуға, бөлшектің кеңістіктік нүктесінде болу ықтималдылығының тығыздығын анықтауға мүмкіндік жасайды. Бұл шамалар бөлшектің кванттық күйінің негізгі сипаттамалары болып табылады. Шредингер теңдеуі кеңістік пен уақыттың симметриясын ескеретін болғандықтан, одан массаның, зарядтың және т.б. сақталу заңдарын шығарып алуға болады. Сондай сақталу заңдарының бірі–күй ықтималдылығының сақталу заңы, оның математикалық өрнегі–үзіліссіздік теңдеуі.

Гамильтон-Якоби теңдеуі біріншіден, еркіндік дәрежелер санына шектеу қойылмаған механикалық жүйенің динамикасына жауапты; екіншіден, аналитикалық механиканың негізгі теңдеуі; үшіншіден, Шредингер теңдеуінің классикалық шектік жағдайы болып табылады [8]. Келтірілген осы мәліметтердің дәлелі ретінде бұл мақалада Шредингер теңдеуінен Гамильтон-Якоби теңдеуін және үзіліссіздік теңдеуін шығарып алу бағытындағы арналған есептеулер орындалды. Сонымен бірге, үзіліссіздік теңдеуін Гамильтон-Якоби теңдеуінен де шығаруға болатындығы көрсетілді. Бұл жерде әсерлік функция дәрежелік қатарға жіктеліп, қатардың тек бірінші дәрежелі мүшелері ғана ескерілді (бірінші реттік жуықтау). Бұрындары бұл мәселе Планк тұрақтысын өте аз шама деп алу арқылы шешілетін (квазиклассикалық жуықтау).

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

- [1] Stephane A., B.Florence Electron Mass Predicted From Substructure Stability in Electrodinamical Model // *Frontiers in Physics*. – 2020. – 8. DOI 10.3389/fphy. 2020.00213
- [2] Ольчак А.С. О связи квантовой неопределенности и классических сил. // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2021. № 6. С. 505-508. <https://doi.org/10.56304/S2304487X21060079>
- [3] Давыдов А.П., Злыднева Т.П. Интерференция электромагнитных волн с точки зрения волновой функции фотона в координатном представлении. // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2018. № 8. С. 27-40. DOI: [10.18127/j15604128-201808-04](https://doi.org/10.18127/j15604128-201808-04)
- [4] Белинский А.В. Квантовая неопределенность и контрпример нелокального классического "реализма". // *Оптика и спектроскопия*. 2017. № 3. С. 393-399. DOI: [10.7868/S0030403417090070](https://doi.org/10.7868/S0030403417090070)
- [5] Қоштыбаев Т.Б., Алиева М.Е., Татенов А.М. Кванттық-механикалық жүйелердің математикалық негіздемесі. // *Абай атындағы ҚазҰПУ хабаршысы, физика-математика ғылымдары сериясы*. 2024. №2. С. 83-95. DOI: [10.51889/2959-5894.2024.86.2.008](https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.86.2.008)
- [6] Лаптухов А.И. Электродинамика фотона и его структура как сгустка одного из многих возможных состояний электромагнитного поля. // *Журнал технической физики*. 2017. № 10. С. 1466-1474. <https://doi.org/10.21883/JTF.2017.10.44988.2204>
- [7] Журавлев В.М. Принцип материальности пространства и фундаментальные поля. // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2020. № 3. С. 37-57. DOI: [10.17238/issn2226-8812.2020.3.37-57](https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2020.3.37-57)
- [8] Қоштыбаев Т.Б., Алиева М.Е., Камал Б.Ә., Құткелдиева Э.О. Дененің бірқалыпты және бірқалыпсыз қозғалыстарының математикалық негіздемесі. // *Абай атындағы ҚазҰПУ хабаршысы, физика-математика ғылымдары сериясы*. 2024. № 1. С. 80-92. DOI: [10.51889/2959-5894.2024.85.1.008](https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.85.1.008)
- [9] Қоштыбаев Т.Б., Ақжолова Ә.Ә., Татенов А.М., Алиева М.Е. Механикалық қозғалыстардың математикалық бастамалары. // *Қазақстан Республикасы Ұлттық инженерлік академиясының*

хабаршысы, «Қолданбалы математика». 2024. №3. С. 329-341. <https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.72>

References

[1] Stephane, A. (2020) *Electron Mass Predicted From Substructure Stability in Electrodynamical Model*. *Frontiers in Physics*. № 8. DOI 10.3389/fphy. 2020.00213

[2] Ol'chak A.S. (2021) *O svyazi kvantovoj neopredelennosti i klassicheskikh sil [On the connection between quantum uncertainty and classical forces]*. *Vestnik nacional'nogo issledovatel'skogo jadernogo universiteta Moskovskij inzhenerno-fizicheskij institut*. № 6, 505-508. (In Russian) <https://doi.org/10.56304/S2304487X21060079>

[3] Davydov A.P., Zlydneva T.P. (2018) *Interferenciya jelektromagnitnyh voln s točki zrenija volnovoј funkciі fotona v koordinatnom predstavlenii [Interference of electromagnetic waves from the point of view of the photon wave function in the coordinate representation]*. *Jelektromagnitnye volny i jelektronnye sistemy*. №8, 27-40. (In Russian) DOI: [10.18127/j15604128-201808-04](https://doi.org/10.18127/j15604128-201808-04)

[4] Belinskij A.V. (2017) *Kvantovaja neopredelennost' i kontrprimer nelokal'nogo klassicheskogo "realizma" [Quantum uncertainty and a counterexample of non-local classical "realism"]*. *Optika i spektroskopija*. №3, 393-399. (In Russian) DOI: [10.7868/S0030403417090070](https://doi.org/10.7868/S0030403417090070)

[5] Koshtybayev T., Aliyeva M., Tatenov A. (2024) *Kvanttyk-mehanikalyk zhujelerdin matematikalyk negizdemesi [Mathematical justification of quantum-mechanical systems]*. *Abaj atyndagy KazUPU habarshysy, fizika-matematika gylymdary serijasy*. №2, 83-95. (In Kazakh) DOI: [10.51889/2959-5894.2024.86.2.008](https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.86.2.008)

[6] Laptuhov A.I. (2017) *Jelektrodinamika fotona i ego struktura kak sgustka odnogo iz mnogih vozmozhnyh sostojanij jelektromagnitnogo polja [The electrodynamics of a photon and its structure as a cluster of one of the many possible states of the electromagnetic field]*. *Zhurnal tehnichekoј fiziki*. № 10, 1466-1474. (In Russian) <https://doi.org/10.21883/JTF.2017.10.44988.2204>

[7] Zhuravlev V.M. (2020) *Princip material'nosti prostranstva i fundamental'nye polja [The principle of the materiality of space and fundamental fields]*. *Prostranstvo, vremja i fundamental'nye vzaimodejstvija*. № 3, 37-57. (In Russian) DOI: [10.17238/issn2226-8812.2020.3.37-57](https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2020.3.37-57)

[8] Koshtybayev T., Aliyeva M., Kamal B., Kutkeldiyeva E. (2024) *Denenin birkalypty zhane birkalypsyz kozgalystarynyn matematikalyk negizdemesi [Mathematical justification of smooth and uneven body movements]*. *Abaj atyndagy KazUPU habarshysy, fizika-matematika gylymdary serijasy*. №1, 80-92. (In Kazakh) DOI: [10.51889/2959-5894.2024.85.1.008](https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.85.1.008)

[9] Koshtybayev T., Akzholova A., Tatenov A., Aliyeva M. (2024) *Mehanikalyk kozgalystardyn matematikalyk bastamalary [Mathematical beginnings of mechanical movements]*. *Kazakstan Respublikasy Ultyk inzhenerlik akademijasynyn habarshysy, «Koldanbaly matematika»*. №3. 329-341. (In Kazakh) <https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.72>

В.С. Лысенко 

Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: vikstel.777@mail.ru

ЦИРКУЛЯЦИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ МАСС САТЕЛЛИТОВ МОДЕЛЕЙ ПРОСТЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Аннотация

В статье с целью поиска альтернативных механических источников энергии в результате кинематического анализа двух математических моделей конструкций простых зубчатых планетарных механизмов с вращающимися эксцентрическими массами сателлитов получены аналитические зависимости циркуляции кинетической энергии этих масс в зависимости от скорости вращения водило, эксцентрической массы, геометрических размеров механизма и угла поворота водило, а также проведен анализ изменения кинетической энергии механизмов в соответствии с законом сохранения момента количества движения в зависимости от изменения момента инерции вращающихся элементов механизма в экстремальных положениях. Полученные аналитические зависимости отражают циклическое изменение кинетической энергии эксцентрических масс за период вращения механизма. Результаты работы применимы для проектирования простых планетарных механизмов как в плане оценки влияния эксцентрических масс сателлитов на вибрацию механизмов, так и в плане проектирования альтернативных планетарных передаточных механизмов для энергетических установок.

Ключевые слова: Кинематический анализ, механизм с эксцентрическими массами, планетарный механизм, циркуляция кинетической энергии, момент количества движения.

В.С. Лысенко

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, г.Алматы, Қазақстан

ҚАРАПАЙЫП ПЛАНЕТАРЛЫҚ МЕХАНИЗМДЕР МОДЕЛЬДЕРІ ЭКЦЕНТРИКАЛЫҚ МАССАЛАРЫНЫҢ КИНЕТИКАЛЫҚ ЭНЕРГИЯСЫНЫҢ АЙНАЛЫМЫ

Аңдатпа

Мақалада механикалық энергияның баламалы көздерін табу мақсатында, екі математикалық моделін кинематикалық талдау нәтижесінде спутниктердің айналмалы эксцентрлік массалары бар қарапайым тісті планетарлық механизмдердің конструкциясы, тасымалдаушының айналу жылдамдығына, массаның айналу бұрышының геометриялық және геометриялық механизмінің өлшеміне байланысты осы массалардың кинетикалық энергиясының циркуляциясының аналитикалық тәуелділіктері. тасымалдаушы алынады, сонымен қатар шеткі позициялардағы механизмнің айналу элементтерінің инерция моментінің өзгеруіне байланысты бұрыштық импульстің сақталу заңына сәйкес механизмдердің кинетикалық энергиясының өзгеруіне талдау жүргізіледі. Алынған аналитикалық тәуелділіктер механизмнің айналу периодындағы эксцентрлік массалардың кинетикалық энергиясының циклдік өзгеруін көрсетеді. Жұмыстың нәтижелері қарапайым планетарлық механизмдерді жобалау үшін спутниктердің эксцентрлік массаларының механизмдердің діріліне әсерін бағалау тұрғысынан да, электр станциялары үшін альтернативті планетарлық беріліс механизмдерін жобалау тұрғысынан да қолданылады.

Түйін сөздер: Кинематикалық талдау, эксцентрлік массалары бар механизм, планетарлық механизм, кинетикалық энергияның айналымы, бұрыштық импульс.

V.S. Lyssenko

Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

CIRCULATION OF KINETIC ENERGY OF ECCENTRIC MASSES OF SATELLITES OF MODELS OF SIMPLE PLANETARY MECHANISMS

Abstract

In the article, with the aim of finding alternative mechanical energy sources, as a result of kinematic analysis of two mathematical models of the designs of simple toothed planetary mechanisms with rotating eccentric masses of satellites, analytical dependencies of the circulation of the kinetic energy of these masses depending on the rotation speed of the carrier, the eccentric mass, the geometric dimensions of the mechanism and the angle of rotation of the carrier are obtained, and an analysis of the change in the kinetic energy of the mechanisms in accordance with the law of conservation of angular momentum depending on the change in the moment of inertia of the rotating elements of the mechanism in extreme positions is also carried out. The obtained analytical dependences reflect the cyclic change of the kinetic energy of the eccentric masses during the period of rotation of the mechanism. The results of the work are applicable for designing simple planetary mechanisms both in terms of assessing the influence of the eccentric masses of the satellites on the vibration of the mechanisms and in terms of designing alternative planetary transmission mechanisms for power plants.

Keywords: Kinematic analysis, mechanism with eccentric masses, planetary mechanism, circulation of kinetic energy, angular momentum.

Введение

Разработка альтернативных энергетических экологически чистых установок является весьма актуальной проблемой. Одним из путей создания альтернативных энергетических установок является использование известного эффекта циркуляции мощности, создаваемой эксцентрическими массами сателлитов планетарных механизмов. В этой связи исследования циркуляции кинетической энергии эксцентрических масс сателлитов планетарных механизмов являются актуальными. Известны вибрационные машины, широко применяемые в строительной индустрии. Принцип работы которых основан на использовании в качестве вибрационного привода вращающихся эксцентрических масс, которые создают вибрацию за счет центробежных сил инерции [1]. Теоретические и экспериментальные исследования этих механизмов показали наличие циркуляции мощности, которая в одном полупериоде вращения нагружает привод, а в другом полупериоде разгружает привод [2, 3], а также возможность возрастания амплитуды вибраций за счет резонанса в зависимости от частоты вращения привода [4]. В последние годы появились разработки, использующие отмеченные эффекты для создания конструкций инерционных приводов для энергетических и силовых машин [5, 6]. В работе [7] проведен анализ одной из возможных кинематических схем зубчатого планетарного механизма с эксцентрической массой и показано влияние циркуляции кинетической энергии эксцентрической массы на динамику механизма. В статье [8] показана картина циркуляции кинетической энергии в сателлитах зубчатых механизмов даже без эксцентрической массы и сделано заключение, что изменение кинетической энергии связано с работой внешних сил, которые дополнительно нагружают конструкцию сателлитов. В научных работах зарубежных ученых [9-11] уделяется большой научный интерес к вопросу исследования планетарных механизмов в плане влияния эксцентрических масс на динамику этих механизмов. Задачей данной работы является анализ циркуляции кинетической энергии эксцентрических масс сателлитов двух разных конструкций простых планетарных механизмов.

Методология исследования

Для анализа циркуляции кинетической энергии эксцентрической массы сателлита рассмотрим вариант конструкции простого планетарного механизма, схема которого представлена на рисунке 1. Механизм состоит из жестко закрепленной солнечной шестерни 1 радиусом r_0 , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_H вокруг неподвижного центра

O водило 2 радиусом R_2 , который через шарнир в точке O_1 приводит в движение обкатывающего шестерню 1 спутник 3 радиусом r_1 с закрепленной на расстоянии R_1 эксцентрической масса m . При этом спутник 3 вращается с угловой скоростью ω_1 относительно центра O_1 . Эксцентрическая масса m совершает сложное движение – относительно вокруг центра O_1 и переносное вокруг центра O .

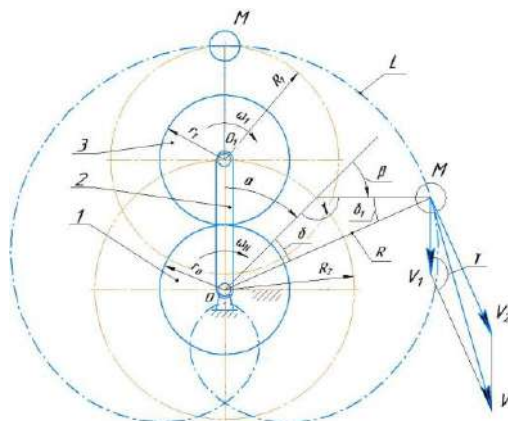


Рисунок 1. Схема механизма

Для сравнения картины циркуляции кинетической энергии эксцентричных масс спутников проанализируем модифицированную конструкцию планетарно-зубчатого механизма со спаренными спутниками, схема которой представлена на рис. 2.

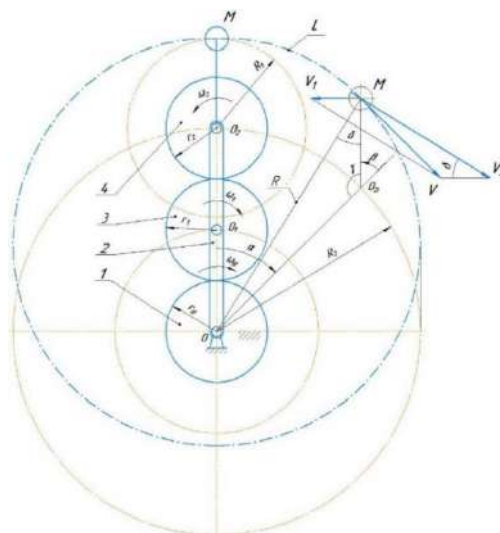


Рисунок 2. Схема планетарного механизма со спаренными спутниками

Механизм состоит из жестко закрепленной солнечной шестерни 1 радиусом r_0 , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_H вокруг неподвижного центра O водило 2 радиусом R_2 , который через шарнир в точке O_1 приводит в движение обкатывающего шестерню 1 спутник 3 радиусом r_1 , а также через шарнир в точке O_2 дополнительный находящийся в зацеплении с спутником 3 спутник 4 с закрепленной на расстоянии R_1 эксцентрической масса M . При этом спутник 3 вращается с угловой скоростью ω_1 относительно центра O_1 , а спутник 4 вращается с угловой скоростью ω_2 . Эксцентрическая масса M совершает сложное движение – относительно вокруг центра O_2 и переносное вокруг центра O .

Теория. Анализ механизма, схема которого представлена на рисунке 1. Рассмотрим движение эксцентрической массы M . При соответствующих радиусах колес r_0 и r_1 , радиус $R_2 = (r_0 + r_1)$ и угловая скорость сателлита 3

$$\omega_1 = \frac{r_0}{r_1} \omega_H. \quad (1)$$

Угол поворота сателлита β будет связан с углом поворота водила α аналогичной зависимостью

$$\beta = \frac{r_0}{r_1} \alpha. \quad (2)$$

Движение центра массы M будет совершать перемещение по траектории L . Радиус вектор R этой траектории по модулю можно определить по следующей зависимости

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos \gamma}, \quad (3)$$

где $\gamma = \pi - \beta$.

Линейная скорость центра масс M относительного движения будет пропорциональна угловой скорости ω_l и радиусу R_l , то есть

$$V_1 = \omega_1 R_1. \quad (4)$$

Линейная скорость центра масс M переносного движения будет равна

$$V_2 = \omega_H R. \quad (5)$$

Суммарная скорость точки центра масс M будет определяться векторной суммой относительной скорости V_1 и переносной скорости V_2 , а по модулю она будет равна

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \gamma}. \quad (6)$$

Кинетическая энергия эксцентрической массы M

$$T = 0,5MV^2. \quad (7)$$

Так как кинетическая энергия движения эксцентрической массы M в зависимости от угла α поворота водила 2 является величиной не постоянной в связи с изменением радиус вектора R и, соответственно переносной скорости V_2 , то будет переменное поле кинетической энергии.

Подставляя в формулу (7) выражение (6) и, учитывая зависимости (1) – (5), получим зависимость кинетической энергии от угла поворота α водило 2

$$T = 0,5 M \omega_H^2 R_2^2 \left\{ 1 + A^2(1 + B^2) + 2A \cos(B\alpha) \left[1 + B(1 + A^2 + 2A \cos(B\alpha))^{0,5} \right] \right\}, \quad (8)$$

где $A = R_1/R_2$, $B = r_0/r_1$.

На рисунке 3 представлены графики зависимости кинетической энергии от угла α поворота водило за один оборот вычисленные по формуле (8) при $r_0 = r_1 = 0,03\text{м}$, $\omega_H = 50 \text{ с}^{-1}$, $R_2 = 0,06\text{м}$, $m = 0,5 \text{ кг}$, при разных значениях угловой скорости водило: при $R_l = 0,05\text{м}$ – сплошная линия, при $R_l = 0,03\text{м}$ – точечная линия и при $R_l = 0,01\text{м}$ – пунктирная линия.

Из графика рисунка 2 видно, что максимальное значение кинетической энергии эксцентрической массы сателлита при положении механизма при максимальном значении переменного R . Следует отметить, что при этом положении механизма, очевидно, будет и максимальный момент инерции.



Рисунок 3. График зависимости кинетической энергии эксцентрисеской массы сателлита от угла поворота водило

Также графики показывают возрастание отношения максимальных значений кинетической энергии к их минимальным значениям при увеличении эксцентриситета R_1 массы M .

Анализ механизма, схема которого представлена на рисунке 2. Рассмотрим движение эксцентрисеской массы M механизма, схема которого представлена на рисунке 2. При соответствующих радиусах колес r_0 , r_1 и r_2 , радиус $R_2 = (r_0 + 2r_1 + r_2)$ и угловая скорость сателлита 3 и сателлита 4

$$\omega_1 = \frac{r_0}{r_1} \omega_H, \quad \omega_2 = \frac{r_0}{r_2} \omega_H. \quad (9)$$

Угол поворота сателлита 4 β будет связан с углом поворота водила α аналогичным соотношением угловых скоростей зависимостью

$$\beta = \frac{r_0}{r_2} \alpha. \quad (10)$$

Движение центра массы M будет совершать перемещение по траектории L . Радиус вектор R этой траектории можно определить по следующей зависимости

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos \gamma}, \quad (11)$$

где $\gamma = \pi - \beta$.

Линейная скорость центра масс M относительного движения будет пропорциональна угловой скорости ω_1 и радиусу R_1 , то есть

$$V_1 = \omega_2 R_1. \quad (12)$$

Линейная скорость центра масс M переносного движения будет равна

$$V_2 = \omega_H R. \quad (13)$$

Суммарная скорость точки центра масс M будет определяться векторной суммой относительной скорости V_1 и переносной скорости V_2 , а по модулю она будет равна

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \delta}. \quad (14)$$

$$\delta = \arccos\{(R_1/R_2 + \cos \beta)/[1 + (R_1/R_2)^2 + 2R_1/R_2 \cos \beta]^{0,5}\}. \quad (15)$$

Кинетическая энергия эксцентрисеской массы M

$$T = 0,5MV^2. \quad (16)$$

Так как кинетическая энергия движения эксцентрической массы M в зависимости от угла α поворота водило 2 является величиной не постоянной в связи с изменением радиус вектора R и, соответственно переносной скорости V_2 , то будет переменное поле кинетической энергии.

Подставляя в формулу (16) выражение (14) и, учитывая зависимости (9) – (13), получим зависимость кинетической энергии эксцентрической массы от угла поворота α водило 2

$$T = 0,5 M\omega_H^2 R_2^2 [1 + C^2(1 + D)^2 + 2C(1 + D)\cos\delta], \quad (17)$$

где $C = R_1/R_2$, $D = r_0/r_2$.

На рисунке 4 представлены графики зависимости кинетической энергии от угла α поворота водило за один оборот вычисленные по формуле (17) с учетом зависимости (15) при $r_0 = r_1 = r_2 = 0,03\text{м}$, $\omega_H = 50\text{ с}^{-1}$, $R_2 = 0,12\text{м}$, $M = 0,5\text{ кг}$, при разных значениях R_1 : при $R_1 = 0,05\text{м}$ – сплошная линия, при $R_1 = 0,03\text{м}$ - пунктирная линия и при $R_1 = 0,01\text{м}$ штрих пунктирная линия.

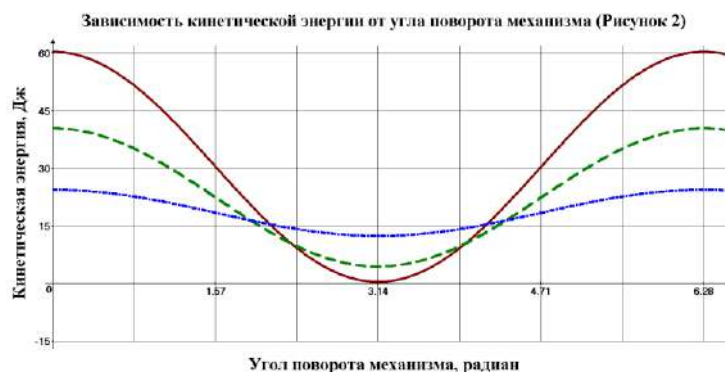


Рисунок 4. График зависимости кинетической энергии эксцентрической массы сателлита от угла поворота водило для механизма со спаренными сателлитами

Графики аналитической зависимости кинетической энергии рисунка 4 показывают возрастание амплитуды циркуляции с увеличением эксцентриситета R_1 массы M .

При идеальной балансировки колеса 4 (рисунок 2), то есть при $R_1 = 0$ циркуляция кинетической энергии массы M не будет, так как зависимость (17) принимает вид

$$T = 0,5 M\omega_H^2 R_2^2. \quad (18)$$

Для анализа влияния циркуляции кинетической энергии важно знать степень изменения угловой скорости вращения. Это связано с тем, что мощность вращательных приводов определяется произведением крутящего момента на угловую скорость. Циркуляцию кинетической энергии эксцентрической массы M анализируемых механизмов можно также показать аналогично [7] в соответствии с законом сохранения момента количества движения.

Для данного механизма (рисунок 1) в силу закона сохранения момента количества движения ($J\omega = \text{const}$, где J – суммарный момент инерции системы) угловые скорости вращения подвижных звеньев не будут постоянными из-за изменения момента инерции эксцентрической массы сателлитов. Суммарный момент инерции вращающихся элементов механизма (рис.1) относительно центра вращения O можно определить по известным зависимостям

$$J = \sum J_n + mR^2, \quad (19)$$

где $\sum J_n$ – суммарный момент инерции составляющих звеньев механизма с постоянным моментом инерции, mR^2 – приведенный момент инерции центра масс, который изменяется в

зависимости от значения R . Из выражения (3) для механизма с одним сателлитом (рис.1) видно, что радиус вектор центра масс изменяется в пределах $(R_1 + R_2) < R < (R_2 - R_1)$, что позволяет определить минимальное и максимальное значения суммарного момента инерции.

$$J_{max, min} = \sum J_n + mR(1 + b) + [R_2 \pm R_1]^2. \quad (20)$$

Таким образом, в соответствии с законом сохранения момента количества движения, угловая скорость в положении механизма с минимальным моментом инерции будет максимальна и, наоборот – в положении механизма с максимальным моментом инерции угловая скорость будет минимальна, то есть $J_{max}\omega_{min} = J_{min}\omega_{max}$. Из этого выражения, учитывая (20), определим максимальную угловую скорость

$$\omega_{max} = \omega_{min} \frac{\sum J_n + m[R_2 + R_1]^2}{\sum J_n + m[R_2 - R_1]^2}. \quad (21)$$

Это означает, что угловая скорость в процессе движения механизма в каждом цикле вращения будет импульсно меняться от максимального значения до минимального и обратно. Соответственно будет импульсно изменяться кинетическая энергия механизма. Определим кинетические энергии механизма T_1 в положении механизма с максимальным радиус вектором R и T_2 в положении механизма с минимальным радиус вектором R , которые по известным зависимостям можно записать в виде

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{max} \omega_{min}^2 = \frac{1}{2} \{ \sum J_n + m[R_2 + R_1]^2 \} \omega_{min}^2, \quad (22)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{min} \omega_{max}^2 = \frac{1}{2} \{ \sum J_n + m[R_2 - R_1]^2 \} \omega_{max}^2. \quad (23)$$

Подставим в выражение (23) значение (21) и, учитывая зависимость (22) получим

$$T_2 = T_1 \frac{\sum J_n + m[R_2 + R_1]^2}{\sum J_n + m[R_2 - R_1]^2}. \quad (24)$$

Выражение (24) показывает степень изменения кинетической энергии механизма при переходе его из положения с максимальным радиус вектором R в положение с минимальным радиус вектором R , а также существенного влияния на циркуляцию этой энергии суммарного момента инерции составных звеньев механизма. Для механизма со спаренными сателлитами (рис. 2) картина импульсного изменения кинетической энергии будет аналогична описанной выше.

Результаты исследования

Полученные аналитические зависимости циркуляции кинетической энергии эксцентрической массы M исследуемых механизмов показывают пропорциональную зависимость степени этой циркуляции от квадратов угловой скорости водила и соотношения геометрических размеров механизмов. Эта циркуляция также показана из анализа в соответствии с законом сохранения момента количества движения из-за изменения момента инерции механизмов за счет переменных положений его эксцентрических масс. При этом происходит соответственное импульсное увеличение скорости вращения водила 4.

Особенностью механизма с двумя сателлитами (рисунок 2) в том, что направление вращения сателлита 4 механизма не совпадает с направлением вращения водила 2. Поэтому описание картины импульсного изменения кинетической энергии будет несколько иной, требующей учета влияния гироскопического эффекта. Рассмотрение этого эффекта будет проведено после комплексных экспериментальных исследований механизма со спаренными сателлитами и выходит за рамки этой статьи.

Дискуссия

Полученные зависимости циркуляции кинетической энергии эксцентрических масс сателлитов разных моделей простых планетарных механизмов показывают разную картину изменения кинетической энергии. Таким образом, конструкция планетарного механизма влияет на циркуляцию кинетической энергии, и соответственно мощности. Кроме того, графики циркуляции кинетической энергии имеют симметричный характер. В работах [5] авторами показано использование циркуляции мощности за счет использования обгонных муфт, а авторы работы [6] используют эффект циркуляции мощности за счет создания асимметричности периодов изменения кинетической энергии. Перспектива использования результатов и методологии данной работы связаны с разработкой конструкций и способов оптимизации эффекта циркуляции кинетической энергии эксцентрических масс сателлитов с минимальной нагрузкой на привод и максимальной мощности на выходном валу.

Выводы

Полученные аналитические зависимости линейных скоростей и циркуляции кинетической энергии эксцентрических масс сателлитов будут весьма полезны для динамического анализа исследованных конструкций планетарных механизмов и оптимизации геометрических параметров (соотношения диаметров колес) этих механизмов в соответствии с технологическими целями их использования. В продолжении данной работы изготавливаются экспериментальные стенды с целью сопоставления опытных данных с аналитическими зависимостями.

Благодарность

Работа выполнена и финансировалась в рамках внутривузовского гранта Ректора КазНПУ имени Абая в 2024 году. (Приказ № 05.04/326 от 14.05.2024 года)

Список использованных источников

- [1] Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400с. URL: <https://djvu.online/file/MMtgkzdP5feE> (дата обращения: 04.06.2025).
- [2] Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. – М., Машиностроение, 1968. – 362 с. // URL: <https://djvu.online/file/hLSIMtADdYUh2> (дата обращения: 04.06.2025).
- [3] Быховский И.И. Энергетические соотношения при колебаниях // Справочник «Вибрационные машины в строительстве и производстве строительных материалов». – М., изд-во Машиностроение, 1970. – 538 с. // URL: <https://elima.ru/books/?id=6285> (дата обращения: 04.06.2025).
- [4] Быховский И.И., Попов С.И. Автоматизация резонансных вибромашин. – М.: ЦНИИИ и ТЭИСДКМ. Серия II, 1972. – 45 с. // URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01007283220> (дата обращения: 04.06.2025).
- [5] Линевиц Э.И. Применение центробежной силы в качестве источника мощности. // URL: <http://www.dlinevitch.narod.ru/pages.htm> (дата обращения: 11.12.2024).
- [6] FelexWurth, Flichkraft – Energiequelle, Raum&Zeit, 124/2003, s.16-19. // URL: http://www.borderlands.de/net_pdf/NET0904S25-30.pdf (дата обращения: 04.06.2025).
- [7] Лысенко В.С., Пралиев С.Ж., Сулейменов Б.Т., Баубекоев С.Д. Анализ инерционного механизма // Современные наукоемкие технологии. – 2012. – №12 – С.20-23. // URL: www.rae.ru/snt/?section=content&op=show_article&article_id=10000339 (дата обращения: 11.12.2024)
- [8] Коляда А.Ф., Кожмякин К.С. Циркуляция кинетической энергии в сателлитах зубчатых механизмов. Вестник двигателестроения № 1, 2014. С. 41-43. // URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tsirkulyatsiya-kineticheskoy-energii-v-satellitah-zubchatyh-mehanizmov> (дата обращения: 11.12.2024)
- [9] Xuezong Bai, Hu-zi Qiu, Jian-fei Shi, De-wang Li. Nonlinear dynamic modeling and global instability analyses of planetary gear trains considering multi-state engagement and tooth-contact temperature effect. June 2023 DOI: [10.21203/rs.3.rs-3022704/v1](https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3022704/v1)
- [10] J. Wei et al., “A coupling dynamics analysis method for a multistage planetary gear system,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 110, pp. 27–49, Apr. 2017, <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.12.007>
- [11] Jianjun Hu, Bo Mei, Hang Peng, Xingyue Jiang. Optimization Design and Analysis for a Single Motor Hybrid Powertrain Configuration with Dual Planetary Gears Applied Sciences. 2019, 9(4), 707; <https://doi.org/10.3390/app9040707>

- [12] Syahputra, Muhammad & Subekti, Subekti & Indah, Nur. (2024). Effect of eccentric mass on rotor dynamics as a source of harvesting energy vibration. *JTTM : Jurnal Terapan Teknik Mesin*. 5. 54-61. <https://doi.org/10.37373/jttm.v5i1.855>
- [13] Kangqi Fan, Jiayu Hao, Chenyu Wang, Chao Zhang, Weidong Wang, Fei Wang, An eccentric mass-based rotational energy harvester for capturing ultralow-frequency mechanical energy, *Energy Conversion and Management*, Volume 241, 2021, 114301, ISSN 0196-8904, <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2021.114301>
- [14] Qinxue Tan, Kangqi Fan, Kai Tao, Liya Zhao, Meiling Cai, A two-degree-of-freedom string-driven rotor for efficient energy harvesting from ultra-low frequency excitations, *Energy*, Volume 196, 2020, 117107, ISSN 0360-5442, <https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117107>
- [15] Willingham, Lukas, "Eccentric rotating mass motor vibrational plate modeling" (2020). 2020 Spring Honors Capstone Projects. 49. https://mavmatrix.uta.edu/honors_spring2020/49

References

- [1] Blekhman I.I. (1994) *Vibratsionnaya mekhanika [Vibrational mechanics]*. M.: Fizmatlit, 400 p. URL: <https://djuv.online/file/MMTgkzDP5feE> (accessed: 04.06.2025).
- [2] Bykhovskiy I.I. (1968) *Osnovy teorii vibratsionnoy tekhniki [Fundamentals of vibration technology theory]*. M.: Mashinostroenie, 362 p. URL: <https://djuv.online/file/hLSIMtADdYUh2> (accessed: 04.06.2025).
- [3] Bykhovskiy I.I. (1970) *Energeticheskie sootnosheniya pri kolebaniyakh [Energy relations during vibrations]*. In: *Spravochnik "Vibratsionnye mashiny v stroitel'stve i proizvodstve stroitel'nykh materialov" [Handbook "Vibration machines in construction and building materials production"]*. M.: Mashinostroenie, 538 p. URL: <https://elima.ru/books/?id=6285> (accessed: 04.06.2025).
- [4] Bykhovskiy I.I., Popov S.I. (1972) *Avtomatizatsiya rezonansnykh vibromashin [Automation of resonant vibration machines]*. M.: TsNIII i TEISDKM. Seriya II, 45 p. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01007283220> (accessed: 04.06.2025).
- [5] Linevich E.I. (n.d.) *Primenenie tsentrobeznoy sily v kachestve istochnika moshchnosti [Application of centrifugal force as a power source]*. URL: <http://www.dlinevitch.narod.ru/pages.htm> (accessed: 11.12.2024).
- [6] FelexWurth (2003) *Flickkraft - Energiequelle*. *Raum&Zeit*, 124, pp. 16-19. URL: http://www.borderlands.de/net_pdf/NET0904S25-30.pdf (accessed: 04.06.2025).
- [7] Lysenko V.S., Praliev S.Zh., Suleymenov B.T., Baubekov S.D. (2012) *Analiz inertsiionnogo mekhanizma [Analysis of inertial mechanism]*. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, № 12, pp. 20-23. URL: www.rae.ru/snt/?section=content&op=show_article&article_id=10000339 (accessed: 11.12.2024).
- [8] Kolyada A.F., Kozhemyakin K.S. (2014) *Tsirkulyatsiya kineticheskoy energii v satellitakh zubchatykh mekhanizmov [Circulation of kinetic energy in gear mechanism satellites]*. *Vestnik dvigatelestroeniya*, № 1, pp. 41-43. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tsirkulyatsiya-kineticheskoy-energii-v-satellitah-zubchatyh-mekhanizmov> (accessed: 11.12.2024).
- [9] Xuezhong Bai, Hu-zi Qiu, Jian-fei Shi, De-wang Li. *Nonlinear dynamic modeling and global instability analyses of planetary gear trains considering multi-state engagement and tooth-contact temperature effect*. June 2023 DOI: [10.21203/rs.3.rs-3022704/v1](https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3022704/v1)
- [10] J. Wei et al., "A coupling dynamics analysis method for a multistage planetary gear system," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 110, pp. 27–49, Apr. 2017, <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.12.007>
- [11] Jianjun Hu, Bo Mei, Hang Peng, Xingyue Jiang. *Optimization Design and Analysis for a Single Motor Hybrid Powertrain Configuration with Dual Planetary Gears* *Applied Sciences*. 2019, 9(4), 707; <https://doi.org/10.3390/app9040707> <https://www.mdpi.com/2076-3417/9/4/707>
- [12] Syahputra, Muhammad & Subekti, Subekti & Indah, Nur. (2024). Effect of eccentric mass on rotor dynamics as a source of harvesting energy vibration. *JTTM : Jurnal Terapan Teknik Mesin*. 5. 54-61. <https://doi.org/10.37373/jttm.v5i1.855>
- [13] Kangqi Fan, Jiayu Hao, Chenyu Wang, Chao Zhang, Weidong Wang, Fei Wang, An eccentric mass-based rotational energy harvester for capturing ultralow-frequency mechanical energy, *Energy Conversion and Management*, Volume 241, 2021, 114301, ISSN 0196-8904, <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2021.114301>
- [14] Qinxue Tan, Kangqi Fan, Kai Tao, Liya Zhao, Meiling Cai, A two-degree-of-freedom string-driven rotor for efficient energy harvesting from ultra-low frequency excitations, *Energy*, Volume 196, 2020, 117107, ISSN 0360-5442, <https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117107>
- [15] Willingham, Lukas, "Eccentric rotating mass motor vibrational plate modeling" (2020). 2020 Spring Honors Capstone Projects. 49. https://mavmatrix.uta.edu/honors_spring2020/49

Ф.Ф. Майер¹, М.Г. Тастанов¹, А.А. Утемисова^{1*}, Б.А. Калаков¹

¹Костанайский региональный университет имени Ахмета Байтұрсынұлы,
г. Костанай Казахстан

*e-mail: anar_utemisova@mail.ru

ДВАЖДЫ ПОЧТИ ЗВЕЗДООБРАЗНЫЕ ФУНКЦИИ НА БАЗЕ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

Аннотация

В работе исследуются свойства некоторых классов дважды почти звездообразных и дважды почти выпуклых функций. Целью настоящей статьи является введение и исследование класса дважды почти звездообразных функций, включающего в качестве частных случаев как классические классы почти звездообразных функций, исследованные на первых этапах развития данной проблематики, так и некоторые классы дважды почти звездообразных функций, исследованные в последние годы. Это достигается за счет того, что в качестве базовой используется функция $h(z)$, звездообразная порядка α , $0 \leq \alpha < 1$, что позволяет в качестве частных случаев рассматривать подклассы данного класса, когда $h(z)$ является не только звездообразной, но и выпуклой функцией. Методика исследований опирается на принцип подчиненности аналитических функций. К задачам исследования относится получение теорем роста (искажения) и радиусов звездообразности (выпуклости) классов дважды почти звездообразных (дважды почти выпуклых) функций. В статье получены теорема роста и радиус звездообразности порядка β введенного класса дважды почти звездообразных функций, рассмотрены частные случаи. Все результаты являются точными, в частных случаях приводят как к новым, так и к ранее известным результатам. С помощью определенной замены осуществлен переход от введенного класса дважды почти звездообразных функций к новому классу дважды почти выпуклых функций, для которого получены теоремы искажения, радиус выпуклости и рассмотрены частные случаи.

Ключевые слова: звездообразные функции, почти выпуклые функции, почти звездообразные функции, теорема роста, теорема искажения, радиусы звездообразности, радиусы выпуклости.

Ф.Ф. Майер¹, М.Г. Тастанов¹, А.А. Утемисова¹, Б.А. Калаков¹

¹Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан
**БЕЛГІЛІ ТӘРТІПТІ ЖҰЛДЫЗ ПІШІНДІ ФУНКЦИЯЛАРЫНА НЕГІЗГЕН ҚОСУ ДЕРЛІК
ЖҰЛДЫЗ ПІШІНДІ ФУНКЦИЯЛАР**

Аңдатпа

Жұмыста екі рет дерлік жұлдыз тәрізді және екі рет дерлік дөңес функциялардың кейбір кластарының қасиеттері зерттелген. Бұл мақаланың мақсаты – ерекше жағдайлар ретінде осы мәселенің дамуының алғашқы кезеңдерінде зерттелген жұлдыз тәрізді дерлік функциялардың классикалық кластарын да, сондай-ақ соңғы жылдары зерттелген қос дерлік жұлдыз тәрізді функциялардың кейбір кластарын да қамтитын қос дерлік жұлдыз тәрізді функциялар класын енгізу және зерттеу. Бұл $h(z)$ звездообразна ғана емес, сонымен қатар дөңес функция болған кезде, бұл класстың ішкі сыныптарын ерекше жағдайлар ретінде қарастыруға мүмкіндік беретін звездообразнауа тәртібі α , $0 \leq \alpha < 1$, базалық функция ретінде қолданылатындығына байланысты қол жеткізілді. Зерттеу әдістемесі аналитикалық функциялардың бағыныштылығы принципіне негізделген. Зерттеудің міндеттеріне екі есе дерлік жұлдыз тәрізді (қос дерлік дөңес) функциялардың жұлдыз тәрізді (дөңес) кластарының өсу (бұрмалау) және радиустарының теоремаларын алу кіреді. Мақалада екі есе дерлік жұлдыз тәрізді функциялардың енгізілген класының β ретті өсу теоремасы мен жұлдыз тәрізді радиусы алынып, ерекше жағдайлар қарастырылды. Барлық нәтижелер дәл болып саналады, кейбір жағдайларда олар жаңа және бұрын белгілі нәтижелерге әкеледі. Белгілі бір алмастыруды пайдалана отырып, енгізілген қос дерлік жұлдыз тәрізді функциялар класынан екі есе дерлік дөңес функциялардың жаңа класына көшу жүзеге асырылады, ол үшін бұрмалау теоремалары мен дөңес радиусы алынады және ерекше жағдайлар қарастырылады.

Түйін сөздер: жұлдыз тәрізді функциялар, дөңес дерлік функциялар, жұлдыз тәрізді дерлік функциялар, өсу теоремасы, бұрмалау теоремасы, жұлдыз тәрізді радиустар, дөңес радиустар.

F.F. Maiyer¹, M.G. Tastanov¹, A.A. Utemissova¹, B.A. Kalakov¹

¹Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan

DOUBLY CLOSE-TO-STARLIKE FUNCTIONS BASED ON STARLIKE FUNCTIONS OF A CERTAIN ORDER

Abstract

The paper studies the properties of some classes of doubly close-to-starlike and doubly close-to-convex functions. The objective of this paper is to introduce and study the class of doubly close-to-starlike functions, which includes as special cases both the classical classes of close-to-starlike functions, studied at the early stages of the development of this problem, and some classes of doubly close-to-starlike functions, studied in recent years. The research methodology is based on the principle of subordination of analytic functions. The objectives of the study include obtaining theorems of growth (distortion) and radii of starlikeness (convexity) of classes of doubly close-to-starlike (doubly close-to-convex) functions. This is achieved due to the fact that the function $h(z)$, a starlike function of order α , is used as the base function $0 \leq \alpha < 1$, which allows us to consider subclasses of this class as special cases when $h(z)$ is not only a starlike function, but also a convex function. In the article, a growth theorem and a of starlikeness radius of order β introduced class of doubly close-to-starlike functions, special cases are considered. All results are exact, in special cases they lead to both new and previously known results. Using a certain substitution, a transition is made from the introduced class of doubly close-to-starlike functions to a new class of doubly close-to-convex functions, for which distortion theorems and the radius of convexity are obtained and special cases are considered.

Keywords: starlike functions, close-to-convex functions, close-to-starlike functions, growth theorem, distortion theorem, radii of starlikeness, radii of convexity.

Основные положения

В ходе исследования были получены точные теоремы роста (искажения) и радиусы звездообразности (выпуклости) некоторых классов дважды почти звездообразных (дважды почти выпуклых) функций. Широта исследуемых классов позволяет в частных случаях получать как новые оригинальные результаты по данной тематике, так и известные, в том числе классические, результаты. Также в качестве частных случаев приведены и результаты, полученные другими авторами за последние пять лет.

Введение

Будем рассматривать аналитические в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функции $f(z)$, нормированные условием $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, класс которых обозначим через \mathcal{N} . Для исследования функций $f(z)$ из \mathcal{N} будем использовать аналитические в E функции $\varphi(z)$, $\varphi(0) = 1$, класс которых обозначим через \mathcal{A} . Его подклассом является класс \mathcal{A}_n функций $\varphi(z)$, имеющих разложение вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1$.

Известными подклассами класса \mathcal{N} являются классы $S^0(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, функций, выпуклых порядка α и звездообразных порядка α . Классы $S^0(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$ определяются, соответственно, с помощью условий

$$1 + \operatorname{Re} \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha, \quad \operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > \alpha.$$

При этом, $S^0 := S^0(0)$ и $S^* := S^*(0)$ – классы выпуклых и звездообразных функций, области значений которых обладают простой геометрической структурой. В случае звездообразной функции каждая точка области значений $f(E)$ может быть соединена с точкой $w = 0$ отрезком, целиком лежащим внутри этой области. Это свойство очень важно во многих теоретических вопросах из разных отраслей знаний. А любая выпуклая функция является звездообразной относительно всех точек $w \in f(E)$.

В статье [1 Рид] был представлен класс K^* почти звездообразных функций (close-to-starlike functions) $f(z)$, для каждой из которых можно найти звездообразную функцию $g(z)$ такую, что выполняется условие

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \quad g \in S^*. \quad (1)$$

Класс K^* почти звездообразных функций является естественным расширением класса S^* звездообразных функций, поскольку любая функция $f(z) \equiv g(z)$, где $g \in S^*$, удовлетворяет условию (1) и, следовательно, принадлежит классу K^* .

Если дана некоторая область D , принадлежащая полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$, и множество значений $f(z)/g(z)$ при $z \in E$ содержится в области D , то это условие задает некоторый подкласс класса K^* .

Если в условии (1) функция $g(z)$ не является звездообразной, а принадлежит более широкому классу K^* , то тогда условие (1) определяет класс CK^* дважды почти звездообразных функций (doubly close-to-starlike functions). То есть, функция $f(z)$ называется дважды почти звездообразной функцией и пишут $f \in CK^*$, если она удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0$, причем $\operatorname{Re} \frac{g(z)}{h(z)} > 0$ для некоторой функции $h \in S^*$. Нетрудно установить, что $S^* \subset K^* \subset CK^*$.

Наряду со статьей [1], первыми исследованиями почти звездообразных функций были работы [2, 3]. В них исследовался как весь класс K^* , так и его подкласс $K^*(1)$, заданный условием

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \quad g \in S^*. \quad (2)$$

Дополнительно к этому, исследовались классы K_0^* и $K_0^*(1)$ функций $f(z)$, заданные, соответственно, условиями (1) и (2) при более жестком предположении, что $g \in S^0$. Классы K_0^* и $K_0^*(1)$ являются подклассами класса K^* , поскольку $S^0 \subset S^*$.

В статьях [4, 5] исследовались подклассы класса K^* , функции которого удовлетворяют, соответственно, условию $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - a \right| < a$ и $\left| \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a$ с конкретными звездообразными функциями $g(z)$.

Недавние работы [6-9] посвящены нахождению различных радиусов звездообразности ряда классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций, определенных с помощью условий вида $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0$, $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$ в различных их комбинациях, с применением конкретных звездообразных функций $g(z)$.

Наша гипотеза состоит в том, что можно построить класс дважды почти звездообразных функций, который, с одной стороны, в частных случаях приводит к классам почти звездообразных функций, рассматриваемым в первых классических исследованиях, с другой стороны, — приводит к некоторым классам дважды почти звездообразных функций, исследованным в последние годы.

В настоящей статье вводится и исследуется некоторый обобщенный класс дважды почти звездообразных функций $f \in CK^*$, который в качестве частных случаев содержит классы K^* , $K^*(1)$, K_0^* и $K_0^*(1)$, а также ряд классов из отмеченных выше работ [6-9]. В данном классе найдены точные теоремы роста и радиус звездообразности порядка β . Тем самым, наряду с новыми оригинальными результатами получены обобщения и дополнения ряда ранее известных результатов. Аналогичные вопросы рассмотрены и для некоторого класса дважды почти выпуклых функций.

Методология исследования

Исследования настоящей статьи базируются на применении метода подчиненности аналитических функций, который активно применяется в геометрической теории функций в последние десятилетия, особенно после выхода статьи [10]. Этот метод дает хорошие результаты при исследовании экстремальных свойств различных подклассов класса \mathcal{N} , поскольку позволяет эффективно находить оценки различных функционалов, связанных с этими подклассами, которые в дальнейшем применяются в исследовании.

Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ – функции, аналитические в круге E , и, кроме того, $\varphi_0(z)$ является однолистной в круге E . Тогда функцию $\varphi(z)$ называют подчиненной функции $\varphi_0(z)$, если $\varphi(0) = \varphi_0(0)$ и имеет место соотношение $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$.

Важным фактом метода подчиненности, который мы будем использовать в настоящей статье, является то, что из условия $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ вытекает справедливость аналогичного условия и для внутренних кругов $E_r = \{z: |z| < r\}$, $0 \leq r < 1$. То есть выполняется условие $\varphi(E_r) \subset \varphi_0(E_r)$, которое с учетом геометрических свойств области $\varphi_0(E_r)$ позволяет получать различные оценки функции $\varphi(z)$ для всех $z \in E_r$.

Следуя [5], дадим следующее

Определение 1. Будем говорить, что функция $\varphi(z)$ из \mathcal{A}_n принадлежит классу $\mathcal{P}_n(m, \gamma)$, если выполняется условие

$$\left| (\varphi(z))^{\frac{1}{\gamma}} - m \right| < m, \quad 0 < \gamma \leq 1, m > \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Также по определению будем считать, что $\mathcal{P}(m, \gamma) := \mathcal{P}_1(m, \gamma)$.

Если функция $w(z)$ удовлетворяет условию $|w(z) - m| < m$, то тогда

$$w(z) < w_0(z) = \frac{1+z}{1-(1-1/m)z},$$

где $w_0(z)$ – конформное отображение круга E на круг $|w(z) - m| < m$ с нормировкой $w(0) = 1$. Но тогда, если выполняется условие (3), то $\varphi(z) < \varphi_0(z)$, где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-(1-1/m)z} \right)^\gamma. \quad (4)$$

Для дальнейшего нам потребуется

Лемма 1 [5]. Пусть функция $\varphi \in \mathcal{P}_n(m, \gamma)$. Тогда для любого r , $0 \leq r < 1$, в круге $|z| \leq r$, выполняются точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/m)r^n} \right)^\gamma \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-(1-1/m)r^n} \right)^\gamma, \quad (5)$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{\gamma(2-1/m)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/m)r^n)}. \quad (6)$$

Экстремальная функция $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где $\varphi_0(z)$ определена посредством формулы (4).

Лемма 2 [10]. Пусть функция $f(z)$ из \mathcal{N} является звездообразной в круге E , причем

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} < \Phi_0(z),$$

где функция $\phi_0(z)$ удовлетворяет условию $Re \phi_0(z) > 0, z \in E$. Если функция $k(z), k(0) = k'(0) - 1 = 0$, является решением дифференциального уравнения

$$z \frac{k'(z)}{k(z)} = \phi_0(z),$$

то

$$\frac{f(z)}{z} < \frac{k(z)}{z}.$$

Результаты исследования

Введем следующие классы функций.

Определение 2. Пусть $K_\alpha^*(a, \gamma)$ – класс функций $f(z)$ из \mathcal{N} , для каждой из которых существует функция $h \in S^*(\alpha), 0 \leq \alpha < 1$, такая, что $\frac{f(z)}{h(z)} \in \mathcal{P}(a, \gamma)$, то есть функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \left(\frac{f(z)}{h(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \quad 0 < \gamma \leq 1, a > \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что $Re (f(z)/h(z)) > 0$, поэтому $K_\alpha^*(a, \gamma) \subset K^*$.

Определение 3. Пусть $K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$ – класс функций $f(z)$ из \mathcal{N} , для каждой из которых существует функция $g \in K_\alpha^*(b, \delta)$ такая, что выполняется условие $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}(a, \gamma)$, то есть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям

$$\left| \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \quad \left| \left(\frac{g(z)}{h(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| < b, \quad (8)$$

где $0 < \gamma, \delta \leq 1, a, b > 1/2$ и $h \in S^*(\alpha), 0 \leq \alpha < 1$.

Поскольку $K_\alpha^*(b, \delta) \subset K^*$, то есть функция $g(z)$ является почти звездообразной, то из первого из условий (8) следует, что функция $f(z)$ является дважды почти звездообразной. Таким образом, $K_\alpha^*(b, \delta) \subset K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta) \subset CK^*$.

Кроме того, $K_\alpha^*(a, \gamma) := K_\alpha^*(a, \gamma, \infty, 0), K_\alpha^*(b, \delta) := K_\alpha^*(\infty, 0, b, \delta)$, а также при $\alpha = 0$ имеем $K^* := K_\alpha^*(\infty, 1)$ и $CK^* := K_\alpha^*(\infty, 1, \infty, 1)$.

Определение 4. Если в определениях 2 и 3 функция $h \in S^0$, то соответствующие классы функций будем обозначать через $K_0^*(a, \gamma)$ и $K_0^*(a, \gamma, b, \delta)$.

Теорема 1 (теорема роста). Пусть $a_1 = 1 - 1/a, b_1 = 1 - 1/b$. Если $f \in K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$, то при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, справедлива оценка

$$\frac{(1-r)^{\gamma+\delta}}{(1+a_1r)^\gamma(1+b_1r)^\delta} \frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f(z)| \leq \frac{(1+r)^{\gamma+\delta}}{(1-a_1r)^\gamma(1-b_1r)^\delta} \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}. \quad (9)$$

Оценка (9) точная и достигается для функции

$$f_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-a_1z} \right)^\gamma \left(\frac{1+z}{1-b_1z} \right)^\delta \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}. \quad (10)$$

Доказательство. Прежде, чем доказать оценку (9), найдем оценку $|h(z)/z|$ в классе $S^*(\alpha)$. Для этого воспользуемся леммой 2, в которой в качестве $k(z)$ возьмем функцию

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}.$$

Тогда

$$z \frac{k'(z)}{k(z)} = \Phi_0(z) := \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z}.$$

Поскольку $h \in S^*(\alpha)$, то $\operatorname{Re} \left(z \frac{h'(z)}{h(z)} \right) > \alpha$ и $z \frac{h'(z)}{h(z)} < \Phi_0(z)$. Поэтому в силу леммы 2

$$\frac{h(z)}{z} < \frac{k(z)}{z} = \frac{1}{(1-z)^{2(1-\alpha)}},$$

откуда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, получаем оценку

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |h(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}. \quad (11)$$

Обозначив $\varphi(z) = f(z)/g(z)$, $\psi(z) = g(z)/h(z)$, для функции $f(z)$ получаем представление $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h(z)$. Так как $\varphi \in \mathcal{P}(a, \gamma)$, $\psi \in \mathcal{P}(b, \delta)$, то в силу леммы 1 при $n = 1$ для всех z , $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, выполняются неравенства

$$\left(\frac{1-r}{1+a_1r} \right)^\gamma \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-a_1r} \right)^\gamma,$$

$$\left(\frac{1-r}{1+b_1r} \right)^\delta \leq |\psi(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-b_1r} \right)^\delta.$$

Поэтому

$$\left(\frac{1-r}{1+a_1r} \right)^\gamma \left(\frac{1-r}{1+b_1r} \right)^\delta |h(z)| \leq |f(z)| \leq |h(z)| \left(\frac{1+r}{1-a_1r} \right)^\gamma \left(\frac{1+r}{1-b_1r} \right)^\delta.$$

Применяя оценку (11), приходим к оценке (9).

Убедиться в точности оценки (9) несложно, поскольку для функции (10) в оценке (9) достигаются знаки равенства, соответственно, слева и справа в точках $z = -r$ и $z = r$.

Теорема 2 (радиус звездообразности). Пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Если $f \in K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$, то точный радиус звездообразности порядка β класса $K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$ равен единственному на интервале $(0; 1)$ корню уравнения

$$\frac{1 - (1 - 2\alpha)r}{1 + r} - \frac{r}{1 - r} \left(\gamma \frac{1 + a_1}{1 + a_1r} + \delta \frac{1 + b_1}{1 + b_1r} \right) - \beta = 0. \quad (12)$$

Экстремальная функция имеет вид (10).

Доказательство. Обозначив, как и при доказательстве теоремы 1, $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h(z)$, где $\varphi(z) = f(z)/g(z)$, $\psi(z) = g(z)/h(z)$, получаем

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} = z \frac{h'(z)}{h(z)} + z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Поэтому для всех z , $|z| \leq r$, выводим

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \left(z \frac{h'(z)}{h(z)} \right) - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right|. \quad (13)$$

Так как $h \in S^*(\alpha)$, то $\operatorname{Re} \left(z \frac{h'(z)}{h(z)} \right) > \alpha$ и

$$\phi(z) = z \frac{h'(z)}{h(z)} < \phi_0(z) = \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z}.$$

По принципу подчиненности отсюда вытекает, что $\phi(E_r) \subset \phi_0(E_r)$ при любом r , $0 \leq r < 1$. Учитывая, что $\phi_0(E_r)$ – есть круг, получаем равенство

$$\min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \left(z \frac{h'(z)}{h(z)} \right) = \phi_0(-r) = \frac{1 - (1 - 2\alpha)r}{1 + r}.$$

Поэтому, применяя дважды оценку (5) при $n = 1$ к функциям $\varphi \in \mathcal{P}(a, \gamma)$ и $\psi \in \mathcal{P}(b, \delta)$, в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, с учетом (13) получаем:

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \frac{1 - (1 - 2\alpha)r}{1 + r} - \frac{\gamma(1 + a_1)r}{(1 - r)(1 + a_1r)} - \frac{\delta(1 + b_1)r}{(1 - r)(1 + b_1r)}.$$

Поэтому функция $f(z)$ будет звездообразной порядка β в круге $|z| \leq r^*$, если r^* – корень уравнения (12). Заметим, что r^* является единственным корнем уравнению (12) на $(0; 1)$. Это следует из того, что функция $\mu_1(r) = (1 + (1 - 2\alpha)r)/(1 + r)$ убывает на $[0; 1]$ от 1 до $1 - \alpha$, а функция

$$\mu_2(r) = \frac{\gamma(1 + a_1)r}{(1 - r)(1 + a_1r)} + \frac{\delta(1 + b_1)r}{(1 - r)(1 + b_1r)} + \beta$$

возрастают на $[0; 1)$ от $\beta \in [0; 1)$ до $+\infty$.

Чтобы доказать неуллучшаемость радиуса звездообразности r^* , воспользуемся функцией (10). Для нее

$$z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} = \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z} + \frac{\gamma(1 + a_1)z}{(1 + z)(1 - a_1z)} + \frac{\delta(1 + b_1)z}{(1 + z)(1 - b_1z)}.$$

Поэтому в точке $z = -r^*$ получаем

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} \right) = \frac{1 - (1 - 2\alpha)r^*}{1 + r^*} - \frac{r^*}{1 - r^*} \left(\gamma \frac{1 + a_1}{1 + a_1r^*} + \delta \frac{1 + b_1}{1 + b_1r^*} \right) = \beta.$$

То есть, радиус звездообразности порядка β улучшить нельзя.

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим некоторые следствия.

Пусть $\delta = 0$, $b \rightarrow \infty$. Тогда $g(z) \equiv h(z)$ и класс $K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$ преобразуется в класс $K_\alpha^*(a, \gamma) := K_\alpha^*(a, \gamma, \infty, 0)$ почти звездообразных функций. В силу этого из теорем 1-2 вытекает

Следствие 1. Пусть $f \in K_\alpha^*(a, \gamma)$, то есть функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \quad 0 < \gamma \leq 1, a > \frac{1}{2},$$

где $g \in S^*(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^\gamma}{(1+(1-1/a)r)^\gamma} \frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f(z)| \leq \frac{(1+r)^\gamma}{(1-(1-1/a)r)^\gamma} \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

и точный радиус звездообразности порядка β класса $K_\alpha^*(a, \gamma)$ равен единственному на интервале $(0; 1)$ корню уравнения

$$\frac{1 - (1 - 2\alpha)r}{1 + r} - \frac{r}{1 - r} \frac{\gamma(2 - 1/a)}{1 + (1 - 1/a)r} - \beta = 0.$$

Рассмотрим частные случаи следствия 1.

1) Пусть $\gamma = 1$ и $\alpha = 0$.

Тогда при $a \rightarrow \infty$ получаем класс K^* функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $Re \frac{f(z)}{g(z)} > 0$, где $g \in S^*$, для которого справедлива оценка

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^3} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$$

и радиус звездообразности порядка β $r_1^*(\beta) = (2 - \sqrt{3 + \beta^2}) / (1 + \beta)$. Заметим, что при $\beta = 0$ получаем радиус звездообразности класса K^* , равный $r_1^*(0) = 2 - \sqrt{3}$, который ранее был получен в [2, теорема 3].

Если $a = 1$, то в классе $K^*(1)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$, где $g \in S^*$, получаем оценку

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)}{(1-r)^2} \quad (14)$$

и радиус звездообразности порядка β класса $K^*(1)$ определяется по формуле

$$r_2^*(\beta) = \begin{cases} \frac{(3 - \sqrt{9 - 4\beta(1-\beta)})}{2\beta}, & \beta \neq 0 \\ 1/3, & \beta = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что радиус звездообразности $r_2^*(0) = 1/3$ класса $K^*(1)$ получен в [2, теорема 4].

2) Пусть $\gamma = 1$ и $\alpha = 1/2$.

В [11] показано, что если $g \in S^0$, то $g \in S^*(1/2)$. Поэтому, аналогично предыдущему, при $a \rightarrow \infty$ и при $a = 1$ получаем следующие результаты.

В классе K_0^* функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $Re \frac{f(z)}{g(z)} > 0$, где $g \in S^0$, имеет место оценка (14) и радиус $r_3^*(\beta)$ звездообразности порядка β класса K_0^* определяется по формуле (15). Заметим, что в частном случае, при $\beta = 0$, радиус звездообразности $r_3^*(0) = 1/3$ класса K_0^* получен в [3, теорема 3].

В классе $K_0^*(1)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$, где $g \in S^0$, имеет место оценка

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)}{(1-r)}$$

и радиус $r_4^*(\beta)$ звездообразности порядка β класса K_0^* определяется по формуле $r_4^*(\beta) = (\sqrt{1 + (1 - \beta)^2} - 1)/(1 - \beta)$. При $\beta = 0$ получаем радиус звездообразности $r_4^*(0) = \sqrt{2} - 1$ класса $K_0^*(1)$ из [3, теорема 4].

Определение 5. Пусть $\widehat{K}_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$ – класс функций $f(z)$ из \mathcal{N} , удовлетворяющих условию

$$\left| \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \quad \left| \left(\frac{(1-z)^{2(1-\alpha)}}{z} g(z) \right)^{1/\delta} - b \right| < b,$$

где $0 < \gamma, \delta \leq 1$, $a, b > 1/2$, $0 \leq \alpha < 1$.

Поскольку $h_0(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}} \in S^*(\alpha)$, то $\widehat{K}_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta) \subset K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$.

В формуле экстремальной функции $f_0(z)$ из (10) теорем 1 и 2 содержится функция $h_0(z)$. В силу этого, теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если вместо произвольной функции $h(z)$ класса $S^*(\alpha)$ используется конкретная функция $h_0(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ этого класса.

То есть имеет место

Теорема 3. Пусть $f \in \widehat{K}_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$ и пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, справедлива точная оценка (9) и точный радиус звездообразности порядка β класса $\widehat{K}_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$ равен единственному на интервале $(0; 1)$ корню уравнения (12).

В статьях [6-7] для ряда классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций найдены различные радиусы звездообразности, в том числе и радиусы звездообразности порядка β . Некоторые из выше отмеченных классов являются подклассами класса $\widehat{K}_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$. Поэтому из теоремы 3, как частные случаи, вытекают радиусы звездообразности порядка β классов $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ из [6], Π_1, Π_2 из [7] и в дополнение к ним – теоремы роста данных классов:

$$1) \mathcal{F}_1 = K_{1/2}^*(\infty, 1, \infty, 1) = \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \operatorname{Re} \left(\frac{1-z}{z} g(z) \right) > 0 \right\},$$

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^3} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)^2}{(1-r)^3}, \quad r(\mathcal{F}_1, \beta) = \frac{2(1-\beta)}{5 + \sqrt{25 - 4\beta(1-\beta)}};$$

$$2) \mathcal{F}_2 = K_{1/2}^*(1, 1, \infty, 1) = \left\{ f(z): \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \operatorname{Re} \left(\frac{1-z}{z} g(z) \right) > 0 \right\},$$

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)^2}{(1-r)^2}, \quad r(\mathcal{F}_2, \beta) = \frac{1-\beta}{2 + \sqrt{4 + (1-\beta)^2}};$$

$$3) \mathcal{F}_3 = K_{1/2}^*(\infty, 1, \infty, 0) = \left\{ f(z): \operatorname{Re} \left(\frac{1-z}{z} f(z) \right) > 0 \right\},$$

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)}{(1-r)^2}, \quad r(\mathcal{F}_3, \beta) = \frac{2(1-\beta)}{3 + \sqrt{9 - 4\beta(1-\beta)}};$$

$$4) \mathcal{F}_4 = K_0^*(\infty, 1, \infty, 0) = \left\{ f(z): \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z)^2}{z} f(z) \right) > 0 \right\}$$

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^3} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}, \quad r(\mathcal{F}_4, \beta) = \frac{1-\beta}{2 + \sqrt{3 + \beta^2}};$$

$$5) \Pi_1 = K_0^*(\infty, 1, \infty, 1) = \left\{ f(z): \operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z)^2}{z} g(z) \right) > 0 \right\},$$

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^4} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)^2}{(1-r)^4}, \quad r(\Pi_1, \beta) = \frac{1-\beta}{3 + \sqrt{8 + \beta^2}};$$

$$6) \Pi_2 = K_0^*(1, 1, \infty, 1) = \left\{ f(z) : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \operatorname{Re} \left(\frac{(1-z)^2}{z} g(z) \right) > 0 \right\}.$$

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^3} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)^2}{(1-r)^3}, \quad r(\Pi_2, \beta) = \frac{2(1-\beta)}{5 + \sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 25}}$$

Рассмотрим теперь дважды почти выпуклые функции.

Известно [12], что функция $F(z)$ из \mathcal{N} называется почти выпуклой (close-to-convex functions), если существует функция $G \in S^0$ такая, что выполняется условие

$$\operatorname{Re} \frac{F'(z)}{G'(z)} > 0, z \in E. \quad (16)$$

Класс почти выпуклых функций обозначают через K . Если в условии (16) функция $G(z)$ сама является почти выпуклой, то функция $F(z)$ называется дважды почти выпуклой (doubly close-to-convex functions) и класс таких функций обозначается через CK .

Наряду с классом K в исследованиях часто рассматривается класс $K(\gamma)$ функций [13, 14], почти выпуклых порядка γ , $0 < \gamma \leq 1$, удовлетворяющих условию

$$\left| \arg \frac{F'(z)}{G'(z)} \right| < \gamma \frac{\pi}{2}, z \in E, \quad (17)$$

где $G \in S^0$. При этом, $K(\gamma) \subset K(1) = K$.

Определение 6. Пусть $K_\alpha(a, \gamma)$ – класс функций $F(z)$ из \mathcal{N} , для каждой из которых существует функция $H \in S^0(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, такая, что $\frac{F'(z)}{H'(z)} \in \mathcal{P}(a, \gamma)$, то есть функция $F(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \left(\frac{F'(z)}{H'(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \quad 0 < \gamma \leq 1, a > \frac{1}{2}.$$

Определение 7. Пусть $K_\alpha(a, \gamma, b, \delta)$ – класс функций $F(z)$ из \mathcal{N} , для каждой из которых существует функция $G \in K_\alpha(b, \delta)$ такая, что выполняется условие $\frac{F'(z)}{G'(z)} \in \mathcal{P}(a, \gamma)$, где $0 < \gamma, \delta \leq 1$, $a, b > 1/2$.

То есть функция $F \in K_\alpha(a, \gamma, b, \delta)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\left| \left(\frac{F'(z)}{G'(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a, \quad \left| \left(\frac{G'(z)}{H'(z)} \right)^{1/\delta} - b \right| < b, \quad (18)$$

где $H \in S^0(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$.

По определению также будем считать, что при $\alpha = 0$ имеют место соотношения $K(a, \gamma) := K_0(a, \gamma)$ и $K(a, \gamma, b, \delta) := K_0(a, \gamma, b, \delta)$. Тогда $K(\gamma) = K(\infty, \gamma)$.

Между классами $K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$ и $K_\alpha(a, \gamma, b, \delta)$ имеется простая связь. Если обозначить

$$f(z) = zF'(z), \quad g(z) = zG'(z), \quad h(z) = zH'(z), \quad (19)$$

то условия (18) преобразуются в условия (8) и обратно. То есть с помощью равенств (19) между классами $K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$ и $K_\alpha(a, \gamma, b, \delta)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие: $F \in K_\alpha(a, \gamma, b, \delta) \Leftrightarrow f = zF' \in K_\alpha^*(a, \gamma, b, \delta)$. Учитывая также, что каждое из равенств (19) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами S^*

звездообразных функций и S^0 выпуклых функций, на основе теорем 1-2 получаем теорему искажения и радиус выпуклости порядка β класса $K_\alpha(a, \gamma, b, \delta)$.

Теорема 4. Пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Если $F \in K_\alpha(a, \gamma, b, \delta)$, то при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^{\gamma+\delta}}{(1+a_1r)^\gamma(1+b_1r)^\delta} \frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |F'(z)| \leq \frac{(1+r)^{\gamma+\delta}}{(1-a_1r)^\gamma(1-b_1r)^\delta} \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}.$$

и точный радиус выпуклости порядка β класса $K_\alpha(a, \gamma, b, \delta)$ равен единственному на интервале $(0; 1)$ корню уравнения (12). Экстремальная функция задается формулой

$$F_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-a_1t}\right)^\gamma \left(\frac{1+t}{1-b_1t}\right)^\delta \frac{dt}{(1-t)^{2(1-\alpha)}}.$$

При конкретных значениях параметров α, β и a, γ, b, δ из теоремы 4 вытекает ряд известных результатов. Например, при $\alpha = \beta = 0$ случаям $\gamma = \delta = 1$ и $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$ соответствуют классы $CC(a, b)$ и $\mathcal{L}(\gamma, \delta)$ из [15, 16] дважды почти выпуклых функций, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} CC(a, b): \quad & \left| \frac{F'(z)}{G'(z)} - a \right| < a, \quad \left| \frac{G'(z)}{H'(z)} - b \right| < b, \quad H(z) \in S^0, \\ \mathcal{L}(\gamma, \delta): \quad & \left| \arg \frac{F'(z)}{G'(z)} \right| < \gamma \frac{\pi}{2}, \quad \left| \arg \frac{G'(z)}{H'(z)} \right| < \delta \frac{\pi}{2}, \quad H(z) \in S^0, \end{aligned}$$

и из теоремы 4 вытекают следствия 2 и 3.

Следствие 2 [15]. Пусть $F \in CC(a, b)$, $a, b > 1/2$, и пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^2}{(1+a_1r)(1+b_1r)} \frac{1}{(1+r)^2} \leq |F'(z)| \leq \frac{(1+r)^2}{(1-a_1r)(1-b_1r)} \frac{1}{(1-r)^2}$$

и точный радиус выпуклости класса $CC(a, b)$ равен единственному на интервале $(0; 1)$ корню уравнения

$$\frac{1-r}{1+r} - \frac{r}{1-r} \left(\frac{1+a_1}{1+a_1r} + \frac{1+b_1}{1+b_1r} \right) = 0.$$

Следствие 3 [16]. Пусть $F \in \mathcal{L}(\gamma, \delta)$, $0 < \gamma, \delta \leq 1$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^{\gamma+\delta}}{(1+r)^{\gamma+\delta+2}} \leq |F'(z)| \leq \frac{(1+r)^{\gamma+\delta}}{(1-r)^{\gamma+\delta+2}}$$

и точный радиус выпуклости класса $\mathcal{L}(\gamma, \delta)$ равен

$$r^0(\gamma, \delta) = 1 + \gamma + \delta - \sqrt{(\gamma + \delta)(2 + \gamma + \delta)}.$$

Если $\alpha = \beta = 0, b \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, то из теоремы 4 получаем

Следствие 4. Пусть $F \in K(a, \gamma)$, то есть выполняется условие

$$\left| \left(\frac{F'(z)}{H'(z)} \right)^{1/\gamma} - a \right| < a,$$

где $H \in S^0$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеет место оценка

$$\frac{(1-r)^\gamma}{(1+(1-1/a)r)^\gamma(1+r)^2} \leq |F'(z)| \leq \frac{(1+r)^\gamma}{(1-(1-1/a)r)^\gamma(1-r)^2}$$

и радиус выпуклости $r^0(a, \gamma)$ класса $K(a, \gamma)$ – единственный на $(0; 1)$ корень уравнения

$$[a + (a-1)r](1-r)^2 - (2a-1)\gamma r(1+r) = 0. \quad (20)$$

Если $a \rightarrow \infty$, то класс $K(a, \gamma)$ трансформируется в класс $K(\gamma)$ и из следствия 4 получаем теорему искажения класса $K(\gamma)$ из [13]

$$\frac{(1-r)^\gamma}{(1+r)^{\gamma+2}} \leq |F'(z)| \leq \frac{(1+r)^\gamma}{(1-r)^{\gamma+2}}$$

и радиус выпуклости $r_0 = 1 + \gamma - \sqrt{\gamma(2+\gamma)}$ класса $K(\gamma)$ из [17].

При $a = 1$ уравнение (20) приобретает вид $(1-\gamma)r^2 - (2+\gamma)r + 1 = 0$, откуда получаем радиус выпуклости

$$r_0 = \begin{cases} \frac{2+\gamma - \sqrt{\gamma(8+\gamma)}}{2(1-\gamma)} & \text{при } \gamma \neq 1, \\ 1/3 & \text{при } \gamma = 1, \end{cases}$$

класса функций $F(z)$, удовлетворяющих условию $\left| \left(\frac{F'(z)}{H'(z)} \right)^{1/\gamma} - 1 \right| < 1$, где $0 < \gamma \leq 1$, $H \in S^0$.

При $\gamma = 1$ отсюда следует радиус выпуклости [18-19] $r_0 = 1/3$ подкласса почти выпуклых функций, удовлетворяющих условию $|F'(z)/H'(z) - 1| < 1$, $H \in S^0$.

Дискуссия

Исследование классов дважды почти звездообразных и дважды почти выпуклых функций представляет собой одно из активно развивающихся направлений современной математической науки. Эти классы функций отражают как локальные, так и глобальные особенности математических объектов, что делает их особенно ценными при анализе сложных динамических систем. Функции данного типа находят широкое применение в разнообразных областях – от теоретических аспектов анализа и оптимизации до прикладных задач в физике, инженерии, экономике и биомеханике. Их использование позволяет учитывать важнейшие характеристики процессов: устойчивость, адаптивность, плавность переходов и чувствительность к изменениям условий. Таким образом, изучение дважды почти звездообразных и дважды почти выпуклых функций находится на пересечении фундаментальных и прикладных исследований. Это делает данное направление не только актуальным, но и стратегически важным как для развития математической теории, так и для практических приложений в наукоёмких и технологических сферах.

Заключение

В статье рассмотрена задача исследования скорости роста и радиуса звездообразности одного достаточно широкого класса дважды почти звездообразных функций. Особенностью работы является то, что широта исследуемого класса позволяет использовать в качестве

базовой для построения класса почти звездообразных функций не только звездообразные функции, но и выпуклые функции. Это позволяет существенно расширить применимость полученных результатов к ранее исследованным и новым классам аналитических функций.

Получены точная теорема роста и точный радиус звездообразности данного класса функций. Установлены связи с ранее известными результатами других авторов, многие из которых получены как следствия основных результатов данной статьи.



Список использованных источников

- [1] Reade M.O. *On close-to-close univalent functions* // *Michigan Math. J.*, 1955, Vol. 3, P. 59-62.
- [2] MacGregor T.H. *The radius of univalence of certain analytic functions* // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1963, No. 14, P. 514-520.
- [3] MacGregor T.H. *The radius of univalence of certain analytic functions, II* // *Proc. Am. Math. Soc.*, 1963, No. 14, P. 521-524. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5>
- [4] Chichra P. *On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions* // *J. of the Australian Math. Soc.*, 1972, Vol. 13, No. 2, P. 208-218. DOI: <https://doi.org/10.1017/S1446788700011290>
- [5] Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Ысмағұл Р.С. Точные оценки регулярных функций и радиусы выпуклости и звездообразности некоторых классов звездообразных и почти звездообразных функций. // *Вестник Казахстанско-Британского технического университета*, 2024, Т. 21, № 2, С.127-138. doi: <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138>
- [6] Sebastianc A., Ravichandran V., *Radius of starlikeness of certain analytic functions* // *Math. Slovaca*, 2021, Vol. 71. No. 1, P.83-104. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.06999>
- [7] El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. *Starlikeness of certain analytic functions* // *arXiv preprint arXiv:2006.11734* – 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>
- [8] Kanaga R., Ravichandran V. *Starlikeness for certain close-to-star functions* // *Hacet. J. Math. Stat.*, 2021, Vol. 50, No. (2, P. 414-432. DOI: <https://doi.org/10.15672/hujms.702703>
- [9] Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. *Radius of starlikeness for classes of analytic functions* // *arXiv preprint arXiv:2006.11744*. – 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>
- [10] Ma W., Minda D. *A unified treatment of some special classes of functions* // *Proc. Conf. on Complex Analysis, Tianjin, 1992, Conference Proceedings and Lecture Notes in Analysis, Vol. 1 (International Press, Cambridge, MA, 1994, 157–169).* https://www.researchgate.net/publication/245129813_A_unified_treatment_of_some_special_classes_of_functions
- [11] Strohäcker E. *Beiträge zur theorie der schlichten funktionen* // *Mathematische Zeitschrift*, 1933, No. 37, P. 356-380.
- [12] Kaplan W. *Close-to-convex schlicht functions* // *Michigan Math. J.*, 1952, Vol. 1, No. 2, P.169–185. DOI: <https://10.1307/mmj/1028988895>
- [13] Renyi A. *Some remarks on univalent functions* // *An. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Sec., A.3*, 1959, P. 111-121. <http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf>
- [14] Reade M.O. *The coefficients of close-to-convex functions* // *Duke Math. J.*, 1956, Vol. 23, No. 3, P. 459-462. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0>
- [15] Raducanu D. *Bounded doubly close-to-convex functions* // *Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis*, Article ID 804095, 2014, P. 1-7. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/804095>
- [16] Dorff M., Naraniecka I., Szyndal J. *Doubly close-to-convex functions* // *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, Vol. 290, P. 55-62. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.050>
- [17] Hayman W.K. *Multivalent functions. Cambridge Tracts in Mathematics #110*, 1994, 276 p.
- [18] Vasudevarao A., Sokół J., Thomas D.K. *On a close-to-convex analogue of certain starlike functions* // *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2020, Vol. 102, Is. 2, P. 268-281. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972719001606>
- [19] Ratti J.S. *The radius of convexity of certain analytic functions II. Intern. J. of Math. and Math. Scie.*, 1980, Vol. 3, No.3, P. 483-489. DOI: <https://doi.org/10.1155/s0161171280000361>

References

- [1] Reade M.O. (1955) *On close-to-close univalent functions. Michigan Math. J.*, Vol. 3, pp. 59-62.
- [2] MacGregor T.H. (1963) *The radius of univalence of certain analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 14, pp. 514-520.

- [3] MacGregor T.H. (1963) *The radius of univalence of certain analytic functions, II*. Proc. Am. Math. Soc., Vol. 14, pp. 521–524. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5>
- [4] Chichra P. (1972) *On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions*. J. of the Australian Math. Soc., Vol. 13, No. 2, pp. 208-218. DOI: <https://doi.org/10.1017/S1446788700011290>
- [5] Mayer F.F., Tastanov M.G., Utemisova A.A., Ysmaghul R.S. (2024) *Tochnye otsenki regulyarnykh funktsiy i radiusy vypuklosti i zvezdobraznosti nekotorykh klassov zvezdobraznykh i pochti zvezdobraznykh funktsiy [Exact estimates of regular functions and radii of convexity and starlikeness for some classes of starlike and almost starlike functions]*. Vestnik Kazakhstansko-Britanskogo tekhnicheskogo universiteta, Vol. 21, No. 2, pp. 127-138. doi: <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138>
- [6] Sebastianc A., Ravichandran V. (2021) *Radius of starlikeness of certain analytic functions*. Math. Slovaca 71. No. 1, pp. 83–104. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.06999>
- [7] El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. (2020) *Starlikeness of certain analytic functions*. arXiv preprint arXiv:2006.11734. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>
- [8] Kanaga R., Ravichandran V. (2021) *Starlikeness for Certain Close-to-Star Functions*. Hacet. J. Math. Stat., Vol. 50, No. 2, pp. 414-432. DOI: <https://doi.org/10.15672/hujms.702703>
- [9] Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. (2020) *Radius of starlikeness for classes of analytic functions*. arXiv preprint arXiv:2006.11744. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>
- [10] Ma W., Minda D. *A unified treatment of some special classes of functions*. Proc. Conf. on Complex Analysis, Tianjin, 1992, Conference Proceedings and Lecture Notes in Analysis, Vol. 1 (International Press, Cambridge, MA, 1994, 157–169).
https://www.researchgate.net/publication/245129813_A_unified_treatment_of_some_special_classes_of_functions
- [11] Strohäcker E. (1933) *Beiträge zur theorie der schlichten funktionen*. Mathematische Zeitschrift, Vol. 37, pp. 356-380.
- [12] Kaplan W. (1952) *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J., Vol. 1, No. 2, pp.169–185. <https://10.1307/mmj/1028988895>
- [13] Renyi A. (1959) *Some remarks on univalent functions*. An. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Sec., A.3, pp. 111-121 . <http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf>
- [14] Reade M.O. (1956) *The coefficients of close-to-convex functions*. Duke Math. J., Vol. 23, No. 3, pp. 459-462. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0>
- [15] Raducanu D. (2014) *Bounded doubly close-to-convex functions*. Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Article ID 804095, 7 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/804095>
- [16] Dorff M., Naraniecka I. and Szydal J. (2004) *Doubly close-to-convex functions*. J. Math. Anal. Appl., Vol. 290, pp. 55-62. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.050>
- [17] Hayman W.K. *Multivalent functions*. Cambridge Tracts in Mathematics #110, 1994, 276 p.
- [18] Vasudevarao A., Sokół J., Thomas D.K. (2020) *On a close-to-convex analogue of certain starlike functions*. Bull. Aust. Math. Soc., Vol. 102, Is. 2, pp. 268-281. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972719001606>
- [19] Ratti J.S. (1980) *The radius of convexity of certain analytic functions II*. Intern. J. of Math. and Math. Scie., Vol. 3, No. 3, pp. 483-489. DOI: <https://doi.org/10.1155/s0161171280000361>

К.Н. Оспанов , Е.Ө. Молдағали* 

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, қ.Астана, Қазақстан

*e-mail: yerka2998@gmail.com

ТӨРТІНШІ РЕТТІ АЙНЫМАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ КОРРЕКТІЛІК ШАРТТАРЫ

Аңдатпа

Біз бұл мақалада шектелмеген айнымалы коэффициенттері бар төртінші ретті екі мүшелі бір дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттарын көрсеттік. Теңдеу кіші мүшесі болмауы себепті нұқсанды теңдеу болып табылады. Теңдеудің екінші ерекшелігі – оның аралық коэффициенті жылдам өседі. Мұндай теңдеулерге тербелістердің, тұтқыр серпімді және серпімсіз ағындардың, иілу толқындарының және т.б. теорияларындағы бірқатар математикалық мәселелер алып келеді. Жұмыста жалпыланған шешімнің бар болуы және жалғыздығы жайлы теорема дәлелденді, сол сияқты шешім мен оның бірінші ретті туындысының салмақты нормаларының бағасы көрсетілді. Коэффициенттерге қойылған шарттарды функциялардың кең класы қанағаттандырады. Жоғарғы мүшедегі коэффициенттерден олардың шексіздіктегі өсуі дәрежелік функциядан аспауы талап етіледі. Коэффициенттер тегіс функциялар деп ұйғарылады, дегенмен олардың туындыларына ешқандай шектеу қойылмайды. Барлық шарттар әр коэффициенттің өзіне және олардың арасындағы белгілі бір қатынастарға қойылған.

Түйін сөздер: нұқсанды дифференциалдық теңдеу, айнымалы коэффициент, шешілімділік, корректілік, Харди теңсіздігі, түйіндес оператор.

К.Н. Оспанов, Е.Ө. Молдағали

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация

В данной статье мы показали условия корректности для двучленного дифференциального уравнения четвертого порядка с неограниченными переменными коэффициентами. Уравнение является вырожденным, поскольку в нем отсутствует младший член. Вторая особенность уравнения заключается в том, что его промежуточный коэффициент быстро увеличивается. Такие уравнения приводят к ряду математических задач в теории колебаний, вязкоупругих и неупругих течений, изгибных волн и т. д. В работе доказано существование и единственность обобщенного решения, а также даны оценки весовых норм решения и его первой производной. Условиям, налагаемым на коэффициенты, удовлетворяет широкий класс функций. Коэффициенты в верхнем члене должны иметь темп роста на бесконечности, не превышающий степенной функции. Коэффициенты предполагаются гладкими функциями, хотя на их производные не накладывается никаких ограничений. Все условия накладываются на каждый коэффициент и на определенные соотношения между ними.

Ключевые слова: вырожденное дифференциальное уравнение, переменный коэффициент, разрешимость, корректность, неравенство Харди, сопряженный оператор.

K.N. Ospanov, Ye.O. Moldagali

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

CORRECTNESS CONDITIONS FOR FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Abstract

In this paper we have shown the correctness conditions for a fourth-order binomial differential equation with unbounded variable coefficients. The equation is degenerate since it has no lower term. The second feature of the equation is that its intermediate coefficient increases rapidly. Such equations lead to a number of mathematical problems in the theory of oscillations, viscoelastic and inelastic flows, flexural waves, etc. The existence and uniqueness of a generalized solution are proved in the paper, and estimates of the weight norms of the solution and its first derivative are given. A wide class of functions satisfies the conditions imposed on the coefficients. The coefficients in the upper term must have a growth rate at infinity not exceeding a power function. The coefficients are assumed to be smooth functions, although no restrictions are imposed on their derivatives. All conditions are imposed on each coefficient and on certain relations between them.

Keywords: degenerate differential equation, variable coefficient, solvability, correctness, Hardy inequality, adjoint operator.

Негізгі ережелер

Жұмыста коэффициенттері шектелмеген төртінші ретті екі мүшелі нұқсанды дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттары алынды. Ол үшін салмақты Харди типті бір интегралдық теңсіздік, тегіс функциялар класында шешім нормаларын Фридрихсше бағалау әдісі қолданылды. Сол сияқты, берілген теңдеуді құраушы дифференциалдық операторға түйіндес оператордың ядросының сипатталмасы айқын түрде көрсетілді. Алынған нәтижелер жоғарғы коэффициенті айнымалы дифференциалдық теңдеулердің шешілу теориясында қолданыс табуы мүмкін.

Кіріспе

$$l_0 y = \frac{1}{s} \left(\rho(x) \left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' \right)' - \frac{1}{s} \left(r(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' = F(x), \quad (1)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $r(x) > 0$, $r(x) \in C_{loc}^{(1)}(\mathbb{R})$, $\rho(x) > 0$, $\rho(x) \in C_{loc}^{(3)}(\mathbb{R})$, $s(x) > 0$ – үзіліссіз функция, ал $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғарамыз. $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ - төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиынында анықталған

$$l_0 y = \frac{1}{s} \left(\rho(x) \left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' \right)' - \frac{1}{s} \left(r(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)'$$

операторының $L_2(\mathbb{R})$ нормасында тұйықталуын l деп белгілейік. (1) теңдеуінің шешімі деп $ly = F$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(l)$ элементін айтамыз.

Төртінші ретті дифференциалдық теңдеулерге әртүрлі практикалық есептер алып келеді [1, 2]. Сонымен бірге, олар төменгі ретті дифференциалдық теңдеулерді, мысалы, реакция – диффузиялық теңдеулерді регуляризациялауға белсенді қолданылады. (1) дивергенттік формадағы теңдеу, оның басты ерекшелігі, шешімдердің регулярлық қасиеттері бірден байқалмайды, ол үшін қосымша талдау жасалуы қажет [3].

Осы кезге дейін 4-ретті дифференциалдық теңдеулер көбіне шенелген облыста қарастырылып келді. Компактылы емес облыста берілген айнымалы коэффициентті жоғарғы жұп ретті дифференциалдық теңдеулердің шешілу және регулярлық шарттары М.А. Наймарк, А.Г. Костюченко, М.В. Федорюк, Р.С. Исмагилов [4-7] жұмыстарында зерттелген. Дегенмен бұл жұмыстарда негізінен шенелген коэффициентті теңдеулер қарастырылды.

Кіші мүшесі жоқ, ал коэффициенттері шенелмеген (1) түріндегі теңдеулер нұқсанды теңдеу деп аталады. $\rho(x) = s(x) = 1$ жағдайында оның корректілі шешілуінің тиімді шарттары [8] мақаласынан шығады. Бұл нәтиже $s(x)$ функциясы бар (1) теңдеуіне [9] жұмысында жалпыланған. L_0 -ге ұқсас кейбір нұқсанды жоғарғы ретті симметриялы операторлардың өзіне түйінділік және үзіліссіз қайтарымдылық шарттары [10] (r – дәрежелік функция болғанда), [11] жұмыстарында алынған. Практикалық қолданыстар төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің жоғарғы коэффициенттері айнымалы және шенелмеген функциялар болып келген жаңа жағдайларын зерттеуді күн тәртібіне қойып отыр. Мақала осы мәселеге арналған және белгілі бір мөлшерде жоғарыда келтірілген [8-11] зерттеулерінің жалғасы болып табылады. Әдістемелік жағынан бұл мақалаға құрылымы симметриялы емес нұқсанды дифференциалдық теңдеулерге арналған [12, 13] жұмыстары жақын келеді.

Алдағы уақытта C, C_1, C_2 т.б. арқылы мәндері әр жерде әртүрлі болуы мүмкін оң тұрақтыларды белгілейміз.

Зерттеу әдіснамасы

Жұмыста белгілі Гельдер, Харди функционалдық теңсіздіктері және Макенхаупт теоремасы қолданылады. $\rho(t)$ және $v(t) \neq 0$ үзіліссіз функциялары үшін келесі белгілеулерді енгізейік:

$$\alpha_{\rho,v,k}(x) = \sup_{x>0} \left(\int_0^x |\rho(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^\infty t^{(k-1)q'} v^{-q'}(t) dt \right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$\beta_{\rho,v,k}(x) = \sup_{x<0} \left(\int_x^0 |\rho(s)|^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{-\infty}^x s^{(k-1)q'} v^{-q'}(s) ds \right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$\gamma_{\rho,v,k} = \max(\alpha_{\rho,v,k}(x), \beta_{\rho,v,k}(x)).$$

Мұндағы k – натурал сан.

Келесі тұжырым белгілі.

Лемма 1. Айталық, $s(t)$ және $v(t)$ функциялары $\gamma_{s,v,k} < \infty$ шартын қанағаттандырсын. Онда

$$\|sf\|_q \leq C \|vf^{(k)}\|_q$$

теңсіздігі, кез-келген $1 < q < \infty$ және әрбір $f \in C_0^{(k)}(\mathbb{R})$ үшін орынды. Және осы теңсіздік орындалатындай ең кіші C тұрақтысы

$$C \leq \frac{q^{\frac{1}{q}}(q')^{\frac{1}{q'}}}{(k-1)!} \gamma_{s,v,k}$$

теңсіздігін қанағаттандырады. Мұндағы $q^{-1} + (q')^{-1} = 1$.

Зерттеу нәтижелері

Лемма 2. Айталық $r(x)$ функциясы $0 < \delta \leq r(x)$ және $\gamma_{1+s,\sqrt{r},1} < \infty$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y \in D(l)$ үшін келесі баға орынды:

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2 + \|y\|_2 \leq C \|l_0 y\|_2. \quad (2)$$

Дәлелдеу. $y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ болсын. $(l_0 y, y)$ скаляр көбейтіндісін келесідей түрлендірейік.

$$(l_0 y, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\rho(x) \left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' \right)' y dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \left(r(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' y dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' \rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \left[\left(\frac{y}{s} \right)' \right]^2 dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' \right]^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \left[\left(\frac{y}{s} \right)' \right]^2 dx = \\
 &= \left\| \left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' \right\|_2^2 + \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Осыдан

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2^2 \leq (l_0 y, y). \quad (3)$$

Екінші жағынан

$$(l_0 y, y) \leq \|l_0 y\|_2 \|y\|_2. \quad (4)$$

(3), (4) және $\gamma_{s, \sqrt{r}, 1} < \infty$ шартынан

$$\|y\|_2^2 \leq C_1 \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2^2 \leq C_1 \|l_0 y\|_2 \|y\|_2.$$

Осыдан

$$\|y\|_2 \leq C_1 \|l_0 y\|_2. \quad (5)$$

(4) бойынша,

$$\|l_0 y\|_2 \geq \frac{\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2}{\|y\|_2} \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{C_1}} \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2$$

немесе

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2 \leq \sqrt{C_1} \|l_0 y\|_2. \quad (6)$$

(5), (6) бағалары $D(l)$ -ге тиісті әрбір элемент үшін де орынды екенін көрсетейік. Айталық $y \in D(l)$. l операторы l_0 -дің тұйықталуы болғандықтан, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып,

$$\|y_n - y\|_2 \rightarrow 0, \quad \|l_0 y_n - l y\|_2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

қатыстары орындалады. Осыдан

$$\|y_n\|_2 \rightarrow \|y\|_2, \quad \|l_0 y_n\|_2 \rightarrow \|l y\|_2 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7)$$

(5) және (6) бойынша, сәйкес

$$\|y_n\|_2 \leq C_1 \|l_0 y_n\|_2 \quad (8)$$

және

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s} \right)' \right\|_2 \leq \sqrt{C_1} \|l_0 y_n\|_2. \quad (9)$$

Екіншіден (8), (9) теңсіздіктерінен және (7) қатыстарынан әрбір $y_n, y_m \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ (n, m – натурал сандар) үшін

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s} \right)' - \sqrt{r} \left(\frac{y_m}{s} \right)' \right\|_2 + \|y_n - y_m\|_2 \leq C_2 \|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2 \quad (10)$$

бағасы шығады. Алуымыз бойынша, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|l_0 y_n - l_0 y_m\|_2 = 0$. Сондықтан (10)-нан $\left\{ \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбектері $L_2(\mathbb{R})$ - де фундаментальды болатынын көреміз.

Жалпыланған дифференциалдау және функцияға көбейту операциялары тұйық болғандықтан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s} \right)' - \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2 = 0.$$

Онда норманың қасиеті бойынша,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y_n}{s} \right)' \right\|_2 = \left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2.$$

(7) қатысын ескеріп, (8) мен (9) теңсіздіктерінен $y \in D(l)$ үшін алатынымыз, сәйкесінше

$$\|y\|_2 \leq C_1 \|ly\|_2 \quad (11)$$

және

$$\left\| \sqrt{r} \left(\frac{y}{s} \right)' \right\|_2 \leq \sqrt{C_1} \|ly\|_2. \quad (12)$$

(11) - мен (12) - теңсіздіктерін мүшелер қосып, (2) бағасына келеміз. Лемма дәлелденді.

Зерттеу нәтижесі

Теорема 1.

Егер r және ρ функциялары $0 < \delta_1 \leq \rho(x)$, $s(x) \leq C|x|^N$ ($N > 0$), $r \geq C_1 \rho^2$ теңсіздіктерін және Лемма 1 шарттарын қанағаттандырса, онда (1) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз ғана.

Дискуссия

Дәлелдеу. (1) теңдеуінің шешімінің жалғыздығы Лемма 2- ден шығады. l – тұйық оператор болғандықтан, (11) теңсіздігі бойынша, $R(l) = \overline{R(l)}$. $R(l) \neq L_2(\mathbb{R})$ деп қарсы жорыық. Онда нөлдік емес $v \in L_2(\mathbb{R}) \setminus R(l)$ элементі табылады. Жалпылықты шектемей, v элементі $R(l)$ – ге ортогональ деп аламыз. Демек әрбір $y \in D(l)$ үшін,

$$(ly, v) = 0.$$

Айталық, l^* берілген l операторына формальды түйіндес оператор болсын, онда $y \in D(l)$, $v \in D(l^*)$ үшін $(ly, v) = (y, l^*v)$. Келесі $(l_0 y, v)$ ($y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$, $v \in D(l^*)$) скаляр көбейтіндісін түрлендірейік.

$$\begin{aligned} (l_0 y, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\rho(x) \left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)'' \right)' v dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \left(r(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' v dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)'' \rho(x) \left(\frac{v}{s} \right)' dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \left(\frac{v}{s} \right)' dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \right)' \left(\rho(x) \left(\frac{v}{s} \right)' \right)' dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{s} \left(r(x) \left(\frac{v}{s} \right)' \right)' dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \left(\frac{y}{s} \right)' \left(\rho(x) \left(\frac{v}{s} \right)' \right)'' dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{s} \left(r(x) \left(\frac{v}{s} \right)' \right)' dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\frac{1}{s} \left(\rho(x) \left(\rho(x) \left(\frac{v}{s} \right)' \right)'' \right)' - \frac{1}{s} \left(r(x) \left(\frac{v}{s} \right)' \right)' \right] dx = (y, l^*v). \end{aligned}$$

Демек, $v \in D(l^*)$ келесі біртекті дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады

$$l^*v = \frac{1}{s} \left(\rho(x) \left(\rho(x) \left(\frac{v}{s} \right)' \right)' \right)' - \frac{1}{s} \left(r(x) \left(\frac{v}{s} \right)' \right)' = 0.$$

Егер

$$\rho(x) \left(\frac{v}{s} \right)' = z \tag{13}$$

деп белгілесек, онда $s(x) > 0$ болғандықтан,

$$\left(\rho z'' - \frac{r}{\rho} z \right)' = 0.$$

Осыдан

$$-z'' + \frac{r}{\rho^2} z = \frac{C_2}{\rho}. \tag{14}$$

Мұндағы C_2 - кез-келген тұрақты. $r \geq C_1 \rho^2$ болғандықтан, біртекті

$$-z'' + \frac{r}{\rho^2} z = 0$$

теңдеуінің келесі

$$z_1(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty), \quad z_1(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow -\infty),$$

$$z_2(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty), \quad z_2(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow -\infty),$$

қатыстарын қанағаттандыратын екі өзара сызықты тәуелсіз $z_1(x)$ және $z_2(x)$ шешімдері бар және мұндағы ұмтылу экспоненциалды. Грин функциясын құрайық

$$G(x, t) = \begin{cases} z_1(t)z_2(x), & -\infty < t < x, \\ z_1(x)z_2(t), & x < t < +\infty \end{cases}$$

демек $0 < G(x, t) \leq C_0 e^{-\delta_0|x-t|}$. Және (14) теңдеуінің жалпы шешімі былайша жазылады

$$z(x) = C_3 z_1(x) + C_4 z_2(x) + C_5 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x, t)}{\rho(t)} dt. \tag{15}$$

(13) және (15) қатыстарынан

$$\begin{aligned} v(x) = & C_6 s(x) + C_3 s(x) \int_0^x \frac{z_1(t)}{\rho(t)} dt + C_4 s(x) \int_0^x \frac{z_2(t)}{\rho(t)} dt \\ & + C_5 s(x) \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t, \tau)}{\rho(\tau)} d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Шарт бойынша, $v(x) \neq 0$ екенін ескеріп, $C_6 \neq 0$ деп аламыз. $0 < \delta_1 \leq \rho(x)$ болғандықтан, (16) - дағы екінші қосылғыш $x \rightarrow +\infty$ жағдайында экспоненциалды өседі. Онда, $u(x) \in L_2(\mathbb{R})$ қатысынан, $C_3 = 0$ екені шығады. Ал (16) - дағы үшінші қосылғыш $x \rightarrow -\infty$ жағдайында экспоненциалды өседі, демек $C_4 = 0$. Сонымен

$$v(x) = C_6 s(x) + C_5 s(x) \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t, \tau)}{\rho(\tau)} d\tau dt.$$

Жалпылықты шектемей,

$$v(x) = s(x) + C_7 s(x) \int_0^x \frac{1}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(t, \tau)}{\rho(\tau)} d\tau dt$$

деп есептеуге болады. Осыдан, егер $C_7 > 0$ болса, онда $v(x) \geq \delta_1 > 0$ ($x > 0$). Ал егер $C_7 < 0$ болса, онда $v(x) \geq \delta_1 > 0$ ($x < 0$). Демек $v(x) \notin L_2(\mathbb{R})$. Алынған қарама-қайшылық $R(l) = L_2(\mathbb{R})$ екенін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

Қорытынды

Мақалада шенелмеген екі коэффициенті бар төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеудің корректілі шешілуі үшін жеткілікті шарттар көрсетілді. Бұл шарттар коэффициенттер арасындағы байланыстарға және олардың әрқайсысының шексіздікте өсу жылдамдығына қойылған. Коэффициенттер тегіс функциялар деп ұйғарылады, бірақ олар туынды астында тұрса да, туындыларының өзгеруіне ешқандай шектеу қойылмайды. Мұндай тиімді нәтижеге тұйық сызықты операторлар теориясының әдістерін қолдана отырып қол жеткіздік. Дәлелденген теореманы таңбалары айнымалы бола алатын кіші мүшелері бар төртінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешілімділігін көрсету үшін пайдалануға болады.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

- [1] Островский Л.А., Потапов И.А. Введение в теорию модулярных волн. М: Физматлит, 2003. <https://djvu.online/file/Xvixkr59hLNmK>
- [2] Yadeta D.M., Gizaw A.K., Mussa Y.O. (2020). Approximate Analytical Solution of One-Dimensional Beam Equations by Using Time-Fractional Reduced Differential Transform Method//J. Appl. Math. - 2020. ArticleID 7627385. – pp. 1–13. <https://doi.org/10.1155/2020/7627385>
- [3] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка. –М.: Наука, 1972. <https://djvu.online/file/9ayCDOEWM197w>
- [4] Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1979. – 400 с. <https://reallib.org/reader?file=579194>
- [5] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с. <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Najmark1969ru.pdf>
- [6] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1983. – 354 с. <https://reallib.org/reader?file=470429>
- [7] Исмаилов Р.С. Об условиях полугораниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. – 1961. – № 140. – С. 33-36. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=26157&option_lang=rus
- [8] Отелбаев М. Критерий дискретности спектра одного вырожденного оператора и некоторые теоремы вложения // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т.13, №1. –С. 111–120. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=2972&option_lang=rus
- [9] Апышев О. Д., Отелбаев М. О спектре одного класса двучленных операторов // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 248, №2. –С. 265–268. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=42979&option_lang=rus
- [10] Аникеева Л.И. Об индексе дефекта одного дифференциального оператора высшего порядка // Успехи мат. наук. - 1977. – Т. 32(1). – С. 179-180. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=3053&option_lang=eng
- [11] Апышев О. Д., Отелбаев М. О спектре одного класса дифференциальных операторов и некоторые теоремы вложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1979. – Т. 43, №4. –С. 739–764. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=1729&option_lang=rus
- [12] Moldagali Ye.O., Ospanov K.N. Conditions for maximal regularity of solutions to fourth-order differential equations// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2024. - No. 4(116). - pp. 149–158. <https://mathematics-vestnik.ksu.kz/index.php/mathematics-vestnik/article/view/630>
- [13] Ospanov K., Ospanov M. The maximal regularity of the third-order differential equation and its applications// Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2024. – Vol. 47(6). – pp. 4895–4910. <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:001139610800001>

References

- [1] Ostrovskii, L.A., Potapov, I.A. (2003). *Vvedenie v teoriimodulirovannykhvoln [Introduction to Modulated Wave Theory]*. Moscow: Fizmatlit [in Russian]. <https://djuv.online/file/Xvixkr59hLNmK>
- [2] Yadeta, D.M., Gizaw, A.K., Mussa, Y.O. (2020). *Approximate Analytical Solution of One-Dimensional Beam Equations by Using Time-Fractional Reduced Differential Transform Method*. *J. Appl. Math.*, ArticleID 7627385, 1–13. <https://doi.org/10.1155/2020/7627385>
- [3] Ladyzhenskaja O.A., Ural'ceva N.N. (1972) *Linejnye i kvazilinejnye jellipticheskie uravnenija vtorogo porjadka [Linear and quasilinear elliptic equations of second order]*. Moscow: Nauka. (In Russian) <https://djuv.online/file/9ayCDOEWMI97w>
- [4] Kostjuchenko A.G., Sargsjan I.S. (1979) *Raspredelenie sobstvennyh znachenij (samosoprjazhennye obyknovennye differencial'nye operatory) [Distribution of eigenvalues (self-adjoint ordinary differential operators)]*. Moscow: Nauka. - 400 p. (In Russian) <https://reallib.org/reader?file=579194>
- [5] Najmark M.A. (1969) *Linejnye differencial'nye operatory [Linear differential operators]*. Moscow: Nauka. - 526 p. (In Russian) <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Najmark1969ru.pdf>
- [6] Fedorjuk M.V. (1983) *Asimptoticheskie metody dlja linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]*. Moscow: Nauka. - 354 p. (In Russian) <https://reallib.org/reader?file=470429>
- [7] Ismagilov R.S. (1961) *Ob uslovijah poluogranichennosti i diskretnosti spektra dlja odnomernyh differencial'nyh operatorov [On conditions for the semi-boundedness and discreteness of the spectrum for one-dimensional differential operators]*. *Doklady AN SSSR*, № 140, 33-36. (In Russian) https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=26157&option_lang=rus
- [8] Otelbaev M. *Kriterij diskretnosti spektra odnogo vyrozhdennogo operatora i nekotorye teoremy vložheniya // Differenc. uravneniya. – 1977. - T.13, №1. –S. – 1977. - T.13, №1, 111–120. (In Russian) https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=2972&option_lang=rus*
- [9] Apyšev O. D. , Otelbaev M. *O spektre odnogo klassa dvuchlennyh operatorov // Dokl. AN SSSR. – 1979. T. 248, №2, 265–268. (In Russian) https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=42979&option_lang=rus*
- [10] Anikeeva L.I. (1977) *Ob indekse defekta odnogo differencial'nogo operatora vysshego porjadka [On the defect index of one higher order differential operator]*. *Uspehi mat. nauk*, Vol. 32(1), 179-180. (In Russian) https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=3053&option_lang=eng
- [11] Apyšev O. D. , Otelbaev M. *O spektre odnogo klassa differencial'nyh operatorov i nekotorye teoremy vložheniya // Izv. AN SSSR. Ser. matem. - 1979. – T. 43, №4. –C. 739–764. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=1729&option_lang=rus*
- [12] Moldagali Ye.O., Ospanov K.N. *Conditions for maximal regularity of solutions to fourth-order differential equations// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2024. - No. 4(116). - pp. 149–158. https://mathematics-vestnik.ksu.kz/index.php/mathematics-vestnik/article/view/630*
- [13] Ospanov K., Ospanov M. *The maximal regularity of the third-order differential equation and its applications// Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2024. – Vol. 47(6). – pp. 4895–4910. https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:001139610800001*

Ұ.Қ. Социалова¹ , Ж.М. Бектемесов^{2,*} 

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: zholaman.bektemessov@kaznu.kz

ҚЫЗЫЛША АУРУЫНЫҢ ЭПИДЕМИОЛОГИЯЛЫҚ ТАРАЛУЫНЫҢ КЕРІ ЕСЕБІН МОДЕЛЬДЕУ

Аңдатпа

Бұл мақалада *SVEIR* моделі мен кері есептерді шешу әдістерін пайдалану арқылы қызылша ауруының таралу динамикасы қарастырылады. Эпидемиологиялық деректер, бақылау нәтижелері және аналитикалық есептеулер негізінде математикалық модельдеу жүргізілді. Оңтайландыру әдісі ретінде генетикалық алгоритм қолданылды. Зерттеу 2000-2020 жылдар аралығында Бангладештегі инфекциялардың таралу динамикасына сандық талдау жүргізуді қамтиды. Модель көмегімен инфекцияның таралуына әсер ететін негізгі параметрлер анықталды, оның ішінде вирустың таралу жылдамдығы, вакцинацияның бірінші және екінші дозаларының тиімділігі, сондай-ақ ауру салдарынан өлім-жітім деңгейі қайта құрылды. Қалпына келтірілген деректер нақты эпидемиологиялық мәліметтермен салыстырылып, олардың сәйкестігі бағаланды. Алынған нәтижелер ұсынылған тәсілдің қызылша эпидемиясын талдау және болжау үшін қолданылу мүмкіндігін көрсетеді. Қарастырылған математикалық модель әртүрлі аймақтарға бейімделіп, эпидемияға қарсы шаралардың тиімділігін бағалауға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: қызылша, математикалық модель, эпидемия, *SVEIR* моделі, генетикалық алгоритм, кері есеп.

У.К. Социалова¹, Ж.М. Бектемесов²

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ КОРИ

Аннотация

В данной статье рассматривается динамика распространения кори с использованием модели *SVEIR* и методов решения обратных задач. Математическое моделирование проводилось на основе эпидемиологических данных, результатов мониторинга и аналитических расчетов. В качестве метода оптимизации использовался генетический алгоритм. В рамках исследования проведен количественный анализ динамики распространения инфекции в Бангладеш за период 2000-2020 годов. С помощью модели были реконструированы основные параметры, влияющие на распространение инфекции, в том числе скорость распространения вируса, эффективность первой и второй доз вакцинации, а также уровень смертности от заболевания. Рассмотренная математическая модель может быть адаптирована к различным регионам и использована для анализа эффективности мер по сдерживанию эпидемии.

Ключевые слова: корь, математическая модель, эпидемия, модель *SVEIR*, генетический алгоритм, обратные задачи.

U. K. Sotsialova¹, Zh.M. Bektemessov²

¹Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

MODELING THE INVERSE PROBLEM OF SPREAD OF THE EPIDEMIOLOGICAL DISEASE MEASLES

Abstract

This article investigates the dynamics of measles spread using the *SVEIR* model and inverse problem-solving methods. The mathematical modeling was based on epidemiological data, monitoring results and analytical calculations. A genetic algorithm was employed as the optimization method. As part of the study, a quantitative analysis of the dynamics of the spread of infection in Bangladesh from 2000 to 2020 was conducted. Using the model, the main parameters influencing the spread of infection were reconstructed, including the rate of spread of the virus, the effectiveness of the first and second doses of vaccination, and the mortality rate from the disease. The proposed mathematical model can be adapted to different regions and utilized to assess the effectiveness of epidemic containment strategies.

Keywords: measles, mathematical model, epidemic, *SVEIR* model, genetic algorithm, inverse problems.

Негізгі тұжырымдар

Зерттеу эпидемиялық процестің әртүрлі кезеңдерінде инфекция жұқтырған адамдар саны туралы деректерді қалпына келтіру үшін кері есептеу әдістерін қолдануға негізделген. Қалпына келтірілген және нақты деректер арасындағы айырмашылықтарды азайту мақсатында сандық алгоритмдер мен математикалық модельдеу әдістері пайдаланылады. Алынған нәтижелердің сенімділігін бағалауға және ықтимал қателерді талдауға ерекше назар аударылады.

Кіріспе

Қазақстан Республикасында қызылша індетінің өршуі 2023 жылдың соңында байқалып, ауру республиканың барлық аймақтарында тіркелді. Қызылшаға күдікті 50 671 жағдай анықталып, олардың 20 556-сы зертханалық түрде расталды. Бұл ауруға шалдыққандардың ең жоғары көрсеткіші Шымкент, Алматы қалаларында және Жамбыл мен Алматы облыстарында байқалды [1]. Мұндай көрсеткіш 2019 жылғы деңгейден 2,1 есе жоғары болып, соңғы 30 жылдағы ең ауыр эпидемиологиялық жағдайлардың біріне алып келді. Дүниежүзілік денсаулық сақтау ұйымының (ДДСҰ) мәліметтеріне сәйкес, 2023 жылы қызылшамен сырқаттанушылықтың күрт артуы байқалды. Ауру 57 елде тіркеліп, бұл 2022 жылмен салыстырғанда 60%-ға жоғарылаған. Қызылша инфекциясының ең қарқынды өршуі Африка, Шығыс Жерорта теңізі, Еуропа, Оңтүстік-Шығыс Азия және Батыс Тынық мұхиты аймақтарында тіркелді [2]. Еуропалық аймақтағы сырқаттанушылықтың деңгейі 2022 жылдан бері 30 есеге өсіп, 2023 жылдың алғашқы 10 айында 30 000-нан астам жағдай анықталған. Олардың шамамен 50%-ын 5 жасқа дейінгі балалар құраған. 2024 жылдың мамыр айындағы Еуропа елдеріндегі қызылшаның ай сайынғы жаңартылған деректерге сәйкес аурулар саны бойынша Қазақстан, Әзірбайжан және Ресей алдыңғы қатарға шықты [3]. Аурудың таралуының негізгі себептерінің бірі – вакцинациямен қамту деңгейінің төмендігі. 2020-2022 жылдар аралығында шамамен 1,8 миллион бала қызылшаға қарсы екпе ала алмаған.

Қызылша – аса жұқпалы вирустық инфекция, ол тікелей байланыс және ауа арқылы оңай таралып, шекаралық аймақтарды еңсеріп, халық арасында тез таралуымен ерекшеленеді. Аталған инфекция 5 жасқа дейінгі балалар, 20 жастан асқан ересектер және иммунитеті төмен адамдар үшін ерекше қауіпті. Қазіргі уақытта қызылшаны жұқтырған адамдарды емдеуге арналған арнайы дәрілік препараттар жоқ, сондықтан бұл аурумен күресудің жалғыз тиімді әдісі – вакцинация. Вакцинациямен жеткіліксіз қамтылған популяциялар арасында індеттер ауыр салдарларға, соның ішінде жоғары сырқаттанушылық пен өлім-жітімге алып келеді. Қазіргі эпидемиологиялық ахуалға сәйкес қызылша ауруы әлемнің көптеген аймақтарында тіркелуде [4]. деректеріне сәйкес 2024 жылдың сәуір-қыркүйек айлары аралығында

Дүниежүзілік денсаулық сақтау ұйымына ұсынылған алдын ала ай сайынғы қадағалау нәтижелері кесте 1-де көрсетілген.

Кесте 1. 2024 жылдың сәуір-қыркүйек айлары аралығындағы жағдайлардың ең көп таралған елдердің ондығы

Ел	Жағдайлар саны
Пәкістан	14,391
Ирак	8,983
Эфиопия	8,773
Ресей Федерациясы	8,662
Үндістан	8,540
Қазақстан	6,620
Румыния	5,823
Қырғызстан	5,207
Ауғанстан	4,924
Тайланд	4,596

Медицина мен биологияның жаратылыстану ғылымдары ретінде дамуы биологиялық процестерді сандық сипаттау және олардың даму барысын болжау қажеттілігін туындатты. Бұл процестердің басым бөлігі тікелей бақылауға келмейтіндіктен, олардың құрылымына қатысты гипотезаларды тексеру үшін математикалық модельдеу кеңінен қолданылады. Эпидемиологияда, инфекцияның популяция ішінде таралуын зерттейтін сала ретінде, модельдер популяциялық деңгейдегі өзара әрекеттесулерді ескере отырып құрылады. Бұл модельдер индивидтердің бір-бірімен, жалпы популяциямен және инфекциямен байланысы туралы мәліметтерге негізделеді.

Математикалық модельдер теорияларды ұсыну және тексеру, алдын алу, терапия және бақылау бағдарламаларын салыстыру, жоспарлау және бағалау үшін тиімді құрал болып саналады. Осындай модельдерді алғаш рет 1927 жылы Кермак пен МакКендрик ғылымға енгізгеннен бері көптеген инфекциялық аурулардың таралуын сипаттайтын әртүрлі компартменттік модельдер жасалды. Соңғы онжылдықтарда қызылшаның эпидемиологиясын зерттеу маңызды ғылыми бағыттардың біріне айналды.

Бұл салада көптеген ғалымдар өздерінің зерттеулері арқылы қызылшаны бақылау мен алдын алудың оңтайлы жолдарын табуға тырысты. Олар детерминирленген компартменттік модельдерді пайдаланып, теориялық және сандық талдаулар жүргізді. Мысалы, Момоһ және әріптестері [5] қызылша динамикасына симптомсыз тұлғалардың әсерін зерттеу үшін *SEIR* моделін қолданды. Ал [6] зерттеуінде инфекция жұқтырғандар мен бейім тұлғалар арасындағы қашықтықтың әсерін бағалайтын математикалық модель ұсынылды. Нәтижесінде, қашықтықтың артуы жұқтырғандар санының төмендеуіне ықпал ететіні көрсетілді.

Сонымен қатар, [7,8] еңбектерінде вакцинацияның қызылшаның таралуын тежеудегі тиімділігі дәлелденді. Бангладеште жүргізілген зерттеуде [9] екі дозалы вакцинация жағдайындағы инфекция динамикасын сандық модельдеу арқылы сипаттау үшін «келесі ұрпақ матрицасы әдісі» (next-generation matrix method) қолданылды және репродуктивті саны есептелді. Соңғы бес жылда да эпидемиологиялық модельдеуге ерекше назар аударылды. Мысалы, Еремеева Н.И. *COVID-19* ерекшеліктерін ескере отырып, *SEIRD* моделінің модификациясын ұсынды [10]. Ал Криворотько О.И., Кабанихин С.И. және әріптестері [11] Мәскеу мен Новосибирск облыстарында *COVID-19* таралуының *SEIR-HCD* және *SEIR-D* модельдерінің белгісіз параметрлерін нақтылау үшін инфекция динамикасы, өлім-жітім, өзін-өзі оқшаулау коэффициенті және жүргізілген тестілеу нәтижелері сияқты деректерді пайдаланды. Жұқпалы аурудың популяция ішінде таралу немесе толық жойылу шарттарын анықтау – эпидемиологиялық модельдеудің негізгі міндеттерінің бірі. Бұл мәселені шешуде басты рөлді негізгі эпидемиологиялық шама – репродуктивті сан (R_0) атқарады. R_0 –

толығымен сезімтал популяциядағы бір жұқпалы адам тудыратын қайталама жағдайлардың орташа саны.

Репродуктивті санның эпидемиялық процестегі рөлі келесідей сипатталады:

- Егер $R_0 < 1$ болса, инфекция популяцияда таралмайды және ауру эпидемиясыз тепе-теңдік жағдайына әкеледі.

- Егер $R_0 > 1$ болса, тепе-теңдік тұрақсыз болады, нәтижесінде инфекция популяция арасында кең таралып, эпидемия басталады.

Репродуктивті коэффициенттер вакцинациямен қамту мақсаттарын анықтауда маңызды факторлардың бірі болып саналады.

Зерттеу әдіснамасы

Математикалық модельдің сипаттамасы. Қарастырылатын популяцияның жалпы саны – $N(t)$ болсын. Бұл популяция *SVEIR* эпидемиялық моделі арқылы келесі жабық субпопуляциялар жиынын құрайды: сезімталдар класы $S(t)$, вакцинацияланғандар класы $V(t)$, инкубациялық кезеңдегі (ауруға шалдыққандар) класы $E(t)$, жұқтырғандар класы $I(t)$ және аурудан айыққандар класы $R(t)$. Осы математикалық модель Бангладеш еліндегі қызылшаның таралу динамикасын сипаттауында қолданылады [9]. Қызылшаның таралу динамикасының моделі сызықты емес жай дифференциалдық теңдеулердің келесі жүйесімен сипатталады:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \beta SI - \eta S - \mu S + \rho V_1 \\ \frac{dV_1}{dt} = \eta S - \rho V_1 - \sigma V_1 - \mu V_1 \\ \frac{dV_2}{dt} = \sigma V_1 - \omega V_2 - \mu V_2 \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - \alpha E - \mu E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - \gamma I - \delta I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + \omega V_2 - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

Бұл қарапайым бастапқы модельдің (1) теңдеулері өзара байланысқан келесі компоненттерді қамтиды:

- Сезімталдар класы $S(t)$ – қызылшамен бұрын ешқашан байланыспаған және инфекцияға бейім тұрғындардың бір бөлігі;

- Вакцинацияланғандар класы $V(t)$ – вакцинаның екі дозасын да алған тұрғындардың бір бөлігі;

- Инкубациялық кезең (жасырын) класы $E(t)$ – қызылшаны жұқтырған, бірақ ешқандай симптомдық белгілері байқалмайтын тұрғындардың бір бөлігі;

- Жұқпалы кезең класы $I(t)$ – клиникалық белгілері көрініс тапқан және инфекцияны таратуға қабілетті тұрғындардың бір бөлігі;

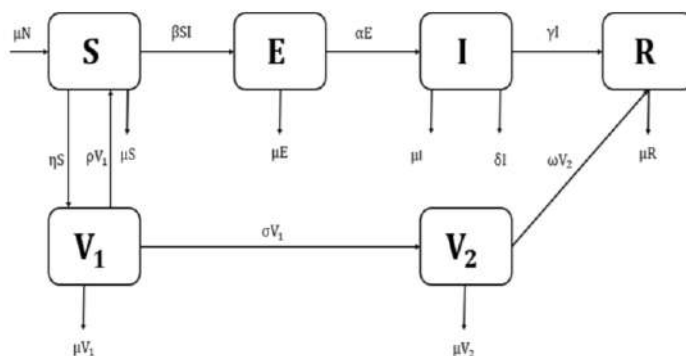
- Сауыққандар класы $R(t)$ – қызылша ауруынан айыққан және иммундық жүйеге ие болған тұрғындардың бір бөлігі.

Популяцияның жалпы саны $N(t)$ уақыт бойынша тұрақты және популяция ішінде біркелкі араласады деп болжанады:

$$N(t) = S(t) + V_1(t) + V_2(t) + E(t) + I(t) + R(t) \quad (2)$$

және бастапқы шарттары:

$$S(0) \geq 0, V_1(0) \geq 0, V_2(0) \geq 0, E(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0. \quad (3)$$



Сурет 1. Қызылша ауруының SVEIR типіндегі компартменттік моделінің схемасы

Популяция санының тұрақтылығын қамтамасыз ету мақсатында сезімтал кластағы өлім-жітім саны жаңа туған нәрестелер есебінен толығып отырады. Өлім-жітімге барлық популяция үшін жан басына шаққандағы тұрақты көрсеткіш – μ (табиғи себептерден болатын өлім) және қызылшадан болатын жан басына шаққандағы тұрақты көрсеткіш – δ жатады. Сезімтал популяцияның (S) бір бөлігі η жылдамдықпен вакцинациядан өтіп, бірінші доза алғандар класына (V_1) ауысады. Вакцинацияның бірінші дозасын алғандардың бір бөлігі ρ жылдамдықпен қайтадан сезімталдар класына (S) оралады, ал қалған бөлігі екінші доза алғандар класына (V_2) жан басына шаққанда σ жылдамдықпен ауысады. Өз кезегінде, екі доза алғандар (V_2) сауыққандар класына ω жылдамдықпен өтеді. Сезімтал кластағы адамдар қызылша вирусын $\lambda = \beta SI$ жылдамдығымен жұқтыруы мүмкін, мұндағы β – жұқтырғандар мен сезімталдар арасындағы инфекцияның таралу коэффициенті. Жұқтырған адамдар инкубациялық кезеңдегі класына (E) өтеді. Инкубациялық кезеңде болған популяцияның бір бөлігі жан басына шаққанда α жылдамдықпен жұқпалы кезеңге (I) өтеді. Инфекцияланғандар (I) класы белгілі бір бөлігінде медициналық көмек және табиғи иммундық қалпына келу процесінің нәтижесінде γ жылдамдықпен сауыққандар класына (R) ауысады (Сурет 1).

Кесте 2. Қызылша моделінің параметрлерінің Бангладеш үшін бағаланған мәндері

Параметрлер	Сипаттамасы	Сандық көрсеткіші
N	Бангладештің жалпы халық саны (2000 жыл)	127,658,000
μ	Халықтың санына шаққандағы өлім көрсеткіші	жылына 0.014
β	Таралу жылдамдығы	7.45×10^{-7}
η	Вакцинаның бірінші дозасы	0.94
ρ	(V_1) -ден S -ке өту жылдамдығы	0.6
σ	Вакцинаның екінші дозасы	0.93
ω	Вакцинаның екінші дозасының арқасында аурудан айығу жылдамдығы	0.8
α	E -ден I -ке өту жылдамдығы	0.018
δ	Аурудан болатын өлім көрсеткіші	0.125
γ	Өздігінен жазылу жылдамдығы	0.6

[9] авторлары қызылшаның таралуына ең ықпалды параметр – таралу жылдамдығы (β) екенін анықтап, осы параметрді бағалау және динамикасын сипаттау үшін сандық модельдеуді қолданған. Зерттеу нәтижелері аурудың өршу қарқыны, таралу жылдамдығы және екі дозалы вакцинацияның тиімділігінің инфекция динамикасына қалай әсер ететінін көрсетті. Осы есептеулер мен модельдеуге сүйене отырып, Қазақстандағы қызылшаның таралуын болжауға мүмкіндік беретін бейімделген модель құру үшін кері есепті шешу әдістерін қолдану мүмкін бе? Сонымен қатар, алынған модельді еліміздің эпидемиологиялық жағдайын бақылау және алдын алу шараларын жоспарлау мақсатында практикалық қолданысқа енгізу қаншалықты орынды? Осы ғылыми сұрақтар алдағы зерттеуде қарастырылады.

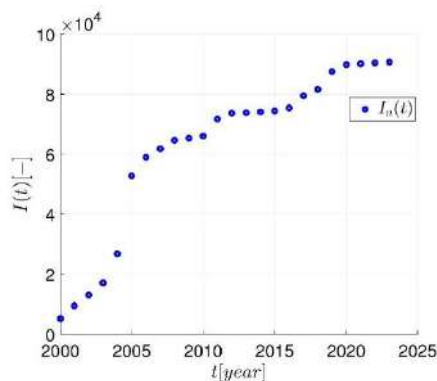
Есептеу жолы

Кері есепті шешу алдында, модель параметрлерінің бірқатары мен ауру салдарынан қайтыс болғандардың саны белгісіз деп қабылданады. Бұл жағдайда Бангладештегі қызылша эпидемиясының таралуын сипаттайтын модельдің 9 негізгі параметрін қалпына келтіру міндеті қойылады. Параметрлерді бағалау және модельді нақты деректерге сәйкестендіру үшін кері есепті шешу әдістері мен оңтайландыру алгоритмі қолданылады. Аталған мәселені шешу және жоғарыда қойылған сұрақтарға жауап беру үшін қолда бар статистикалық деректерге негізделген кері есепті шешу алгоритмін құру және оның жұмыс істеу қабілеттілігін тексеру қажет. Бұл мақсатта, математикалық модельдің (1) теңдеулері үшін белгілі параметрлер мәні (кесте 2) және [9] еңбегінен алынған бастапқы шарттар (кесте 3) ескеріліп, сандық интегралдау үшін төртінші ретті Рунге-Кутта әдісі қолданылды.

Кесте 3. Қызылша моделінің бастапқы шарттары

Параметрлер	Сипаттамасы	Сандық көрсеткіші
$N(t_0)$	Бангладештің жалпы халық саны	127,658,000
$I(t_0)$	Қызылша жұқтырған класы	5098
$E(t_0)$	Қызылша ауруға шалдыққандар класы	5098
$R(t_0)$	Емделіп қалпына келтірілген класы	$I(1 - \delta)$
$S(t_0)$	Сезімтал класы	$N(t_0) - I(t_0) - E(t_0) - R(t_0)$
$V_1(t_0)$	Вакцинаның бірінші дозасын алғандар класы	ηS
$V_2(t_0)$	Вакцинаның екінші дозасын алғандар класы	σS

Бастапқы уақыт мезетінде $E(t_0)$ – инкубациялық кезеңдегі, ал $I(t_0)$ – инфекцияланған жеке тұлғалардың саны тең деп қабылданады. Аурудан айыққандар саны $R(t_0) = I(1 - \delta)$ ретінде беріледі, мұнда δ – қызылшадан болатын өлім-жітім коэффициенті. Осыған сәйкес, сезімтал адамдардың бастапқы саны $S(t_0) = N(t_0) - I(t_0) - E(t_0) - R(t_0)$ болып анықталады. Бірінші $V_1(t_0)$ және екінші $V_2(t_0)$ дозамен вакцинацияланғандар саны, сәйкесінше, ηS және σS тең болады, мұнда η – бірінші дозамен, ал σ – екінші дозамен қамту жылдамдығы.



Сурет 2. Инфекцияланғандар $I(t)$ туралы статистикалық деректер

Әрі қарай, $q = (\mu, \beta, \eta, \rho, \sigma, \omega, \alpha, \delta, \gamma)$ вектордың параметрлерінің мәндері белгісіз деп қарастырылған жағдайда, бұл есеп кері коэффициенттерді анықтау есебіне айналады. Мұндай кері есептің мәні – белгілі $I_n(t)$ статистикалық деректері негізінде, келесі функционалды минимизациялау арқылы q параметрлерінің мәндерін қалпына келтіруде:

$$J(q) = \sum_{n=1}^M [I(t, q) - I_n(t)]^2 \rightarrow \min_q, \quad (4)$$

мұнда $J(q)$ – минимизациялауды қажет ететін функционал, $I(t, q)$ – инфекцияланған индивидумдар саны бойынша (1) теңдеудің шешімі, M – статистикалық деректердің саны.

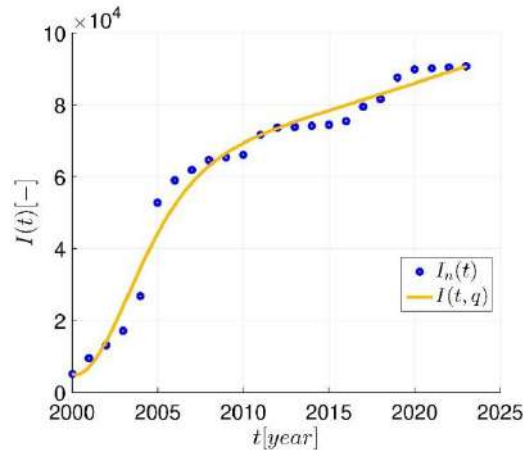
Функционалды минимизациялау үшін түрлі оңтайландыру әдістерін қолдануға болады: градиенттік әдістер [12], метаэвристикалық алгоритмдер [13], стохастикалық әдістер [14] және т.б. Бұл жұмыста оңтайландыру әдісі ретінде метаэвристикалық тәсілдерінің бірі – генетикалық алгоритм пайдаланылды [15-19]. Бұл кері есеп 9 ізделіп отырған параметрдің мәнін табудан тұрады, сондықтан генетикалық алгоритмді таңдау оның көппараметрлі жаһандық оңтайландыру алгоритмі болуымен, сонымен қатар іске асыруының қарапайымдылығымен түсіндіріледі.

Зерттеу нәтижелері

Оңтайландыру алгоритмі *Matlab* қолданбалы бағдарламалық пакетіндегі *ga* функциясын көмегімен жүзеге асырылды. Сурет 3-те көрсетілгендей, кері есептің (1), (3-4) нәтижелері негізінде алынған қайта қалпына келтірілген инфекцияланған адамдар санының $I(t)$ динамикасы 2000 жылдан 2023 жылға дейінгі кезеңді қамтиды. Графикте нақты статистикалық мәліметтері (көк нүктелер) мен модель арқылы қалпына келтірілген шешім (сары сызық) салыстырылып көрсетілген. Графиктен байқауға болады, инфекцияның таралуы алғашқы кезеңде, яғни 2000-2004 жылдары баяу өседі, бұл кезде қалпына келтірілген сары сызық нақты деректерге (көк нүктелерге) жақын орналасқан. Бұл модельдің бастапқы кезеңдегі эпидемия динамикасын дәл сипаттайтынын көрсетеді.

2004-2010 жылдар аралығында жұқтырғандар санының күрт өсуі байқалады. Осы кезеңде модельдік деректер мен нақты мәліметтер арасында шамалы айырмашылықтар бар, бірақ жалпы үрдіс жақсы сақталған.

2010 жылдан кейін, соңғы 10 жыл ішінде, инфекцияның таралу қарқыны баяулай бастайды. Бұл кезеңде модельден алынған қалпына келтірілген деректер нақты статистикалық ақпараттың маңында тұрақталып кішігірім ауытқулар ғана байқалады. Жалпы алғанда, модель инфекция динамикасын сенімді түрде сипаттайды және нақты мәліметтерге жақсы сәйкес келеді.



Сурет 3. Уақыт бойынша инфекцияланғандар санының динамикасы

Бангладеш үшін қызылша ауруының таралуына арналған математикалық модель параметрлерінің сандық мәндері мен кері есептің нәтижелері арқылы қалпына келтірілген параметрлер арасындағы салыстырмалы қателік кейбір параметрлер үшін өте төмен болғанымен, кейбір параметрлер бойынша едәуір айырмашылықтар байқалады (кесте 4).

Кесте 4. $q = (\mu, \beta, \eta, \rho, \sigma, \omega, \alpha, \delta, \gamma)$ векторының параметрлік қалпына келтірілу қателіктері

№	Параметрлер	Бастапқы мән	Алынған нәтиже	Салыстырмалы қателік, %
1	μ	0.014	0.01	28.57
2	β	7.45×10^{-7}	4.11×10^{-7}	44.83
3	η	0.94	0.86	8.51
4	ρ	0.6	1.2×10^{-6}	99.99
5	σ	0.93	0.91	2.15
6	ω	0.8	0.9	12.5
7	α	0.018	0.042	133.33
8	δ	0.125	0.329	163.2
9	γ	0.6	0.001	99.83

Осылайша, генетикалық жаһандық оңтайландыру әдісімен параметр мәндерін қалпына келтіру нәтижелері статистикалық деректер графигін қалпына келтіру үшін жеткілікті болды, бұл өз кезегінде өңірдегі аурудың таралуын болжауға мүмкіндік береді.

Дискуссия

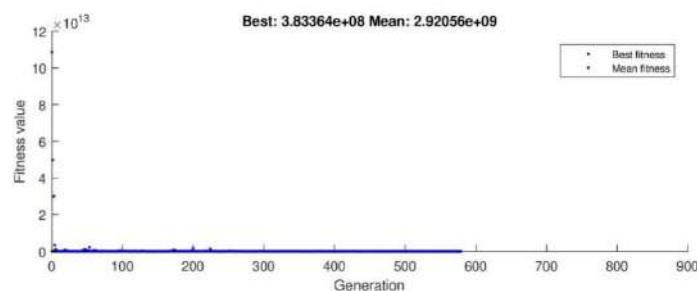
Бұл жұмыста қызылша ауруының таралу динамикасын сипаттайтын SVEIR эпидемиологиялық моделінің параметрлерін қалпына келтіру үшін 2000-2023 жылдар аралығындағы Бангладештің статистикалық деректері талданып, генетикалық алгоритм көмегімен кері есепті шешу әдістемесі қолданылды.

Зерттеу нәтижелері көрсеткендей, модель параметрлерінің кейбірі үшін генетикалық алгоритм арқылы алынған қалпына келтірілген мәндер бастапқы сандық көрсеткіштермен жақсы сәйкестікте болғанымен, бірқатар параметрлер үшін салыстырмалы қателіктердің едәуір жоғары екенін байқауға болады. Атап айтқанда, таралу жылдамдығы, инкубациялық кезеңнен жұқпалы кезеңге өту жылдамдығы және аурудан болатын өлім көрсеткіші сияқты маңызды параметрлер бойынша қателіктер 100%-дан асып кеткен. Бұл алынған нәтижелерді талдау және модельдің құрылымын жетілдіру қажеттігін көрсетеді. Сонымен қатар, кейбір параметрлер бойынша салыстырмалы қателіктердің төмен деңгейде сақталуы модельдің

жалпы алғанда эпидемиологиялық процесті сипаттауға белгілі бір дәрежеде қабілетті екенін дәлелдейді.

Эпидемияның бастапқы және орта фазаларында модельдің нақты деректермен сәйкестігі өте жоғары болды. Бұл модельдің осы кезеңдердегі эпидемиялық процесті дәл сипаттай алатынын растайды. Дегенмен, эпидемияның соңғы кезеңінде қалпына келтірілген динамикада аздаған ауытқулар байқалды. Мұндай ауытқулар деректер сапасының төмендігімен, есептік кезеңдегі мәліметтердің толық еместігімен және генетикалық алгоритмнің кейбір шектеулерімен байланысты болуы мүмкін.

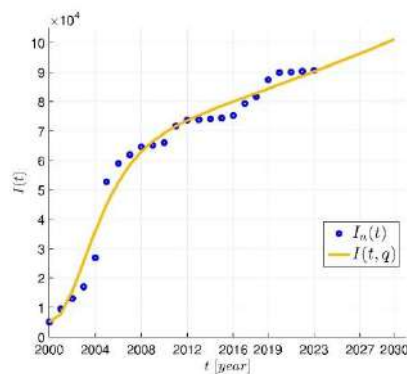
Сурет 4-те фитнес функциясының ең жақсы және орташа мәндерінің өзгерісі көрсетілген. Бастапқы ұрпақтарда (generation) фитнес мәндерінің үлкен ауытқуы байқалады, бұл бастапқы шешімдердің кездейсоқ таратылуына байланысты. Бірақ бірнеше ондаған ұрпақтан кейін алгоритм тұрақтанып, шешімдердің жақсарғаны байқалады. Сонымен қатар 550 астам ұрпақтан кейін функционал минимумына жетіп, алгоритм тоқтатылды. Бұл оңтайландыру әдісінің сенімділігін және тиімділігін көрсетеді.



Сурет 4. Генетикалық алгоритм арқылы алынған модель параметрлері мен фитнес функциясының динамикасы

Жалпы, жүргізілген талдау нәтижелері Бангладеш жағдайында модельдің қолданбалы тиімділігін дәлелдеп, осы әдісті басқа аймақтарға, соның ішінде Қазақстанға бейімдеу мүмкіндігін көрсетеді. Алайда, Қазақстанда қызылша бойынша ашық статистикалық деректердің жеткіліксіздігі, сондай-ақ эпидемиологиялық есеп жүргізудің бірыңғай жүйесінің жоқтығы бұл әдісті тікелей қолдануға белгілі бір шектеулер қояды. Сондықтан, болашақта Қазақстан үшін сенімді болжамдар алу мақсатында қосымша деректер жинақтау және ұлттық деңгейдегі эпидемиологиялық мониторингті жетілдіру аса маңызды болып табылады.

5-суретте жұқтырған адамдардың статистикалық деректері және сондай-ақ (1) теңдеудің қалпына келтірілген параметр мәндерін пайдалана отырып 2030 жылға дейінгі жасалған модельдік болжам көрсетілген. 2025 жылдың соңына қарай жұқтырған адамдардың жиынтық саны шамамен 93 244 болады деп күтілуде, бұл 2023 жылмен салыстырғанда 2 577 адамға көп. Ал 2030 жылға қарай бұл көрсеткіш шамамен 101 189 адамға жетуі мүмкін.



Сурет 5. 2000-2023 жылдардағы инфекцияланғандар санының динамикасы, сондай-ақ 2030 жылға дейінгі болжам

Қорытынды

Зерттеу барысында SVEIR эпидемиологиялық моделінің параметрлерін қалпына келтіру үшін кері есептерді шешу әдісі ретінде генетикалық алгоритм қолданылды. Алынған нәтижелер көрсеткендей, бұл тәсіл жұқпалы аурулардың таралу динамикасын сенімді түрде сипаттауға және нақты деректерге жақсы сәйкестікпен параметрлерді анықтауға мүмкіндік береді. Әдістің артықшылығы – оның бастапқы мәліметтер көлемі шектеулі жағдайларда да тиімді жұмыс істей алатындығында. Сонымен қатар, әдістің әртүрлі аймақтық ерекшеліктерге бейімделу мүмкіндігі бар, бұл оны Қазақстан сияқты эпидемиологиялық деректері толық емес елдерде қолдануға жол ашады.

Жүргізілген зерттеу нәтижесінде эпидемияның соңғы кезеңдерінде аздаған ауытқулар байқалғанымен, бұл жалпы нәтиженің сенімділігіне айтарлықтай әсер етпейді. Алдағы уақытта модельді жергілікті эпидемиологиялық жағдайларға бейімдеу үшін қосымша деректермен толықтырып, әдісті одан әрі жетілдіру қажеттігі анықталды. Қорытындылай келе, ұсынылған тәсіл жұқпалы ауру ошақтарын талдау, эпидемияға қарсы шаралардың тиімділігін бағалау және болашақ эпидемиялық жағдайларды болжау үшін қолдануға болатын тиімді құрал ретінде бағаланады.

АЛҒЫС

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қаржыландырды (грант № AP19579325).

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

- [1] <https://www.gov.kz/memleket/entities/kostanai-bmalin-asenkritov/press/news/details/671600>
- [2] Дүниежүзілік денсаулық сақтау ұйымы (ДДСҰ). <https://www.who.int/ru/news/item/14-11-2024-measles-cases-surge-worldwide--infecting-10.3-million-people-in-2023>.
- [3] 2024 жылғы 29 мамырдағы жағдай бойынша ДДСҰ Еуропа аймағындағы қызылша мен қызамық бойынша ай сайынғы жаңартылған деректер. <https://www.who.int/europe/publications/m/item/measles-and-rubella-monthly-update---who-european-region---may-2024>
- [4] https://www.cdc.gov/global-measles-vaccination/data-research/global-measles-outbreaks/?CDC_A Accessed November 19, 2024.
- [5] Momoh A., Ibrahim M., Uwanta I. & Manga S. (2013) *Mathematical model for control of measles epidemiology*. // *Int. J. Pure Appl. Math.* T. 87, 707-717. [doi: 10.12732/ijpam.v87i5.4](https://doi.org/10.12732/ijpam.v87i5.4)
- [6] Adewale S., Mohammed I. & Olopade I. (2014) *Mathematical analysis of effect of area on the dynamical spread of measles*. // *IOSR J. Eng.* 4, 43-57. [doi:10.9790/3021-04324357](https://doi.org/10.9790/3021-04324357)
- [7] Smith R., Archibald A., MacCarthy E., Liu L. & Luke N. S. (2016) *A mathematical investigation of vaccination strategies to prevent a measles epidemic*. // *NCJ Math. Stat.* №2, 29-44.
- [8] Peter O., Afolabi O., Victor A., Akpan C. & Oguntolu F. (2018) *Mathematical model for the control of measles*. // *J. Appl. Sci. Environ. Manag.* №22, 571-576. [doi:10.4314/jasem.v22i4.24](https://doi.org/10.4314/jasem.v22i4.24)
- [9] Md Abdul Kuddus, Mohiuddin M., Azizur Rahman (2021) *Mathematical analysis of a measles transmission dynamics model in Bangladesh with double dose vaccination*. *Scientific Reports*. [doi:10.1038/s41598-021-95913-8](https://doi.org/10.1038/s41598-021-95913-8)
- [10] Еремеева Н.И. Построение модификации SEIRD-модели распространения эпидемии, учитывающей особенности COVID-19. // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, выпуск 4, – 2020, 14-27. <https://doi.org/10.26456/vtpmk602>
- [11] Криворотько О.И., Кабанихин С.И., Зяцьков Н.Ю., Приходько А.Ю., Прохошин Н.М., Шишленин М.А. Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.*— 2020, Новосибирск, Т. 23, № 4, 395-414. [doi: 10.15372/SJNM20200404](https://doi.org/10.15372/SJNM20200404)
- [12] Поляк Б. Т. Градиентные методы минимизации функционалов. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, – 1963, Т. 3, № 4, 643-653. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90382-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90382-3)
- [13] Яшин С. Н., Яшина Н. И., Кошелев Е. В., Иванов А. А. *Метаэвристические алгоритмы в управлении инновациями: монография*. // Нижний Новгород: ООО “Печатная Мастерская РАДОНЕЖ” – 2023, 200.
- [14] Матренин П.В. *Методы стохастической оптимизации: учебное пособие* // М.Г. Гриф, В.Г. Секаев. – 2016, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 67.

- [15] Mitchell M. (1996) *An introduction to Genetic Algorithm.* // MIT Press. <https://doi.org/10.7551/mitpress/3927.001.0001>
- [16] Goldberg D. (1989) *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine learning.* // Addison-Wesley.
- [17] Michalewicz Z. (1995) *Genetic algorithms, Numerical optimization and constraints* // *Proceedings of the 6-th International conference on genetic algorithms*, 151-158.
- [18] Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L. (1998) *Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behavior analysis*// *Artificial Intelligence Review*, V. 12, № 4, 265-319. [doi:10.1023/A:1006504901164](https://doi.org/10.1023/A:1006504901164)
- [19] Wright A. (1991) *Genetic algorithms for real parameter optimization* // *Foundations of Genetic Algorithms*, V. 1, 205-218. [doi:10.1016/B978-0-08-050684-5.50016-1](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050684-5.50016-1)

References

- [1] <https://www.gov.kz/memleket/entities/kostanai-bmalin-asenkritov/press/news/details/671600>
- [2] World Health Organization (WHO). <https://www.who.int/ru/news/item/14-11-2024-measles-cases-surge-worldwide--infecting-10.3-million-people-in-2023>
- [3] *Monthly updates on measles and rubella in the WHO European Region. Data as of May 29, 2024.* <https://www.who.int/europe/publications/m/item/measles-and-rubella-monthly-update---who-european-region---may-2024>
- [4] https://www.cdc.gov/global-measles-vaccination/data-research/global-measles-outbreaks/?CDC_A Accessed November 19, 2024.
- [5] Momoh A., Ibrahim M., Uwanta I. & Manga S. (2013) *Mathematical model for control of measles epidemiology.* // *Int. J. Pure Appl. Math.* T. 87, 707-717. [doi: 10.12732/ijpam.v87i5.4](https://doi.org/10.12732/ijpam.v87i5.4)
- [6] Adewale S., Mohammed I. & Olopade I. (2014) *Mathematical analysis of effect of area on the dynamical spread of measles.* // *IOSR J. Eng.* 4, 43-57. [doi:10.9790/3021-04324357](https://doi.org/10.9790/3021-04324357)
- [7] Smith R., Archibald A., MacCarthy E., Liu L. & Luke N. S. (2016) *A mathematical investigation of vaccination strategies to prevent a measles epidemic.* // *NCJ Math. Stat.* №2, 29-44.
- [8] Peter O., Afolabi O., Victor A., Akpan C. & Oguntolu F. (2018) *Mathematical model for the control of measles.* // *J. Appl. Sci. Environ. Manag.* №22, 571-576. [doi:10.4314/jasem.v22i4.24](https://doi.org/10.4314/jasem.v22i4.24)
- [9] Md Abdul Kuddus, Mohiuddin M., Azizur Rahman (2021) *Mathematical analysis of a measles transmission dynamics model in Bangladesh with double dose vaccination.* *Scientific Reports.* [doi:10.1038/s41598-021-95913-8](https://doi.org/10.1038/s41598-021-95913-8)
- [10] Eremeeva N.I. (2020) *Postroenie modifikacii SEIRD-modeli rasprostraneniya jepidemii, uchityvajushhej osobennosti COVID-19.* // *Vestnik TvGU. Serija: Prikladnaja matematika, vypusk 4*, 14-27. <https://doi.org/10.26456/vtpmk602> (In Russian)
- [11] Krivorot'ko O.I., Kabanihin S.I., Zjat'kov N.Ju., Prihod'ko A.Ju., Prohoshin N.M., Shishlenin M.A. (2020) *Matematicheskoe modelirovanie i prognozirovanie COVID-19 v Moskve i Novosibirskoj oblasti* // *Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. Novosibirsk*, T. 23, № 4, 395-414. [doi: 10.15372/SJNM20200404](https://doi.org/10.15372/SJNM20200404) (In Russian)
- [12] Poljak B.T. (1963) *Gradientnye metody minimizacii funkcionalov.* // *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, T. 3, № 4, 643-653. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90382-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90382-3) (In Russian)
- [13] Jashin S.N., Jashina N.I., Koshelev E.V., Ivanov A.A. (2023) *Metajevristicheskie algoritmy v upravlenii innovacijami: monografija.* // *Nizhnij Novgorod: OOO "Pechatnaja Masterskaja RADONEZh"*, 200. (In Russian)
- [14] Matrenin P.V. (2016) *Metody stohasticheskoj optimizacii: uchebnoe posobie* //, M.G. Grif, V.G. Sekaev, Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 67. (In Russian)
- [15] Mitchell M. (1996) *An introduction to Genetic Algorithm.* // MIT Press. <https://doi.org/10.7551/mitpress/3927.001.0001>
- [16] Goldberg D. (1989) *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine learning.* // Addison-Wesley.
- [17] Michalewicz Z. (1995) *Genetic algorithms, Numerical optimization and constraints* // *Proceedings of the 6-th International conference on genetic algorithms*, 151-158.
- [18] Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L. (1998) *Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behavior analysis*// *Artificial Intelligence Review*, V. 12, № 4, 265-319. [doi:10.1023/A:1006504901164](https://doi.org/10.1023/A:1006504901164)
- [19] Wright A. (1991) *Genetic algorithms for real parameter optimization* // *Foundations of Genetic Algorithms*, V. 1, 205-218. [doi:10.1016/B978-0-08-050684-5.50016-1](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050684-5.50016-1)

¹М.Ж. Талипова*, ¹А.Е. Иманчиев, ¹Р.Д. Сейлова, ¹А. Мейрамбекулы

¹Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г. Актюбе, Казахстан

*e-mail: mira_talipova@mail.ru

О НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА РАНГА k

Аннотация

В статье представлен метод построения нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка ранга k . Особое внимание уделено случаю, когда подранг системы равен единице, что упрощает процедуру определения неопределенных параметров. Для исследования используются аналитические методы, включая преобразование Фробениуса-Латышевой и представление решений в виде обобщенных степенных рядов. Установлены необходимые условия существования нормальных решений, а также проведен анализ вспомогательных систем. С использованием метода Фробениуса-Латышевой сформулированы требования к рекуррентным системам, определяющим неизвестные коэффициенты нормальных решений. Показано, что при выполнении этих требований необходимые условия существования решения становятся также и достаточными. Полученные результаты могут быть применены в задачах математической физики, инженерии и других областях науки.

Ключевые слова: неоднородная система, ранг, ряд, многочлен, нормальное решение, метод Фробениуса-Латышевой, аналитическая теория, вспомогательная система.

¹М.Ж. Талипова, ¹А.Е. Иманчиев, ¹Р.Д. Сейлова, ¹А. Мейрамбекулы

¹Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

ЕКІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ РАНГІ k БОЛАТЫН БІРТЕКТІ ЕМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ҚАЛЫПТЫ ШЕШІМДЕРІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Мақалада екінші ретті дербес туындылы рангі k болатын біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің қалыпты шешімдерін құру әдісі ұсынылған. Ерекше назар жүйенің ішкі рангі бірге тең болған жағдайға аударылған, бұл анықталмаған параметрлерді анықтау процедурасын жеңілдетеді. Зерттеу үшін аналитикалық әдістер, соның ішінде Фробениус-Латышева түрлендіруі және шешімдерді жалпыланған дәрежелі қатар түрінде ұсыну қолданылады. Қалыпты шешімдердің болуы үшін қажетті шарттар анықталып, қосалқы жүйелер талданды. Фробениус-Латышева әдісін пайдалана отырып, қалыпты шешімдердің белгісіз коэффициенттерін анықтайтын рекурренттік жүйелерге қойылатын талаптар тұжырымдалды. Осы талаптар орындалған жағдайда, шешімнің қажетті шарттары жеткілікті болып табылатыны көрсетілді. Алынған нәтижелер математикалық физика, инженерия және ғылымның басқа да салаларындағы есептерді шешуде қолданылуы мүмкін.

Түйін сөздер: біртекті емес жүйе, ранг, қатар, көпмүшелік, қалыпты шешім, Фробениус-Латышева әдісі, аналитикалық теория, қосалқы жүйе.

¹M.Zh. Talipova, ¹A.E. Imanchiev, ¹R.D. Seilova, ¹A. Meirambekuly

¹Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

ON NORMAL SOLUTIONS OF INHOMOGENEOUS SYSTEMS OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF RANK k

Abstract

This paper presents a method for constructing normal solutions of inhomogeneous systems of second-order partial differential equations of rank k . Special attention is given to the case when the subrank of the system is equal to one, which simplifies the procedure for determining the undetermined parameters. Analytical

methods are used in the study, including the Frobenius-Latysheva transformation and the representation of solutions in the form of generalized power series. Necessary conditions for the existence of normal solutions are established, and an analysis of auxiliary systems is conducted. Using the Frobenius-Latysheva method, requirements for recurrent systems that determine the unknown coefficients of normal solutions are formulated. It is shown that when these requirements are met, the necessary conditions for the existence of a solution also become sufficient. The obtained results can be applied to problems in mathematical physics, engineering, and other fields of science.

Keywords: inhomogeneous system, rank, series, polynomial, normal solution, Frobenius-Latysheva method, analytical theory, auxiliary system.

Основные положения

В статье предложен алгоритм получения нормальных решений для неоднородных систем дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Особое внимание уделено формулировке необходимых условий существования указанных решений, предполагающих выполнение определённых соотношений, заданных через характеристические функции. Кроме того, получены рекуррентные соотношения, позволяющие находить коэффициенты нормальных решений, а также доказана достаточность этих условий для существования решений в рассматриваемом классе систем.

Введение

Дифференциальные уравнения с частными производными занимают важное место при математическом описании различных процессов, встречающихся в физике, технике, биологии и других областях науки [1–3]. Одним из ключевых направлений в теории дифференциальных уравнений является изучение неоднородных систем, содержащих внешние воздействия или возмущения, влияющие на структуру исходной системы. Аналитическое решение таких систем представляет значительную сложность, так как их поведение во многом зависит от свойств уравнений и заданных граничных условий [4–6].

Актуальной задачей современной математической физики является исследование нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений второго порядка. Такие решения строятся с учётом структурных свойств уравнений и устойчивости решений. Благодаря своим специфическим особенностям, нормальные решения являются ценным инструментом при изучении поведения динамических систем и имеют прикладное значение в инженерных и научных задачах [7–8].

Настоящее исследование направлено на анализ способов получения нормальных решений для неоднородных систем дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Рассматриваются критерии существования и однозначности таких решений, а также исследуются условия, при которых возможна их конструкция. Особое внимание уделяется как теоретической обоснованности предложенного подхода, так и потенциальным сферам его применения.

Методология исследования

Исследование однородных специализированных систем с частными производными второго порядка является предметом работ множества исследователей [9–11]. Так, в исследовании В. Штернберга показано, что при условии единичного ранга системы допускают существование асимптотических решений [12]. Значительный вклад в развитие теории однородных систем с частными производными второго порядка внес Ж.Н. Тасмамбетов, систематизировавший и углубивший метод Фробениуса–Латышевой [13–15]. Метод основан на концепции ранга, разработанной А. Пуанкаре, и понятии антиранга, предложенном К. Я. Латышевой. Это позволяет строить решения различной структуры, включая степенные, нормальные и поднормальные ряды, а также получать замкнутые и нормально-регулярные решений [16–17].

Результаты исследования

В исследовании анализируется неоднородная система, включающая два взаимосвязанных дифференциальных уравнения второго порядка с частными производными вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + x^k \cdot p_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y^k \cdot p_2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + x^{2k} \cdot p_3 \cdot Z &= p_4(x, y), \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + x^k \cdot q_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y^k \cdot q_2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + y^{2k} \cdot p_3 \cdot Z &= q_4(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где ранг $p = k + 1 > 0$, коэффициенты $p_i(x, y)$ и $q_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) представимы сходящимися рядами двух переменных

$$\begin{aligned} p_i(x, y) &= \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu, \nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \\ q_i(x, y) &= \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} b_{\mu, \nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1) обладает несколькими характерными особенностями.

1. В соответствии с аналитической теорией подобных систем, особенность (∞, ∞) является иррегулярной [13]. Рассмотренная в работе [13] однородная система

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + x^k \cdot p_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y^k \cdot p_2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + x^{2k} \cdot p_3 \cdot Z &= 0, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + x^k \cdot q_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y^k \cdot q_2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + y^{2k} \cdot p_3 \cdot Z &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

обладает иррегулярной особенностью в точке (∞, ∞) . В рамках данного подхода получены условия, при которых возможно существование нормального решения для системы (3), которое может быть выражено в следующей представленного в виде

$$Z = \exp(G(x, y)) \cdot x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} C_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \quad (C_{0,0} \neq 0), \quad (4)$$

где функция $G(x, y)$ задается выражением

$$G(x, y) = \frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \dots + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{0,1} \cdot y. \quad (5)$$

Здесь $\rho, \sigma, C_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) – некоторые постоянные; а параметры $\alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ остаются неопределенными.

Первое условие, обеспечивающее существование нормального решения вида (4), позволяет вычислить неопределённые параметры функции $G(x, y)$, тогда как второе условие направлено на определение корней системы определяющих уравнений, то есть нахождение пары значений (ρ, σ) .

Однородная система (3) относится к классу систем Вильчинского [18] и, при выполнении условия совместности

$$1. p_y^{(1)} - q_x^{(2)} = 0,$$

$$2. q_{xx}^{(1)} + 2q_x^{(3)} - q^{(1)} \cdot p_x^{(1)} - p^{(1)} \cdot q_x^{(1)} - [p_{yy}^{(1)} - q^{(2)} \cdot p_y^{(1)} - p^{(2)} \cdot q_y^{(1)} - 2q^{(1)} \cdot p_y^{(2)}] = 0,$$

$$3. q_{xx}^{(2)} + p^{(1)} \cdot q_x^{(2)} - q^{(1)} \cdot p_x^{(2)} - 2p^{(2)} \cdot q_x^{(1)} - [p_{yy}^{(2)} + 2p_y^{(3)} - p^{(2)} \cdot q_y^{(2)} - q^{(2)} \cdot p_y^{(2)}] = 0,$$

$$q_{xx}^{(3)} - 2p^{(3)} \cdot q_x^{(1)} - q^{(1)} \cdot p_x^{(3)} + p^{(1)} \cdot q_x^{(3)} - [p_{yy}^{(3)} - 2q^{(3)} p_y^{(2)} - p^{(2)} q_y^{(3)} + q^{(2)} \cdot p_y^{(3)}] = 0,$$

обладает четырьмя линейно-независимыми частными решениями.

2. Для рассматриваемой системы (1) – (2) справедлива следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть задано частное решение $\bar{Z}(x, y)$ для неоднородной системы (1) и общее решение $Z^o(x, y)$ соответствующей однородной системы (3). Тогда сумма этих решений

$$Z(x, y) = Z^o(x, y) + \bar{Z}(x, y) \quad (6)$$

образует общее решение неоднородной системы с частными производными второго порядка (1).

Доказательство теоремы приведен в работе [7].

4. В случае, когда неоднородная система (1)–(2) имеет иррегулярную особенность в точке (∞, ∞) , правую часть можно представить в виде нормальных рядов Томе для двух переменных, то есть в следующем виде:

$$p_4(x, y) = \exp(G(x, y)) \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} p_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} (p_{0,0} \neq 0),$$

$$q_4(x, y) = \exp(G(x, y)) \cdot x^\gamma \cdot y^\delta \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} q_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} (q_{0,0} \neq 0),$$
(7)

Подобно случаю однородных систем, критерии существования нормальных решений для неоднородной системы формулируются аналогично. Основное различие проявляется в механизме определения неопределённых параметров, входящих в структуру предполагаемого решения (4).

В соответствии с методом Фробениуса–Латышевой, для определения неизвестных параметров $\alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ многочлена $Q(x, y)$ применяется специальное преобразование

$$\bar{Z}(x, y) = \exp G(x, y) \cdot \bar{U}(x, y). \quad (8)$$

позволяющее упростить структуру исходной системы. После его применения система (1) с коэффициентами, заданными выражениями (2) и (7), переходит в так называемую

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + [2 \cdot G_x + x^k \cdot p_1] \cdot \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + y^k \cdot p_2 \cdot \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \{[(G_x)^2 + G_{xx}] +$$

$$+ x^k \cdot p_1 \cdot G_x + y^k \cdot p_2 \cdot G_y + x^{2k} \cdot p_3\} \cdot \bar{U} = p_4^*(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + x^k \cdot q_1 \cdot \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + [2 \cdot G_y \cdot y^k \cdot q_2] \cdot \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \{[(G_y)^2 + G_{yy}] +$$

$$+ x^k \cdot q_1 \cdot G_x + y^k \cdot q_2 \cdot G_y + y^{2k} \cdot q_3\} \cdot \bar{U} = q_4^*(x, y),$$
(9)

где

$$\begin{aligned} p_4^*(x, y) &= x^\alpha \cdot y^\beta \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} p_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} (p_{0,0} \neq 0), \\ q_4^*(x, y) &= x^\gamma \cdot y^\delta \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} q_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} (q_{0,0} \neq 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Анализ показывает, что при переходе от исходной системы к вспомогательной, наибольшие степени коэффициентов при производных по переменным x и y , а также при самой искомой функции, сохраняются. Они по-прежнему равны k и $2k$ соответственно. Это подтверждает, что выполненное преобразование (8) не влияет на ранг системы, и он остается неизменным.

Следующим шагом является исследование условий, при которых вспомогательная система (9) допускает представление решения в форме обобщённого степенного ряда

$$\bar{U}(x, y) = x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} C_{\mu, \nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} (C_{0,0} \neq 0) \quad (11)$$

в зависимости от особенности в точке (∞, ∞) .

Коэффициенты при $\bar{U}(x, y)$ в первом уравнении обозначим через $R_3(x, y)$, а во втором уравнении – через $E_3(x, y)$:

$$\begin{aligned} R_3(x, y) &= \{[(G_x)^2 + G_{xx}] + x^k \cdot p_1 \cdot G_x + y^k \cdot p_2 \cdot G_y + x^{2k} \cdot p_3\}, \\ E_3(x, y) &= \{[(G_y)^2 + G_{yy}] + x^k \cdot q_1 \cdot G_x + y^k \cdot q_2 \cdot G_y + y^{2k} \cdot q_3\}. \end{aligned}$$

Для этого анализируются коэффициенты при старших степенях переменных x и y в уравнениях, входящих в систему (9). Приравнивая эти коэффициенты к нулю, удаётся вывести системы алгебраических уравнений, позволяющие определить неизвестные параметры $\alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$, входящие в многочлен $G(x, y)$, формирующий начальную часть искомого ряда.

Обозначим полученные системы уравнений, предназначенные для вычисления коэффициентов, через

$$d_{k+1,0}^{(j)} = 0, d_{0,k+1}^{(j)} = 0, \dots, d_{1,1}^{(j)} = 0, d_{1,0}^{(j)} = 0, d_{0,1}^{(j)} = 0 (j = 1, 2). \quad (12)$$

Чтобы проиллюстрировать методику, рассмотрим частный случай, при котором система (9) имеет конкретный ранг $p = 1 + 1 = 2$, обозначим его через

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{\alpha_{1,0}}{2} \cdot x^2 + \frac{\alpha_{0,1}}{2} \cdot y^2 + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{2,0} \cdot x + \alpha_{0,2} \cdot y, \\ G_x &= \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{1,1} \cdot y + \alpha_{2,0}, G_{xx} = \alpha_{1,0}, \\ G_y &= \alpha_{0,1} \cdot y + \alpha_{1,1} \cdot x + \alpha_{0,2}, G_{yy} = \alpha_{0,1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты $R_3(x, y)$ и $E_3(x, y)$, присутствующие во вспомогательной системе (9), представляют собой выражения, зависящие от параметров многочлена, формирующего первые члены обобщённого степенного ряда и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} R_3(x, y) &= d_{2,0}^{(1)} \cdot x^2 + d_{0,2}^{(1)} \cdot y^2 + d_{1,1}^{(1)} \cdot xy + d_{1,0}^{(1)} \cdot x + d_{0,1}^{(1)} \cdot y + d_{0,0}^{(1)} + \dots + d_{1,0}^{(1)} \frac{1}{x} + \dots, \\ E_3(x, y) &= d_{2,0}^{(2)} \cdot x^2 + d_{0,2}^{(2)} \cdot y^2 + d_{1,1}^{(2)} \cdot xy + d_{1,0}^{(2)} \cdot x + d_{0,1}^{(2)} \cdot y + d_{0,0}^{(2)} + \dots + d_{1,0}^{(2)} \frac{1}{x} + \dots \end{aligned}$$

где $d_{2,0}^{(j)}, d_{0,2}^{(j)}, \dots (j = 1, 2)$ зависят от неизвестных коэффициентов многочлена $G(x, y)$.

Для того, чтобы вспомогательная система (9) имела хотя бы одно решение вида (11), необходимо выполнение равенств (12) при $k = 1$.

Отсюда получаем шесть систем характеристических уравнений которые используются для определения коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} d_{2,0}^{(1)} = \alpha_{1,0}^2 + \alpha_{1,0} \cdot a_{0,0}^{(3)} = 0, \\ d_{2,0}^{(2)} = \alpha_{1,1}^2 + \alpha_{1,0} \cdot b_{0,0}^{(1)} = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } x^2 \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{0,2}^{(1)} = \alpha_{1,1}^2 + \alpha_{0,1} \cdot a_{0,0}^{(2)} = 0, \\ d_{0,2}^{(2)} = \alpha_{0,1}^2 + \alpha_{0,1} \cdot b_{0,0}^{(2)} + b_{0,0}^{(3)} = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } y^2 \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{1,1}^{(1)} = 2\alpha_{1,0} \cdot \alpha_{1,1} + \alpha_{1,1} \cdot a_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{0,0}^{(2)} = 0, \\ d_{1,1}^{(2)} = 2\alpha_{0,1} \cdot \alpha_{1,1} + \alpha_{1,1} \cdot b_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot b_{0,0}^{(3)} = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } xy \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{1,0}^{(1)} = 2\alpha_{1,0} \cdot \alpha_{2,0} + \alpha_{1,0} \cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{2,0} \cdot a_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{0,1}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{0,1}^{(2)} + a_{1,0}^{(3)} = 0, \\ d_{1,0}^{(2)} = 2\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{0,2} + \alpha_{0,1} \cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot b_{0,1}^{(1)} + \alpha_{2,0} \cdot b_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot b_{0,1}^{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } x \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{0,1}^{(1)} = 2\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,0} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,0}^{(1)} + \alpha_{0,1} \cdot a_{0,1}^{(2)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,0}^{(2)} + \alpha_{0,2} \cdot a_{0,0}^{(2)} = 0, \\ d_{0,1}^{(2)} = 2\alpha_{0,1} \cdot \alpha_{0,2} + \alpha_{1,1} \cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{0,1} \cdot b_{0,1}^{(2)} + \alpha_{1,1} \cdot b_{1,0}^{(2)} + \alpha_{0,2} \cdot b_{0,0}^{(2)} + b_{1,0}^{(3)} = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } y \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{0,0}^{(1)} = \alpha_{2,0}^{(2)} + \alpha_{1,0} + \alpha_{1,0} \cdot a_{2,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,1}^{(1)} + \alpha_{2,0} \cdot a_{1,0}^{(1)} + \\ + \alpha_{0,1} \cdot a_{0,2}^{(2)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,1}^{(2)} + \alpha_{0,2} \cdot a_{0,1}^{(2)} + a_{0,2}^{(3)} = 0, \\ d_{0,0}^{(2)} = \alpha_{0,2}^{(2)} + \alpha_{0,1} + \alpha_{1,0} \cdot a_{2,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,1}^{(1)} + \alpha_{2,0} \cdot a_{0,0}^{(1)} + \\ + \alpha_{0,1} \cdot a_{0,2}^{(2)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,1}^{(2)} + \alpha_{0,2} \cdot a_{1,0}^{(1)} + a_{2,0}^{(3)} = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } x^0 y^0. \quad (19)$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}, \alpha_{1,1}$ определяются из систем вида (14)–(16), а $\alpha_{2,0}$ и $\alpha_{0,2}$ – из систем (17)–(19). Теперь определим ρ, σ и $C_{\mu,\nu}$. Подставляя (11) в (9), получаем систему характеристических уравнений

$$\begin{aligned} & x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \left\{ C_{0,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) + \left[C_{1,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma) \right] \cdot \frac{1}{x} + \right. \\ & + \left[C_{0,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma) \right] \cdot \frac{1}{y} + \left[C_{1,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma + 1) + \right. \\ & \left. + C_{1,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,1} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,1}^{(j)}(\rho, \sigma) \right] \cdot \frac{1}{xy} + \dots \left. \right\} = \phi_j(x, y), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\phi_1(x, y) = p_4^*(x, y), \phi_2(x, y) = q_4^*(x, y)$, а $\phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) (j = 1, 2)$ имеет вид относительно особенности (∞, ∞) :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0,0}^{(1)}(\rho, \sigma) = \rho \cdot (\rho - 1) + a_{00}^{(1)} \cdot \rho + a_{00}^{(2)} \cdot \sigma + a_{00}^{(3)}, \\ \phi_{0,0}^{(2)}(\rho, \sigma) = \sigma \cdot (\sigma - 1) + b_{00}^{(1)} \cdot \rho + b_{00}^{(2)} \cdot \sigma + b_{00}^{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из приведённого выше анализа следует, что выражение (11) может рассматриваться как частное формальное решение вспомогательной системы лишь при условии, что содержащиеся

в нём неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют определённой рекуррентной системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_{0,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,0}^{(j)} \\ C_{1,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{1,0}^{(j)} \\ C_{0,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,1}^{(j)} \\ C_{1,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma + 1) + C_{1,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + \\ &+ C_{0,1} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,1}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{1,1}^{(j)} \quad (22) \\ C_{2,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho + 2, \sigma) + C_{1,0} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho + 1, \sigma) + C_{0,0} \cdot \phi_{2,0}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{2,0}^{(j)} \\ C_{0,2} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma + 2) + C_{0,1} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma + 1) + C_{0,0} \cdot \phi_{0,2}^{(j)}(\rho, \sigma) &= \alpha_{0,2}^{(j)} \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Эта рекуррентная система разбивается на две системы в зависимости от значений степеней переменных: один случай описывает ситуацию при $j = 1$; $\alpha_{\mu,\nu}^{(1)} = p_{\mu,\nu}$, другой при $j = 2$, $\alpha_{\mu,\nu}^{(2)} = q_{\mu,\nu}$. Здесь $p_{\mu,\nu}$ и $q_{\mu,\nu}$ соответствуют коэффициентам, входящим в обобщённые степенные ряды $p_4^*(x, y)$ и $q_4^*(x, y)$, соответственно.

Пусть значения коэффициентов $C_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$), определённых по этим двум системам при $j = 1$ и $j = 2$ совпадают. Из системы (22), это возможно лишь при условии, что соответствующие степени $\alpha + k_1, \beta + k_1$ и $\gamma + k_2, \delta + k_2$, где k_j ($j = 1, 2$) – любые натуральные числа не совпадают с характеристическими показателями решений однородной системы (3).

Анализ системы характеристических уравнений (20) показывает, что сходимость рядов $\phi_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) гарантирует сходимость обобщённого ряда (11). Это позволяет построить частное решение $\bar{Z}(x, y)$ для неоднородной системы (1). Однако в ситуации, когда степени $\alpha + k_1, \beta + k_1$ и $\gamma + k_2, \delta + k_2$, (при натуральных k_j ($j = 1, 2$)) совпадают с характеристическими показателями решений системы (3), возникает резонансное явление. В таком случае правая часть уравнений системы (1) фактически совпадает с одним из её однородных частных решений.

Справедливы следующие утверждения

Лемма 1. Вспомогательная система (9), сформированная посредством преобразования (8) из системы (1)–(2), (7), допускает наличие по меньшей мере одного решения в форме (11) только при условии, что выполняются соотношения, представленные в выражении (12).

Лемма 2. Решения вспомогательной системы (9) в виде обобщённого ряда (11) возможны лишь в том случае, если пара параметров (ρ, σ) удовлетворяет системе определяющих уравнений $\phi_{0,0}^{(j)} = 0$, построенной относительно особенности (∞, ∞) , где $\phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma)$ ($j = 1, 2$) – коэффициенты старших членов, полученных из характеристических функций вспомогательной системы после замены неизвестной $\bar{U}(x, y)$ на соответствующее выражение $x^\rho \cdot y^\sigma$.

Доказательства Лемм 1 и 2 осуществляются по аналогии с аргументацией, представленной в источнике [13], с учётом специфики, заключающейся в том, что рассматриваемое решение $\bar{U}(x, y)$ выступает как частное решение неоднородной системы.

На основе лемм 1 и 2 докажем

Теорема 2. При выполнении условий, при которых коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) ряда (4) удовлетворяют рекуррентным соотношениям, заданным в (22), неоднородная система (1)–(2), с правой частью, определённой выражением (7), допускает существование нормального решения, представленного в форме (4).

Доказательство. В соответствии с подходом, изложенным в работе [13], нормальные решения неоднородной системы (1)–(2) ищутся в форме разложения (4). Сначала, используя

Лемму 1, вычисляются коэффициенты многочлена $G(x, y)$. Далее, опираясь на Лемму 2, определяются параметры ρ и σ , входящие в состав обобщенного степенного ряда (4). Оставшиеся неопределённые величины $C_{\mu, \nu} (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots)$ уточняются на основе рекуррентной системы (22). Таким образом, утверждение теоремы 2 доказано.

Дискуссия

В данной работе рассмотрен метод построения нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка ранга k . Полученные результаты основаны на использовании метода Фробениуса-Латышевой и анализа вспомогательных систем. Проведенный анализ показал, что для обеспечения существования нормальных решений необходимо выполнение ряда условий, включая выполнение рекуррентных соотношений, которые позволяют определить неизвестные параметры решений.

По сравнению с другими существующими методами, предложенный в статье подход имеет определённые преимущества. Прежде всего, он предоставляет возможность получения явных форм решений, что облегчает их дальнейший анализ и применение в различных научных и инженерных задачах. Кроме того, использование вспомогательных систем позволяет значительно упростить процесс вычислений, сведя его к решению конечного числа алгебраических уравнений.

Однако остаются нерешённые вопросы, требующие дополнительного исследования. Настоящее рассмотрение ограничено случаями, в которых подранг системы равен единице. Расширение метода на более сложные случаи – с подрангом выше единицы – может потребовать модификации подхода и уточнения применяемых условий. Кроме того, открытым остаётся вопрос о влиянии структуры неоднородности на свойства нормальных решений, особенно при её изменении. Кроме того, важным направлением дальнейших исследований является изучение численных алгоритмов для нахождения нормальных решений. Хотя аналитический подход позволяет получить точные выражения, его практическая реализация может быть затруднена при увеличении размерности системы или при наличии сложных граничных условий.

Заключение

В данной работе представлен метод построения нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Основные результаты включают:

- Установление необходимых условий существования нормальных решений на основе вспомогательных систем.
- Выведение рекуррентных соотношений для определения коэффициентов нормальных решений.
- Доказательство достаточности найденных условий для существования решений в заданном классе систем.

Применение предложенного метода открывает новые возможности для исследования дифференциальных уравнений с неоднородностями и может быть использовано в задачах математической физики, инженерии и других областях науки. В будущем планируется расширение методики на более сложные системы, а также разработка эффективных численных алгоритмов для нахождения нормальных решений.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН AP19675358).

Список использованных источников

- [1] A.T. Assanova, A.E. Imanchiyev. A nonlocal problem with multipoint conditions for partial differential equations of higher order // *Filomat*, 2024. <https://doi.org/10.2298/FIL2401295A>
- [2] A.U. Bekbauova. CMMSE: Solutions in a Broad Sense to the Boundary Value Problem for First-Order Partial Differential Systems // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025. <https://doi.org/10.1002/mma.10669>
- [3] M.Ruzhansky, A.Hasanov, T.G.Ergashev. PDE-Systems associated with the hypergeometric functions in three variables and their particular solutions near the origin. Preprint, October, 2024. 245 p. <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2410.00748>
- [4] Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. О неоднородных линейных дифференциальных уравнениях в регулярном случае // "Мат. физика", - Киев. 1972. №11. - С. 133 – 137.
- [5] Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. О неоднородных линейных дифференциальных уравнениях в регулярном случае // "Мат. физика", - Киев. 1972. №11. - С. 133 – 137.
- [6] Сикорский Ю.И. Нормальные решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: автореф. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев: 1972. - 12 с.
- [7] M.Zh. Talipova. Construction of normal-regular solutions of inhomogeneous system of partial differential equations of second order // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025, <https://doi.org/10.1002/mma.10828>
- [8] М.Ж.Талипова, А.У.Бекбауова. Построение нормальных решений для неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных с иррегулярными особенностями// Вестник Казахстано-Британского технического университета. Математические науки. 2025. № 1
- [9] Wilczynski E.J. *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces*. Leipzig. 1906. 120 p.
- [10] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ОНТИ, 1939. - 719 с.
- [11] Appel P. Sur les polynomes de deux variables analogues aux polynomes de jacobi // *Archiv der Mathematik und Physik*. 1881. В. 66. - S. 238 – 245.
- [12] Sternberg W. Uber die asymptotische integration von differentialgleichungen. *Math. Ann.* 1920; 81(2): 119-186.
- [13] Tasmambetov ZN. *Construction of Normal and Normally-Regular Solutions of Special Systems of Partial Equations of Second Order [in Russian]*. Aktobe: IP Zhanadilov S.T. 2015.
- [14] Issenova A.A, Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. // *Lobachevskii Journal of Mathematics* 2022; 43(11): 3167-3173. <https://doi.org/10.1134/S1995080222140153>
- [15] Tasmambetov, Z.N., Talipova, M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // *AIP Conference Proceedings*, 2017, 1880, <https://doi.org/10.1063/1.5000629>
- [16] Латышева К.Я. О нормальных рядах как решениях линейных дифференциальных уравнений любого ранга // "Наукові записки КДУ", Мат. сборник. - Київ. 1952. №6. - С. 25 – 46.
- [17] Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. – Киев: Вицц. школа, 1974. - 136 с.
- [18] Wilzynski E.J. On a Certain Completerly Integrable System of Linear Partial Differential Equations // *Amer. Journal of Math.* 36. №3. 1904. - P.180 – 194.

References

- [1] A.T. Assanova, A.E. Imanchiyev. A nonlocal problem with multipoint conditions for partial differential equations of higher order // *Filomat*, 2024. <https://doi.org/10.2298/FIL2401295A>
- [2] A.U. Bekbauova. CMMSE: Solutions in a Broad Sense to the Boundary Value Problem for First-Order Partial Differential Systems // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025. <https://doi.org/10.1002/mma.10669>
- [3] M.Ruzhansky, A.Hasanov, T.G.Ergashev. PDE-Systems associated with the hypergeometric functions in three variables and their particular solutions near the origin. Preprint, October, 2024. 245 p. <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2410.00748>
- [4] Sikorskij Ju.I., Tereshhenko N.I. O neodnorodnyh linejnyh differencial'nyh uravnenijah v reguljarnom sluchae // "Mat. fizika", - Kiev. 1972. №11. - S. 133 – 137.
- [5] Sikorskij Ju.I., Tereshhenko N.I. O neodnorodnyh linejnyh differencial'nyh uravnenijah v reguljarnom sluchae // "Mat. fizika", - Kiev. 1972. №11. - S. 133 – 137.

[6] Sikorskij Ju.I. *Normal'nye reshenija linejnyh neodnorodnyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi koeficientami: avtoref. ... kand. fiz.-mat. nauk.* – Kiev: 1972. - 12 s.

[7] M.Zh. Talipova. *Construction of normal-regular solutions of inhomogeneous system of partial differential equations of second order // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2025, <https://doi.org/10.1002/mma.10828>*

[8] M.Zh.Talipova, A.U.Bekbauova. *Postroenie normal'nyh reshenij dlja neodnorodnyh differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s irreguljarnymi osobennostjami// Vestnik Kazahstansko-Britanskogo tehničeskogo universiteta. Matematicheskie nauki. 2025. № 1*

[9] Wilczynski E.J. *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces.* Leipzig. 1906. 120 p.

[10] Ajns Je.L. *Obyknovennye differencial'nye uravnenija.* – Har'kov: ONTI, 1939. - 719 s.

[11] Appel P. *Sur les polynomes de deux variables analogues aux polynomes de jacobi // Archiv der Mathematik und Physik. 1881. B. 66. - S. 238 – 245.*

[12] Sternberg W. *Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen. Math. Ann. 1920; 81(2): 119-186.*

[13] Tasmambetov ZN. *Construction of Normal and Normally-Regular Solutions of Special Systems of Partial Equations of Second Order [in Russian].* Aktobe: IP Zhanadilov S.T. 2015.

[14] Issenova A.A, Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. *Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. // Lobachevskii Journal of Mathematics 2022; 43(11): 3167-3173. <https://doi.org/10.1134/S1995080222140153>*

[15] Tasmambetov, Z.N., Talipova, M.Z. *Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // AIP Conference Proceedings, 2017, 1880, <https://doi.org/10.1063/1.5000629>*

[16] Latysheva K.Ja. *O normal'nyh rjadah kak reshenijah linejnyh differencial'nyh uravnenij ljubogo ranga // "Naukovi zapiski KDU", Mat. sbornik. - Kiiiv. 1952. №6. - S. 25 – 46.*

[17] Latysheva K.Ja., Tereshhenko N.I., Orel G.S. *Normal'no-reguljarnye reshenija i ih prilozhenija.* – Kiev: Vishh. shkola, 1974. - 136 s.

[18] Wilczynski E.J. *On a Certain Completerly Integrable System of Linear Partial Differential Eguations // Amer. Journal of Math. 36. №3. 1904. - R.180 – 194.*

Н.М. Темирбеков^{1,4}, А.К. Тураров^{2*}, Ф.А. Алиев³, А.Н. Темирбеков^{1,4}

¹Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан

³Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

⁴Национальная инженерная академия Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

*e-mail: t010183@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА ДОБЫЧИ НЕФТИ МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

В данной статье рассматривается численный метод решения прямой и обратной задачи газлифтного процесса добычи нефти описываемый одномерными уравнениями Навье-Стокса для сжимаемого газа. Для решения прямой задачи построено семейство разностных схем и исследованы вопросы корректности этой разностной задачи в зависимости от параметра. Решение обратной задачи сведена к задаче оптимального управления. Целевой функционал строится с применением дополнительного условия. Для минимизации целевого функционала используется градиентный метод. Градиент целевого функционала определяется через решение сопряженной задачи, которая содержит ценную информацию о решении прямой задачи. А сама сопряженная задача строится с использованием тождество Лагранжа и условия равенства нулю внеинтегральных членов. Сопряженная задача является ретроспективной, т. к. дополнительное условие на объемный расход газа и на давление ставятся в некоторый момент времени. Итерациями определяются начальные условия для объемного расхода газа и давления через решение сопряженной, ретроспективной задачи. Проведен вычислительный эксперимент по разработанному алгоритму, который подтверждает то, что по заданному дополнительному условию можно определить начальные значения объемного расхода газа и давления с требуемой точностью. Разработанный алгоритм может быть использован для построения кривой для производительности газлифтного процесса.

Ключевые слова: Газлифтный процесс добычи нефти, уравнения Навье-Стокса, сопряжённое уравнение, обратная задача, оптимальное управление, градиентный метод, конечно-разностный метод.

Н.М. Темирбеков^{1,4}, А.К. Тураров², Ф.А. Алиев³, А.Н. Темирбеков^{1,4}

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

²Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен, Қазақстан;

³Баку мемлекеттік университеті, Баку, Әзербайжан;

⁴Қазақстан Республикасының Ұлттық инженерлік академиясы, Алматы, Қазақстан

МҰНАЙ ӨНДІРУДІҢ ГАЗЛИФТТІК ПРОЦЕСІНІҢ ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕРІН ТҮЙІНДЕС ТЕНДЕУЛЕР ӘДІСІМЕН САНДЫҚ ШЕШУ

Аңдатпа

Бұл мақалада сығылатын газ үшін бір өлшемді Навье-Стокс теңдеулерімен сипатталған мұнай өндірудің газлифттік процесінің тура және кері есептерін шешудің сандық әдісі қарастырылады. Тура есепті шешу үшін айырымдық сұлба тобы құрылды және параметрге байланысты осы айырымдық есебінің қисындылық мәселелері зерттелді. Кері есептің шешімі оңтайлы басқару есебіне келтіріледі. Мақсатты функционал қосымша шарт арқылы құрастырылады. Мақсатты функционалды азайту үшін градиент әдісі қолданылады. Мақсатты функционал градиенті тура есептің шешімі туралы құнды ақпаратты қамтитын түйіндес есептің шешімі арқылы анықталады. Ал түйіндес есептің өзі Лагранж сәйкестігі мен интегралдық емес мүшелер нөлге тең болу шарты арқылы құрастырылады. Түйіндес есеп ретроспективті болып табылады, өйткені көлемдік газ шығыны мен қысымға қосымша шарт белгілі бір уақытта орнатылады. Итерациялармен ретроспективті есепті шешу арқылы көлемдік газ шығыны мен қысымының бастапқы шарттарын анықтау үшін қолданылады. Көрсетілген қосымша

шарт негізінде газдың көлемдік шығыны мен қысымының бастапқы мәндерін қажетті дәлдікпен анықтауға болатынын растайтын әзірленген алгоритмді пайдаланып есептеу эксперименті жүргізілді. Әзірленген алгоритмді газлифтті процесінің өнімділігі үшін қисық сызығын салу үшін пайдалануға болады.

Түйін сөздер: Мұнай өндірудің газлифттік процесі, Навье-Стокс теңдеулері, түйіндес теңдеу, кері есеп, оңтайлы басқару, градиент әдісі, ақырлы айырымдар әдісі.

N.M. Temirbekov^{1,4}, A.K. Turarov², F.A. Aliev³, A.N. Temirbekov^{1,4}

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

³Baku State University, Baku, Azerbaijan

⁴National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRECT AND INVERSE PROBLEM OF GAS LIFT OIL PRODUCTION PROCESS BY THE METHOD OF CONJUGATE EQUATIONS

Abstract

This article discusses a numerical method for solving the direct and inverse problems of the gas-lift process of oil production described by one-dimensional Navier-Stokes equations for compressible gas. To solve the direct problem, a family of difference schemes is constructed and the correctness of this difference problem depending on the parameter is investigated. The solution to the inverse problem is reduced to an optimal control problem. The objective functional is constructed using an additional condition. To minimize the objective functional, a gradient method is used. The gradient of the objective functional is determined through the solution of the conjugate problem, which contains valuable information about the solution of the direct problem. And the conjugate problem itself is constructed using the Lagrange identity and the condition of equality to zero of the integral terms. The conjugate problem is retrospective, since the additional condition on the volumetric gas flow rate and pressure are set at a certain point in time. Iterations determine the initial conditions for the volumetric gas flow rate and pressure through the solution of the conjugate, retrospective problem. A computational experiment was conducted using the developed algorithm, which confirms that the initial values of the volumetric gas flow rate and pressure can be determined with the required accuracy using the specified additional condition. The developed algorithm can be used to plot a curve for the gas-lift process performance.

Keywords: Gas-lift oil production process, Navier-Stokes equations, conjugate equation, inverse problem, optimal control, gradient method, finite-difference method.

Введение

Газлифтный процесс представляет собой метод добычи нефти, при котором газ вводится в затрубное пространство скважины, чтобы уменьшить плотность газожидкостной смеси (ГЖС) и облегчить её подъём на поверхность. Этот процесс происходит в двух основных зонах:

- Кольцевое пространство (затрубное): пространство между стенкой скважины и насосно-компрессорной трубой, где движется газ.

- Подъёмник: внутренняя труба, через которую смесь нефти, газа и воды поднимается к устью скважины.

Модель предложенная в работе [1] описывает движение газа и ГЖС в этих зонах с использованием системы гиперболических уравнений с частными производными. Эти уравнения учитывают давление P и объёмный расход закачиваемого газа Q как основные параметры, влияющие на транспортировку смеси.

В этой [2] работе представлен математический метод к оптимизации добычи нефти из скважин, использующих газлифтную систему. Цель работы — определить экономически эффективный уровень добычи нефти и снизить производственные затраты за счет минимизации расхода газа, используемого для подъема нефти. Для этого были собраны данные о характеристиках скважин, которые затем использовались в приложении PIPESIM для моделирования. На основе этих данных были построены кривые производительности каждой скважины. Далее была разработана нелинейная многокритериальная модель программирования для оптимизации добычи нефти. В работе [3] рассмотрено исследование

метода оптимизации и распределения газлифта для увеличения нефтеотдачи генетическим алгоритмом. В работах [4-10] используется математическая модель основанная на законе Дарси. Это очень простое уравнение в правой части которого сила тяжести, сила трения и ускорения. Давление заменяется плотностью газа согласно уравнению состояния, а плотность смеси рассматривается как линейная комбинация плотностей газа и жидкости.

В дальнейшем авторами работы [4] были использованы генетические алгоритмы решения задачи максимизации добычи нефти. Скорость добычи жидкости из добывающей скважины иллюстрирована сочетанием притока производительности (IPR) и производительности вертикальной подъемной силы (VLP). В работе [5] кривая производительности газ лифта (КПГЛ) построена для заданных скважин в результате эксперимента. С помощью этой кривой можно оценить влияние скорости закачки газа на дебит жидкости. Это позволяет определить скорость закачки газа, необходимую для достижения желаемой производительности. Изучение КПГЛ позволяет найти оптимальную скорость закачиваемого газа. В работе [6] КПГЛ получено на основе промысловых данных путем измерения скорости закачки газа и скорости добычи жидкости. По измеренным данным проведено интерполирование для получения КПГЛ. Из полевых данных КПГЛ строится методом наименьших квадратов в виде квадратичной полиномиальной функций. В работе [7] предложена новая функция для улучшения предыдущего квадратичного полинома КПГЛ с добавлением логарифмического члена. В работе Sukarno P. и другие [8] предложена экспоненциальная функция для подбора КПГЛ по полевым данным. Однако экспоненциальная КПГЛ хорошо описывает только закачку газа. Исследователи S. Guet и G. Oams [9, 10] используя кусочно-линейную функцию для подбора GLPC по полевым данным, которая имеет хорошую перспективу применения. Во всех этих работах использованы полуэмпирические подходы исследования кривой приозводительности процесса газ лифта. На сегодняшний день распространенным методом решения обратных задач математической физики являются сведения их к задачам оптимального управления. Одной из актуальных задач современного оптимального управления является управление поведением объектов, изменение которых описывается с помощью уравнений с частными производными. Цель управления состоит в том, чтобы перевести изучаемый объект из одного известного состояния в другое, влияя на некоторые его параметры. Впервые подобные задачи были сформулированы в работах J.L. Lions [11, 12].

В качестве управляющей функций может быть использована правая часть уравнения или системы уравнений. Решению таких задач методом сопряженных уравнений посвящены работы Агашкова В.И. [13]. Во многих работах рассматриваются граничные управление, т.е. управление посредством граничных условий. Работы В.И. Ильина и Е.И. Моисеева [14] посвящены исследованию задач граничного управления для уравнения колебаний струны, в которых были получены в явном виде управляющие функции, переводящие струну из заданного начального состояния в заданное финальное состояние за определенное время. При этом рассматривались различные типы граничных управлений. В работе Г.И. Марчука [15] дано понятие сопряженных операторов и уравнений и отмечены возможные их приложения в математическом моделировании и вычислительной математике. Свойства сопряженных операторов достаточно полно исследованы для линейных операторов в гильбертовых и банаховых пространствах и отражены во многих монографиях. В работе [16] предложен метод фиктивных областей с идеей сопряженной оптимизации позволяющий строить однородную разностную схему во всей расширенной области. При этом разумное продолжение коэффициентов основного уравнения приводит к сходимости решения задачи в исходной области к искомому решению, что подтверждается математически доказанными утверждениями и результатами численных расчетов. Для минимизации функционала Лагранжа использовался сопряженный градиентный метод, который позволяет найти эффективное оптимальное решение путем итеративного уточнения. При этом необходимо вычислить градиент функционала Лагранжа, который приводит к постановке сопряженной задачи. Приведено постановка сопряженной задачи, а также описано вычисление градиента

функционала, который зависит от решения сопряженной задачи. По численным результатам работы сделаны выводы, что использование градиентного метода, сопряженной задачи и метода фиктивных областей являются эффективным подходом для решения сложных задач оптимизации с ограничениями. В работе метод разработан сначала для уравнения Бюргерса. Сформулирована вспомогательная и сопряженная задача для уравнения Бюргерса. Разработан итерационный алгоритм для приближенного решения вспомогательной задачи. Получена оценка условной устойчивости сопряженной задачи методом энергетических неравенств. Доказана теорема об оценке условной устойчивости. На модельной задаче показана эффективность использования такой модификации. Данный метод является очень удобным в части автоматизации программирования. Далее предложенный алгоритм разработан для решения уравнения Навье-Стокса. В статье А.В. Аргучинцева, V.P. Poplevko [17] рассматривается задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений, в которой граничные условия определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Рассмотрена задача моделирования динамики невзаимодействующих между собой популяций с учетом возрастного распределения особей. Целью задачи управления может быть достижение заданных плотностей популяций в конечный момент времени. Для этой задачи получено неклассическое необходимое условие оптимальности, которое основано на применении специальной вариации управления, обеспечивающей гладкость управляющих функций. Предложен метод улучшения допустимых управлений. В работе [18] рассматривается разработка методов решения задач оптимального управления в классе гладких управляющих воздействий с учетом таких ограничений на управления, которые характерны для обратных задач математической физики. Численная реализация метода проведена для системы гиперболических уравнений первого порядка линеаризованной теории “мелкой воды”. Предполагается, что в конечный момент времени известен профиль волны. Обратная задача интерпретирована как задача минимизации квадратичного функционала. Далее модель “мелкой воды” приведена к инвариантной форме. Для численного решения используется разностная схема метода характеристик. Обратные задачи различных типов встречаются в повседневной жизни. Работы [19, 20] посвящены исследованию применения численных методов для решения задач, связанных с акустическими уравнениями, с особым акцентом на задачи, имеющие значительное практическое значение, как в области медицинской визуализации, так и в теоретической акустике. В работе Темирбекова Н.М. [21] для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода использован проекционный метод Бубнова-Галеркина, где в качестве базисных функций применены вейвлеты Лежандра. В рамках метода Галеркина разложение осуществлялось с использованием этих базисов, что привело к системе линейных алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов. Полученная система решалась методом сопряженных градиентов.

Методология исследования

1. *Постановка прямой задачи.* Математическая модель работы газлифтной скважины описывается следующей системой уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа [1]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad t \geq 0, x \in (0; 2l), \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - 2a \cdot Q, \quad t \geq 0, x \in (0; 2l), \quad (2)$$

где

$$c = \begin{cases} c_1, & x \in (0; l) \\ c_2, & x \in (l; 2l) \end{cases}, \quad \bar{F} = \begin{cases} \bar{F}_1, & x \in (0; l) \\ \bar{F}_2, & x \in (l; 2l) \end{cases}, \quad a = \begin{cases} a_1, & x \in (0; l) \\ a_2, & x \in (l; 2l) \end{cases}$$

начальные условия

$$P(0, x) = P^0(x), \quad Q(0, x) = Q^0(x) \quad (3)$$

и граничные условия

$$P(t, 0) = P_0(t), \quad Q(t, 0) = Q_0(t) \quad \text{при } x = 0, \quad (4)$$

$$P(t, l + 0) = P(t, l - 0) + P_{pl}(t), \quad Q(t, l + 0) = Q_0(t, l - 0) + Q_{pl}(t) \quad (5)$$

при $x = l$,

Здесь, t - время, x - координата по глубине скважины, P - давление, Q - объемный расход газа, \bar{F} - площадь поперечного сечения скважины, c - скорость звука в жидкости, a - коэффициент, Q_{pl} - объемный расход газа в пласте, P_{pl} - давление пласта, $P^0(x)$ - начальное распределение давления газа, $Q^0(x)$ - начальный объемный расход закачиваемого газа, l - глубина скважины.

В прямой задаче надо найти $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ по заданными функциями $P^0(x)$, $Q^0(x)$, $P_0(t)$, $Q_0(t)$, $P_{pl}(t)$, $Q_{pl}(t)$.

Уравнение (1) является уравнением неразрывности, а (2) - уравнением движения газа.

2. Исследование аппроксимации, устойчивости семейства разностных схем. Рассмотрим явную разностную схему для задачи (1) - (5)

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\tau} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{h}, \quad (6)$$

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\tau} = -\bar{F} \cdot \frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h} - 2a \cdot Q_i^{n+1} \quad (7)$$

начальные условия

$$P_i^0 = P^0(x_i), \quad Q_i^0 = Q^0(x_i), \quad i = \overline{0, N_x} \quad (8)$$

и граничные условия соответственно

$$P_0^j = P_0(t_j), \quad Q_0^j = Q_0(t_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad (9)$$

$$P_{\frac{N_x}{2}}^j = P_{\frac{N_x}{2}-1}^j + P_{pl}, \quad Q_{\frac{N_x}{2}}^j = Q_{\frac{N_x}{2}-1}^j + Q_{pl}. \quad (10)$$

Неявную схему для уравнений рассмотрим в виде

$$P_i^{j+1} = P_i^j - \gamma_1 \cdot (Q_i^{j+1} - Q_{i-1}^{j+1}), \quad (11)$$

$$Q_i^{j+1} = [Q_i^j - \gamma_2 \cdot (P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1})] / (1 + 2a\tau), \quad (12)$$

где $\gamma_1 = \frac{\tau c^2}{\bar{F} \cdot h}$, $\gamma_2 = \frac{\tau \cdot \bar{F}}{h}$.

Отсюда видно, что счет можно начинать с точки $i = 1$, $j = 0$. Тогда

$$P_1^1 = P_1^0 - \gamma_1 \cdot (Q_1^1 - Q_0^1), \quad (13)$$

$$Q_1^1 = [Q_1^0 - \gamma_2 \cdot (P_1^1 - P_0^1)] / (1 + 2a\tau). \quad (14)$$

Умножаем уравнение (14) на $-\gamma_1$ и суммируем с первым, получим

$$P_1^1 = P_1^0 + \gamma_1 \cdot Q_0^1 - \frac{\gamma_1}{1 + 2a\tau} \cdot Q_1^0 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 + 2a\tau} \cdot P_1^1 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 + 2a\tau} \cdot P_0^1.$$

Отсюда находим P_1^1

$$P_1^1 = \frac{1 + 2a\tau}{1 + 2a\tau - \gamma_1 \gamma_2} \cdot \left[P_1^0 + \gamma_1 \cdot Q_0^1 - \frac{\gamma_1}{1 + 2a\tau} \cdot Q_1^0 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 + 2a\tau} \cdot P_0^1 \right]. \quad (15)$$

Подставляя P_1^1 в (14) и определим Q_1^1 .

Зная P_1^1 , Q_1^1 можно вычислить все значения P_1^j , Q_1^j до некоторого $j = j_0$, затем, положив $i = 2$, найти P_2^j , Q_2^j при $0 \leq j \leq j_0$ и т.д.

В общем случае для определения P_i^{j+1} получим

$$P_i^{j+1} = \frac{1 + 2a\tau}{1 + 2a\tau - \gamma_1\gamma_2} \cdot \left[P_i^j + \gamma_1 \cdot Q_{i-1}^{j+1} - \frac{\gamma_1}{1 + 2a\tau} \cdot Q_i^j - \frac{\gamma_1\gamma_2}{1 + 2a\tau} \cdot P_{i-1}^{j+1} \right]. \quad (16)$$

Объединяя явную (6), (7) и чисто неявную схему (11), (12) рассмотрим семейство схем, заданных на четырехточечном шаблоне

$$P_t^n + \frac{c^2}{F} (\sigma \cdot Q_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)Q_{\bar{x}}^n) = 0, \quad (17)$$

$$Q_t^n + \bar{F}(\sigma \cdot P_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)P_{\bar{x}}^n + 2aQ_i^{n+1}) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau \quad (18)$$

с начальными условиями

$$P(0, x_i) = P_0(x_i), \quad Q(0, x_i) = Q_0(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \quad (19)$$

и граничными условиями

$$P(t_j, 0) = P_0(t_j), \quad Q(t_j, 0) = Q_0(t_j), \quad t_j \in \omega_\tau, \quad (20)$$

$$P\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}}\right) = P\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}-1}\right) + P_{pl}, \quad (21)$$

$$Q\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}}\right) = Q\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}-1}\right) + Q_{pl}, \quad (22)$$

Схема (6), (7) и (11), (12) принадлежат этому семейству и соответствуют $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ соответственно.

Вычислим невязку для этой системы разностных уравнений

$$\psi_1 = P_t^n + \frac{c^2}{F} (\sigma \cdot Q_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)Q_{\bar{x}}^n), \quad (23)$$

$$\psi_2 = Q_t^n + \bar{F}(\sigma \cdot P_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)P_{\bar{x}}^n + 2aQ_x^{n+1}). \quad (24)$$

Используем разложение в ряд Тейлора

$$P(t_{n+1}, x_i) = P\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau}{2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau^2}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) +$$

$$+ \frac{\tau^3}{48} \cdot \left(\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau^4}{384} \cdot \left(\frac{\partial^4 P}{\partial t^4}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^5),$$

$$P(t_n, x_i) = P\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) - \frac{\tau}{2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau^2}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) -$$

$$- \frac{\tau^3}{48} \cdot \left(\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau^4}{384} \cdot \left(\frac{\partial^4 P}{\partial t^4}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^5).$$

Подставляя эти разложения в $\frac{(P_i^{n+1} - P_i^n)}{\tau}$ получим, что

$$P_t^n = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^2). \quad (25)$$

Аналогично

$$Q_t^n = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^2). \quad (26)$$

Разложим функций P и Q по переменной x :

$$Q_{i-1}^n = Q_i^n - h \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^3).$$

Теперь найдем разностную производную назад:

$$\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{h} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^2). \quad (27)$$

Аналогично имеем

$$\frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^n - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^2). \quad (28)$$

Подставляем (25) - (28) в (23) и (24), получим

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{c^2}{\bar{F}} \left\{ \sigma \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + \right. \\ & \left. + (1 - \sigma) \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] \right\} + O(\tau^2), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \bar{F} \left\{ \sigma \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + \right. \\ & \left. + (1 - \sigma) \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + 2aQ_i^{n+1} \right\} + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Для удобства дальнейших выкладок для невязок ψ_1, ψ_2 положим

$$\frac{c^2}{\bar{F}} = 1, \quad \bar{F} = 1. \quad (31)$$

Разложим в ряд Тейлора по t слагаемые $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1}, \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1}, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^n$ в окрестности точки $t = t_{n+\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^n = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2). \quad (35)$$

Тогда из (29) - (30) с учетом предположения (31) получим

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \sigma \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + \\ & + (1 - \sigma) \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^2) \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \sigma \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + \\ & + (1 - \sigma) \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^n + O(h^2) + 2aQ_i^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Из основных уравнений (1), (2) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= - \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= - \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2aQ_i^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в (37) и получим

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \sigma \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - (1 - \sigma) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \\ & - \frac{\sigma h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right)_i^n + O(\tau^2 + h^2), \\ \psi_2 = & \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \sigma \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - (1 - \sigma) \cdot \left[- \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2aQ_i^{n+\frac{1}{2}} \right] + \\ & + 0,5\tau \cdot (2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^n + \\ & + (1 - \sigma)2aQ_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что слагаемое содержащие $\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}}$ сокращаются и получается, что

$$\begin{aligned} \psi_1 = & 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\sigma h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \\ & - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right)_i^n + O(\tau^2 + h^2), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\sigma h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^n + \\ & + 2a(1 - \sigma) \cdot \left(Q_i^{n+1} - Q_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Далее разлагаем в ряд Тейлора по t в окрестности точки $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ вторые производные

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} &= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau), \\
 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n &= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau), \\
 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} &= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau), \\
 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^n &= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau).
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Предположим, что $Q_i^{n+1} = Q_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2)$.

С учетом (40) из (38) и (39) получим

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5h \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2), \\
 \psi_2 &= 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5h \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).
 \end{aligned}$$

Из системы уравнений (1), (2) имеем, что

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \psi_1 + \psi_2 &= 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5h \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &+ 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5h \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).
 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= -\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2a \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\
 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= -\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

получим, что

$$\begin{aligned}
 \psi &= \psi_1 + \psi_2 = 0,5\tau(2\sigma\tau - \tau + h) \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - ah \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &+ 0,5\tau(2\sigma\tau - \tau + h) \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что схема с весами имеет второй порядок аппроксимации

$$\psi = O(\tau^2 + h^2),$$

Если

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0 \quad (41)$$

а при $\sigma \neq \sigma_0$ - первый порядок, $\psi = O(\tau + h)$.

3. Устойчивость по начальным данным. Покажем теперь, что схема семейство схем с весами (23) - (29) устойчива по начальным данным при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau}.$$

Для доказательства используем метод энергетических неравенств.

$$u_t^n + \sigma v_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)v_{\bar{x}}^n = 0, \quad (42)$$

Можно рассмотреть сумму $w = u + v$

$$w_t^n + \sigma w_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)w_{\bar{x}}^n = 0. \quad (43)$$

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ вводим сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, N_x = 1\}$.

Скалярное произведение и норму определяем так:

$$(y, z] = \sum_{i=1}^N y_i \cdot z_i \cdot h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, z]}.$$

Учитывая, что

$$y^{n+1} = 0,5(y^{n+1} + y^n) + 0,5(y^{n+1} - y^n),$$

$$y^n = 0,5(y^{n+1} + y^n) - 0,5(y^{n+1} - y^n),$$

и полагая $y = w_{\bar{x}}$.

Перепишем схему (43) в следующем виде

$$w_t + \sigma(0,5(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n) + 0,5\tau \cdot w_{\bar{x}t}^n) + 0,5 \cdot (1 - \sigma)[(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n) - \tau w_{\bar{x}t}^n] = 0, \quad (44)$$

$$w_t^n + (\sigma - 0,5)\tau \cdot w_{\bar{x}t}^n + 0,5(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n) = 0.$$

Умножим это уравнение на $2\tau w_{\bar{x}t}^n = 2(w_{\bar{x}}^{n+1} - w_{\bar{x}}^n)$

$$2\tau w_t^n \cdot w_{\bar{x}t}^n + 2\tau^2(\sigma - 0,5)(w_{\bar{x}t}^n)^2 + (w_{\bar{x}}^{n+1})^2 - (w_{\bar{x}}^n)^2 = 0$$

первое слагаемое преобразуем так

$$2w_t^n \cdot w_{\bar{x}t}^n = (w_{\bar{x}t}^2) + h(w_{\bar{x}t}^n)^2.$$

Тогда

$$\tau \cdot (w_{\bar{x}t}^2) + h\tau(w_{\bar{x}t}^n)^2 + 2\tau^2(\sigma - 0,5)(w_{\bar{x}t}^n)^2 + (w_{\bar{x}}^{n+1})^2 - (w_{\bar{x}}^n)^2 = 0$$

если объединить второе и третье слагаемое, то получится

$$\tau \cdot (w_{\bar{x}t}^2) + 2\tau^2((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h)(w_{\bar{x}t}^n)^2 + (w_{\bar{x}}^{n+1})^2 - (w_{\bar{x}}^n)^2 = 0.$$

Умножаем на h и суммируем по всем узлам сетки $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$, получаем

$$\tau \sum_{i=1}^N (w_{\bar{x}t}^2)_{\bar{x},i} h + 2\tau^2((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h) \cdot \|w_{\bar{x}t}^n\|^2 + \|w_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 = \|w_{\bar{x}}^n\|^2$$

распишем в первом слагаемом разностную производную по x , тогда

$$\tau \sum_{i=1}^N [(w_t^n)_i^2 - (w_t^n)_{i-1}^2] + 2\tau((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h) \cdot \|w_{xt}^n\|^2 + \|w_x^{n+1}\|^2 = \|w_x^n\|^2.$$

Раскрываем сумму, сокращаем слагаемые и получим

$$\tau \sum_{i=1}^N [(w_t^n)_N^2 - (w_t^n)_0^2] + 2\tau((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h) \cdot \|w_{xt}^n\|^2 + \|w_x^{n+1}\|^2 = \|w_x^n\|^2.$$

здесь $w_{t,0}^n = w_t(t, 0) = 0$, т.к. $w_t(t, 0) \equiv 0$.

Окончательно получим тождество

$$\tau \cdot (w_t^n)_N^2 + 2\tau((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h) \cdot \|w_{xt}^n\|^2 + \|w_x^{n+1}\|^2 = \|w_x^n\|^2. \quad (45)$$

Из тождества (45) видно, что если

$$(\sigma - 0,5)\tau + 0,5h \geq 0,$$

то есть $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0$, тогда

$$\|w_x^{j+1}\| \leq \|w_x^j\| \leq \dots \leq \|w_x^0\|. \quad (46)$$

Это неравенство доказывает, что схема (43) устойчива по начальным данным в энергетической норме

$$\|w\|_{(1)} = \|w_x\|.$$

4. *Постановка обратной задачи.* Для формулировки обратной к (1) - (5) задаче, ставятся следующие дополнительные условия

$$P(T, x) = P^1(x), Q(T, x) = Q^1(x) \quad \text{при} \quad t = T \quad (47)$$

для давления и объемного расхода газа.

В обратной задаче надо найти $P^0(x)$ и $Q^0(x)$ из уравнении (1) - (2), условия (4) - (5) и дополнительным условиям (47).

5. *Постановка вариационной задачи.* Одним из достаточно распространенных методов решения обратных задач математической физики является сведение задачи (1), (2), (4), - (5), (47) к задаче оптимального управления.

Необходимо минимизировать целевой функционал:

$$J(P^0, Q^0) = \int_0^{2l} [P(T, x; P^0(x)) - P^1(x)]^2 dx + \int_0^{2l} [Q(T, x; Q^0) - Q^1(x)]^2 dx \rightarrow \min \quad (48)$$

Минимизируем функционал (48) градиентным итерационным методом

$$P_{n+1}^0 = P_n^0 - \alpha \cdot J'(P_n^0), \quad Q_{n+1}^0 = Q_n^0 - \alpha \cdot J'(Q_n^0). \quad (49)$$

где α - итерационный параметр, n - номер итерации.

Первая вариация целевого функционала (48)

$$\begin{aligned} \delta J(P^0, Q^0) &= J(P^0 + \delta P^0, Q^0 + \delta Q^0) - J(P^0, Q^0) = \\ &= \int_0^{2l} [P(T, x; P^0 + \delta P^0) - P^1(x)]^2 dx + \int_0^{2l} [Q(T, x; Q^0 + \delta Q^0) - Q^1(x)]^2 dx - \end{aligned}$$

$$-\int_0^{2l} [P(T, x; P^0) - P^1(x)]^2 dx - \int_0^{2l} [Q(T, x; Q^0) - Q^1(x)]^2 dx,$$

Так как

$$P(T, x; P^0 + \delta P^0) = P(T, x; P^0) + \delta P(T, x; \delta P^0),$$

$$Q(T, x; Q^0 + \delta Q^0) = Q(T, x; Q^0) + \delta Q(T, x; \delta Q^0),$$

имеем

$$\begin{aligned} \delta J(P^0, Q^0) &= \int_0^{2l} \delta P(T, x; \delta P^0) \cdot 2[P(T, x; P^0) - P^1(x)] dx + \\ &+ \int_0^{2l} \delta Q(T, x; \delta Q^0) \cdot 2[Q(T, x; Q^0) - Q^1(x)] dx. \end{aligned}$$

С другой стороны по определению производной Фреше

$$\delta J(P^0, Q^0) = \langle J'P^0, \delta P^0 \rangle + \langle J'Q^0, \delta Q^0 \rangle. \quad (50)$$

Введем обозначения

$$\tilde{Q} = Q(t, x; Q^0 + \delta Q^0) \quad \tilde{P} = P(t, x; P^0 + \delta P^0),$$

$$Q = Q(t, x; Q^0), \quad P = P(t, x; P^0), \quad \delta Q = \tilde{Q} - Q, \quad \delta P = \tilde{P} - P.$$

Рассмотрим возмущенную к (1) - (5) задачу

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} - 2a \cdot \tilde{Q}, \quad (52)$$

начальные условия

$$\tilde{P}(0, x) = P^0(x) + \delta P^0(x), \quad \tilde{Q}(0, x) = Q^0(x) + \delta Q^0(x) \quad (53)$$

и граничные условия

$$\tilde{P}(t, 0) = P_0(t), \quad \tilde{Q}(t, 0) = Q_0(t), \quad (54)$$

$$\tilde{P}(t, l+0) = \tilde{P}(t, l-0) + P_{pl}(t), \quad \tilde{Q}(t, l+0) = \tilde{Q}(t, l-0) + Q_{pl}(t), \quad (55)$$

Для получения задачи для возмущении $\delta P(T, x; \delta P^0)$ и $\delta Q(T, x; \delta Q^0)$ из задачи (51) - (55) вычтем задачу (1) - (5) в силу линейности уравнений имеем

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \delta Q}{\partial x}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial \delta Q}{\partial t} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial \delta P}{\partial x} - 2a \cdot \delta Q, \quad (57)$$

начальные условия примут вид

$$\delta P(0, x) = \delta P^0, \quad \delta Q(0, x) = \delta Q^0 \quad (58)$$

и граничные условия

$$\delta P(t, 0) = 0, \quad \delta Q(t, 0) = 0 \quad (59)$$

$$\delta P(t, l+0) = \delta P(t, l-0), \quad \delta Q(t, l+0) = \delta Q(t, l-0). \quad (60)$$

Умножаем (56) на пока еще неизвестную функцию $P^*(t, x)$, (57) на $Q^*(t, x)$ и интегрируем по t от 0 до T , по x от 0 до $2l$ и суммируем. В результате тождественно равно нулю выражение

$$(A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) = \\ = \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial \delta P}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \delta Q}{\partial x} \right] \cdot P^* dx dt + \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial \delta Q}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial \delta P}{\partial x} + 2a \cdot \delta Q \right] \cdot Q^* dx dt \equiv 0,$$

где

$$AP = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ BQ = \frac{\partial Q}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + 2aQ.$$

Интегрируем по частям это выражение

$$(A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) = \\ = \int_0^{2l} \left[\delta P \cdot P^* \Big|_0^T - \int_0^T \delta P \cdot \frac{\partial P^*}{\partial t} dt \right] dx + \frac{c^2}{\bar{F}} \int_0^T \left[\delta Q \cdot P^* \Big|_0^{2l} - \int_0^{2l} \delta Q \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} dx \right] dt + \\ + \int_0^{2l} \left[\delta Q \cdot Q^* \Big|_0^T - \int_0^T \delta Q \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial t} dt \right] dx + \bar{F} \int_0^T \left[\delta P \cdot Q^* \Big|_0^{2l} - \int_0^{2l} \delta P \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} dx \right] dt + \\ + 2a \int_0^T \int_0^{2l} \delta Q \cdot Q^* dt dx = - \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} \right] \delta P dx dt - \\ - \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot \delta Q^* \right] \delta Q dx dt + \\ + \int_0^{2l} [\delta P(T, x) \cdot P^*(T, x) - \delta P(0, x) \cdot P^*(0, x)] dx + \\ + \frac{c^2}{\bar{F}} \int_0^T [\delta Q \cdot P^* \Big|_0^l + \delta Q \cdot P^* \Big|_l^{2l}] dt + \int_0^{2l} [\delta Q(T, x) \cdot Q^*(T, x) - \delta Q(0, x) \cdot Q^*(0, x)] dx + \\ + \bar{F} \int_0^T [\delta P \cdot Q^* \Big|_0^l + \delta P \cdot Q^* \Big|_l^{2l}] dt. \\ (A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) = \\ = - \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} \right] \delta P dx dt - \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot Q^* \right] \delta Q dx dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{2l} [\delta P(T, x) \cdot P^*(T, x) - \delta P^0 \cdot P^*(0, x)] dx + \\
 & + \frac{c^2}{F} \int_0^T [\delta Q(t, l-0) \cdot P^*(t, l-0) - \delta Q(t, 0) \cdot P^*(t, 0) + \\
 & + \delta Q(t, 2l) \cdot P^*(t, 2l) - \delta Q(t, l+0) \cdot P^*(t, l+0)] dt + \\
 & + \int_0^{2l} [\delta Q(T, x) \cdot Q^*(T, x) - \delta Q^0 \cdot Q^*(0, x)] dx + \\
 & + \bar{F} \int_0^T [\delta P(t, l-0) \cdot Q^*(t, l-0) - \delta P(t, 0) \cdot Q^*(t, 0) + \\
 & + \delta P(t, 2l) \cdot Q^*(t, 2l) - \delta P(t, l+0) \cdot Q^*(t, l+0)] dt.
 \end{aligned} \tag{61}$$

В последнем выражении (61) члены вне двойного интеграла с множителями $\delta P(t, 0)$ и $\delta Q(t, 0)$ равны нулю, согласно условиям (59). В силу выполнения условия согласования (60) и требуемого дополнительного условия при $x = l$ (в забое)

$$P^*(t, l-0) = P^*(t, l+0), \quad Q^*(t, l-0) = Q^*(t, l+0) \tag{62}$$

получается, что

$$\delta Q(t, l-0) \cdot P^*(t, l-0) = \delta Q(t, l+0) \cdot P^*(t, l+0), \tag{63}$$

$$\delta P(t, l-0) \cdot Q^*(t, l-0) = \delta P(t, l+0) \cdot Q^*(t, l+0). \tag{64}$$

Из физических соображений, считаем что в устье скважины возмущения давления $\delta P(t, 2l)$ и объемного расхода газа $\delta Q(t, 2l)$ пренебрежимо малы.

Теперь остались слагаемые содержащиеся под интегралом по x .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2l} \delta P(T, x) \cdot P^*(T, x) dx + \int_0^{2l} \delta Q(T, x) \cdot Q^*(T, x) dx - \\
 & - \int_0^{2l} \delta P^0 \cdot P^*(0, x) dx + \int_0^{2l} \delta Q^0 \cdot Q^*(0, x) dx = 0.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения операторов

$$A^*P^* = \frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x}, \tag{65}$$

$$B^*Q^* = \frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{F} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot Q^*.$$

Выполнения этого равенства приводит к следующей лемме.

Лемма 1 Пусть $P^0, P + \delta P^0 \in P_{ad}, Q^0, Q^0 + \delta Q^0 \in Q_{ad}$ элементы принадлежащие области возможных решений. Если $P(t, x; P^0(x)), Q(t, x; Q^0(x))$ решение задачи (1) - (5) и выполняется интегральное тождество Лагранжа

$$(AP, P^*) + (BQ, Q^*) = (P, A^*P^*) + (Q, B^*Q^*)$$

то имеет место

$$\begin{aligned} & \int_0^{2l} \delta P(T, x) \cdot P^*(T, x) dx + \int_0^{2l} \delta Q(T, x) \cdot Q^*(T, x) dx = \\ & = \int_0^{2l} \delta P^0 \cdot P^*(0, x) dx + \int_0^{2l} \delta Q^0 \cdot Q^*(0, x) dx. \end{aligned} \quad (66)$$

Условие (66) с учетом граничных условия (58), первой вариации функционала $\delta J(P^0, Q^0)$ и по определению производной Фреше (50) примет вид

$$\begin{aligned} & \langle \delta P(T, x), 2[P(T, x; P^0) - P^1(x)] \rangle + \\ & + \langle \delta Q(T, x), 2[Q(T, x; Q^0) - Q^1(x)] \rangle = \\ & = \langle J'P^0, \delta P^0 \rangle + \langle J'Q^0, \delta Q^0 \rangle. \end{aligned} \quad (67)$$

Эти условия вытекают из требований выполнения тождества Лагранжа.

6. *Постановка сопряженной задачи.* Выполнения тождества Лагранжа, требования равенства нулю всех внеинтегральных членов и условий Леммы 1 приводят к следующей сопряженной задаче

$$\frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} = 0, \quad (68)$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot Q^* = 0, \quad (69)$$

$$P^*(t, 0) = 0, Q^*(t, 0) = 0, \quad (70)$$

$$P^*(T, x) = 2[P(T, x; P^0) - P^1], \quad (71)$$

$$Q^*(T, x) = 2[Q(T, x; Q^0) - Q^1].$$

7. *Алгоритм решения вариационной задачи*

1. Задаем начальное приближение P^0, Q^0 .

2. Предположим, что P_n^0, Q_n^0 уже известно, тогда решаем прямую задачу:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad t \geq 0, x \in (0, 2l), \\ & \frac{\partial Q}{\partial t} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - 2a \cdot Q, \quad t \geq 0, x \in (0, 2l), \\ & P(0, x) = P^0(x), \quad Q(0, x) = Q^0(x), \\ & P(t, 0) = P_0(t), \quad P(t, l) = P_l(t), \\ & Q(t, 0) = Q_0(t), \quad Q(t, l) = Q_l(t), \end{aligned} \quad (72)$$

$$P(t, l+0) = P_0(t, l-0) + P_{pl}(t), Q(t, l+0) = Q_0(t, l-0) + Q_{pl}(t).$$

3. Вычисляем приближенное значение функционала используя квадратурную формулу

$$J(P_n^0, Q_n^0) = \int_0^{2l} [P(T, x; P_n^0) - P^1(x)]^2 dx +$$

$$+ \int_0^{2l} [P(T, x; Q_n^0) - Q^1(x)]^2 dx \quad (73)$$

4. Если текущее значение нормы функционала $J(P_n^0, Q_n^0)$ – недостаточно мало, то решаем сопряженную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} + 2a \cdot Q^* &= 0, \\ P^*(t, 0) = 0, Q^*(t, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (74)$$

$$P^*(T, x) = 2[P(T, x; P^0) - P^1],$$

$$Q^*(T, x) = 2[Q(T, x; Q^0) - Q^1].$$

5. Из решения P^*, Q^* сопряженной задачи (74) по P и Q определяем градиент функционала

$$\begin{cases} J'(P_n) = -P^*(0, x), \\ J'(Q_n) = -Q^*(0, x). \end{cases} \quad (75)$$

6. Следующие приближения начальных условий для $P(0, x)$ и $Q(0, x)$ находятся по формулам

$$P_{n+1}^0(x) = P_n^0(x) - \alpha \cdot J'(P_n), \quad (76)$$

$$Q_{n+1}^0(x) = Q_n^0(x) - \alpha \cdot J'(Q_n),$$

7. Переходим к пункту 2.

8. Численная реализация алгоритма решения вариационной задачи.

8.1 Разностная схема решения прямой задачи. Аппроксимируем прямую задачу (1) – (5).

Пусть N_t – количество узлов равномерной сетки на интервале $[0, T]$, а N_x – количество узлов равномерной сетки на интервале $[0, 2l]$. Построим в области $\Omega = ((0, 2l) \times (0, T))$ сетку ω_h с шагом $h = \frac{2l}{N_x}$, $\tau = \frac{T}{N_t}$, где N_x, N_t – положительные целые числа.

Тогда в сетке $\omega_h = \{x = ih, t = k\tau, i = 0, 1, \dots, N_x, k = 0, 1, \dots, N_t\}$ запишем соответствующую разностную прямую задачу. Таким образом задача (1) – (5) имеет следующий вид:

$$\frac{P_i^{k+1} - P_i^k}{\tau} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{h}, \quad (77)$$

$$\frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\tau} = -\bar{F} \cdot \frac{P_i^k - P_{i-1}^k}{h} - 2a \cdot Q_i^{k+1}, \quad (78)$$

$$i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = 0, 1, \dots, N_t,$$

начальные условия

$$P_i^0 = P^0(x_i), \quad Q_i^0 = Q^0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad (79)$$

и граничные условия соответственно

$$P_0^k = P_0, \quad Q_0^k = Q_0, \quad k = 0, 1, \dots, N_t, \quad (80)$$

$$P_{\frac{N_x}{2}}^k = P_{\frac{N_x}{2}-1}^k + P_{pl}, \quad Q_{\frac{N_x}{2}}^k = Q_{\frac{N_x}{2}-1}^k + Q_{pl}, \quad k = 0, 1, \dots, N_t. \quad (81)$$

8.2 Разностная схема решения сопряженной задачи. В той же сеточной области запишем соответствующую разностную сопряженную задачу. Таким образом, разностный аналог задачи (68) – (71) имеет следующий вид:

$$\frac{P_i^{*k+1} - P_i^{*k}}{\tau} + \bar{F}_i \frac{Q_i^{*k+1} - Q_{i-1}^{*k+1}}{h} = 0, \quad (82)$$

$$\frac{Q_i^{*k+1} - Q_i^{*k}}{\tau} + \frac{c_i^2}{\bar{F}_i} \cdot \frac{P_i^{*k+1} - P_{i-1}^{*k+1}}{h} + 2a \cdot Q_i^{*k+1} = 0, \quad (83)$$

$$i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = N_t, \dots, 1, 0,$$

$$P_0^{*k} = 0, \quad Q_0^{*k} = 0, \quad k = N_t, N_t - 1, \dots, 0, \quad (84)$$

$$P_i^{*N_t} = 2 \cdot [P_i^{N_t} - P^{(1)}], \quad Q_i^{*N_t} = 2 \cdot [Q_i^{N_t} - Q^{(1)}], \quad i = 0, 1, \dots, N_x - 1 \quad (85)$$

Результаты исследования

Численные по разработанному выше алгоритму проводились с исходными данными из работы [1]. Объемный расход закачиваемого газа был выбран равным $Q^0 = 0.21 \text{ м}^3/\text{с}$, а начальное давление $P^0 = 5177500 \text{ Па}$, глубина скважины $l = 1485 \text{ м}$, скорость звука в кольцевом пространстве $c_1 = 331 \text{ м/с}$, скорость звука в добывающей скважине $c_2 = 850 \text{ м/с}$. Площадь поперечного сечения кольцевого пространства скважины $F_1 = \pi r_1^2 \text{ м}^2$, площадь поперечного сечения внутренней скважины $F_2 = \pi r_2^2 \text{ м}^2$, $r_1 = 0.06765 \text{ м}$, $r_2 = 0.0365 \text{ м}$. Гидравлическое сопротивление в кольце $\lambda_1 = 0.01$, гидравлическое сопротивление в скважине $\lambda_2 = 0.23$. Плотность газа $\rho_1 = 0.75 \text{ кг/м}^3$, плотность нефти $\rho_2 = 700 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

Осредненная по сечению скорость движения смеси в кольце $w_1 = \frac{Q_0(x)}{F_1 \rho_1} \text{ м/с}$, осредненная по сечению скорость движения в скважине $w_2 = \frac{Q_0(x)}{F_2 \rho_2} \text{ м/с}$.

Особенностью решаемой задачи является то, что коэффициенты $c(x)$, $\bar{F}(x)$, $a(x)$ имеют разрывы в точке $x = l$ и значения большие числа. Поэтому в расчетах начальное давление и начальный объем закачиваемого газа задавались в виде линейной функций

$$Q_i^0 = Q^0 + 0.5 \cdot (Q_{\text{вых}} - Q^0) \cdot x_i / l,$$

$$P_i^0 = P^0 + 0.5 \cdot (P_{\text{вых}} - P^0) \cdot x_i / l.$$

где $Q_{\text{вых}}$, $P_{\text{вых}}$ - значения выходного объема смеси и давления.

Коэффициенты $c(x_i)$, $\bar{F}(x_i)$, $a(x_i)$ имеют большой разброс значений, поэтому для обеспечения устойчивого расчета были нормированы следующим образом

$$a(x_i) = 0.5 \cdot (a(x_i) + a(x_{N_x}) - 2 \cdot a(x_0)) / (a(x_{N_x}) - a(x_0))$$

где

$$a(x_i) = \begin{cases} \frac{g}{2w_1} + \frac{\lambda_1 w_1}{4d_1}, & i = 0, 1, \dots, N_x/2, \\ \frac{g}{2w_2} + \frac{\lambda_2 w_2}{4d_2}, & i = N_x/2 + 1, \dots, N_x. \end{cases}$$

Графики функций $a(x)$, $c(x)$, $\bar{F}(x)$, приведены на рисунке 1.

Используя разработанный алгоритм проведены численные расчеты в широком диапазоне входных параметров. Использовались разностные схемы на сетках размером 50×50 , 100×100 . Итерационный параметр $\alpha = 0.009$.

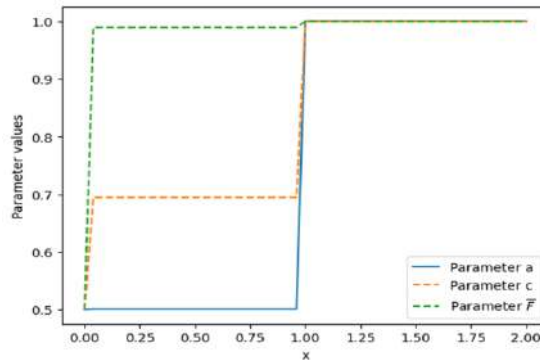


Рисунок 1. Графики функций a , c , и \bar{F}

Дополнительные условия для $P^1(x)$, $Q^1(x)$ задавались в виде параболических функции

$$Q^1(T, x) = -x^2 + b_q \cdot x + c_q,$$

$$P^1(T, x) = -x^2 + b_p \cdot x + c_p,$$

где $c_q = Q^0$, $c_p = P^0$, $b_q = \frac{Q_{\text{ВЫХ}} - Q^0 + 4l^2}{2l}$, $b_p = \frac{P_{\text{ВЫХ}} - P^0 + 4l^2}{2l}$.

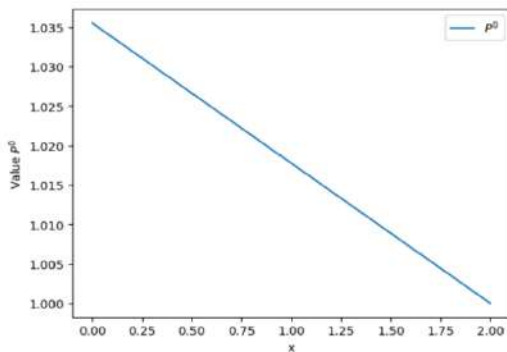


Рисунок 2. График функций $P^0(x)$

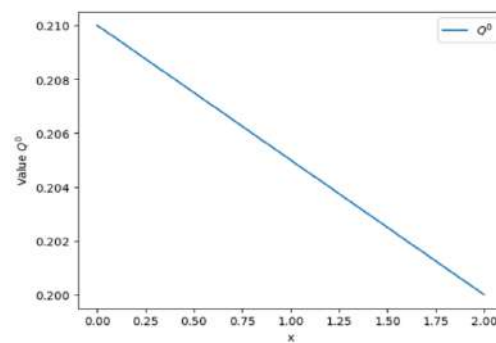


Рисунок 3. График функций $Q^0(x)$

На рисунках 2, 3 приведены графики функции $P^0(x)$, $Q^0(x)$. Это начальные данные в процессе итерации они будут изменяться в зависимости от дополнительных условий $P^1(x)$, $Q^1(x)$. Графики $P^1(x)$, $Q^1(x)$ приведены на рисунках 4, 5.

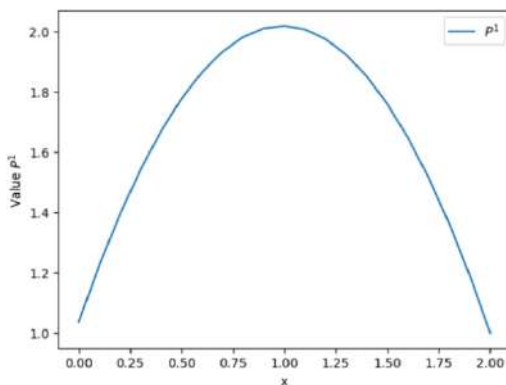


Рисунок 4. График функций $P^1(x)$

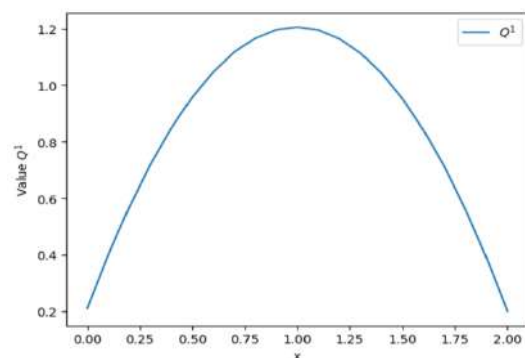


Рисунок 5. График функций $Q^1(x)$

В проведенном итерационном процессе значение функционала J монотонно убывает и достигает значения $\|J\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = 0.001$ при $n = 164$ итерации. График убывания значения функционала показано на рисунке 6.

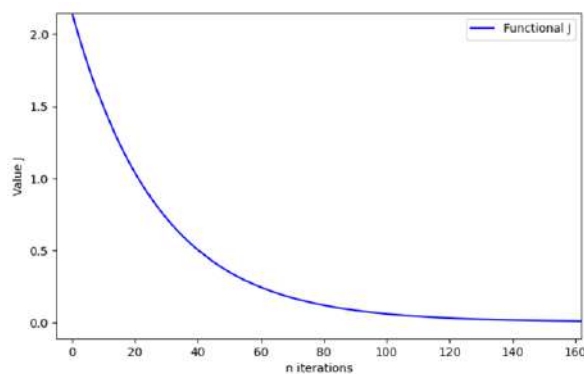


Рисунок 6. График убывание функционала J

Численные расчеты показывают что используемый итерационный процесс для нахождения значения давления P_n^0 и объемного расхода газа Q_n^0 при $t = 0$ сходится. Численные значения нормы функционала J монотонно убывают и ограничены, по этому вычисленные значения P_n^0 и Q_n^0 стремятся к параболической функции (рисунок 7, 8). Это правдоподобно, так как заданные нами дополнительные условия $P^1(x)$, $Q^1(x)$ являются параболическими функциями.

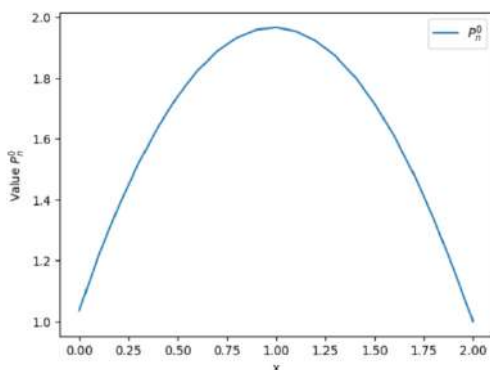


Рисунок 7. График P_n^0

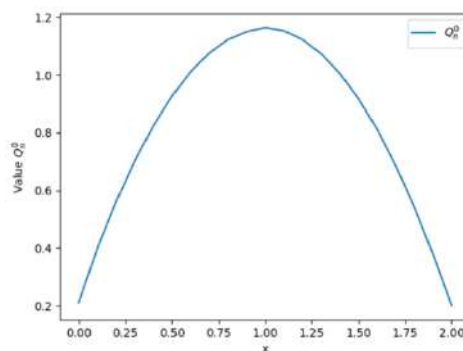


Рисунок 8. График Q_n^0

Известно что сопряженная задача носит с собой ценную информацию о решении прямой задачи. Это свойство подтверждается численными расчетами, так как градиенты функционала для определения начальных условий прямой задачи на каждой итерации выбирались как решение сопряженной задачи при $t = 0$, т. е.

$$J'(P_n^0) = P^*(0, x), \quad J'(Q_n^0) = Q^*(0, x).$$

Проведенные численные расчеты подтверждают эффективность предложенного алгоритма для моделирования газлифтного процесса добычи нефти.

Дискуссия

В результате проведенного исследования:

1. Разработан численный алгоритм решения прямой и обратной задачи газлифтного процесса, основанный на вариационной постановке и методе сопряженных уравнений. Алгоритм реализован с использованием конечно-разностных схем и градиентного метода минимизации функционала.

2. Построены разностные схемы (явная, неявная и с весами) для прямой задачи, проведен их анализ на аппроксимацию и устойчивость. Показано, что схема с весами обладает вторым порядком точности при выполнении условия $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau}$.

3. Сформулирована сопряженная задача и доказано, что её решение содержит градиент целевого функционала. Это позволяет применять эффективные итерационные методы

оптимизации для восстановления начальных данных по измерениям в финальный момент времени.

4. Разработан численный алгоритм восстановления начального давления и объемного расхода газа с помощью итерационного градиентного метода. На каждом шаге градиент функционала вычисляется как решение сопряжённой задачи, что подтверждает корректность применения тождества Лагранжа и интегральных условий.

5. Проведены численные эксперименты, подтверждающие сходимость предложенного метода. Для заданных параболических дополнительных условий $P^1(x)$, $Q^1(x)$, решение обратной задачи сходится к аналогичным по форме начальным условиям $P^0(x)$, $Q^0(x)$, что говорит о корректности восстановления.

6. Получен график убывания функционала, демонстрирующий устойчивую и монотонную сходимость итерационного метода. За 164 итерации достигнуто значение невязки $\|J\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = 0$, что свидетельствует о высокой точности восстановления начальных параметров.

7. Показано, что сопряжённая задача несёт ключевую информацию о решении прямой задачи и может быть эффективно использована для управления газлифтным процессом.

Научная новизна исследования заключается в:

- применении ретроспективной сопряжённой задачи для восстановления недоступных начальных параметров газлифтного процесса;
- построении схем с гарантированной устойчивостью и доказанной аппроксимацией второго порядка;
- объединении методов математической физики и оптимального управления в контексте моделирования добычи нефти.

Практическая значимость разработанного алгоритма заключается в возможности:

- численного восстановления забойного давления и расхода газа на начальном этапе;
- применения к инженерным задачам построения кривых производительности скважины;
- внедрения в программные комплексы оптимального управления газлифтной добычей.

Заключение

В данной работе рассмотрен численный метод к моделированию газлифтного процесса добычи нефти на основе одномерной нестационарной модели Навье–Стокса для сжимаемого газа. Основной акцент сделан на решение обратной задачи определения начального давления и расхода газа с использованием метода сопряжённых уравнений. Предложенный численный алгоритм включает в себя построение прямой задачи, формулировку сопряжённой ретроспективной задачи и применение градиентного метода для минимизации целевого функционала. Сформулированы и проанализированы разностные схемы, проведено исследование аппроксимации и устойчивости. Разработанный метод продемонстрировал устойчивую и точную сходимость к заданным данным, что подтверждено численным экспериментом. На практике данный подход позволяет восстанавливать параметры, недоступные для прямого измерения, и использовать его для построения кривых производительности газлифтной скважины. Полученные результаты имеют как теоретическую, так и прикладную значимость и могут быть использованы при построении цифровых двойников и управлении режимами эксплуатации нефтяных скважин.

Благодарность

Данное исследование было профинансировано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ПЦФ BR27100483 “Разработка прогнозно-поисковых технологий выделения рудоперспективных территории на основе анализа данных единой платформы недропользователей “Minerals.gov.kz” с применением искусственного интеллекта и методов дистанционного зондирования Земли”)

Список использованных источников

- [1] Aliev F.A., Mutalimov M.M. (2009) *Algorithm dlya resheniya zadachi postroeniya traektoriy i upravleniya pri dobyche nefi gazliftnym [Algorithm for solving the problem of trajectory construction and control in oil production by gas lift]*. Doklad NAN Azerb., No. 4. (in Russian)
- [2] Mohammad Reza Mehregan¹, Ali Mohaghar² “Abbas Esmaeili³ Developing a mathematical model for optimizing oil production Using Gas-Lift Technology”. Year: 2016, Volume: 9, Issue: 5, Pages: 1-9. <http://dx.doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i5/74370>
- [3] Sun-Young Jung and Jong-Se Lim (2016) *Optimization of gas lift allocation for improved oil production under facilities constraints*, *Geosystem Engineering*, 19:1, 39-47, DOI: 10.1080/12269328.2015.1084895
- [4] Deni Saepudin, Edy Soewono, Kuntjoro Adji Sidarto, Agus Yodi Gunawan, Septoratio Siregar, Pudjo Sukarno. *An Investigation on Gas Lift Performance Curve in an Oil-Producing Well*. Hindawi Publishing Corporation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Volume 2007, Article ID 81519, 15 pages. <https://doi.org/10.1155/2007/81519>
- [5] N. Nishikiori, “Gas allocation optimization for cotinous flow gas lift systems”, M.S. thesis, University of Tulsa, Tulsa, Okla, USA, 1989
- [6] K.E. Brown, *The Technology of Artificial Lift Methods*, Vol.4, Pennwell Books, Tulsa, Okla, USA, 1984
- [7] G.A. Alarcon, C.F. Torres, and Luis E. Gomez, *Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming*, *Journal of Energy Resources Technology, Transactionsof theASME*, Vol 124, no.4, pp. 262-268, 2002. <https://doi.org/10.1115/1.1488172>
- [8] P. Sukarno, K.A. Sidarto, S. Dewi, et al., “New Approach on Gas Lift Wells Optimization with Limited Awaiting Available Gas Injected”, *Prosiding IATMI 20036-09, Jakarta, Indonesia*, 2006.
- [9] S. Guet and G. Oams, “Fluid mechanical aspects of the gas-lift technique”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 38, pp. 225-249, 2006
- [10] S. Guet, G. Oams, and R. V. A. Oliemans, “Simplified two-fluid model for gas-lift efficiency predictions”, *AIChE Journal*, Vol. 51, no. 7, pp. 1885-1896, 2005
- [11] Lions, J.L. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer, Berlin, 1971.
- [12] Lions, J.L.; Magenes, E. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. II, Springer, Berlin, 1972.
- [13] Agoshkov, V.I. *Optimal Control Methods and the Method of Conjugate Equations in Problems of Mathematical Physics*. Moscow: Institute of Higher Mathematics RAS, 2003, 256 p.
- [14] Il'in, V.A.; Moiseev, E.I. *Optimization of boundary controls by displacements at two ends of a string during an arbitrary sufficiently large time interval*. *Doklady Mathematics*, 2007, Vol. 76, No. 3, pp. 828–834.
- [15] Marchuk, G.I. *Conjugate Equations and Their Applications*. *Proceedings of the IMM URO RAS*, 2006, Vol. 12, No. 1, pp. 184–195.
- [16] Temirbekov A.N.; Temirbekova L.N.; Zhumagulov B.T. *Fictitious domain method with the idea of conjugate optimization for non-linear Navier-Stokes equations*. *Applied and Computational Mathematics*. 2023, V22, Issue 2.-P.172–188. <https://doi.org/10.30546/1683-6154.22.2.2023.172>
- [17] Arguchintsev, A.V.; Poplevko, V.P. *An optimal control problem by hyperbolic system with boundary delay*. *Bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*, 2021, 35, pp. 3–17. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.35.3.
- [18] Arguchintsev, A.V.; Krutikova, O.A. *Optimization of semilinear hyperbolic systems with smooth boundary controls*. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ)*, 2021, 45(2), pp. 1–9. DOI: 10.1134/S0016266321020010.
- [19] Shishlenin, M.; Kozelkov, A.; Novikov, N. *Nonlinear medical ultrasound tomography: 3D modeling of sound wave propagation in human tissues*. *Mathematics*, 2024, Vol. 12, No. 2, pp. 212. DOI: 10.3390/math12020212.
- [20] Klyuchinskiy, D.; Novikov, N.; Shishlenin, M. *Recovering density and speed of sound coefficients in the 2D hyperbolic system of acoustic equations of the first order by a finite number of observations*. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 2, pp. 199–211. DOI: 10.3390/math9020199.
- [21] Temirbekov N., Temirbekova L., Nurmangaliyeva M. *Numerical solution of the first kind of Fredholm integral equations by projection methods with wavelets as the basis functions*. *TWMS J. Pure Appl. Math.*, V.13, N.1, 2022, pp. 105-118. <https://twmsj.az/Files/V.13%20N.1%202022/105-118.pdf>

ИНФОРМАТИКА COMPUTER SCIENCE

ГТАХР 20.19.21

10.51889/2959-5894.2025.90.2.014

С.А. Адилжанова¹, А.Е. Рахыш^{1*}, Г.А. Абдулкаримова², Ф.Р. Гусманова¹

¹әл Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: rakhysh_aigerim3@live.kaznu.kz

АСА МАҢЫЗДЫ МЕМЛЕКЕТТІК ИНФРАҚҰРЫЛЫМНЫҢ КИБЕРҚАУІПСІЗДІГІН БАҒАЛАУ ӘДІСТЕРІ

Аңдатпа

Цифрландыру мен технологияларды интеграциялауды арттыру жағдайында мемлекеттік маңызды инфрақұрылымды киберқауіптерден қорғау басты міндетке айналды. Мұндай нысандарға жасалған кибершабуылдар экономикаға, ұлттық қауіпсіздікке және азаматтардың әл-ауқатына елеулі зиян келтіруі мүмкін. Бұл мақалада мемлекеттік маңызды инфрақұрылымның киберқауіпсіздігін бағалаудың заманауи әдістері, соның ішінде тәуекелдерді талдауға, қауіптерді модельдеуге, Байес желілерін пайдалануға, сценарийлік талдауға және гибридік әдістерге негізделген дәстүрлі және инновациялық тәсілдер қарастырылады. Осы тақырып бойынша соңғы бесжылдықтағы ғылыми зерттеулерге шолу жүргізіліп, негізгі тенденциялар мен қолданыстағы тәсілдердің шектеулері анықталды. Өртүрлі салалар үшін бағалау әдістерін бейімдеу және киберқауіпсіздікті қауіпсіздіктің дәстүрлі тәсілдерімен біріктіру мәселесіне ерекше назар аударылады. Мақала киберқауіпсіздікті бағалаудың жаңа әдістерін әзірлеумен, жетілдірумен айналысатын киберқауіпсіздік мамандары мен зерттеушілерге арналған.

Түйін сөздер: киберқауіпсіздікті бағалау әдістері, аса маңызды мемлекеттік инфрақұрылым, тәуекелдерді бағалау, киберқауіпсіздік, бағалау өлшемдері.

С.А.Адилжанова¹, А.Е.Рахыш¹, Г.А.Абдулкаримова², Ф.Р.Гусманова¹

¹Казахский Национальный университет имени аль Фараби, г.Алматы, Казахстан

²Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КИБЕРБЕЗОПАСНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

Аннотация

В условиях растущей цифровизации и интеграции технологий защита критически критической государственной инфраструктуры от киберугроз становится ключевой задачей. Кибератаки на такие объекты могут нанести значительный ущерб экономике, национальной безопасности и благополучию граждан. В статье рассматриваются современные методы оценки кибербезопасности государственной критической инфраструктуры, включая традиционные и инновационные подходы, основанные на анализе рисков, моделировании угроз, использовании байесовских сетей, анализе сценариев и гибридных методах. Был проведен обзор научных исследований за последние пять лет по данной теме, выявивший основные тенденции и ограничения существующих подходов. Особое внимание уделено вопросу адаптации методов оценки для различных отраслей и интеграции кибербезопасности с традиционными подходами к обеспечению безопасности. Статья предназначена для специалистов по кибербезопасности и исследователей, занимающихся разработкой новых методов оценки кибербезопасности.

Ключевые слова: методы оценки кибербезопасности, критическая государственная инфраструктура, оценка рисков, кибербезопасность, критерии безопасности.

S.A.Adilzhanova¹, A.E.Rakhysh¹, G.A.Abdulkarimova², F.R.Gusmanova¹

¹al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

METHODS FOR ASSESSING THE CYBERSECURITY OF CRITICAL STATE INFRASTRUCTURE

Abstract

In the context of increasing digitization and integration of technologies, protecting critical infrastructure from cyber threats is becoming a priority. Cyberattacks on such facilities can cause significant damage to the economy, national security, and the well-being of citizens. This article reviews modern methods for assessing the cybersecurity of critical infrastructure, including traditional and innovative approaches based on risk analysis, threat modeling, the use of Bayesian networks, scenario analysis, and hybrid methods. A review of scientific studies on this topic over the last five years are conducted, and the main trends and limitations of existing approaches are identified. Special attention is paid to the issue of adapting assessment methods for various industries and integrating cybersecurity with traditional security approaches. The article is intended for cybersecurity specialists and researchers involved in the development of new methods for assessing cybersecurity.

Keywords: cybersecurity assessment methods, critical infrastructure, risk assessment, cybersecurity, assessment criteria.

Негізгі ережелер

Аса маңызды мемлекеттік инфрақұрылымды қорғау ХХІ ғасырдағы басты міндеттердің бірі болып табылады, себебі технологиялардың дамуы киберқауіптер мен кибершабуылдарды арттырды. Киберқауіпсіздіктің маңызы артқан сайын оны бағалайтын өлшемдер мен әдістерді анықтау қажеттілігі туындайды. Киберқауіпсіздікті бағалау әдістері тәуекелдерді талдау, қауіптерді модельдеу, Байес желілерін қолдану, сценарийлік талдау және гибридік тәсілдер сияқты дәстүрлі және инновациялық әдістерді қамтиды. Зерттеулер негізінде бағалау әдістерінің тиімділігі мен шектеулері анықталды, олардың әртүрлі салаларға бейімделу қажеттілігі көрсетілді. Киберқауіпсіздікті жалпы қауіпсіздік саясаттарымен біріктіру маңызды болып саналады, өйткені бұл кешенді тәсілдер кибершабуылдарға қарсы тиімді қорғаныс жасауға мүмкіндік береді.

Кіріспе

Цифрландыру мен технологияларды интеграциялаудың өсіп келе жатқан заманауи жағдайында мемлекеттік маңызды инфрақұрылымды (ММИ) қорғау өзекті міндеттердің бірі болып қала береді. Мемлекеттік маңызды инфрақұрылымдарға жасалатын кибершабуылдар экономикаға, қауіпсіздікке және азаматтардың әл-ауқатына елеулі зиян келтіруі мүмкін. Қарқынды дамып келе жатқан қауіптер, соның ішінде кибершабуылдар мен осалдықтарды анықтап қана қоймай, киберқауіпсіздіктің тұрақтылығын арттыратын сенімді бағалау әдістерін талап етеді [1]. Соңғы жылдары қауіпсіздік саласында киберқауіпсіздік мәселелері мен дәстүрлі сенімділікті бағалаудың конвергенциясы байқалды, сондай ақ бұл зерттеулермен де расталуда. Бағалаудың заманауи әдістерінде нормативтік құжаттарға негізделген классикалық тәсілдерден жасанды интеллект пен үлкен деректерді пайдаланатын инновациялық әдістерге дейін бар. Дегенмен, бар әртүрлілікке қарамастан, нақты контекстте әдістерді таңдау, бейімдеу және қолданумен байланысты мәселелер ғылыми және қолданбалы ортада қалады. Мысалы, кейбір салалар үшін әзірленген бірқатар әдістер басқа салаларда қолдану үшін өзгертуді қажет етеді. Бұл жұмыстың мақсаты – мемлекеттік маңызды инфрақұрылымның киберқауіпсіздігін бағалау үшін қолданылатын заманауи әдістерді,

олардың мүмкіндіктерін, шектеулерін және болашақ даму бағыттарын зерттеу. Негізгі міндеттерге мыналар жатады:

- қолданыстағы киберқауіпсіздікті бағалау әдістерін жіктеу;
- киберқауіпсіздікті бағалау өлшемдерін анықтау;
- алдағы зерттеулерде жасанды интеллект мүмкіндігін қолдану.

Бұл шолу қолданыстағы тәсілдерді жүйелейді және қолданылатын әдістерді әзірлеуге мүдделі зерттеушілер мен ғалымдарға аналитикалық негіз ұсынады.

Зерттеу әдіснамасы

Дәстүрлі қауіпсіздікті бағалау тәсілдері киберқауіпсіздікке аса назар аудармаған. Оны жеке салаларға қалдырумен келген немесе іске асыру қиын болатын жалпы киберқауіпсіздік тәсілдері мен нұсқаулықтарға сілтеме келтірген.

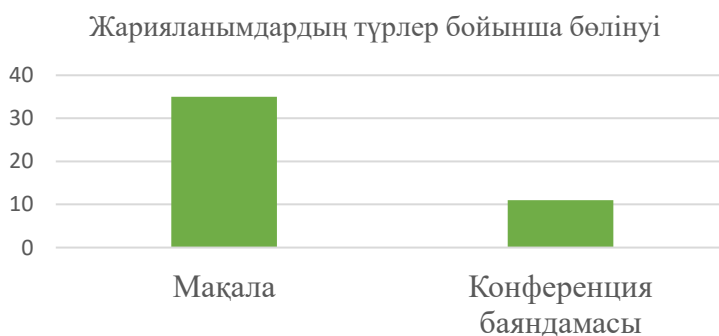
Жоғарыда аталған мәселелерді шешу үшін дәстүрлі қауіпсіздікті бағалау тәсілдері әртүрлі тәсілдермен алмастырылды, бұл киберқауіпсіздікке қатысты қауіптерді ескеруге және бағалауды неғұрлым жан-жақты етуге мүмкіндік берді. Мұндай өзгерістерге келесілерді жатқызамыз:

– бағалау әдістері жүйе қауіпсіздігіне киберқауіптер мен осалдықтардың әсерін анықтайды, мұндай әдіске мысал ретінде киберқауіпті талдау және тәуекелдерді бағалау (Hazard Analysis and Risk Assessment (HARA)) әдісін жатқызсақ болады.

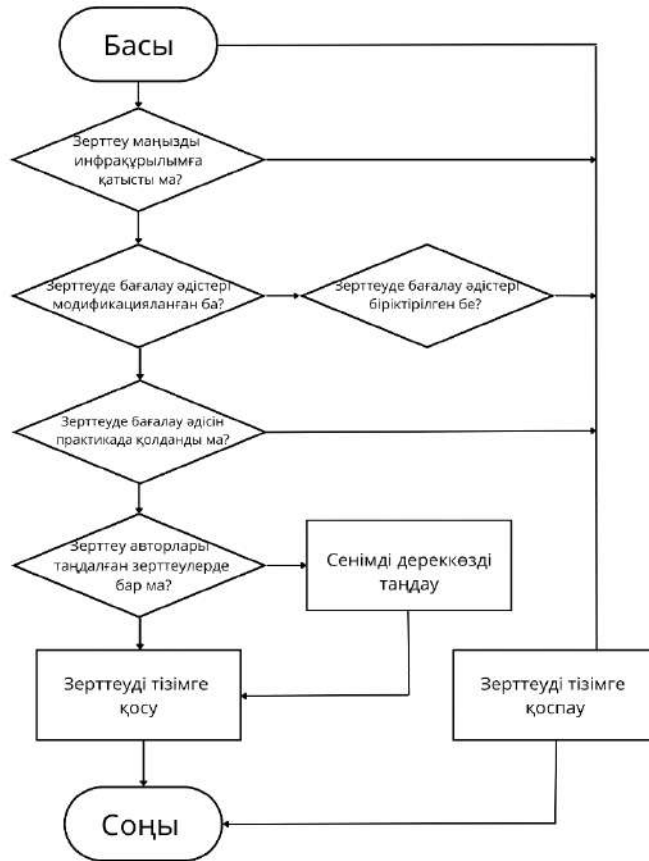
– қауіпсіздікті бағалау әдістерін киберқауіпсіздік саласына бейімдеу; мұндай тәсілдің мысалы ретінде ену режимдерін, олардың салдарын және сыни маңыздылығын талдау (Intrusion Modes, Effects, and Criticality Analysis (IMECA)), сондай-ақ дәстүрлі тәсіл (Failure Modes, Effects, and Criticality Analysis (FMECA)) басып кірулерді талдау үшін қолданылады;

– қауіпсіздік пен киберқауіпсіздікті бағалаудың бірнеше әдістерін комбинациялау [2].

2019-2024 жылға дейін «аса маңызды инфрақұрылымның киберқауіпсіздігін бағалау» тақырыбында өте көп ғылыми мақалалар мен конференция баяндамалары жарияланған, атап айтсақ, 389 мақала табылды. Оның ішінде ағылшыннан басқа тілдегі мақалалар, қайталанғандары, қолжетімді еместерін санамағанда 126 мақала қалды. Соның ішінен тақырыпты жақсы ашып тұрған 46 мақала талданып, ең көп қолданылатын бағалау әдістері анықталды. Мақалалардың ішінде конференцияда оқылған баяндамалар да болды, олардың саны диаграммада көрсетілді (сурет 1). Мақалаларды қандай критерийлерге сай алғанымызды (сурет 2 схемада көрсеттік).



Сурет 1. Зерттеулер саны



Сурет 2. Зерттеулерді жинау критерийлері

Зерттеу нәтижелері

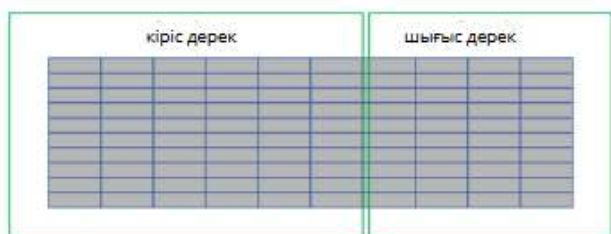
Таңдалған мақалаларды талдау барысында, 4 түрлі киберқауіпсіздікті бағалау әдістерін анықтадық. Толығырақ 3-суретте көрсетілді.



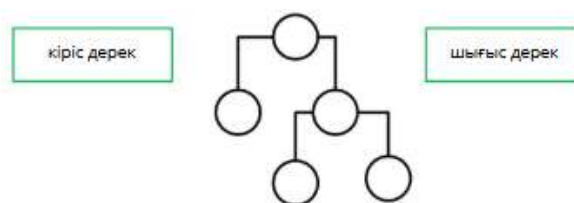
Сурет 3. Киберқауіпсіздікті бағалау әдістері

Электрондық кестелерге негізделген үдерістің типтік мысалы – істен шығу режимдерін, олардың салдарын және диагностикалық мүмкіндіктерін талдау (failure mode, effect, and diagnostic analysis (FMEDA)), бұл өнім немесе қосалқы жүйе деңгейіндегі істен шығу жиілігі, істен шығу режимдері және диагностикалық мүмкіндіктер туралы мәліметтерді алу үшін жүйелі талдау әдісі. FMEDA-ның негізгі мақсаты – құрылғылардың архитектуралық көрсеткіштерін және кездейсоқ істен шығуларға байланысты қауіпсіздік мақсаттарының бұзылуын бағалау, сондай-ақ қажетті қауіпсіздік деңгейіне жетпеген жағдайда қауіпсіздік олқылықтарын жою үшін жеткілікті ақпарат беру [3].

Электрондық кестелерге негізделген тағы бір мысал – тәуекелге бағытталған тексеріс, ол мұнай-газ және химия өнеркәсібінде кеңінен қолданылады және өзін жақсы жағынан көрсетті. Бұл тәсіл бастапқыда мұнай өңдеу өнеркәсібіне арналған. Бұл стандарт техникалық қызмет көрсету іс-шаралары мен салалардағы негізгі оқиғалар арасындағы байланысты анықтайды (4-сурет). Ол басқа салаларда және инспекциялық қызмет түрлерінде де бейімделіп, қолданылады, бұл құрылғының/жүйенің істен шығу механизмдері мен жиілігін анықтауға мүмкіндік береді. Ағаш негізіндегі әдістер 5-суреттегідей ағаш түріндегі графикалық көрініспен бейнеленеді. Ағаш негізіндегі әдістің классикалық мысалы – жүйенің сенімділігін бағалау үшін қолданылатын істен шығу ағашын талдау (fault tree analysis (FTA)).



Сурет 4. Кестеге негізделген әдіс



Сурет 5. Граф ағаштарына негізделген әдіс

Модельге негізделген әдістер деп (6-сурет) әртүрлі үлгілерді – графиктерді, теңдеулерді және т.б. пайдалана отырып, бағалауды жүзеге асыратын тәсілдерді түсінеміз.

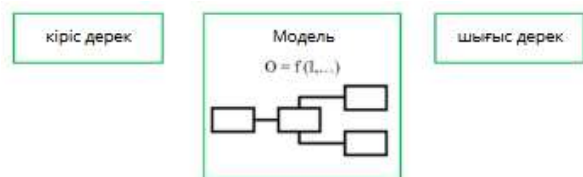
Байестік желі (БЖ), ол шартты тәуелділіктер негізінде айнымалылардың ұжымдық үлестірімінің факторизациясын орындай алатындықтан, белгісіз дәлелдерден белгісіз тұжырымдарға дейін рационализациялау гипотезасын білдіреді [4]. БЖ белгісіздік пен толық емес проблемаларды шешуге көмектеседі; осылайша, ол бірнеше домендерде кеңінен қолданылады. БЖ әдетте желілердің қауіптері мен осалдықтарын зерттеу үшін пайдаланылады, олар тәуекелдердің сандық және сапалық бағасын беретін циклді емес графиктер болып табылады. Модельге негізделген сенімділік дәлелдерін басқару – растау дәлелдерін басқаруға арналған әртүрлі әрекеттерді қарастыратын басқа үлгіге негізделген әдіс, атап айтқанда ұсынылатын дәлелдерді анықтау, дәлелдемелерді қайта пайдалану мүмкіндігі, дәлелдеме ақпаратын жинау, іздеу, бағалау және сенімділік дәлелдемелерін өзгерту әсерін талдау және дәлелдемелерді пайдалану, мысалы, сәйкестікті басқару және дәлелдеу.

Модельге негізделген бағалау әдісінің ішінде ең танымалы Монте-Карло симуляциялау әдісі болып табылады. Көп жағдайда күрделі жүйелердің мінез-құлқын статистикалық модельдеу және кездейсоқ таңдау әдісі арқылы болжауға болады. Бұл сарапшыларға жүйедегі ақаулардың ықтималдығын бағалауға және жақсартуды қажет ететін негізгі бағыттарды анықтауға көмектеседі, сондықтан ол тәуекелді бағалау әдістерінің бірі болып саналады. Сенімділікті талдау жүйе жұмысының белгісіздігін және құрамдас бөліктерінің сенімділігін ықтималдық үлестірімдері арқылы көрсетеді, осылайша әртүрлі сценарийлерде жүйенің әрекетін модельдейді. Әрбір құрамдас бөлік өзінің істен шығу үлестіріміне сәйкес істен шығуы мүмкін болатын жағдайларды бірнеше рет модельдеу арқылы жүйенің бұл ақауларға қалай жауап беретінін бақылап, оның сенімділігі анықталады [5].

Ақырында, ықтималдық қауіпсіздікті бағалау атом электр станциясының тәуекелін бағалаудың ең кең таралған әдісі болып табылады. Ол оқиғалар мен қателер ағашының әдістеріне негізделген графикалық тәсілді қолданады. Сценарий негізіндегі процестерге келетін болсақ (7-сурет), олар әдетте қауіпсіздікке және/немесе киберқауіпсіздікке қатысты сценарийлерге назар аудару арқылы әртүрлі дереккөздерден (қақтығыстар, зерттеулер, сарапшылық деректер және т.б.) алынған сценарийлер жинағын профильдеуге негізделген.

Сценарий негізіндегі процестің типтік мысалы HARA болып табылады, мұнда ақаулар және/немесе функционалдық жеткіліксіздіктер қауіпсіздікке қатысты сценарийлерді (белгілі-қауіпсіз және белгілі-қауіпті), сондай-ақ белгісіз-қауіпсіз сценарийлерді анықтау тұрғысынан

талданады, сондай-ақ қажетті қарсы шараларға қосымша назар аудара отырып, қауіпті сценарийлерді талдайды [6].

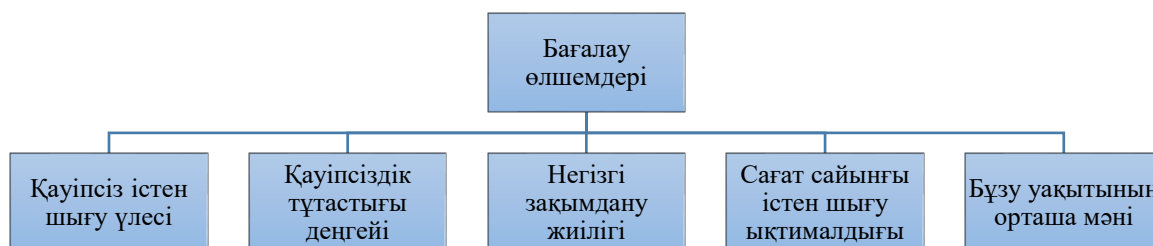


Сурет 6. Модельге негізделген әдіс



Сурет 7. Сценарийге негізделген әдіс

Киберқауіпсіздікті бағалау әдістері қарастырылды, оларды қандай көрсеткіштер арқылы бағалайтынымыз 8-суретте көрсетілді.



Сурет 8. Бағалау өлшемдері

– Қауіпсіз істен шығу үлесі – диагностика анықтай алмайтын қауіпті істен шығу ықтималдығын өлшеу үшін қолданылатын өлшем.

– Қауіпсіздік тұтастығы – барлық қауіпсіздікке арналған аспаптық функциялардың белгіленген уақыт аралығында және барлық белгіленген шарттарда қанағаттанарлық деңгейде жұмыс істейтінін растау үшін қолданылады.

– Сағат сайынғы істен шығу ықтималдығы – жүйенің қажет болған жағдайда өз қауіпсіздік функциясын орындауына кедергі келтіретін қауіпті істен шығу ықтималдығы.

– Бұзу уақытының орташа мәні – біркелкі жұмсалған күш-жігерді ескере отырып, нақты шабуылды жүзеге асыруға қажет уақыттың есептік көрсеткіші.

– Негізгі зақымдану жиілігі – жүйенің істен шығу ықтималдығы мен адам өлімі (немесе қоршаған ортаға әсері) негізінде бастапқы оқиғалар жиілігін ескере отырып, жиілікті және салдарын өлшеуге арналған өлшем.

Киберқауіпсіздік пен жүйенің сенімділігін бағалау әдістерінің ішінде ең көп қолданылытаны - Марков тізбектері. Ол өзара күрделі байланысқан және күйлер арасында өтпелі стохастикалық жүйелердің сенімділігін модельдеу мен бағалауға арналған математикалық негізді қамтамасыз етеді. Марков тізбектерін қолдану арқылы сенімділік пен киберқауіпсіздікті бағалау әдісі уақыт өте келе жүйенің күйлерінің ықтималдығын өлшейді, жұмыс істеу, істен шығу және жөндеу үдерістерінің барлық мүмкін күйлерін ескереді. Бұл әдіс жүйенің өнімділігін бағалауға және пайдалану мен техникалық қызмет көрсету жоспарларына қажетті сенімділік көрсеткіштерін анықтауға мүмкіндік береді. Марков тізбегі негізінде жүйенің киберқауіпсіздігін талдау бірнеше қадамдар арқылы жүзеге асырылады:

– Жүйенің барлық ықтимал күйлерін, соның ішінде қалыпты жұмыс істеу және істен шығу күйлерін анықтап, толық күй кеңістігін құру;

– Белгілі бір уақытта күйдің өзгеру ықтималдығын көрсететін өтпелі ықтималдық матрицасын жасау. Бұл матрица Марков тізбегін талдаудың негізгі элементі болып табылады және ол күйлер арасындағы өтпелі жылдамдықтарды, оның ішінде істен шығу және жөндеу жылдамдықтарын көрсетеді;

– Өтпелі ықтималдық матрицасынан алынған тұрақтылық теңдеулерін шешу арқылы жүйенің ұзақ мерзімді тұрақты күйін анықтау;

– Тұрақты күйлердің ықтималдығын пайдалану арқылы жөндеуге кететін орташа уақыт, жүйенің қолжетімділігі және істен шығуға дейінгі орташа уақыт сияқты негізгі сенімділік көрсеткіштерін есептеу.

Талданған мақалалардағы бағалау өлшемдері мен әдістерді сәйкестендірейік, ол 1-кестеде көрсетілді.

Кесте 1. Мақалаларда жиі кездескен бағалау өлшемдері мен әдістері

<i>Бағалау өлшемі</i>	<i>Бағалау әдісі</i>	<i>Мақала атауы</i>
<i>Қауіпсіз істен шығу үлесі</i>	<i>Динамикалық осалдықты бағалау графигі</i>	<i>Attack Graph-based Solution for Vulnerabilities Impact Assessment in Dynamic Environment[7]</i>
<i>Тәуекелді жіктеу</i>	<i>Шабуыл ағашын талдау</i>	<i>Model-based assurance evidence management for safety-critical systems[8]</i>
<i>Тәуекелді жіктеу</i>	<i>Қауіптерді талдау және тәуекелдерді бағалау</i>	<i>Safety and security co-engineering for highly automated vehicles[9]</i>
<i>Бұзу уақытының орташа мәні</i>	<i>Ену тәсілдері, әсері және маңыздылығын талдау</i>	<i>Combining IMECA analysis and penetration testing to assess the cybersecurity of industrial robotic systems[10]</i>
<i>Жүйенің істен шығу ықтималдығы</i>	<i>Киберқауіпсіздік тәуекелдерін бағалау</i>	<i>Cybersecurity Risk Assessment of Industrial Control Systems Based on Order-α Divergence Measures Under an Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Environment[11]</i>

Сондай-ақ, киберқауіпсіздікті бағалау үшін жасанды интеллект мүмкіндіктерін де қолдансақ болады. Маңызды инфрақұрылымды қорғауға арналған үлкен тілдік модельдердің қолданбаларының тиімділігін арттыру үшін оның өмірлік циклін құпиялылық және тұрақтылық үштігімен сәйкестендіру маңызды. Ол үшін келесі нұсқаулықты пайдалана аламыз.

1) Жобалау: киберқауіпсіздікті бағалау бағытын орнату;

Мақсатты нақтылау: Жобаның негізгі мақсатын анықтау. Мысалы, модель қауіп туралы ақпаратты талдай ма, осалдықтарды бағалауға көмектесе ме немесе төтенше жағдайға жауап бере ме? Қолдану аясы: қай инфрақұрылымдық аймақтарға назар аударылатынын анықтау

2) Модельді таңдау: киберқауіпсіздік талаптарына сәйкестендіру;

Қауіпсіздік және сенімділік: қауіпсіздік пен деректер құпиялылығына басымдық беретін қолданбалар үшін үлгіні таңдау;

3) Модельдің өнімділігі және бейімделуі: киберқауіпсіздікті бағалау тиімділігін қамтамасыз ету. Өнімділікті бағалау: модельдің инфрақұрылымға қауіптерді анықтау, жіктеу және болжау қабілетін бағалау;

4) Бағалау және қайталау: аса маңызды инфрақұрылымды қорғаудың дәлдігін жақсарту; Модельдің қауіпті анықтау дәлдігі, жауап беру жылдамдығы және салалық деректерді өңдеу мүмкіндігі сияқты көрсеткіштерді пайдалану;

5) Үлкен тілдік модельдерді қолдану: модельді іске қосу;

Орнатқаннан кейін модельдің өнімділігін бақылау және қауіптерді көрсету үшін оны жаңарту үшін тұрақты механизмдерді құру қажет. Барлық аталған қадамдарды 9-суретте келтірілген сұлба бойынша көрсетуге болады. Генеративті жасанды интеллект және үлкен тілдік модельдер маңызды инфрақұрылымды қорғауды жақсарту алатыны сөзсіз [12].



Сурет 9. Киберқауіпсіздікті бағалау моделі

Дискуссия

Қауіпсіздікті бағалау үшін танымал сенімділікті бағалау әдістерінің өзгертілген нұсқалары кеңінен қолданылады, мысалы, FMEA/FMECA, FTA және Байес желілері, Марков тізбектері.

Киберқауіпсіздікке келетін болсақ, не арнайы өзгерістер енгізіледі (мысалы, IMESA сияқты), не көп жағдайда киберқауіпсіздікті бағалау жалпы қауіпсіздікті бағалау процесіне біріктіріледі [13]. Көп жағдайда бағалау процесі тәуекелге негізделген тәсілге сүйенеді, оған тәуекелдерді анықтау, талдау, бағалау кіреді.

Негізгі шектеулерге мыналарды жатқызамыз:

- өлшемдік мәселелер (талдануы тиіс компоненттердің өте көп санына байланысты әдісті қолдану мүмкін емес);
- тым қатаң болжамдар (мысалы, істен шығулар немесе шабуылдар бір-бірінен тәуелсіз деп қарастырылады).

Мұндай шектеулерді еңсеру үшін қолданылатын әдістерге өзгерістер енгізілуде, мысалы, тек қауіпсіздік функциясының бөлігі болып табылатын элементтерге назар аудару, күрделі қауіпсіздік жүйелері үшін арнайы адаптивтелген тәсілдерді қолдану және т.б.

Зерттеулердің көпшілігінде қолданылатын әдістер қателерді, тек осалдықтарды немесе екеуін де қамтитын тәуекелдерді бағалауға бейімделген (тәуекелге негізделген тәсіл).

Нақты I&C жүйелерінде қолданылатын кейбір киберқауіптерді бағалау әдістері ұлттық стандарттарға негізделген. Мысалы, Қытай ұлттық стандарты GB/T 36466-2018: «Ақпараттық қауіпсіздік технологияларын енгізу бойынша нұсқаулық». Осы құжатқа сәйкес, алдымен тәуекелдің төрт элементі анықталуы және бағалануы қажет: сапалық (сараптамалық бағалау) және сандық комбинациясын пайдалана отырып, активтер, қауіптер, осалдықтар және қорғаныс мүмкіндіктері, сандық есептеу әдістері [14-15].

Осы төрт элементтің негізінде ақпараттық қауіпсіздік инциденттерінің туындау және зақымдану ықтималдығы есептеледі, содан кейін соңғы "тәуекел балы" анықталады.

Ақпараттық жүйелер мен физикалық жүйелерді біріктіру кезінде ақпараттық жүйелердің киберқауіпсіздігі және физикалық жүйелердің функционалдық қауіпсіздігі өзара әрекеттесе бастайды, бұл жаңа күрделі мәселенің пайда болуына әкеледі және ауыр тәуекелдерді тудырады. Бұл мәселені шешу үшін генеративті жасанды интеллект, үлкен тілдік модельдер сияқты жаңа, заманауи тәсілдер қажет.

Қорытынды

Бұл зерттеуде киберқауіпсіздік пен қауіпсіздікті бағалау мәселелеріне арналған соңғы бесжылдықтағы өзекті ғылыми мақалалар талданды.

Зерттеулерде қолданылатын әдістердің көпшілігі не симуляциялық модельдеуге, не теориялық тұжырымдамаларға негізделгенін ерекше атап өткен жөн. Зерттеулердің көпшілігі (46-дың 33-і) қауіпсіздік пен киберқауіпсіздікті бірлескен талдау үшін немесе тиісті қолдану салаларындағы жаңа қажеттіліктерді есепке алу үшін классикалық бағалау әдістерін өзгертуді немесе кеңейтуді ұсынады. Бұл тенденция ұзақ мерзімді тәжірибеде дәлелденген бағалаудың

классикалық әдістері әлі де кең сұранысқа ие екенін және аналитикалық күрделі қажеттіліктерді қанағаттандыру үшін одан әрі жетілдіруге негіз болатынын көрсетеді. Қарқынды дамып келе жатқан генеративті жасанды интеллект, цифрлық егіз, машиналық оқыту салаларын да киберқауіпсіздікті бағалауға қолдануға болады. Болашақта жасанды интеллектке негізделген бағалау моделін жасайтын боламыз. Алдағы зерттеулердің бәрі ЖИ-мен байланысты болмақ.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

- [1] Leszczyna R. *Review of cybersecurity assessment methods: Applicability perspective //Computers & Security.* – 2021. – Т. 108. – С. 102376.
- [2] Babeshko I., Di Giandomenico F. *Safety and Cybersecurity Assessment Techniques for Critical Industries: A Mapping Study //IEEE Access.* – 2023.
- [3] *Functional Safety of Electrical/Electronic/Programmable Electronic Safety-related Systems (E/E/PE, or E/E/PES), Standard IEC 61508, 2010.*
- [4] A. Carrera-Rivera, W. Ochoa, F. Larrinaga, and G. Lasa, “How-to conduct a systematic literature review: A quick guide for computer science research,” *MethodsX*, vol. 9, Jan. 2022, Art. no. 101895, doi: 10.1016/j.mex.2022.101895
- [5] *Application of monte carlo simulations to system reliability analysis.* [https://www.911metallurgist.com/blog/wp-content/uploads/2016/01/ Application-of-Monte-Carlo-Simulations-to-System-Reliability-Analysis.pdf](https://www.911metallurgist.com/blog/wp-content/uploads/2016/01/Application-of-Monte-Carlo-Simulations-to-System-Reliability-Analysis.pdf). Accessed: 2025-02-11.
- [6] R. Gupta, S. Tanwar, N. Kumar, and S. Tyagi, “Blockchain-based security attack resilience schemes for autonomous vehicles in industry 4.0: A systematic review,” *Comput. Electr. Eng.*, vol. 86, Sep. 2020, Art. no. 106717.
- [7] A. Boudermine, R. Khatoun, and J.-H. Choyer, “Attack graph-based solution for vulnerabilities impact assessment in dynamic environment,” in *Proc. 5th Conf. Cloud Internet Things (CIoT), Marrakesh, Morocco, Mar. 2022*, pp. 24–31, doi: 10.1109/CIoT53061.2022.9766588.
- [8] J. L. de la Vara, A. S. García, J. Valero, and C. Ayora, “Model-based assurance evidence management for safety-critical systems,” *Softw. Syst. Model.*, vol. 21, no. 6, pp. 2329–2365, Dec. 2022, doi: 10.1007/s10270-021-00957-z.
- [9] C. Schwarzl, N. Marko, H. Martin, V. E. Jiménez, J. C. Triginer, B. Winkler, and R. Bramberger, “Safety and security co-engineering for highly automated vehicles,” *Elektrotechnik Informationstechnik*, vol. 138, no. 7, pp. 469–479, Nov. 2021, doi: 10.1007/s00502-021-00934-w.
- [10] A. Abakumov and V. Kharchenko, “Combining IMECA analysis and penetration testing to assess the cybersecurity of industrial robotic systems,” in *Proc. 12th Int. Conf. Dependable Syst., Services Technol. (DESSERT), Athens, Greece, Dec. 2022*, pp. 1–7, doi: 10.1109/DESSERT58054.2022.10018823
- [11] H. Guo, L. Ding, and W. Xu, “Cybersecurity risk assessment of industrial control systems based on order—A divergence measures under an interval-valued intuitionistic fuzzy environment,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 43751–43765, 2022, doi: 10.1109/ACCESS.2022.3169133.
- [12] Yigit Y. et al. *Critical infrastructure protection: Generative ai, challenges, and opportunities //arXiv preprint arXiv:2405.04874.* – 2024.
- [13] J. Alanen, J. Linnosmaa, T. Malm, N. Papakonstantinou, T. Ahonen, E. Heikkilä, and R. Tiusanen, “Hybrid ontology for safety, security, and dependability risk assessments and security threat analysis (STA) method for industrial control systems,” *Rel. Eng. Syst. Saf.*, vo
- [14] *Risk-Based Inspection Methodology, Standard API RP 581, 3rd ed., Oct. 2020.*
- [15] A. Carrera-Rivera, W. Ochoa, F. Larrinaga, and G. Lasa, “How-to conduct a systematic literature review: A quick guide for computer science research,” *MethodsX*, vol. 9, Jan. 2022, Art. no. 101895, doi: 10.1016/j.mex.2022.101895

И.А. Андреев ^{1,2}, Ф.Б. Тебуева ², Б.К. Абдураимова ¹,
Д.Ж. Сатыбалдина ¹, Ж.А. Боранбай ¹

¹Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

²ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»,

г.Ставрополь, Российская Федерация

*e-mail: andreev.ilia.1984@mail.ru

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ АЛГОРИТМ АУТЕНТИФИКАЦИИ ПОТ-УСТРОЙСТВ НА ОСНОВЕ БЛОКЧЕЙН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ BLAKE3 И АГРЕГИРОВАНИЯ ПОДПИСЕЙ

Аннотация

В статье предлагается усовершенствованный алгоритм аутентификации устройств для промышленных систем Интернета вещей (IIoT). Предлагаемый алгоритм реализуется на основе технологии блокчейн с использованием хэш-функции BLAKE3, безсертификационной схемы подписей и агрегирования подписей. Экспериментальное моделирование проведено в среде GNU/Linux с использованием симуляции атак 3 типов: подмены публичного ключа, атак на мастер-ключ, атак на консенсус. Предложенный алгоритм позволяет минимизировать вычислительные затраты за счёт оптимизации операций хэширования и подписания, снизить объём передаваемых данных. Эксперименты подтвердили устойчивость IIoT-устройств к выбранным 3 типам атак, что делает алгоритм эффективным для применения в реальных IIoT-системах.

Ключевые слова: аутентификация, блокчейн, агрегированные подписи, BLAKE3, IIoT

I.A. Andreev ^{1,2}, F.B. Tebueva ², B.K. Abdurayimova ¹, D.Zh. Satybaldina ¹, Zh.A. Boranbay ¹

¹Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, Astana, Kazakhstan

²FSAEI HE "North-Caucasus Federal University", Stavropol, Russian Federation

IMPROVED BLOCKCHAIN-BASED IIOT DEVICE AUTHENTICATION ALGORITHM USING BLAKE3 AND SIGNATURE AGGREGATION

Abstract

This paper proposes an improved device authentication algorithm for industrial Internet of Things (IIoT) systems. The proposed algorithm is implemented based on blockchain technology using BLAKE3 hash function, certificateless signature scheme and signature aggregation. Experimental modeling is performed in GNU/Linux environment using simulation of attacks of 3 types: public key spoofing, master key attacks, consensus attacks. The proposed algorithm allows to minimize the computational cost by optimizing hashing and signing operations, and to reduce the volume of transmitted data. Experiments confirmed the resistance of IIoT devices to the selected 3 types of attacks, which makes the algorithm effective for use in real IIoT systems.

Keywords: authentication, blockchain, aggregated signatures, BLAKE3, IIoT

И.А. Андреев ^{1,2}, Ф.Б. Тебуева ², Б.К.Абдураимова ¹, Д.Ж.Сатыбалдина ¹, Ж.А.Боранбай ¹

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан

² Солтүстік Кавказ федералды университеті, Ставрополь, Ресей Федерациясы

BLAKE3 ЖӘНЕ SIGNATURE АГРЕГАЦИЯСЫН ПАЙДАЛАНАТЫН БЛОКЧЕЙН НЕГІЗІНДЕГІ IIOT ҚҰРЫЛҒЫЛАРЫН АУТЕНТИКТЕУДІҢ ЖЕТІЛДІРІЛГЕН АЛГОРИТМІ

Аңдатпа

Бұл құжат өнеркәсіптік Интернет заттары (IIoT) жүйелері үшін жақсартылған құрылғы аутентификация алгоритмін ұсынады. Ұсынылған алгоритм блокчейн технологиясы негізінде BLAKE3 хэш-функциясын, сертификатсыз қолтаңба схемасын және қолтаңбаларды біріктіруді пайдалана отырып жүзеге асырылады. Эксперименттік модельдеу GNU/Linux ортасында шабуылдардың 3 түрін модельдеу арқылы жүзеге асырылды: ашық кілтті ауыстыру, басты кілтке шабуыл және консенсусқа

шабуыл. Ұсынылған алгоритм хэштеу және қол қою операцияларын оңтайландыру және жіберілетін деректер көлемін азайту арқылы есептеу шығындарын азайтуға мүмкіндік береді. Эксперименттер ПоТ құрылғыларының тандалған 3 шабуыл түріне төзімділігін растады, бұл алгоритмді нақты ПоТ жүйелерінде пайдалану үшін тиімді етеді.

Түйін сөздер: аутентификация, блокчейн, агрегатталған қолтаңбалар, BLAKE3, ПоТ

Основные положения

Представлен усовершенствованный алгоритм аутентификации устройств промышленного Интернета вещей (ПоТ), реализованный на основе технологии блокчейн, хэш-функции BLAKE3, на базе схемы безсертификатных подписей и их агрегированием. Алгоритм минимизирует вычислительные и коммуникационные затраты, обеспечивает устойчивость к трём ключевым типам атак: подмене публичного ключа (PKR), атаке на мастер-ключ (МВРК) и атаке на консенсус (ССА). Экспериментальное моделирование подтвердило эффективность предложенного алгоритма в условиях ограниченных ресурсов, её высокую производительность и пригодность в условиях ограниченных ресурсов.

Введение

С развитием технологии блокчейн и ее проникновением в различные сферы, включая распределенное хранение данных и обеспечение безопасности, возникает потребность в повышении эффективности и безопасности схем управления идентификацией и доступом. Согласно представленным исследованиям [1], текущие методы аутентификации устройств в распределенных системах ПоТ сталкиваются с проблемами высокой вычислительной нагрузки, уязвимости к атакам на целостность данных и недостаточной масштабируемости. Технологии ПоТ представляют собой сеть взаимосвязанных устройств, взаимодействующих через интернет, тогда как блокчейн обеспечивает децентрализованное и защищенное хранение данных, устойчивое к изменениям [2]. Применение современных технологий, таких как криптографическая хэш-функция BLAKE3, обеспечивает не только высокую скорость обработки данных, но и устойчивость к различным видам атак. Агрегированные подписи значительно снижают нагрузку на сеть за счёт объединения нескольких подписей в одну [3], в то время как схемы безсертификатной подписи (Certificateless Signature, CLS) устраняют зависимость от центра сертификации, повышая уровень безопасности в распределённых системах [4].

Стандартные хэш-алгоритмы и схемы с централизованной проверкой подписей, сталкиваются с рядом проблем: значительными вычислительными издержками, уязвимостью к атакам, высокой задержкой и необходимостью доверия к централизованным узлам [5]. Устаревшие хэш-функции (например, MD5 и SHA-1) являются объектами документально подтверждённых атак. В феврале 2017 года команда Google и Институт CWI продемонстрировали первую коллизию SHA-1, что привело к отказу браузеров от поддержки этой функции. Коллизии для MD5 могут быть найдены за секунды при помощи GPU, что делает её небезопасной для криптографических целей [6]. Согласно обзору компании MoldStud (2025), более 60 % инцидентов в области ИБ связаны с использованием слабых хэш-функций [7]. Эти факты подчеркивают актуальность перехода к современным безопасным решениям, таким как BLAKE3. Эти проблемы усугубляются в распределенных системах, таких как ПоТ-системы, где критичны – как надежность, так и производительность механизмов аутентификации и проверки целостности данных [8].

Современные требования к распределенным системам предъявляют высокие ожидания к вычислительной эффективности и устойчивости к различным типам атак. Одной из главных задач остается обеспечение безопасности и скорости обработки аутентификации устройств в блокчейн, при этом сокращение вычислительных издержек может значительно повысить производительность систем и снизить затраты [9]. В этом контексте использование функции BLAKE3 и агрегированных подписей (Aggregated Signatures) оказывается весьма

перспективным, поскольку они предлагают высокую вычислительную эффективность, улучшенную производительность и устойчивость к атакам, таким как атаки с подделкой и атаки на целостность данных [10].

В последние годы активно развиваются методы использования физически неклонированных функций (PUF) в системах аутентификации устройств. Одним из перспективных направлений является интеграция PUF с механизмами генерации секретных ключей (SKG) на физическом уровне, что позволяет повысить стойкость к атакам на воспроизведение и подмену устройств. Исследование [11] демонстрирует, что объединение PUF с секретными ключами, полученными из характеристик канала связи, способствует улучшению безопасности аутентификационных протоколов для IoT-систем.

Дальнейшее развитие технологий аутентификации в системах IoT связано с интеграцией многофакторных схем безопасности, использующих PUF, SKG и оценку близости на основе характеристик радиосигнала. В работе [12] предлагается новая методология многофакторной аутентификации, в которой сочетаются методы безопасности физического уровня и протоколы краткосрочной связи. Такой подход обеспечивает устойчивость к атакам воспроизведения и улучшает точность идентификации периферийных устройств в условиях промышленного Интернета вещей.

Алгоритм BLAKE3 отличается от предшествующих хэш-функций, таких как SHA-256 и даже BLAKE2, улучшенной производительностью и устойчивостью к широкому спектру атак, включая атаки на коллизии и анализ на длину сообщения. В частности, BLAKE3 использует алгоритм Merkle-Damgård и подход хэширования с деревом (Tree Hashing), что делает его пригодным для параллельной обработки и, следовательно, более быстрым для многопоточных вычислений. Формула для хэширования на основе дерева выглядит следующим образом:

$$\text{Hash}(M) = \text{Compress}(\text{Compress}(M_1) || \text{Compress}(M_2) || \dots || \text{Compress}(M_n)), \quad (1)$$

где M – сообщение, разбитое на блоки M_1, M_2, \dots, M_n , а Compress – функция сжимающего хэширования.

Совмещение BLAKE3 и агрегированных подписей в рамках блокчейн-системы позволяет обеспечить высокую устойчивость к ряду атак. В частности, данное сочетание защищает от атаки двойной траты и атаки на целостность данных. Агрегированные подписи с использованием CLS-схемы позволяют избежать зависимости от центра сертификации (CA), делая систему более гибкой и устойчивой к подделке.

Рисунок 3 (TABLE I) показывает сравнительные данные по коммуникативной нагрузке различных схем подписей, включая усовершенствованный алгоритм аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями. Агрегированная подпись требует всего 480 бит для передачи (в сравнении с 800 бит у прототипов), что сокращает объем передаваемой информации и увеличивает пропускную способность сети.

Актуальность для IoT-систем и распределенных систем согласно [13], использование BLAKE3 и агрегированных подписей имеет потенциальное применение в таких сферах, как умные города, медицинские IoT-сети и умное производство, где количество устройств и запросов растет экспоненциально.

Основные задачи настоящего исследования заключаются:

- 1) в обеспечении устойчивости к атакам на публичный ключ, мастер-ключ и атакам на консенсус;
- 2) минимизации вычислительных затрат для операций генерации и проверки подписей, снижении объема передаваемых данных.

В настоящей работе предлагается усовершенствованный алгоритм аутентификации IoT-устройств, который обеспечивает высокую устойчивость к атакам PKR, MBPK, CCA, минимизирует вычислительные и коммуникационные затраты, а также увеличивает производительность и масштабируемость в условиях ограниченных ресурсов. Для

поставленных задач необходимо разработать алгоритм, минимизирующий временные и коммуникационные затраты, сохраняя высокий уровень безопасности для PoT-устройств, а также провести экспериментальное исследование эффективности предложенного алгоритма с его сравнением по критериям производительности, масштабируемости и устойчивости к атакам с существующими методами. Технологии PoT представляют собой сеть взаимосвязанных устройств, взаимодействующих через интернет, тогда как блокчейн обеспечивает децентрализованное и защищенное хранение данных, устойчивое к изменениям.

Методология исследования

Современные методы обеспечения безопасности и децентрализации в блокчейн-системах включают традиционные подходы, такие как Proof of Work (PoW) и Proof of Stake (PoS). Однако эти методы сталкиваются с рядом ограничений, включая высокие затраты на вычисления и энергопотребление, что делает их менее подходящими для ресурсозависимых и высоконагруженных систем, таких как промышленные PoT-сети и распределенные системы идентификации. В недавних исследованиях были предложены улучшенные алгоритмы, такие как Proof of Computation (PoCP), которые обеспечивают лучшую производительность при меньших ресурсных затратах.

$$PoCP: H(x, M) \rightarrow Proof\ of\ Integrity, \quad (2)$$

где $H(x, M)$ – хэш от данных M с меткой времени x , полученный с использованием BLAKE3.

PoW является наиболее известным и широко используемым методом консенсуса, особенно в сети Bitcoin. Он основывается на решении сложной задачи (например, нахождения значения x , такого что $H(x) < T$, где T – целевое значение). Основным недостатком метода заключается в высокой вычислительной сложности, что влечёт значительные энергозатраты. Более того, PoW ограничивает масштабируемость и задержку транзакций, что усложняет его применение в высоконагруженных системах IoT.

$$\text{Задача: найти } x, \text{ для которого } H(x) < T. \quad (3)$$

Преимущества PoW включают децентрализацию и безопасность, но высокие затраты на вычисления делают его непригодным для энергоограниченных устройств.

PoS направлен на снижение энергозатрат путем выбора валидаторов на основе их вклада (стейка) в сеть. В то время как PoS снижает вычислительные затраты, он подвержен проблемам с централизацией, поскольку крупные стейкеры имеют больше шансов на выбор в качестве валидаторов. Другая проблема заключается в так называемой "проблеме богатых": пользователи с наибольшим стейком получают больше возможностей для валидации и накопления стейка, что снижает децентрализацию.

$$\text{Вероятность выбора валидатора} \propto Stake. \quad (4)$$

Таким образом, PoS повышает эффективность по сравнению с PoW, но не обеспечивает оптимальную безопасность для больших, децентрализованных систем.

Метод Proof of Computation (PoCP), упомянутый в работе [14], направлен на преодоление недостатков PoW и PoS, комбинируя вычислительную нагрузку и требования к проверке. PoCP основывается на идее вычислительного доказательства, требуя выполнения вычислительных задач для подтверждения подлинности, при этом снижая вычислительную нагрузку за счет использования алгоритмов, оптимизированных для параллельной обработки.

Концепция CLS впервые была предложена Ai-Riyami и Paterson [15] и с тех пор развивалась в различных направлениях. Схемы CLS можно разделить на две основные категории: построенные на модели случайного оракула и на стандартной модели, не зависящей от случайного оракула. В большинстве существующих схем CLS криптографические хэш-функции рассматриваются как идеальные случайные оракулы, что делает алгоритмы уязвимыми к различным видам атак при использовании в реальных условиях. По этой причине доказательство безопасности в стандартной модели становится особенно важным, особенно

для приложений, связанных с IoT, где требуется высокая безопасность для защиты целостности данных [16].

В последние годы растет интерес к алгоритмам CLS без использования случайных оракул, поскольку они лучше подходят для реальных сценариев. Первая CLS-схема без случайных оракул была предложена Liu и соавторами [17], но была признана уязвимой к атакам Man-in-the-Middle Based Public Key (МВРК) [18]. Впоследствии Yuan и соавторы [19] разработали алгоритму, способный противостоять МВРК-атакам, но он оказался уязвимым к атакам подмены публичного ключа (PKR) [20]. В алгоритме Yu и соавторов [21] также имелись недостатки: он не мог полностью противостоять МВРК- и PKR-атакам. Для повышения безопасности Yuan и Wang [19] предложили улучшенный алгоритм, но и он оставался подверженным МВРК-атакам.

В работе Haoqi Wen [26] представлен алгоритм аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS, который в настоящей статье выбран в качестве аналога. В алгоритме используются обозначения, приведенные ниже в таблице 1. Алгоритм представляет собой CLS-схему с использованием технологии блокчейн, исключая зависимость от случайного оракула.

Таблица 1. Перечень символов

Символ	Описание
G_1, G_2	две группы точек эллиптической кривой G_1 и G_2 с порядком простого числа p
P	простое число, задающее порядок групп
G	генератор группы G_1
E	билинейное отображение $e: G_1 \times G_1 \rightarrow G_2$, удовлетворяющее следующим условиям: билинейность, невырожденность и вычислимость
ID	идентификатор пользователя
M	сообщение, подлежащее подписанию
H_u, H_m	две безопасные хэш-функции
msk	системный мастер-ключ
$(psk_{(1)}, psk_{(2)})$	частичный приватный ключ
$(pk_{(1)}, pk_{(2)})$	публичный ключ пользователя
σ	подпись для сообщения t

В алгоритме аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS используются математические параметры, такие как группы G_1 и G_2 точек эллиптической кривой порядка простого числа p и генератор g группы G_1 . Ключевую роль в обеспечении безопасности играет билинейное отображение $e: G_1 \times G_1 \rightarrow G_2$, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{Билинейность: } e(g^{t_1} g^{t_2}) = e(g, g)^{t_1 t_2}, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_p^*. \quad (5)$$

$$\text{Невырожденность: } e(g^{t_1} g^{t_2}) \neq 1. \quad (6)$$

$$\text{Вычислимость: } e(g^{t_1} g^{t_2}) \text{ может быть эффективно рассчитано.} \quad (7)$$

Процесс генерации ключей организован на основе участия центра генерации ключей (KGC) и пользователя. KGC выбирает случайный мастер-ключ $msk \in \mathbb{Z}_p$ и генерирует системные параметры, вычисляя $g_1 = g^{msk}, Z = e(g, g_1)$.

Затем публикуются параметры (g, g_1, Z, G_1, G_2, e) . Пользователь, со своей стороны, выбирает случайный приватный ключ $usk \in \mathbb{Z}_p$ и на его основе генерирует публичный ключ $upk = g^{usk}$.

На этапе 1 выполняется подписание сообщения M , которое начинается с вычисления хэша сообщения и идентификатора пользователя $H_u = H(M, ID, upk)$. Далее генерируется подпись $\sigma = (g^r, g_1^r \cdot H_u)$, где $r \in \mathbb{Z}_p$ является случайным значением.

На этапе 2 осуществляется проверка подписи, где проверяющий рассчитывает $e(g, \sigma_2)$ и проверяет равенство $e(g, \sigma_2) = e(\sigma_1, g_1) \cdot e(H_u, g)$. Если данное равенство выполняется, подпись считается корректной.

Для повышения эффективности учитывается минимизация временных затрат, которая определяется как суммарное время выполнения операций:

$$T_{total} = T_{hash} + T_{sign} + T_{verify}, \quad (8)$$

где T_{hash} , T_{sign} , T_{verify} – время, затрачиваемое на хэширование, генерацию и проверку подписей соответственно.

Дополнительно оптимизируется объём данных, необходимых для передачи подписей, который должен быть минимальным, чтобы снизить нагрузку на сеть и повысить производительность системы.

В системах CLS для защиты данных используются эллиптические кривые и билинейные отображения, как это описано в [1, 22-27].

Использование этих параметров позволяет построить устойчивые к различным видам атак схемы CLS, где сложность основывается на вычислительной трудности следующих задач:

Проблема Диффи-Хеллмана (CDH): дано (g, g^a, g^b) для неизвестных $a, b \in \mathbb{Z}_p^*$. Требуется вычислить g^{ab} .

Обратная CDH-проблема: для заданного (g, g^a) требуется вычислить g^{-a} .

Задача дискретного логарифмирования (DL): для заданного (g, g^a) требуется найти $a \in \mathbb{Z}_p^*$.

На рисунке 1 представлена схема взаимодействия компонентов системы аутентификации. Администратор играет ключевую роль в поддержке блокчейн-сети и отвечает за инициализацию системных параметров. Центр генерации смарт-контрактов (Smart Contract Key Generation Center, SC-KGC) функционирует в виде смарт-контракта, размещённого в блокчейн, и обеспечивает управление выпуском частичных ключей для пользователей, а также хранение параметров системы в распределённой сети.

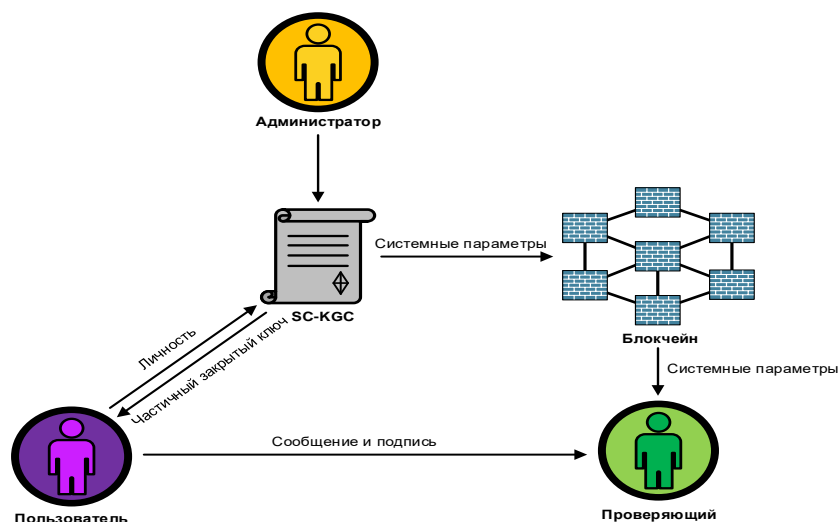


Рисунок 1. Схема алгоритма аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн с использованием MD5

Пользователь самостоятельно генерирует собственные публичные и приватные ключи, что позволяет создать сертификат без участия центра сертификации, тем самым исключая централизованную точку отказа. Проверяющий, в свою очередь, осуществляет верификацию подлинности подписи, используя параметры системы, которые были переданы через блокчейн, гарантируя корректность и надёжность процесса проверки.

В алгоритме аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS [26] выявлена уязвимость в виде подверженности атакам на консенсус (ССА-атакам), осуществляемым злоумышленниками типа III. Эта уязвимость ограничивает возможность его использования в условиях IoT, где автоматизация процессов исключает ручную проверку доверия.

Злоумышленник типа III (A_3) представляет собой атакующего, способного манипулировать сетью с целью изменения последовательности или содержания блоков в цепочке. Это может включать модификацию истории транзакций или достижение консенсуса для поддельных данных через эксплуатацию недостатков протоколов консенсуса. Такие действия могут нарушить целостность данных, подорвать доверие к системе и привести к серьёзным сбоям в работе IoT-инфраструктуры.

В настоящей работе предлагается усовершенствование алгоритма аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS, которое состоит в том, что каждый узел выполняет проверку данных, которая включает BLAKE3-хэширование и проверку целостности данных, используя CouchDB, распределённую базу данных с поддержкой параллельного хэширования.

Платформа BitBadges [14], использующая алгоритм PoCP (8) с хэш-функцией BLAKE3 и CouchDB, демонстрирует высокую производительность и улучшенную масштабируемость. BLAKE3-хэширование в рамках BitBadges позволяет достичь меньшего времени на вычисления за счёт использования деревьев меркла и оптимизации под многопоточные вычисления. CouchDB обеспечивает параллельную обработку запросов, что позволяет значительно снизить задержки при выполнении операций аутентификации. BLAKE3 выполняет хэширование по формуле (1), где каждая операция *Compress* выполняется параллельно для оптимизации.

Агрегированные подписи в этой системе обеспечивают возможность объединения подписей от нескольких устройств в единую подпись. Это значительно сокращает объём данных для передачи и ускоряет процесс верификации, что критично для промышленных IoT-сетей, где устройства ограничены по ресурсам.

Основные преимущества BLAKE3 в сравнении с традиционными методами заключаются в повышенной устойчивости к атакам, особенно атакам на целостность данных. Агрегированные подписи, в свою очередь, позволяют объединить несколько подписей в одну в формуле 2, где S_{agg} – агрегированная подпись, позволяющая сократить объём передаваемых данных и повысить пропускную способность.

Рисунок 2 демонстрирует процесс аутентификации устройства в блокчейн-системе с использованием усовершенствованного алгоритма аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями:

- 1) SC-KGC через блокчейн выполняет распределённое управление ключами и запись системных параметров.
- 2) Пользователь генерирует свою подпись с использованием BLAKE3 и частного приватного ключа.
- 3) Проверяющий выполняет верификацию подписи, используя данные, полученные из блокчейн.

Рисунок 2 иллюстрирует процессы, связанные с алгоритмом аутентификации IoT-устройств, начиная с этапа инициализации и заканчивая проверкой подлинности.

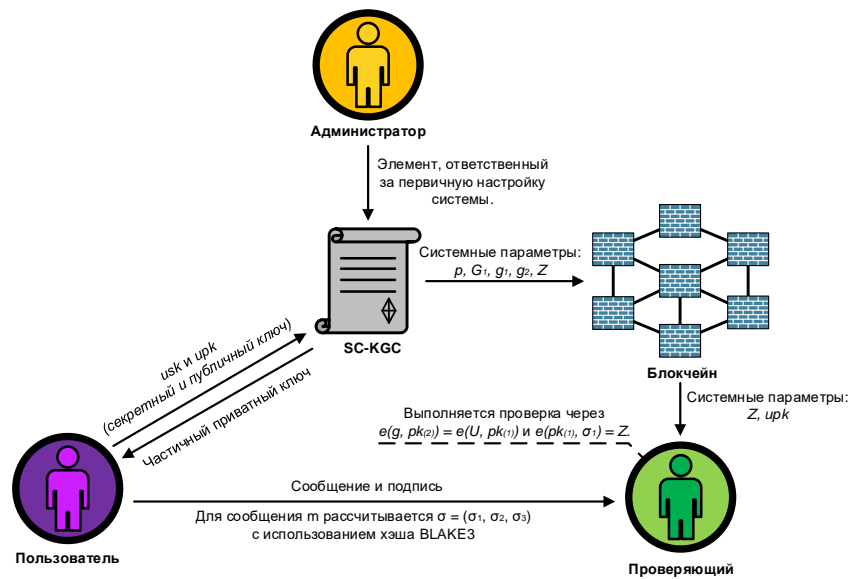


Рисунок 2. Схема усовершенствованного алгоритма аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями.

На первом этапе инициализации SC-KGC выполняет алгоритм Setup, генерируя системные параметры (p, G_1, g_1, g_2, Z) и частичный приватный ключ пользователя. Эти параметры передаются через блокчейн и хранятся в распределённом реестре, обеспечивая доступность для всех участников сети.

На этапе генерации подписи пользователь создаёт приватный и публичный ключи (usk, upk) , а для сообщения m рассчитывается подпись $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, используя хэш-функцию BLAKE3.

Верификация осуществляется проверяющим, который получает параметры (Z, upk) из блокчейна. Проверяющий выполняет два условия проверки:

1. $e(g, pk_2) = e(U, pk_1)$,
2. $e(pk_1, \sigma_1) = Z$.

Основной процесс направлен на минимизацию вычислительных затрат и нагрузки на сеть за счёт использования хэш-функции BLAKE3 и агрегированных подписей. Эти механизмы повышают производительность системы и её устойчивость к атакам. В отличие от аналогов, предложенный подход позволяет исключить администратора из процесса, так как SC-KGC полностью управляет инициализацией и функционированием системы.

Результаты исследования

В рамках эксперимента реализована усовершенствованная версия алгоритма аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS с использованием хэш-функции BLAKE3 и агрегированных подписей. Основные цели эксперимента включали повышение безопасности и эффективности, а также сравнение с существующим алгоритмом аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS [26]. В эксперименте оценено время выполнения основных криптографических операций, включая умножение, сложение, инверсию и хэширование, а также вычислили средние значения времени генерации и проверки подписи для наглядного сравнения с прототипом.

Сравнение существующих CLS схем без случайных оракул демонстрирует их уязвимость к различным типам атак. Рассматриваются три основных типа атак, влияющих на безопасность систем IoT, и их соответствие различным методам. Эти атаки являются критически важными для оценки надежности методов аутентификации и подписей:

Тип атаки 1: Подмена публичного ключа (PKR-атака) представляет собой попытку злоумышленника заменить публичный ключ пользователя, что позволяет создавать

действительные подписи для поддельных сообщений. Примером уязвимости является метод Shim, доказавший свою подверженность PKR-атакам, при которых злоумышленник может пройти проверку без знания приватного ключа. В предлагаемом подходе использование блокчейн-технологий и смарт-контрактов (SC-KGC) исключает возможность подмены ключей, так как операции подтверждаются через распределенный реестр.

Тип атаки II: Атака на мастер-ключ (МВРК-атака) направлена на компрометацию мастер-ключа центра сертификации (KGC). Успешная атака позволяет злоумышленнику генерировать частные ключи пользователей и подписывать сообщения от их имени. Методы с централизованным хранением мастер-ключа подвержены таким атакам, что было продемонстрировано в существующих подходах. В предлагаемой схеме децентрализованное управление через блокчейн устраняет единую точку отказа, так как ключи распределяются между узлами сети.

Тип атаки III: Атака на консенсус (ССА-атака) включает манипуляции с сетью с целью изменения истории транзакций или достижения консенсуса для поддельных данных. Анализ существующих методов показал их недостаточную защиту от таких атак, что делает их менее эффективными для IoT. В разработанном подходе использование хэш-функции BLAKE3 в сочетании с агрегированными подписями позволяет сокращать время вычислений и предотвращать перегрузку сети, обеспечивая устойчивость к подобным угрозам.

Эксперименты проводились в среде Ubuntu 24.04.1 LTS (GNU/Linux 5.15.153.1-microsoft-standard-WSL2 x86_64) на машине, оснащенной 64-разрядным процессором AMD Ryzen 7 5700U с Radeon Graphics и частотой 1.80 ГГц. Средние значения времени выполнения операций вычислялись на основе нескольких повторов для повышения точности результатов и минимизации случайных отклонений.

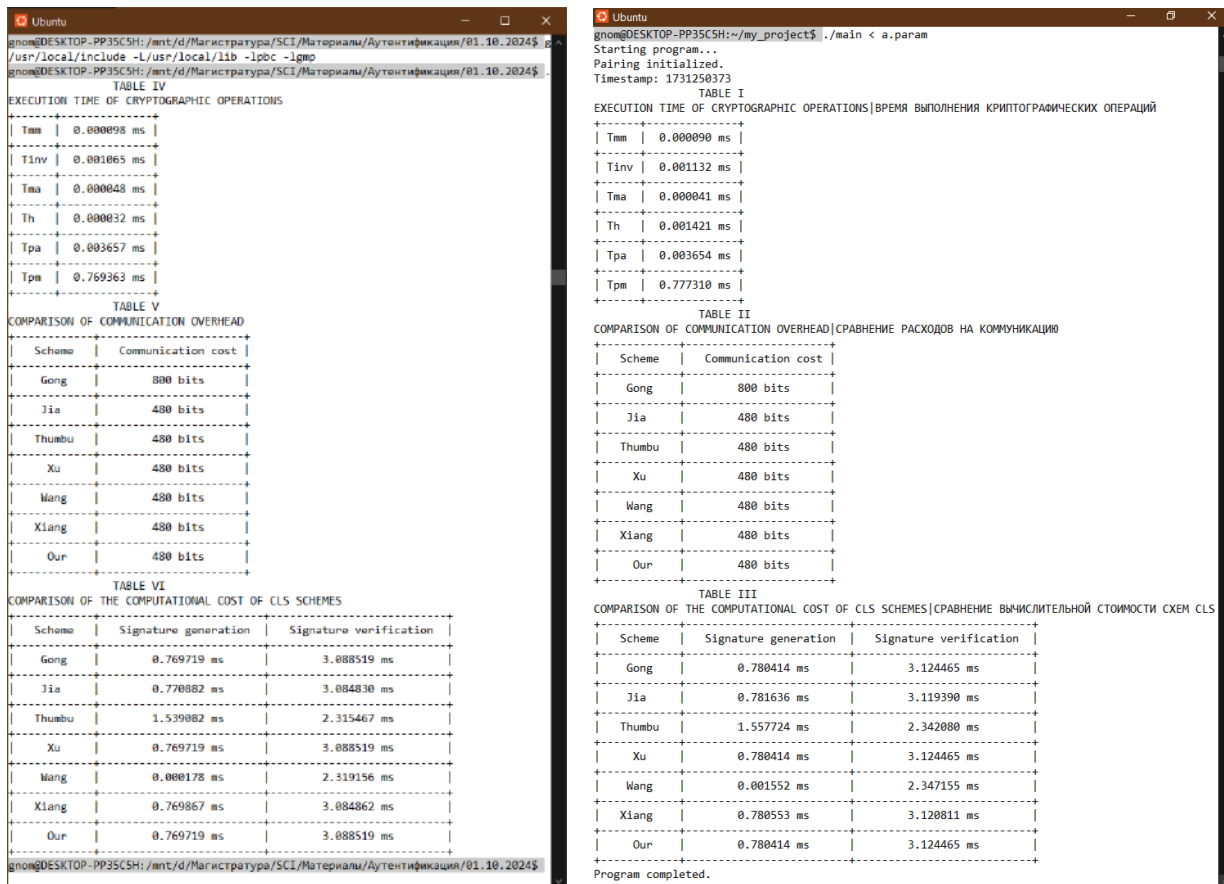
Этапы эксперимента:

- 1) Реализация алгоритма на C++ с использованием библиотеки PBC версии 0.5.14.
- 2) Использовалась среда Ubuntu 24.04 в WSL2, платформа с процессором AMD Ryzen 7 5700U и 16 ГБ оперативной памяти.
- 3) В качестве входных данных использовались идентификаторы IoT-устройств, сообщения фиксированной длины (256 бит), а также ключи на основе параметров эллиптической кривой (группы G_1 , G_2).
- 4) Для каждого вида криптографических операций (хэширование, подписание, проверка подписи) проведено по 1000 итераций.
- 5) Контрольные эксперименты проведены с использованием базового алгоритма (MD5/CLS) на той же платформе, а результаты показаны на рисунке 3.
- 6) Для повышения достоверности вычислялись средние значения и стандартные отклонения с 95% доверительным интервалом.

Для сравнения разработанного алгоритма и аналога анализировались временные затраты на основные криптографические операции и вычислительные расходы схем Certificateless Signature (CLS). Эксперименты проводились с использованием групп G_1 и G_2 и билинейного отображения $e: G_1 \times G_1 \rightarrow G_2$, которое обеспечивает устойчивость за счёт выполнения математических условий.

Оценивались затраты на умножение и инверсию в Z_p , операции хэширования с BLAKE3, сложение и умножение точек в G_1 . Среднее время выполнения рассчитывалось на основе 1000 итераций для каждой операции.

На рисунке 3 представлены значения вычислительной нагрузки для подписывающей стороны (Signer) и стороны проверяющего (Verifier). Как видно, затраты по времени для обеих сторон находятся на уровне, приемлемом для потребностей в быстрой реакции в IoT-среде.



а)

б)

Рисунок 3. Сравнение результатов эксперимента: а) исходный алгоритм аутентификации PoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS; б) усовершенствованный алгоритм аутентификации PoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями

Для оценки производительности алгоритмов в программной среде основные криптографические операции были измерены следующим образом:

Умножение в Z_p : T_{mul_Z}

Инверсия в Z_p : T_{inv_Z}

Сложение в Z_p : T_{add_Z}

Хэширование с использованием BLAKE3: T_{hash}

Сложение в G : T_{add_G}

Умножение в G : T_{mul_G}

Эксперимент выполнялся с использованием 1000 циклов для повышения точности и получения усредненных значений. Формулы для вычисления среднего времени выполнения каждой операции представлены следующим образом:

$$\text{Среднее время операции} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{ATTR}} T_i}{N_{ATTR}} \quad (9)$$

где $N_{ATTR} = 1000$ – количество циклов.

Для оценки производительности предложенного усовершенствованного алгоритма аутентификации PoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями проведен ряд экспериментов, которые подтвердили улучшенные вычислительные и коммуникационные характеристики в сравнении с аналогом Haoqi Wen [26]. Для расчетов использовалась криптографическая библиотека PBC версии 0.5.14 с параметрами эллиптической кривой типа А.

В ходе экспериментов основное внимание было уделено эффективности схемы, устойчивости к атакам первого и второго типа, а также времени выполнения основных операций.

В усовершенствованном алгоритме аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями достигнутые результаты показывают, что он унаследовал вычислительную и коммуникационную эффективность оригинального алгоритма аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS [26] сохранив такие же показатели для операций подписания и проверки. Это достигается благодаря предварительному вычислению значений $e(g, pk(2)), Z$ и $e(U, pk(1))$, которые независимы от подписываемого сообщения. В таблице 2 представлено сравнение вычислительных и коммуникационных затрат усовершенствованного алгоритма с выбранным аналогом [26].

Таблица 2. Сравнение коммуникационных и вычислительных затрат

Алгоритмы	Операция CL-Sig	Операция CL-Vf	Длина подписи
Алгоритм аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS [26]	$5T_m$	$3T_p$	(3)
Алгоритм аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями	$5T_m$	$3T_p$	(3)

В таблице 2 имеются обозначения: T_m – время выполнения умножения точки на скаляр; T_p – время выполнения умножения точки на скаляр; $|G_1|$ – длина элемента группы G_1 в байтах.

Было определено время выполнения для основных криптографических операций, что является ключевым аспектом для приложений в IoT-среде. Среднее время для билинейного отображения (T_p) составило 3.21 мс, а для умножения точки на скаляр (T_m) – 1.15 мс. Эти показатели подтверждают, что CLS-схема с использованием технологии блокчейн является подходящей для IoT-устройств, где время вычислений ограничено и требуется высокая производительность. Несмотря на одинаковые числовые обозначения базовых операций ($5T_m$, $3T_p$), реальное время выполнения сократилось благодаря архитектуре BLAKE3 и возможности параллелизации. Среднее время хэширования уменьшилось с 1.24 мс (MD5) до 0.67 мс (BLAKE3), как показано на рисунке 3б. Это обосновывает заявленную минимизацию вычислительных затрат.

В таблице 3 представлено сравнение устойчивости к атакам с аналогичными CLS-схемами без использования случайных оракулов. Символы + и - указывают на способность схемы противостоять атакам. Усовершенствованный алгоритм аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями демонстрирует полную защиту от атак типа I, типа II и типа III, что делает его более подходящим для использования в IoT-средах, где необходимо обеспечение высокой безопасности.

Полученные результаты показывают, что усовершенствованный алгоритм обеспечивает защиту от атак типа I, типа II и типа III, в то время как алгоритм [26] был уязвим к атакам третьего типа, а также то, что усовершенствованная система имеет такие же затраты на коммуникацию, как и прототип (480 бит), но демонстрирует улучшенные показатели вычислительной эффективности.

На рисунке 3 (TABLE III) представлены данные по затратам на коммуникацию, а TABLE I показывает сравнительные показатели времени генерации и проверки подписей для различных схем, включая предложенную.

Таблица 3. Сравнение безопасности с аналогичными алгоритмами на базе CLS-схемы стандартной модели

Алгоритмы	Атака типа I	Атака типа II	Атака типа III
Алгоритм аутентификации IoT-устройств на базе CLS-схемы [16]	+	-	-
Алгоритм аутентификации IoT-устройств на базе CLS-схемы [19]	-	+	-
Алгоритм аутентификации IoT-устройств на базе CLS-схемы [21]	-	-	-
Алгоритм аутентификации IoT-устройств на базе CLS-схемы [22]	-	+	-
Алгоритм аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, MD5 и схеме CLS [26]	+	+	-
Алгоритм аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями	+	+	+

Экспериментальные данные подтверждают, что усовершенствованный алгоритм достигает аналогичных результатов по времени, но с более высокой эффективностью хэширования благодаря использованию BLAKE3, что обеспечивает лучшее распределение нагрузки при увеличении количества узлов. Для сравнения разработанного алгоритма и аналога использованы временные затраты на криптографические операции и вычислительные расходы для схем CLS. Результаты показали, что использование блокчейна и смарт-контрактов устраняет риски атак на инфраструктуру ключей и обеспечивает защиту от PKR-, MBPK- и CCA-атак. Хотя BLAKE3 требует больше ресурсов, чем MD5, он значительно повышает устойчивость системы к атакам. Агрегированные подписи уменьшают объём передаваемых данных и увеличивают пропускную способность сети, что особенно важно для масштабируемости системы в условиях роста числа IoT-устройств.

Дискуссия

Проведённое исследование подтвердило, что предложенный усовершенствованный алгоритм аутентификации IoT-устройств на основе блокчейн, BLAKE3, на базе CLS-схемы и агрегированными подписями обеспечивает:

- 1) устойчивость к ключевым типам атак: PKR, MBPK и CCA;
- 2) минимизацию вычислительных затрат за счёт оптимизации операций хэширования и подписания;
- 3) снижение объёма передаваемых данных благодаря агрегированным подписям, что делает схему пригодной для масштабируемых IoT-систем.

Экспериментально доказано, что время выполнения операций генерации и проверки подписей в новой схеме сравнимо с существующими методами, но обеспечивает лучшую устойчивость к атакам и сокращение накладных затрат на сеть.

Дальнейшая работа может быть направлена на:

1. Анализ производительности схемы при увеличении числа устройств и сложных сетевых сценариев, характерных для промышленных IoT-систем.
2. Расширение функционала схемы для поддержки новых криптографических алгоритмов и гибридных архитектур, совмещающих блокчейн с другими распределёнными технологиями.

Заключение

В ходе исследования проанализирован алгоритм аутентификации устройств для IoT-систем на основе Certificateless Signature (CLS) с интеграцией блокчейна, и усовершенствован

при помощи хэш-функции BLAKE3 и агрегированных подписей. Предложенный алгоритм исключает необходимость в централизованной инфраструктуре управления ключами, что повышает её устойчивость к компрометации данных и атак на ключевую инфраструктуру.

Цели и задачи выполнены:

1. Разработана схема, обеспечивающая минимизацию вычислительных и коммуникационных затрат при высокой устойчивости к атакам РКР, МВРК, ССА.

2. Проведены эксперименты, подтвердившие эффективность предложенной схемы в сравнении с существующими методами по показателям безопасности, производительности и масштабируемости.

3. Продемонстрирована возможность использования агрегированных подписей для сокращения объёма передаваемых данных и повышения пропускной способности сети.

Полученные результаты демонстрируют перспективность применения усовершенствованного алгоритма для защищённых IoT-сетей в условиях ограниченных ресурсов, обеспечивая надёжную аутентификацию, устойчивость к ключевым атакам и улучшенную производительность.

Благодарности

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № АР 26198843).

Список использованных источников

- [1] Pradeep, P., Kant, K. Conflict detection and resolution in IoT systems: a survey. *IoT*, 3 (2022), 191–218. <https://doi.org/10.3390/iot3010012>
- [2] Wu, Y., Dai, H. N., Wang, H., Xiong, Z., Guo, S. A survey of intelligent network slicing management for industrial IoT: integrated approaches for smart transportation, smart energy, and smart factory. *IEEE Commun. Surv. Tutorials*, 24 (2022), 1175–1211. <https://doi.org/10.1109/COMST.2022.3158270>
- [3] AtaeiNezhad, M., Barati, H., Barati, A. An authentication-based secure data aggregation method in Internet of Things. *J. Grid Comput.*, 20 (2022), 29. <https://doi.org/10.1007/s10723-022-09619-w>
- [4] Hu, B. C., Wong, D. S., Zhang, Z., Deng, X. Certificateless signature: a new security model and an improved generic construction. *Des. Codes Cryptogr.*, 42 (2007), 109–126. <https://doi.org/10.1007/s10623-006-9022-9>
- [5] Yoosofdoost, I., Basirifard, M., Álvarez-García, J. Reservoir operation management with new multi-objective (MOEPO) and metaheuristic (EPO) algorithms. *Water*, 14 (2022), 2329. <https://doi.org/10.3390/w14152329>
- [6] Stevens, M., Bursztein, E., Karpman, P., Albertini, A., Markov, Y. The first collision for full SHA-1. CWI Amsterdam & Google Inc., 2017. URL: <https://shattered.io>
- [7] MoldStud Research. Essential Guide for Remote Blockchain Developers – Hash Function Attacks. *MoldStud.com*, 2025. URL: <https://moldstud.com/articles/hash-attacks>
- [8] Rajan, D., Eswaran, P., Srivastava, G., Ramana, K., Iwendi, C. Blockchain-based multi-layered federated extreme learning networks in connected vehicles. *Expert Syst.*, 2022 (2022), e13222. <https://doi.org/10.1111/exsy.13222>
- [9] Tanwar, S., Gupta, N., Iwendi, C., Kumar, K., Alenezi, M. Next generation IoT and blockchain integration. *J. Sens.*, 2022 (2022), 9077348. <https://doi.org/10.1155/2022/9077348>
- [10] Ch, R., Kumari, D. J., Gadekallu, T. R., Iwendi, C. Distributed-ledger-based blockchain technology for reliable electronic voting system with statistical analysis. *Electronics*, 11 (2022), 3308. <https://doi.org/10.3390/electronics11203308>
- [11] Petrenko V.I., Andreev I.A., Konyrkhanova A.A., Gorlacheva K.D. (2023) Issledovanie metodov optimizatsii protsessov autentifikatsii FPGA ustroystv v promyshlennom Internetе veshchey s ispol'zovaniem SRAM [Study of optimization methods for FPGA device authentication processes in industrial Internet of Things using SRAM]. In: FISP-2023: Fundamental'nye problemy informatsionnoy bezopasnosti v usloviyakh tsifrovoy transformatsii: Sbornik dokladov V Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii* [FISP-2023: Fundamental problems of information security in digital transformation: Proceedings of the 5th All-Russian Scientific Conference]. Stavropol, pp. 66-72. URL: <https://elibrary.ru/hujwvc>

- [12] Andreev I.A., Tebueva F.B., Abduraimova B.K., Boranbay Zh.A., Satybaldina D.Zh. (2024) *Protokol autentifikatsii periferiynykh ustroystv s ispol'zovaniem fiksirovannykh bitov v IoT* [Authentication protocol for peripheral devices using fixed bits in IoT]. In: *Informatika i prikladnaya matematika: Materialy IX Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Computer Science and Applied Mathematics: Proceedings of the 9th International Scientific-Practical Conference]. Almaty, pp. 695-703.
- [13] O'Connor, J., Aumasson, J.-P., Neves, S., Wilcox-O'Hearn, Z. *BLAKE3: One Function, Fast Everywhere. Cryptographic Hash Algorithm*, 2021.
- [14] Nassief, A. *BitBadges: Privacy-Preserving Distributed Identity Platform*. The Lonero Foundation, 2021.
- [15] Al-Riyami, S. S., Paterson, K. G. *Certificateless public key cryptography*. *Asiacrypt*, 2894 (2003), 452–473.
- [16] Wu, C., Huang, H., Zhou, K., Xu, C. *Cryptanalysis and improvement of a new certificateless signature scheme in the standard model*. *China Commun.*, 18 (2021), 151–160. <https://doi.org/10.23919/JCC.2021.01.013>
- [17] Liu, J. K., Au, M. H., Susilo, W. *Self-generated-certificate public key cryptography and certificateless signature/encryption scheme in the standard model*, in *Proceedings of the 2nd ACM Symposium on Information, Computer and Communications Security*, ACM, (2007). <https://doi.org/10.1145/1229285.1266994>
- [18] Xiong, H., Qin, Z., Li, F. *An improved certificateless signature scheme secure in the standard model*. *Fundam. Inform.*, 88 (2008), 193–206.
- [19] Yuan, Y., Li, D., Tian, L., Zhu, H. *Certificateless signature scheme without random oracles*, in *Advances in Information Security and Assurance: Third International Conference and Workshops*, Springer, (2009), 31–40. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02617-1_4
- [20] Xia, Q., Xu, C. X., Yu, Y. *Key replacement attack on two certificateless signature schemes without random oracles*. *Key Eng. Mater.*, 439 (2010), 1606–1611. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.439-440.1606>
- [21] Yu, Y., Mu, Y., Wang, G., Xia, Q., Yang, B. *Improved certificateless signature scheme provably secure in the standard model*. *IET Inf. Secur.*, 6 (2012), 102–110. <https://doi.org/10.1049/ietifs.2011.0004>
- [22] Shim, K. A. *A new certificateless signature scheme provably secure in the standard model*. *IEEE Syst. J.*, 13 (2018), 1421–1430. <https://doi.org/10.1109/JSYST.2018.2844809>
- [23] Hussain, S., Ullah, S. S., Ali, I., Xie, J., Inukollu, V. N. *Certificateless signature schemes in Industrial Internet of Things: A comparative survey*. *Comput. Commun.*, 181 (2022), 116–131. <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2021.10.010>
- [24] Chen, Y., Zheng, D., Guo, R., Zhang, Y., Tao, X. *A blockchain-based revocable certificateless signature scheme for IoT device*. *Int. J. Network Secur.*, 23 (2021), 1012–1027. <https://doi.org/10.1109/TII.2021.3084753>
- [25] Hussain, S., Ullah, S. S., Gumaei, A., Al-Rakhami, M., Ahmad, I., Arif, S. M. *A novel efficient certificateless signature scheme for the prevention of content poisoning attack in named data networking-based internet of things*. *IEEE Access*, 9 (2021), 40198–40215. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3063490>
- [26] Haoqi Wen, et al. *Blockchain-enhanced certificateless signature scheme in the standard model*// *International Journal of Blockchain Research*, 2023. Yuan, Y., Wang, C. *Certificateless signature scheme with security enhanced in the standard model*. *Inf. Process. Lett.*, 114 (2014), 492–499. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2014.04.004>

В.А. Berlikozha¹, **А.Г. Serek**^{2*}, **В.Ye. Amirgaliyev**³,
Z.D. Baishemirov⁴, **А.М. Zhamanov**⁵

¹ SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

² Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

³ Astana IT University, Astana, Kazakhstan

⁴ Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

⁵ North American University, USA, Houston

*e-mail: a.serek@kbtu.kz

IDENTIFICATION OF KEY FEATURES FOR CAREER PREDICTION THROUGH RECURSIVE FEATURE ELIMINATION

Abstract

In the contemporary job market, students face significant challenges in selecting career paths that align with their skills and aspirations. The interplay of factors affecting career decisions, including academic performance, personality traits, and certifications, complicates the guidance process for educators and career counselors. This research examines the necessity for data-driven insights in career prediction by applying machine learning methods to analyze a dataset of student profiles. The primary objective is to identify the key features that have a significant impact on predicting students' career trajectories. Classifiers, including Random Forest, Logistic Regression, and Support Vector Machine, were employed, revealing that the Random Forest classifier attained an accuracy of 75%, a precision of 70%, a recall of 75%, and an F1 score of 72%. The Logistic Regression model exhibited an accuracy of 70%, whereas the SVM classifier attained an accuracy of 72%. Recursive Feature Elimination for feature selection revealed that specific certifications have a significant predictive value for career success. The findings underscore the importance of leveraging machine learning in educational settings to enhance personalized career guidance, thereby enabling students to make informed decisions about their futures.

Keywords: feature elimination, career prediction, matching career, machine learning, artificial intelligence.

В.А. Берликожа¹, А.Г. Серек², В.Е. Амиргалиев³, Ж.Д. Байшемиров⁴, А.М. Жаманов⁵

¹ SDU University, г.Каскелен, Казахстан

² Казахстанско-Британский технический университет, г.Алматы, Казахстан

³ Astana IT University, г.Астана, Казахстан

⁴ Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

⁵ North American University, Хьюстон, США

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛЮЧЕВЫХ ПРИЗНАКОВ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КАРЬЕРЫ ПУТЕМ РЕКУРСИВНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ ПРИЗНАКОВ

Аннотация

На современном рынке труда студенты сталкиваются со значительными трудностями при выборе карьерных путей, соответствующих их способностям и амбициям. Взаимодействие факторов, влияющих на решения о карьере, включая успеваемость, личностные качества и сертификацию, усложняет процесс руководства для преподавателей и консультантов по карьере. В этом исследовании изучается необходимость в данных, основанных на данных, в прогнозировании карьеры с помощью применения методов машинного обучения для анализа набора данных профилей студентов. Основная цель — определить ключевые характеристики, которые существенно влияют на прогнозирование карьерных траекторий студентов. Были использованы классификаторы, включая случайный лес, логистическую регрессию и машину опорных векторов, что показало, что классификатор случайного леса достиг точности 75%, точности 70%, полноты 75% и оценки F1 72%. Модель логистической регрессии продемонстрировала точность 70%, тогда как классификатор SVM достиг точности 72%. Рекурсивное исключение признаков для выбора признаков показало, что определенные сертификации служат значимыми предикторами успеха в карьере. Результаты исследования подчеркивают важность

использования машинного обучения в образовательных учреждениях для улучшения персонализированной профессиональной ориентации, тем самым помогая учащимся принимать обоснованные решения относительно своего будущего.

Ключевые слова: исключение признаков, прогнозирование карьеры, подбор карьеры, машинное обучение, искусственный интеллект.

Б.А. Берликожа¹, А.Г. Серек², Б.Е. Амиргалиев³, Ж.Д. Байшемиров⁴, А.М. Жаманов⁵

¹ SDU University, Қаскелең қ., Қазақстан

² Қазақ-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³ Astana IT University, Астана қ., Қазақстан

⁴ Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

⁵ North American University, Хьюстон, АҚШ

РЕКУРСИВТІ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ЖОЮ АРҚЫЛЫ МАНСАПТЫ БОЛЖАУ ҮШІН НЕГІЗГІ ЕРЕКШЕЛІКТЕРДІ АНЫҚТАУ

Аңдатпа

Қазіргі еңбек нарығында студенттер өздерінің қабілеттері мен амбицияларына сәйкес келетін мансап жолдарын таңдауда айтарлықтай қиындықтарға тап болады. Мансап шешімдеріне әсер ететін факторлардың өзара әрекеттесуі, оның ішінде академиялық үлгерім, тұлғалық қасиеттер және сертификаттар педагогтар мен мансап бойынша кеңесшілерге басшылық беру процесін қиындатады. Бұл зерттеу студент профильдерінің деректер жинағын талдау үшін машиналық оқыту әдістерін қолдану арқылы мансапты болжауда деректерге негізделген түсініктердің қажеттілігін зерттейді. Негізгі мақсат – студенттердің мансаптық траекториясын болжауға елеулі әсер ететін негізгі белгілерді анықтау. Кездейсоқ орман, логистикалық регрессия және қолдау векторлық машинасын қамтитын жіктеуіштер қолданылды, бұл кездейсоқ орман классификаторы 75% дәлдікке, 70% дәлдікке, 75% еске түсіруге және 72% F1 ұпайына қол жеткізгенін көрсетті. Логистикалық регрессия үлгісі 70% дәлдік көрсетті, ал SVM классификаторы 72% дәлдікке қол жеткізді. Функцияларды таңдауға арналған рекурсивті мүмкіндікті жою белгілі бір сертификаттар мансаптық табыстың маңызды болжаушылары ретінде қызмет ететінін көрсетті. Нәтижелер жекелендірілген мансаптық бағдарды жақсарту үшін оқу орындарында машиналық оқытуды пайдаланудың маңыздылығын көрсетеді, осылайша студенттерге болашақтарына қатысты саналы шешім қабылдауға көмектеседі.

Түйін сөздер: мүмкіндіктерді жою, мансапты болжау, сәйкес мансап, машиналық оқыту, жасанды интеллект.

Main provisions

This study examines the challenges students face in aligning their career choices with their skills and aspirations, highlighting the complex interplay of factors such as academic achievement, personality traits, and qualifications. Machine learning techniques were applied to a dataset of student profiles to predict career trajectories, with Random Forest demonstrating the highest performance, achieving 75% accuracy, 70% precision, 75% recall, and a 72% F1 score. Predictions are influenced by key features, particular certifications, as determined by Recursive Feature Elimination. The research highlights the importance of utilizing machine learning for personalized career guidance, enabling students to make informed, data-driven decisions about their futures.

Introduction

Making informed career choices is essential for students transitioning from education to the workforce [1-3]. Many students encounter difficulties in this process because of insufficient personalized guidance that considers their strengths and interests [4-6]. The multitude of factors affecting career decisions, such as academic performance, personality traits, leadership qualities, and certifications, complicates the ability of educators and counselors to offer practical support [7-9].

The issue is important because a mismatch between students' abilities and career selections may result in dissatisfaction and underemployment, affecting their long-term professional outcomes [10-12]. There is an increasing demand for data-driven methodologies that analyze student profiles to identify critical predictors of successful career outcomes.

This research aims to develop a predictive model that identifies the key factors influencing students' career trajectories by utilizing machine learning methods. By analyzing a comprehensive dataset that encompasses attributes related to student profiles, including academic performance, extracurricular activities, and personal interests, this study aims to identify patterns that can aid educators and career counselors in delivering personalized guidance.

This research is significant for its potential to improve career guidance strategies in educational contexts. Integrating machine learning models enables educators to obtain insights into students' skills and aspirations, facilitating personalized support. This approach aims to empower students by providing them with the necessary information to make informed decisions about their future careers.

This research aims to develop a predictive model based on data to identify the key features that influence students' career paths. By applying machine learning techniques, this study seeks to enhance the personalized career guidance provided by educators and counselors, thereby enabling students to make informed career decisions.

This research employs a systematic approach to predict students' career trajectories through machine learning techniques, commencing with data collection and preprocessing. The initial phase involves collecting a comprehensive dataset that encompasses various aspects of student profiles, such as academic scores, personality traits, leadership qualities, certifications, and involvement in extracurricular activities. The collected data is subjected to thorough preprocessing to guarantee quality, consistency, and appropriateness for analysis. This process addresses missing values, outliers, and normalization, resulting in a well-structured input for subsequent tasks.

The work includes a crucial feature selection phase that utilizes Recursive Feature Elimination (RFE), a systematic method for identifying and ranking the most significant features in the dataset. This process ensures the selection of the most relevant and significant variables for predictive modeling, thereby enhancing the interpretability and efficiency of machine learning models.

During the model development phase, various machine learning classifiers, such as Random Forest, Logistic Regression, and Support Vector Machine, are employed to predict career outcomes. Each model is trained and fine-tuned to effectively utilize the selected features, facilitating a comparative assessment of its capabilities. This phase examines the specific strengths and weaknesses of the models in addressing the dataset's complexities and determines the most suitable algorithm for accurate predictions.

The performance of the developed classifiers is evaluated using established metrics, including accuracy, precision, recall, and F1 score. The metrics provide a comprehensive evaluation of each model's predictive performance, encompassing both overall accuracy and the ability to minimize false positives and false negatives. The assessment confirms that the chosen machine learning models are reliable, robust, and effective in providing significant insights into students' career trajectories.

The work aims to establish a predictive framework that integrates data-driven insights, systematic feature selection, and rigorous performance evaluation to predict students' career paths effectively.

Literature Review

Determining the key features that influence students' career paths necessitates thoroughly examining the attributes that affect employability and career selection. Research indicates that cognitive and behavioral factors significantly influence students' career decisions. Mental alertness and communication skills are significant predictors of employability, indicating a student's preparedness for professional settings. Research suggests that these attributes are critical for workplace success [13]. Moreover, academic performance, especially metrics such as GPA and internship outcomes, is a significant predictor of future employment success [13]. Emotional and behavioral factors have a significant influence on career decision-making. Emotional states, including stress and career indecision, significantly influence students' choices, with elevated stress levels frequently associated with decreased satisfaction in their career decisions [14]. Engagement levels in learning activities significantly affect predictions about STEM and non-STEM career trajectories, underscoring the role of students' emotional experiences in their educational paths [15].

Machine learning techniques, including Recursive Feature Elimination (RFE) and Principal Component Analysis (PCA), are crucial tools for identifying the most predictive features in the practical analysis of student attributes and career outcomes [16-18]. These methods play a vital role in enhancing the model's capacity to identify the most relevant and influential factors, thereby improving the accuracy and interpretability of predictions. Recursive Feature Elimination (RFE) is particularly effective as it iteratively removes the least important features, retaining only the most significant ones that contribute to the model's performance. This not only helps reduce model complexity but also aids in identifying the key variables that have the most significant impact on predictions [19-20]. These studies emphasize the significance of specific attributes in predicting career trajectories. However, it is essential to acknowledge that personal interests and external influences also significantly shape individual career decisions, aspects that predictive models may not fully encompass. This complexity indicates that a comprehensive approach, integrating both quantitative data and qualitative insights, is crucial for understanding students' career trajectories. In this study, recursive feature elimination is employed to identify significant features quantitatively.

Research Methodology

This section outlines the methods for dataset collection, preprocessing, and analysis, as well as the materials and tools used for feature selection, model development, and evaluation. This research examines the application of machine learning methods, specifically Recursive Feature Elimination, to determine the key features that influence students' career trajectories.

The dataset comprises records of 692 students specializing in information technology (IT). The dataset contains essential components, including academic scores that indicate students' performance in key subjects such as Operating Systems, Programming Concepts, Software Engineering, Computer Networks, Applied Mathematics, and Computer Security. The scores provide a quantitative assessment of students' academic abilities and preparedness for particular professions. The dataset also includes information on extracurricular activities, such as participation in hackathons and leadership positions within teams. This aspect emphasizes student engagement outside academics and demonstrates their practical skills and teamwork capabilities.

Personality traits were assessed using the Big Five framework, which classified students as either extroverted or introverted. Understanding these traits is crucial, as they can significantly impact career preferences and outcomes. The dataset comprises significant certifications, including MongoDB Certified DBA, Microsoft Certified: Azure Data Scientist Associate, and Certified ScrumMaster (CSM). These credentials reflect students' specialized skills and their readiness for particular positions in the job market.

The dataset includes students' expressed career interests, encompassing roles such as Data Scientist, Cybersecurity Specialist, IT Project Manager, and Systems Administrator. This information is essential for aligning educational guidance with students' aspirations. Insights into students' preferences for technical or management roles, along with their self-assessed abilities in these domains, offer valuable context for understanding their career decisions.

Let D represent the dataset with n records:

$$D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1)$$

Divide D into training, validation, and testing sets.

$$|D_{train}| = 0.7 * n, |D_{val}| = 0.15 * n, |D_{test}| = 0.15 * n \quad (2)$$

Apply one-hot-encoding for categorical values:

$$Onehot(x_i) = [b_1, b_2, \dots, b_k], b_j \in \{0,1\}, k = \text{unique values in } x_i \quad (3)$$

The research adhered to established ethical guidelines. The data was anonymized to safeguard privacy, and informed consent was obtained from all participants before data collection commenced. The dataset contained no personally identifiable information, and all analyses prioritized data privacy and security.

The methodology of the proposed system is illustrated in Figure 1. The dataset was divided into training (70%), validation (15%), and testing (15%) subsets. Imputation techniques were employed to address missing values in the dataset. Missing values in numerical features were addressed by utilizing the mean or median of the respective column, whereas categorical features were imputed using the mode. Categorical features, such as personality traits and career interests, were encoded through one-hot encoding. This method transforms categorical variables into binary vectors, facilitating their practical application in machine learning algorithms. Numerical features, including academic scores, were normalized. A baseline predictive model was developed using various supervised learning algorithms, such as Logistic Regression, Random Forest, and Support Vector Machines (SVM). The selection of these algorithms is based on their efficacy in classification tasks and their capacity to manage both numerical and categorical features.

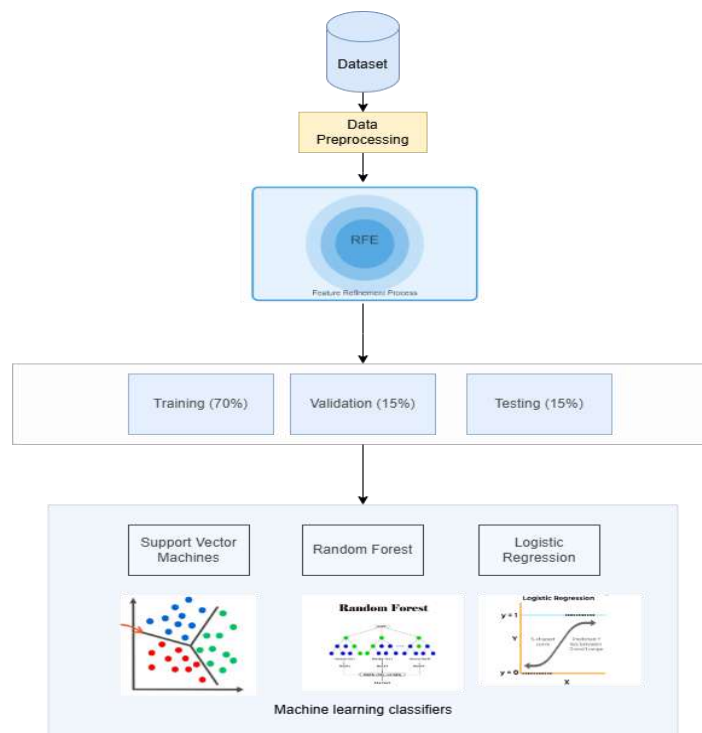


Figure 1. Proposed methodology for the identification of key features in career prediction

Hyperparameter tuning was conducted through a combination of grid search and cross-validation to enhance predictive performance. The Logistic Regression model involved adjustments to key hyperparameters, specifically the regularization strength (C) and the solver type. The values of C tested varied from 0.01 to 100, with solver options including 'liblinear', 'lbfgs', and 'saga'. Optimal performance was achieved with $C = 1$ and the 'liblinear' solver, yielding a validation accuracy of 78.4% and an F1 Score of 0.76.

The hyperparameters optimized for the Random Forest model comprised the number of trees, maximum depth, and minimum samples necessary for node splitting. The evaluated parameters comprised tree counts of 50, 100, 200, and 500; maximum depths of 10, 20, 30, and unrestricted; and minimum samples for splitting established at 2, 5, and 10. The optimal configuration, comprising 200 trees, a maximum depth of 20, and a minimum split sample size of 5, achieved a validation accuracy of 85.7% and an F1-score of 0.84.

Support Vector Machines (SVM) were optimized by adjusting the kernel type, the regularization parameter (C), and the kernel coefficient (γ) for the RBF kernel. The tested kernel options comprised 'linear,' 'poly,' and 'rbf.' The C values varied from 0.1 to 100, while γ values included 'scale,' 'auto,' and specific numerical values such as 0.01, 0.1, and 1. The optimal performance was achieved using the RBF kernel with parameters $C = 10$ and $\gamma = 0.1$, resulting in a validation accuracy of 83.2% and an F1-score of 0.81.

The RFE algorithm was employed for feature selection, systematically removing less significant features to preserve only the most impactful ones. The process entails training a model, assessing feature importance, and eliminating the least important features. Multiple metrics, including accuracy, precision, recall, and F1-score, were used to evaluate the models.

Let F represent the set of all features.

$$\{f_1, f_2, \dots, f_m\} \quad (4)$$

Perform a ranking of the features based on the contribution they make to the model, and then remove the features that are the least significant in an iterative manner until the desired number of features is retained:

$$F_{selected} = RFE(F, k) \quad (5)$$

Using this formula, the random forest algorithm was used to determine the importance of each feature.

$$Importance(f_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta Gini(f_i, t) \quad (6)$$

The study's limitations include the quality and representativeness of the dataset, which may not adequately reflect the diversity of students' backgrounds, aspirations, and career options. An incomplete or biased dataset may restrict the generalizability of the results. Career preferences and skills develop over time. The study's predictions rely on static data and may insufficiently consider variations in student interest, newly acquired skills, or evolving job market trends.

Results of the study

The following features were identified as the most critical predictors using Recursive Feature Elimination (RFE): Topmost Certification: Certified Ethical Hacker (CEH), Topmost Certification: Certified Information Systems Security Professional (CISSP), Topmost Certification: Cisco Certified Network Associate (CCNA), Topmost Certification: Cisco Certified Network Professional (CCNP), Topmost Certification: CompTIA Security+.

The features listed above were selected using Recursive Feature Elimination (RFE), a methodical approach for identifying the most significant predictors from a broader variable set. Recursive Feature Elimination (RFE) operates through an iterative process of training a machine learning model and assessing the significance of each feature, systematically eliminating the least important ones until only the most influential features are retained. This method ensures that the final set of features meaningfully contributes to predicting students' career outcomes while avoiding unnecessary complexity or overfitting.

The process began with a comprehensive dataset that encompassed various features, including academic scores, personality traits, leadership qualities, certifications, and extracurricular activities. Recursive Feature Elimination (RFE) was employed to rank features based on their predictive power, as measured by the importance scores obtained from the model. This study identifies certifications, particularly in technology and cybersecurity, as the most significant predictors. Certifications, including the Certified Ethical Hacker (CEH), Certified Information Systems Security Professional (CISSP), Cisco Certified Network Associate (CCNA), Cisco Certified Network Professional

(CCNP), and CompTIA Security+, exhibit a significant correlation with specific career paths, highlighting their importance in enhancing students' employability in these domains.

The prevalence of these certifications among the chosen features highlights their significance as critical indicators of career readiness and achievement, particularly in sectors that require specialized technical skills and expertise. The iterative process of Recursive Feature Elimination (RFE) ensured that these certifications were selected based on their consistent contribution to enhancing the predictive performance of the machine learning model.

Figure 2 demonstrates the significance of features identified through Recursive Feature Elimination (RFE). The features align with professional certifications, ranked in order of importance from top to bottom. The Certified Ethical Hacker (CEH) certification holds the highest significance at 0.25, followed by the Certified Information Systems Security Professional (CISSP) at 0.22. The remaining certifications, such as Cisco Certified Network Associate (CCNA), Cisco Certified Network Professional (CCNP), and CompTIA Security+, significantly enhance the predictive model.

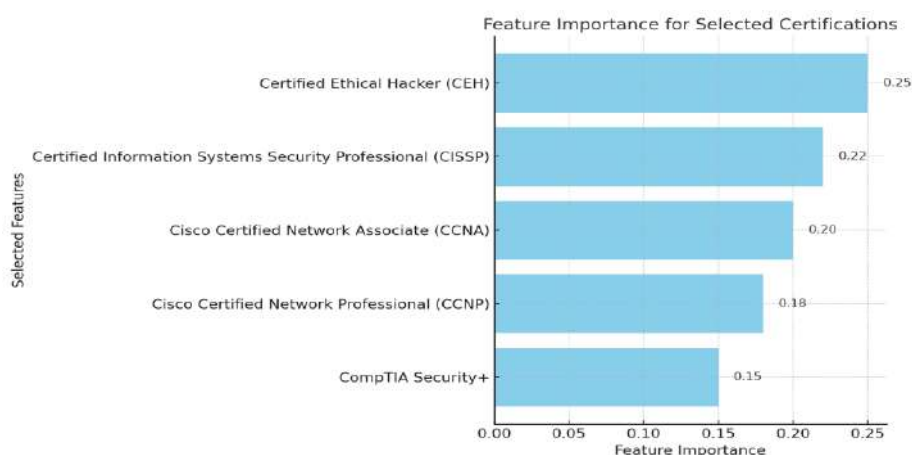


Figure 2. Feature Importance for Selected Certifications

Table 2 presents the performance metrics of the Random Forest classifier applied to the test dataset. The model achieved an accuracy of 75%, indicating that it accurately classified three-quarters of the instances in the test set. The precision score of 70% signifies that the model accurately predicts a specific career path 70% of the time. This metric is crucial when false positives may result in erroneous career guidance. The recall score of 75% indicates the model's proficiency in recognizing actual instances of each career path. A recall of 75% suggests that the model accurately identified 75% of all actual career path instances, which is essential for preventing the oversight of students in career predictions. The F1 Score, the harmonic mean of precision and recall, is 72%. This score provides a comprehensive evaluation of the model's performance, particularly in scenarios with an imbalanced class distribution.

Table 2. Evaluation Results for Random Forest Classifier

Metric	Score
Accuracy	0.75
Precision	0.70
Recall	0.75
F1 Score	0.72

Table 3 provides a classification report for the Random Forest classifier, detailing precision, recall, and F1-score for each class, as well as support, which indicates the number of actual instances for each class. The high precision and recall for Class 0, with scores of 85% and 90%, respectively, suggest that this class is adequately represented in the dataset and that the model demonstrates strong

predictive performance for this category. Class 4 exhibits a precision of 50% and a recall of 40%, indicating that this category may be underrepresented or more challenging for the model to classify accurately, which could lead to potential misclassifications. The macro average scores provide insights into overall performance across all classes, without considering class distribution. In contrast, weighted averages account for class imbalance, offering a more nuanced view of model performance.

Table 3. Classification Report for Random Forest Classifier

Class	Precision	Recall	F1-Score	Support
0	0.85	0.90	0.87	20
1	0.60	0.50	0.55	10
2	0.70	0.80	0.75	15
3	0.80	0.75	0.77	12
4	0.50	0.40	0.45	10
Accuracy	-	-	0.75	77
Macro Avg	0.66	0.65	0.65	-
Weighted Avg	0.73	0.75	0.73	-

Table 4 summarizes the performance metrics for the Logistic Regression model. The model achieved an accuracy of 70%, demonstrating its effectiveness in classifying career paths based on student profiles. Although slightly lower than the performance of the Random Forest classifier, these results still indicate a competent predictive capability. The precision score of 65%, although lower than that of Random Forests, still indicates reasonable reliability when predicting positive instances.

Table 4. Logistic Regression Evaluation Results

Metric	Score
Accuracy	0.70
Precision	0.65
Recall	0.68
F1 Score	0.66

Table 5 presents the evaluation metrics for the Support Vector Machine (SVM) model, which achieved an accuracy of 72%, indicating a strong performance in predicting career paths. The SVM's precision and recall scores are competitive with those from Logistic Regression, suggesting that SVM is also a viable option for this classification task.

Table 5. SVM Evaluation Results

Metric	Score
Accuracy	0.72
Precision	0.68
Recall	0.70
F1 Score	0.69

This research demonstrates the ability of machine learning techniques to address the challenges students face in selecting career paths that align with their skills and aspirations. The study analyzed a comprehensive dataset of student profiles, encompassing academic performance, personality traits, and certifications, to identify key features that significantly influence career predictions. The Random Forest classifier demonstrated superior performance, achieving an accuracy of 75%, along with robust precision, recall, and F1 scores, surpassing both the Logistic Regression and Support Vector Machine classifiers. Recursive Feature Elimination (RFE) highlighted the significance of industry-recognized certifications as essential predictors of career success.

The findings highlight the importance of incorporating data-driven methods in educational contexts to improve personalized career guidance. Machine learning algorithms facilitate the identification of influential factors, yielding actionable insights that can aid educators, career counselors, and institutions in enhancing students' professional development. Targeted skills and certifications that align with industry demands enable educational stakeholders to prepare students effectively for competitive job markets, facilitating informed decisions regarding their future career paths. This study underscores the potential of machine learning to connect students' abilities with emerging career opportunities. Future research may build on these findings by utilizing larger and more diverse datasets, investigating additional machine learning models, and assessing the long-term effects of personalized career recommendations on students' professional outcomes.

Discussion

Analyzing students' career path predictions using machine learning techniques yielded positive results, providing significant insights into the determinants of career choices and the effectiveness of predictive models. The Random Forest classifier achieved an accuracy of 75%, demonstrating its effectiveness in handling non-linear relationships and complex data structures. The capacity to handle feature interactions and integrate various variables renders it especially effective for analyzing complex datasets, such as student profiles. The Support Vector Machine (SVM) classifier demonstrated an accuracy of 72%, highlighting its effectiveness in high-dimensional spaces, which is advantageous for addressing diverse academic, behavioral, and certification-based features. The Logistic Regression model demonstrated a 70% accuracy, providing competitive performance and interpretability. Logistic Regression's transparent nature enhances comprehension of the impact of individual features, such as certifications or academic scores, on career predictions, rendering it a valuable tool for decision-making processes that require explainability.

Recursive Feature Elimination (RFE) enhanced the findings by highlighting certifications as significant predictors of career choices. Certifications like the Azure Data Scientist Associate, Certified Ethical Hacker (CEH), and Cisco Certified Network Professional (CCNP) are significant predictors of career paths, particularly in technical domains such as cybersecurity, networking, and data science. This finding underscores the growing need for specialized skills certified by industry-recognized credentials. This highlights the importance of certifications in bridging the gap between academic knowledge and practical expertise, thereby enhancing students' competitiveness in the rapidly evolving job market.

The implications of these results are significant for educators, career counselors, and academic institutions. Identifying certifications as significant career predictors indicates the necessity for academic curricula to integrate certification-oriented training programs with traditional coursework. Integrating pathways for students to obtain relevant certifications enhances career readiness and equips them with in-demand skills. Career counselors can utilize these findings to customize their guidance strategies, highlighting the significance of particular qualifications and providing students with clearer, data-informed pathways to success. Students seeking careers in cybersecurity should consider obtaining certifications, such as CEH or CompTIA Security+, which align their skills with industry standards.

The success of machine learning techniques in this study underscores the importance of implementing data-driven frameworks for personalized career guidance. Traditional career counseling methods, which are typically reliant on qualitative evaluations, may be enhanced by integrating predictive analytics. Machine learning models enable educators to provide targeted recommendations based on empirical evidence, thereby minimizing uncertainty for students and promoting more informed decision-making processes. Analyzing patterns in academic performance, extracurricular activities, and personality traits enables counselors to identify students' strengths and match them with suitable career paths, thereby increasing the likelihood of long-term satisfaction and professional success.

These findings indicate a significant shift toward skills-based hiring in the modern job market, where certifications and practical experience frequently surpass the importance of formal qualifications alone. Students possessing credentials that demonstrate practical competencies are more likely to distinguish themselves from prospective employers. This highlights the importance of fostering lifelong learning and ongoing skill development as crucial strategies for navigating the evolving career landscape.

The study identifies potential avenues for future research and development. Incorporating larger and more diverse datasets from various academic disciplines and regions may improve the generalizability of the findings. Furthermore, integrating alternative machine learning techniques, such as deep learning or ensemble methods, may enhance predictive accuracy and reveal more complex relationships among features. Longitudinal studies examining students' career outcomes would yield valuable insights into the long-term efficacy of machine learning-based career recommendations.

The positive performance of machine learning classifiers in predicting career trajectories, along with the identification of certifications as significant predictors, provides valuable insights for stakeholders in education and career development. Utilizing data-driven methodologies and emphasizing skill-oriented interventions enables educators and counselors to more effectively assist students in navigating complex career choices, thereby enhancing employability, satisfaction, and success in a competitive job market.

Conclusion

The research identifies the challenges students face in making informed career decisions within a rapidly changing job market. This research employs machine learning techniques to analyze student profiles, identifying key factors that influence career decisions, including academic performance, personality traits, and certifications. The Random Forest classifier was identified as the most effective model, attaining an accuracy of 75%, a precision of 70%, a recall of 75%, and an F1 score of 72%. Logistic Regression and Support Vector Machine classifiers attained accuracies of 70% and 72%, respectively.

The analysis using Recursive Feature Elimination identified particular certifications as key predictors of career success. The results highlight the capability of machine learning to improve personalized career guidance within educational contexts. Integrating these insights into career counseling practices enables educators to support students in navigating their career paths, empowering them to make informed decisions that align with their skills and aspirations. This approach addresses students' immediate needs and contributes to their long-term professional success.

References

- [1] Gati, I., & Kulcsár, V. (2021). *Making better career decisions: From challenges to opportunities*. *Journal of Vocational Behavior*, 126, 103545. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jvb.2021.103545>
- [2] Xu, H. (2021). *Career decision-making in an uncertain world: A dual-process framework*. *Current Psychology*, 42, 3978-3990. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12144-021-01746-z>
- [3] Priyashantha, K.G., Dahanayake, W.E., & Maduwanthi, M.N. (2022). *Career indecision: A systematic literature review*. *Journal of Humanities and Applied Social Sciences*, 5(2), 79-102. DOI: <https://doi.org/10.1108/JHASS-06-2022-0083>
- [4] Azhenov, A., Kudysheva, A., Fominykh, N., & Tulekova, G. (2023). *Career decision-making readiness among students in the system of higher education: Career course intervention*. *Frontiers in Education*, 8, 1097993. DOI: <https://doi.org/10.3389/educ.2023.1097993>
- [5] Sharapova, N., Zholdasbekova, S., Arzymbetova, S., Zaimoglu, O., & Bozshatayeva, G. (2023). *Efficacy of school-based career guidance interventions: A review of recent research*. *Journal of Education and e-Learning Research*, 10(2), 215-222. DOI: <https://doi.org/10.20448/jeelr.v10i2.4554>

- [6] Serek, A., & Zhaparov, M. (2024). Optimizing preference satisfaction with genetic algorithm in matching students to supervisors. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 18(1), Article 13. DOI: <https://dx.doi.org/10.18576/amis/180114>
- [7] Yates, J. (2025). Graduates' career choices: An empirically derived process model. *International Journal for Educational and Vocational Guidance*. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10775-024-09720-4>
- [8] Abe, E. N., & Chikoko, V. (2020). Exploring the factors that influence the career decision of STEM students at a university in South Africa. *International Journal of STEM Education*, 7, Article 60. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40594-020-00256-x>
- [9] Lent, R. W., & Brown, S. D. (2020). Career decision making, fast and slow: Toward an integrative model of intervention for sustainable career choice. *Journal of Vocational Behavior*, 120, 103448. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jvb.2020.103448>
- [10] Serek, A., Bazarkulova, A., Chazhabayev, A., & Akhmetov, A. (2021). Analysis of supervisors and students in the context of diploma defense. 2021 16th International Conference on Electronics Computer and Computation (ICECCO). DOI: <https://doi.org/10.1109/ICECCO53203.2021.9663776>
- [11] Hoff, K. A., Einarsdóttir, S., Chu, C., Briley, D. A., & Rounds, J. (2021). Personality changes predict early career outcomes: Discovery and replication in 12-year longitudinal studies. *Psychological Science*, 32(1), 64-79. DOI: <https://doi.org/10.1177/0956797620957998>
- [12] Miley, M., Mantzios, M., Egan, H., & Connabeer, K. (2024). Exploring the role of personality, perfectionism, and self-compassion on the relationship between clinical decision-making and nurses' wellbeing. *Contemporary Nurse*, 60(1), 1-15. DOI: <https://doi.org/10.1080/10376178.2024.2319845>
- [13] Siddiky, M. R., & Akter, S. (2021). The students' career choice and job preparedness strategies: A social environmental perspective. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, 10(2), 421-431. DOI: <https://doi.org/10.11591/ijere.v10i2.21086>
- [14] Elembilassery, V., Jain, N. K., & Aggarwal, D. (2024). What influences individuals' tolerance for ambiguity? Exploring the role of social comparison orientation, tendency to maximize and feel regret. *Personality and Individual Differences*, 217, 1-9. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.paid.2023.112436>
- [15] Arbona, C., Fan, W., de Dios, M. A., & Olvera, N. (2024). Career decision-making difficulties among career-decided college students. *The Career Development Quarterly*, 72(1), 32-45. DOI: <https://doi.org/10.1002/cdq.12339>
- [16] Sarsikoğlu, A. F. (2023). The relationship between time perspective and career decision-making difficulties. *Current Psychology*, 43, 2544-2554. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12144-023-04447-x>
- [17] Zhang, L., Wang, X., Fan, W., & Li, Y. (2024). Contributions of proactive personality to career decision self-efficacy: Mediating effect of positive affect and moderating roles of social class and gender. *Current Psychology*, 43, 9164-9175. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12144-023-05014-0>
- [18] Song, Q. C., Shin, H. J., Tang, C., Hanna, A., & Behrend, T. (2024). Investigating machine learning's capacity to enhance the prediction of career choices. *Personnel Psychology*, 77(2), 295-319. DOI: <https://doi.org/10.1111/peps.12529>
- [19] Nguyen, N.-K., Le, H.-Y. P., Nguyen, V. H. A., Nguyen-Duong, B.-T., Bui, D. T. T., & Tran-Chi, V.-L. (2024). The relationship between emotional intelligence and career decision-making difficulties: Mediation role of career adaptability of university students. *Journal of Curriculum and Teaching*, 13(2), 67-82. DOI: <https://doi.org/10.5430/jct.v13n2p67>
- [20] Smith, J., & Lee, K. (2024). Examining the influence of emotional intelligence on decision-making among students: The mediating effect of brand. *Journal of Educational Psychology*, 116(3), 456-472. DOI: <https://doi.org/10.1037/edu0000678>

Г.Б. Елубай^{1*} , Б.С. Ахметов¹ , С.А. Гнатюк² , Г.Ж. Шуйтенов³ 

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Киев Ұлттық Авиациялық Университеті, Киев қ., Украина

³Esil University, Астана қ., Қазақстан

*e-mail: g.elubaeva@abaiuniversity.edu.kz

ЖОҒАРЫ БІЛІМ БЕРУДІ БАСҚАРУДА ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТТІ ПАЙДАЛАНУ: ӘЛЕМДІК ЖӘНЕ ҚАЗАҚСТАНДЫҚ ТӘЖІРИБЕ

Аңдатпа

Қазіргі жоғары білім беру жүйесі бірқатар маңызды сын-тегеуріндерге тап болуда. Олардың қатарына білім беру сапасын арттыру, үлкен көлемдегі деректерді тиімді басқару, студенттердің оқу траекторияларын дербестендіру және білімге тең қолжетімділікті қамтамасыз ету жатады. Бұл мәселелерді шешу үшін жасанды интеллект (ЖИ) технологиялары кеңінен қолданылуда. ЖИ білім беру процестерін автоматтандыру, студенттердің үлгерімін болжау, оқыту сапасын бағалау және басқарушылық шешімдер қабылдау үдерістерін қолдау сияқты бірқатар мүмкіндіктерді ұсынады. Осы шолу мақалада ЖИ-ді жоғары білім беру саласындағы басқарушылық тәжірибеде қолдануға қатысты заманауи ғылыми зерттеулер қарастырылып, олардың негізгі бағыттары мен нәтижелері талданады. Сонымен қатар, әлемдік тәжірибе мысалдары мен Қазақстан Республикасы жоғары оқу орындарында ЖИ-ді енгізу практикасына ерекше назар аударылған. Жұмыстың мақсаты жоғары білім берудегі басқару үдерістерін жетілдіруде ЖИ технологияларының әлеуетін жан-жақты бағалау.

Түйін сөздер: жасанды интеллект, жоғары білім беру, цифрлық трансформация, білім беруді басқару, білім беру технологиялары.

Г.Б. Елубай¹, Б.С. Ахметов¹, С.А. Гнатюк², Г.Ж. Шуйтенов³

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

²Киевский Национальный Авиационный Университет, г.Киев, Украина

³Esil University, г.Астана, Казахстан

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В УПРАВЛЕНИИ ВЫСШИМ ОБРАЗОВАНИЕМ: МИРОВОЙ И КАЗАХСТАНСКИЙ ОПЫТ

Аннотация

Современная система высшего образования сталкивается с рядом серьёзных вызовов. К их числу относятся повышение качества образования, эффективное управление большими объёмами данных, персонализация образовательных траекторий студентов и обеспечение равного доступа к знаниям. Для решения этих задач широко применяются технологии искусственного интеллекта (ИИ). ИИ предлагает возможности автоматизации образовательных процессов, прогнозирования успеваемости студентов, оценки качества обучения и поддержки управленческих решений. В данном обзорном исследовании рассматриваются современные научные работы, посвящённые применению ИИ в управленческой практике в сфере высшего образования, анализируются их основные направления и результаты. Особое внимание уделяется международному опыту, а также практике внедрения ИИ в высших учебных заведениях Республики Казахстан. Цель работы всесторонняя оценка потенциала технологий ИИ в совершенствовании процессов управления высшим образованием.

Ключевые слова: искусственный интеллект, высшее образование, цифровая трансформация, управление образованием, образовательные технологии.

G.B. Yelubay¹, B.S. Akhmetov¹, S.A. Gnatuk², G.Zh.Shuitenov³

¹Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

²The Kyiv National Aviation University, Kyiv, Ukraine

³Esil University, Astana, Kazakhstan

APPLICATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN HIGHER EDUCATION MANAGEMENT: GLOBAL AND KAZAKHSTANI EXPERIENCE

Abstract

The modern higher education system is facing a number of significant challenges. These include improving the quality of education, efficiently managing large volumes of data, personalizing students' educational trajectories, and ensuring equal access to knowledge. Artificial Intelligence (AI) technologies are being widely utilized to address these issues. AI offers capabilities such as automating educational processes, predicting student performance, evaluating the quality of teaching, and supporting managerial decision-making. This review article examines contemporary scientific research on the use of AI in the management of higher education, analyzing key directions and findings. Special attention is given to international experience and the practical implementation of AI in higher education institutions in the Republic of Kazakhstan. The aim of the study is to provide a comprehensive assessment of the potential of AI technologies in improving the management processes of higher education.

Keywords: artificial intelligence, higher education, digital transformation, education management, educational technologies.

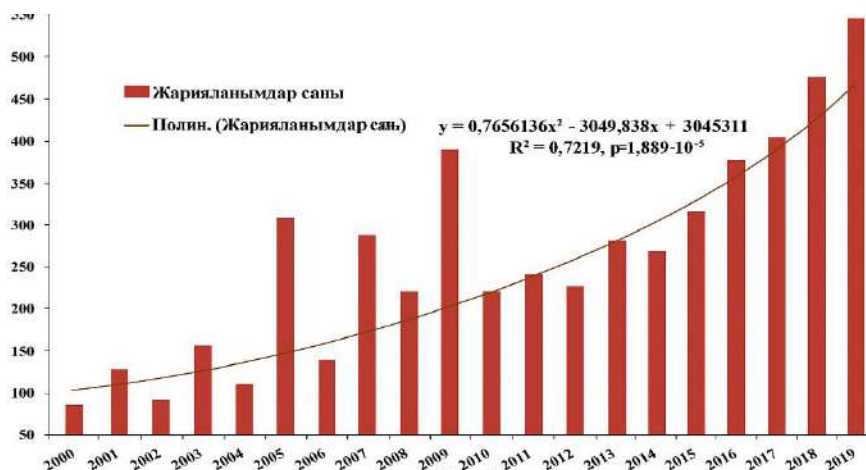
Негізгі тұжырымдар

Мақалада жасанды интеллектті (ЖИ) жоғары білім беруді басқаруда пайдалану мәселесі қарастырылады. Білім сапасын арттыру, оқыту траекторияларын жекелендіру және басқару үдерістерін автоматтандыру мақсатында ЖИ қолданудың әлемдік тәжірибесі мен Қазақстан Республикасының тәжірибесі талданады. Ерекше назар деректер аналитикасы мен білім беру ұйымдарының цифрлық трансформация мүмкіндіктеріне аударылған. Жасанды интеллектті енгізуге байланысты келешек мүмкіндіктер мен сын-тегеуріндер анықталып, этика, деректер қауіпсіздігі және кадрларды даярлау мәселелері көтерілген.

Кіріспе

«Жасанды интеллект» термині алғаш рет 1956 жылы АҚШ-тағы Дартмут колледжінде өткен конференцияда қолданылды. Бұл терминнің негізін қалаушылар ретінде Джон Маккарти, Марвин Минский, Эндерсон Джонсон және Клод Шеннон саналады [1]. Аталған конференция жасанды интеллект саласындағы зерттеулердің басталу нүктесі ретінде қарастырылады. Қазіргі жаһандық және технологиялық әлемде жасанды интеллект адам өмірінің барлық салаларына енуде, бұл үрдістен білім беру саласы да тыс қалмайды. ЖИ технологияларын білім беру саласына енгізу 1970-жылдардан бастау алады [2]. Күн сайын жасанды интеллект білім беру ортасына және оқу үдерісіне көбірек еніп келеді. ЮНЕСКО болжамы бойынша, 2025 жылға қарай білім беру саласындағы ЖИ технологияларына арналған бюджет шамамен 6 миллиард АҚШ долларын құрайды, бұл саланың жаһандық деңгейде тез өсіп келе жатқанын көрсетеді. Жасанды интеллект қазіргі заманғы білім берудің маңызды мәселелерін шешуде, педагогикалық әдістер мен оқу бағдарламаларына инновациялық тәсілдерді енгізуде елеулі әлеуетке ие. Бұл өз кезегінде БҰҰ-ның Тұрақты даму мақсаттарына (ТДМ), атап айтқанда 4-мақсат - сапалы білім беруге - қол жеткізуге септігін тигізеді. Қазақстанда жасанды интеллектті қолдану және оны белсенді зерттеу салыстырмалы түрде жақында басталды және қазіргі таңда әлі де даму кезеңінің бастапқы сатысында деп айтуға болады. Жоғары білім беру саласында жасанды интеллекттің маңызы арта түсуде, бұл үрдіс әлемдік деңгейде де, Қазақстан жағдайында да байқалады. ЖИ технологияларының дамуы білім беру үдерістерін өзгертіп, білім сапасын арттыру, оқытуды жекелендіру және білім беру ұйымдарын басқару мүмкіндіктерін кеңейтуде. Мысалы, Қытайлық зерттеушілердің жасанды интеллектті білім беру саласында қолдану туралы ғылыми

мақаласында Web of Science және Google Academic дерекқорлары негізінде 2000 жылдан 2019 жылға дейін «ЖИ» және «Білім беру» тақырыптарында жарияланған ғылыми мақалалар санының артуы туралы талдау келтірілген (1-сурет) [3]. Ғалымдар соңғы 20 жыл ішінде бұл тақырыпқа қызығушылықтың айтарлықтай артқанын - 50 еңбектен 550 ғылыми жұмысқа дейін өскенін анықтады және бұл қызығушылық әлі де арта түсуде. Әлем бойынша ЖИ-ге деген сұраныс пен заманауи үрдістерді ескере отырып, бұл көрсеткіштердің бірнеше есе өскенін айтуға болады.



Сурет 1. Білім беру саласындағы жасанды интеллект тақырыбы бойынша ғылыми еңбектер санының жылдар бойынша талдауы [3]

Қазақстанда да жасанды интеллект саласындағы зерттеулер белсенді дамып келеді, бұл бағытта жаңа орталықтар мен зертханалар ашылуда. Сонымен қатар, еліміздегі жоғары оқу орындарында жасанды интеллект бойынша білім беру бағдарламалары қарқынды дамып, осы салада мамандар даярлауға ықпал етуде. 2024 жылғы ақпан айының ортасында ҚР Ғылым және жоғары білім министрлігінің Білім министрі әлеуметтік желілерде жасанды интеллект саласы бойынша шетелдік жоғары оқу орындарымен бірлесіп кадр даярлау басталғанын жариялады. Осы бастама аясында 2024 жылы 14 отандық жоғары оқу орнында GOOGLE-дің жасанды интеллект бойынша курстары енгізілмек. Бұл жаңашылдықтар қазақстандық жоғары білімнің әлемдік үрдістермен қатар дамып келе жатқанын көрсетеді. Жасанды интеллект қолдану дәуіріне қадам басты. 2022 жылдан бастап 2023 жылдың басына дейін ай сайын жаңа ірі ЖИ модельдері жасалып, ұсынылды. ChatGPT, Stable Diffusion, Whisper және DALL·E 2 секілді модельдер мәтіндерді өңдеу мен талдаудан бастап, бейнелерді генерациялауға және сөзді өте жоғары дәлдікпен тануға дейінгі кең ауқымды міндеттерді орындай алады [4].

Алайда, жасанды интеллектті жоғары білім беру жүйесіне интеграциялау бірқатар алаңдаушылықтар туындатуда. Атап айтқанда, оқытушылардың рөлі, қаржылық шығындар, оқыту талаптары, этика және қолжетімділік мәселелері талқылануда. Осыған байланысты, 2023 жылы Академиялық адалдық лигасының жұмыс тобы жоғары оқу орындарындағы барлық академиялық қызмет түрлерінде ЖИ қолдануды реттейтін әділ әрі нақты қағидалар мен нормаларды белгілеу мақсатында «Академиялық қызметте жасанды интеллектті қолдану жөніндегі нұсқаулықты» әзірледі [5]. Бұл Нұсқаулықта жасанды интеллектті қолданудың негізгі қағидаттары мен академиялық ортада пайдалану ережелері баяндалған. Аталған құжат Қазақстанда жоғары білім беру жүйесінде ЖИ қолдану бойынша алғашқылардың бірі болып табылады деуге болады.

Зерттеу әдіснамасы

Зерттеу барысында ғылыми әдебиеттерді талдау және синтездеу әдістері, сондай-ақ жоғары білім беруді басқаруда жасанды интеллектті (ЖИ) енгізудің әлемдік және қазақстандық

тәжірибелеріне салыстырмалы талдау әдісі қолданылды. Білім беру үдерістерін цифрлық трансформациялау бойынша заманауи тәсілдерге, соның ішінде басқаруды автоматтандыру, деректерді талдау және оқытуды жекелендіру мәселелеріне шолу жасалды. Сонымен қатар, білім беру жүйесіне ЖИ енгізудің келешегін болжау және сараптамалық бағалау әдістері қолданылды.

Зерттеу нәтижелері

Жасанды интеллект (ЖИ) саласындағы елдер арасындағы ең көп ынтымақтастық жобалары 2010–2021 жылдар аралығында АҚШ пен Қытайда тіркелген.

АҚШ: Массачусетс технологиялық институты (MIT) мен Стэнфорд университеті сияқты жетекші университеттер білім беру үдерісіне ЖИ жүйелерін белсенді түрде әзірлеп, енгізіп келеді. Бұл жүйелерге бейімделетін оқу платформалары мен интеллектуалды шешім қабылдауды қолдайтын жүйелер жатады. Сонымен қатар, АҚШ-та компьютерлік ғылымдар бойынша PhD дәрежесін алатын түлектердің жасанды интеллектке маманданған үлесі 2010 жылы 10,2%-дан, 2020 жылы 14,9%-ға, ал 2021 жылы 19,1%-ға дейін өсті.

ЮНЕСКО және Еуропалық Одақ: Ұлыбритания, Германия және Нидерланды сияқты елдердің университеттері де ЖИ технологияларын білім беру үдерістерін жақсарту үшін пайдаланады. Мысалы, кейбір университеттер студенттік жұмыстарды тексеру үшін автоматты бағалау жүйелерін енгізіп жатыр.

ЕО: Оқыту мен білім беруде ЖИ мен деректерді қолданудың этикалық қағидаттары әзірленген. Сондай-ақ, цифрлық білім беру бойынша іс-қимыл жоспары қабылданған [6].

ЮНЕСКО: Білім беру және ғылыми зерттеулердегі генеративті ЖИ қолдану бойынша нұсқаулық ұсынды.

Сингапур: Елде ұлттық ЖИ стратегиясы және генеративті ЖИ бойынша жоба бар. Жоғары оқу орындарында профессорлық-оқытушылық құрамды (ППС) оқыту және генеративті ЖИ-ді оқу үдерісіне енгізу қолға алынған. Сонымен қатар, сингапурлық ЖОО-ларда цифрлық дағдыларды үйрету тәжірибесі қалыптасқан.

Азия: Қытай мен Жапония сияқты елдерде білім беру саласында ЖИ қолдану жобалары белсенді дамып жатыр. Мысалы, Қытай университеттері бейімделетін оқыту және оқу платформаларын құру үшін ЖИ технологияларын пайдаланады.

АҚШ пен Ұлыбритания секілді бірқатар елдерде жасанды интеллект негізіндегі жүйелер оқыту сапасын айтарлықтай жақсарту алатынын көрсеткен зерттеулер жүргізілген. Мысалы, Kizilcес R. F. өз зерттеуінде ЖИ-ді студенттердің онлайн курстардағы үлгерімін болжау үшін қолдану тәжірибесін сипаттайды, бұл оқу орындарына мақсатты шаралар әзірлеуге мүмкіндік береді [7-9]. Shute & Rahimi зерттеулері ЖИ негізіндегі жекелендірілген оқыту шешімдері білім нәтижелері мен студенттердің мотивациясын жақсартуға ықпал ететінін көрсетеді [10].

Қазақстанда жоғары білім сапасына әсер ететін факторларды зерттеу барысында оқу үдерістерін жақсарту, ақпараттық технологияларды университеттерге енгізу қажеттігі айтылып жүр. Бұл заманауи шешімдерге деген қызығушылықтың артып келе жатқанын білдіреді. Отандық зерттеушілердің жарияланымдары көбіне білім беруді цифрландыру мен оның сапасын арттыру мәселелеріне бағытталған. Мысалы, [11] жұмысында білім сапасын арттырудың институционалдық аспектілері қарастырылса, [12] зерттеуінде жоғары білімнің цифрландыру және ақпараттандыру жағдайындағы трансформациясы талданады. Сондай-ақ, бұл бағытта осы зерттеудің авторларының да бірқатар жарияланымдары бар [13-19].

Қазақстан Президенті Қасым-Жомарт Тоқаев өз Жолдауында: «Үкімет жасанды интеллектті дамытуға ерекше назар аударуы керек. Жасанды интеллект оны әзірлей алған елдердің жалпы ішкі өніміне елеулі үлес қоса алады. Егер біз ЖИ мүмкіндіктерін толық пайдалансақ, білім экономикасына жаңа серпін береміз...» – деп атап өтті [20].

Қазіргі таңда білім беру саласында жасанды интеллекттің артықшылықтарын тиімді пайдалану маңызды мәселелердің бірі болып отыр. ҚР Ғылым және жоғары білім министрлігінің мәліметінше, елдегі жоғары оқу орындары мен ғылыми орталықтар ЖИ

бойынша түрлі зерттеу мен әзірлемелермен айналысуда. Министрлік ЖИ қолданудың Межвузовский стандартын әзірледі [21]. 2023 жылдың қараша айында Жасанды интеллект қауіпсіздігі жөніндегі саммитте 28 ел қол қойған Блетчли декларациясында ЖИ-дің адамзат игілігіне трансформациялық әлеуеті атап өтілді. Сонымен қатар, ЖИ-ді қауіпсіз дамыту мен оны инклюзивті және әділ түрде қолдану қажеттігі туралы үндеу жасалды. Бұл денсаулық сақтау мен білім беру, азық-түлік қауіпсіздігі, ғылым, таза энергия, биоалуантүрлілік пен климат секілді мемлекеттік қызметтерге, сондай-ақ адам құқықтары мен БҰҰ-ның Тұрақты даму мақсаттарына қол жеткізуге тікелей байланысты. Соңғы ғылыми зерттеулер білім беру саласында түсіндірілуі мүмкін ЖИ (Explainable AI – XAI) технологияларын белсенді енгізу үдерісін көрсетіп отыр [22]. Бұл оқыту модельдерін мұғалімдер мен студенттер үшін анағұрлым түсінікті әрі икемді етеді. Зерттеу жұмысында ЖИ-мен басқарылатын цифрлық сынып (AI-powered Digital Classroom) тұжырымдамасы қарастырылады, онда интеллектуалды жүйелер нақты уақыт режимінде оқыту мен басқару үдерісін қолдайды [23]. Зерттеуінде экология ғылымын жекелендіріп оқытуға арналған AI Hub платформасын енгізудің нақты мысалы келтірілген, бұл цифрлық оқытудың тиімділігін көрсетеді [24]. Зерттеуі дәстүрлі оқытуды толықтыру үшін ЖИ ресурстарының студенттердің қатысуын арттыратын әлеуетін сипаттайды [25]. Исфахан университетінің LMS платформасына UX-зерттеу жүргізіп, электронды оқыту жүйелеріндегі ЖИ функцияларының артықшылықтарын көрсетеді [26].

Үлкен көлемдегі білім беру деректері [н өңдеуге арналған Tensorial LMS алгоритмі ұсынылған [27]. Мақалада LMS жүйелерінің әкімшілері ЖИ-ді жоғары білім беру саласына енгізудегі қиындықтар мен артықшылықтар туралы өз көзқарастарын бөліседі [28].

Дискуссия

Жасанды интеллект (ЖИ) жоғары білім беру саласында білім сапасын арттыру, оқу үдерісін оңтайландыру және оқытуды жекелендіру үшін көптеген мүмкіндіктер ашады. Төменде халықаралық білім беру мекемелері ұсынған ЖИ-ді жоғары білім беруде қолдануға қатысты бірнеше ұсыныстар келтірілген. Оқытуды жекелендіру: ЖИ білім деңгейі, қызығушылықтары мен оқу қарқынына қарай әр студенттің қажеттіліктерін ескере отырып, жекелендірілген оқу бағдарламаларын жасау үшін пайдаланылады. Бұл студенттерге өздерінің қажеттіліктеріне сай білім алуға мүмкіндік береді. Оқу материалдарын автоматтандыру және бейімдеу: ЖИ студенттердің қажеттіліктеріне сәйкес оқу материалдарын автоматты түрде бейімдеуге қолданылады. Мысалы, бейімделген оқыту жүйелері студенттердің жетістіктеріне қарай тапсырмалардың күрделілігін және материалдарды автоматты түрде реттей алады. Оқытушыларды қолдау: ЖИ оқытушыларға курстарды тиімді басқаруға, оқу деректерін талдауға және студенттерге кері байланыс беруге көмектесетін құралдар мен платформаларды әзірлеу үшін пайдаланылады.

Деректерді өңдеу және талдау: ЖИ оқу деректерін талдап, трендтерді анықтауға, проблемалық аймақтарды анықтауға және білім беру үдерісін жақсарту үшін ұсыныстар жасауға қолданылады.

Онлайн оқыту және қашықтан оқыту: ЖИ онлайн курстар мен қашықтықтан оқыту платформаларын жасау және жетілдіру үшін пайдаланылады. ЖИ бейімделген кері байланыс жүйелерін, тапсырмаларды автоматты түрде тексеруді және интерактивті оқыту әдістерін дамытуда көмектеседі.

Қабылдау шешімдерін қолдау: Жасанды интеллектті білім беру ресурстарына деген қажеттілікті болжау, сабақ кестелерін оңтайландыру және жоғары оқу орнының әкімшілігі деңгейінде шешім қабылдауға қолдау көрсету үшін пайдалану.

Жаңа білім беру технологияларын дамыту: Виртуалды шындық, толықтырылған шындық және бейімделген технологиялар сияқты жаңа білім беру технологияларын әзірлеу және тестілеу үшін қолдану.

Этика мен қауіпсіздік: Білім беру саласында ЖИ қолдану кезінде студенттердің деректерін қорғау мен алгоритмдердің ашықтығы сияқты этика мен қауіпсіздік мәселелеріне назар аудару маңызды. Бұл әсіресе шешім қабылдау және процестерді автоматтандыру кезінде маңызды.

Халықаралық тәжірибе көрсеткендей, ЖИ технологиялары білім беру үдерістерін трансформациялауда айтарлықтай әлеуетке ие. Дегенмен, осы әлеуетті толық игеру үшін зерттеулерді, жаңа әдістер мен технологияларды әзірлеуді жалғастыру және осы салада кадрларды даярлау қажет.

Жалпы, халықаралық тәжірибе ЖИ-дің жоғары білім беру саласындағы білім беру үдерістерін жақсартуға, оқыту сапасын арттыруға және студенттерді заманауи әлемнің сын-қатерлеріне дайындауға айтарлықтай әлеуеті бар екендігін көрсетеді. Алайда, қазіргі уақытта Қазақстанның жоғары білім беру саласында ЖИ қолдану әлі де шектеулі және одан әрі даму қажеттігін көрсетеді. Негізгі қиындықтар - тиісті технологиялар мен кадрларды оқытуға қолжетімділікті қамтамасыз ету, сондай-ақ оқу орындарында инновацияларды енгізу мен ауқымын кеңейту бойынша тиімді стратегияларды әзірлеу.

Осыған байланысты, Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігіне жоғары білім беру саласында ЖИ қолдануды реттейтін ұлттық нормативтік-құқықтық құжатты әзірлеу қажет. Ұлттық нормативтік-құқықтық құжат негізінде жоғары оқу орындарына қосымша ішкі ережелер әзірлеу қажет, онда профессор-оқытушылар құрамына және студенттерге арналған арнайы талаптар мен ережелер көрсетіледі.

Зерттеу барысында кездесетін маңызды қиындықтардың бірі - әртүрлі факторлардың жоғары білім сапасына әсерін зерттеуге мүмкіндік беретін методологияны әзірлеу. Бұл педагогикалық әдістерді, оқу үдерісін ұйымдастыруды, оқу материалдарының сапасын, оқытушылардың біліктілігін және заманауи ақпараттық технологияларды пайдалануды талдауды қамтиды. Зерттеу әдістемесі педагогикалық ғылымның негізгі қағидаттарына сүйеніп, жоғары білімнің ерекшеліктерін ескеруі керек.

Тағы бір маңызды қиындық - жоғары оқу орындарында жиналатын үлкен көлемдегі деректерді өңдеу және талдау. Студенттер, оқу бағдарламалары, оқытушылар және оқу процесі туралы ақпарат білім басқару жүйелерінде үздіксіз жиналып отырады. Бұл деректерді сандық аналитика арқылы талдау білім сапасына әсер ететін үлгілер, трендтер мен маңызды факторларды анықтауға мүмкіндік береді. Дегенмен, мұндай үлкен ақпарат көлемін тиімді өңдеу және талдау үшін инновациялық әдістер мен құралдарды әзірлеу және қолдану қажет.

Бағдарламаның маңызды тапсырмаларының бірі - жоғары білім саласында басқару шешімдерін қабылдауға қолдау көрсету үшін ЖИ негізінде ақпараттық жүйені әзірлеу. Құралдар сандық аналитика әдістерін және машиналық оқыту алгоритмдерін деректерді өңдеу мен талдауда қолдану, жасырын байланыстар мен трендтерді анықтау, сондай-ақ студенттер, оқытушылар және оқу орнының әкімшілігі үшін шешім қабылдауда қолдау көрсету үшін ұсыныстар мен көмек көрсетуге мүмкіндік береді. Ақпараттық жүйе оқу үдерістерін оңтайландыруға, оқу бағдарламаларын бейімдеуге және білім беруді ұйымдастыруда инновациялық тәсілдер ұсынуға мүмкіндік береді.

Зерттеу жұмысы сондай-ақ деректердің қауіпсіздігі мен конфиденциалдылығын қамтамасыз ету міндеттерімен бетпе-бет келеді. Үлкен деректерді жинау және өңдеу деректерді қорғаудың сенімді механизмдері мен ақпаратқа қол жеткізуді бақылауды қолдануды талап етеді, бұл студенттер мен оқытушылардың жеке мәліметтерінің сақталуын қамтамасыз етеді. Зерттеу аясында білім беру саласындағы қауіпсіздік және конфиденциалдылық стандарттарына сәйкестігін қамтамасыз ету үшін қауіпсіздік және жеке деректерді қорғау жүйесін әзірлеуге ерекше назар аударылуы тиіс.

Жоспарланған зерттеулердің маңыздылығы мен өзектілігі жоғары білім сапасын арттыру мен қазіргі заманғы сын-қатерлерге бейімделу үшін олардың әлеуетінде жатыр. Білім беруде сандық аналитика мен ЖИ пайдалану студенттердің жетістіктеріне, оқу бағдарламаларының тиімділігіне және оқу үдерісінің нәтижелілігіне әсер ететін маңызды факторларды анықтауға мүмкіндік береді. Бұл деректер мен ғылыми әдістерге негізделген ақпараттандырылған

шешімдер қабылдауға мүмкіндік береді. ЖИ қолданылатын ақпараттық жүйенің әзірленуі процестерді автоматтандыруға, оқытуды жекелендіруге және студенттерге жеке ұсыныстар ұсынуға қосымша мүмкіндіктер береді, бұл студенттердің нәтижелерін және қанағаттанушылығын арттыруға ықпал етеді.

Қорытынды

Бұл зерттеу қазіргі заманғы жоғары білім беру үшін маңызды, себебі ол жасанды интеллект пен сандық аналитиканың білім беру сапасына әсерін зерттеумен қатар, жоғары білім беру саласында басқару шешімдерін қабылдауға арналған маңызды құрал болып табылады, бұл өз кезегінде білім сапасын арттыруға ықпал етеді. Халықаралық тәжірибе көрсеткендей, жасанды интеллекті білім беру үдерістеріне енгізу айтарлықтай нәтижелерге қол жеткізуге мүмкіндік береді, мысалы, әкімшілік міндеттерді оңтайландыру, студенттердің үлгерімін болжау және оқытуды жекелендіру. Қазақстан, цифрлық трансформация жолында келе жатқан мемлекет ретінде, жасанды интеллект пен сандық аналитиканы жоғары білім беруді басқаруда белсенді қолдану үшін әлеуетке ие. Алайда, бұл мақсаттарға жету үшін инфрақұрылымды дамыту, кадрларды даярлау және ЖИ қолдануда этикалық стандарттарды қамтамасыз ету сияқты бар қиындықтарды еңсеру қажет. Сондықтан болашақтағы зерттеулер жасанды интеллектінің білім мен ғылымдағы нақты процестер мен ақпараттық жүйелерде қолданылуына арналады.

Алғыс

Бұл зерттеу мақаласы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің Ғылым комитеті қаржыландыратын «Цифрлық трансформация жағдайында жоғары оқу орындарының инфрақұрылымын дамыту негізінде оқу процесін ұйымдастырудың гибриді және қашықтық нысандарының тиімділігін арттыру» (ИРН АР19678846) жобасы аясында орындалды.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

- [1] Bletchley Declaration. (n.d.). Countries agree to safe and responsible development of frontier AI in landmark Bletchley Declaration. GOV.UK. Retrieved 26 February 2024, from <https://www.gov.uk/government/news/countries-agree-to-safe-and-responsible-development-of-frontier-ai-in-landmark-bletchley-declaration>
- [2] Bloom, B. S. (1984). The 2 Sigma Problem: The Search for Methods of Group Instruction as Effective as One-to-One Tutoring. *Educational Researcher*, 13(6), 4. <https://doi.org/10.2307/1175554>
- [3] Chen, X., Zou, D., Xie, H., Cheng, G., & Liu, C. (2022). Two Decades of Artificial Intelligence in Education: Contributors, Collaborations, Research Topics, Challenges, and Future Directions. *Educational Technology & Society*, 25(1), 28–47.
- [4] Holmes, Wayne & Bialik, Maya & Fadel, Charles. (2019). *Artificial Intelligence in Education. Promise and Implications for Teaching and Learning*.
- [5] Адал Лигасы. *Руководство по использованию искусственного интеллекта в академической деятельности*, Астана 2023.
- [6] McCarthy, J., Minsky, M. L., Rochester, N., & Shannon, C. E. (2006). A Proposal for the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, August 31, 1955. *AI Magazine*, 27(4), Article 4. <https://doi.org/10.1609/aimag.v27i4.1904>
- [7] UNESCO. (2021). *AI and education: Guidance for policy-makers*. UNESCO. <https://doi.org/10.54675/PCSP7350>
- [8] Kizilcec R. F., Hohenstein, J., DiFranzo, D., Aghajari, Z., Mieczkowski, H., Levy, K., Naaman, M., Hancock, J., & Jung, M. F. (2023). Artificial intelligence in communication impacts language and social relationships. *Scientific Reports*, 13(1), 5487.
- [9] Kizilcec, R. F., Makridis, C., & Sadowski, K. C. (2021). Pandemic Response Policies' Democratizing Effects on Online Learning. *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 118(11).

[10] V.J. Shute & S. Rahimi Review of computer-based assessment for learning in elementary and secondary education John Wiley & Sons Ltd Journal of Computer Assisted Learning (2017), 33, 1–19 doi: 10.1111/jcal.12172 2017, <https://myweb.fsu.edu/vshute/pdf/jcal.pdf>

[11] Пак Ю.Н., Пак Д.Ю., Рахимов М.А. Институциональные аспекты обеспечения качества образования. Опыт высшей школы Казахстана // «Аккредитация в образовании». – 2018. – № 5(102). – С. 32-34.

[12] Бугубаева Р.О., Беспалева Р.С., Березюк В.И., Ержанов М.С. Трансформация высшего образования в условиях информатизации и цифровизации. Вестник университета «Туран». 2021;(3):272-277. <https://doi.org/10.46914/1562-2959-2021-1-3-272-277>. https://vestnik.turan-edu.kz/jour/article/view/1920?locale=ru_RU

[13] Akhmetov, B.S., Lakhno, V., Akhmetov, B.B., Zhilkishbayev, A., Izbasova, N., Kryvoruchko, O., Desiatko, A. Application of a Genetic Algorithm for the Selection of the Optimal Composition of Protection Tools of the Information and Educational System of the University (2022) Procedia Computer Science, 215, pp. 598-607. Процентиль – 67, DOI 10.1016/j.procs.2022.12.062

[14] Ахметов Б.С., Карлов И.А., Жилкишбаев А.А., Серикбаев Т.К. Анализ международного опыта разработки и использования моделей цифровой трансформации организаций высшего образования// Вестник КазНПУ, Серия «Физико-математические науки». – 2021. – №2(74). – С.32-41. <https://doi.org/10.51889/2021-2.1728-7901.05>

[15] Ахметов Б.С., Лакно В.А. Защита информации и кибербезопасность цифровой образовательной среды университета// Вестник КазАТК №1 (120), 2022. – С.134-141. <https://doi.org/10.52167/1609-1817-2022-120-1-134-141>

[16] Lakhno, V., Akhmetov, B., Yagaliyeva, B., ...Tsiutsiura, S., Tsiutsiura, M. The Model of Server Virtualization System Protection in the Educational Institution Local Network//Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologiethis link is disabled, 2023, 166, с. 461–475. Scopus, процентиль 34. DOI - 10.1007/978-981-99-0835-6_33

[17] Akhmetov, B.S., Abuova A.K., Izbasova N.B., Matovka, T., Rizak, V. Models and algorithms for optimizing the reserve of equipment to ensure the cybersecurity of the information educational environment of the university// Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 2022, 100(18), pp.5286-5297. Scopus, процентиль 36. <http://www.jatit.org/volumes/Vol100No18/23Vol100No18.pdf>.

[18] Lakhno, V., Oshanova, N., Akhmetova, J., Kurbaniyazov, N., Lakhno, M. Analyzing Students' Online Activity to Enhance Education Quality and Boost University Digital Security. Workshop Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems, CPITS, Volume 3654, Pages 426 – 431, ISSN 16130073, 2024

[19] Ахметов Б.С., Ошанова Н.Т. Искусственный интеллект как фактор повышения качества высшего образования, «Интеграция искусственного интеллекта в образовательный процесс в эпоху глобальной цифровизации: Стратегии, инновации и вызовы кибербезопасности» Международная научно-практическая конференция, Алматы. С.543-546;

[20] Президент Қасым-Жомарт Тоқаев Қазақстан халқына Жолдауында <https://egemen.kz/article/348185-toqaev-zhasandy-intellektininh-mumkindikterin-tolyq-paydalanu-kerek>

[21] Жасанды интеллектті дамытудың 2024-2029 жылдарға арналған тұжырымдамасын бекіту туралы <https://legalacts.egov.kz/npa/view?id=14945497>

[22] A. Rachha and M. Seyam, "Explainable AI In Education : Current Trends, Challenges, And Opportunities," SoutheastCon 2023, Orlando, FL, USA, 2023, pp. 232-239, doi: 10.1109/SoutheastCon51012.2023.10115140.

[23] L. G, B. S, R. D. M, D. J and S. N, "AI-powered Digital Classroom," 2022 International Conference on Communication, Computing and Internet of Things (IC3IoT), Chennai, India, 2022, pp. 1-6, doi: 10.1109/IC3IoT53935.2022.9767944.

[24] R. Sajja, Y. Sermet and I. Demir, "End-to-End Deployment of the Educational AI Hub for Personalized Learning and Engagement: A Case Study on Environmental Science Education," in IEEE Access, vol. 13, pp. 55169-55186, 2025, doi: 10.1109/ACCESS.2025.3554222.

[25] N. Adib, N. Sommer and N. Waksanski-Krynski, "Leveraging the Human Classroom with AI-Powered Resources," 2024 IEEE Digital Education and MOOCS Conference (DEMOcon), Atlanta, GA, USA, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/DEMOcon63027.2024.10747892.

[26] M. Ghaffari, A. Akbari and M. M. Ostani, "A User Experience Study on University of Isfahan's LMS and Exploring Features of AI-Enhanced E-Learning Platforms," 2024 11th International and the 17th

National Conference on E-Learning and E-Teaching (ICeLeT), Isfahan, Iran, Islamic Republic of, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/ICeLeT62507.2024.10493098.

[27] L. Wang, J. Li, L. Zhong, Y. Qi, T. Li and Q. He, "A Tensorial LMS Algorithm for Sparse System Based on Kronecker Product Decomposition," 2022 7th International Conference on Communication, Image and Signal Processing (CCISP), Chengdu, China, 2022, pp. 519-523, doi: 10.1109/CCISP55629.2022.9974544.

[28] K. Simbeck, S. Schauer and L. Fernsel, "The System Admin's Perspective: A Discussion on AI in Education with LMS Admins," 2024 21st International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET), Paris, France, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/ITHET61869.2024.10837664.

References

[1] Bletchley Declaration. (n.d.). Countries agree to safe and responsible development of frontier AI in landmark Bletchley Declaration. GOV.UK. Retrieved 26 February 2024, from <https://www.gov.uk/government/news/countries-agree-to-safe-and-responsible-development-of-frontier-ai-in-landmark-bletchley-declaration>

[2] Bloom, B. S. (1984). *The 2 Sigma Problem: The Search for Methods of Group Instruction as Effective as One-to-One Tutoring*. *Educational Researcher*, 13(6), 4. <https://doi.org/10.2307/1175554>

[3] Chen, X., Zou, D., Xie, H., Cheng, G., & Liu, C. (2022). *Two Decades of Artificial Intelligence in Education: Contributors, Collaborations, Research Topics, Challenges, and Future Directions*. *Educational Technology & Society*, 25(1), 28–47.

[4] Holmes, Wayne & Bialik, Maya & Fadel, Charles. (2019). *Artificial Intelligence in Education. Promise and Implications for Teaching and Learning*.

[5] Adal Ligasy. *Rukovodstvo po ispol'zovaniju iskusstvennogo intellekta v akademicheskoy dejatel'nosti*, Astana 2023.

[6] McCarthy, J., Minsky, M. L., Rochester, N., & Shannon, C. E. (2006). *A Proposal for the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, August 31, 1955*. *AI Magazine*, 27(4), Article 4. <https://doi.org/10.1609/aimag.v27i4.1904>

[7] UNESCO. (2021). *AI and education: Guidance for policy-makers*. UNESCO. <https://doi.org/10.54675/PCSP7350>

[8] Kizilcec R. F., Hohenstein, J., DiFranzo, D., Aghajari, Z., Mieczkowski, H., Levy, K., Naaman, M., Hancock, J., & Jung, M. F. (2023). *Artificial intelligence in communication impacts language and social relationships*. *Scientific Reports*, 13(1), 5487.

[9] Kizilcec, R. F., Makridis, C., & Sadowski, K. C. (2021). *Pandemic Response Policies' Democratizing Effects on Online Learning*. *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 118(11).

[10] V.J. Shute & S. Rahimi *Review of computer-based assessment for learning in elementary and secondary education* John Wiley & Sons Ltd *Journal of Computer Assisted Learning* (2017), 33, 1–19 doi: 10.1111/jcal.12172 2017, <https://myweb.fsu.edu/vshute/pdf/jcal.pdf>

[11] Pak Ju.N., Pak D.Ju., Rahimov M.A. *Institucional'nye aspekty obespechenija kachestva obrazovaniya. Opyt vysshej shkoly Kazahstana [Institutional aspects of quality assurance in education. Experience of higher education in Kazakhstan]*. «Akkreditacija v obrazovanii». – 2018. – № 5(102). – S. 32-34.

[12] Bugubaeva R.O., Bespaeva R.S., Berezjuk V.I., Erzhanov M.S. *Transformacija vysshego obrazovaniya v uslovijah informatizacii i cifrovizacii [Transformation of Higher Education in the Context of Informatization and Digitalization]*. *Vestnik universiteta «Turan»*. 2021;(3):272-277. <https://doi.org/10.46914/1562-2959-2021-1-3-272-277>. https://vestnik.turan-edu.kz/jour/article/view/1920?locale=ru_RU

[13] Akhmetov, B.S., Lakhno, V., Akhmetov, B.B., Zhilkishbayev, A., Izbasova, N., Kryvoruchko, O., Desiatko, A. *Application of a Genetic Algorithm for the Selection of the Optimal Composition of Protection Tools of the Information and Educational System of the University* (2022) *Procedia Computer Science*, 215, pp. 598-607. *Procentil' – 67*, DOI 10.1016/j.procs.2022.12.062

[14] Ahmetov B.S., Karlov I.A., Zhilkishbaev A.A., Serikbaev T.K. *Analiz mezhdunarodnogo opyta razrabotki i ispol'zovaniya modelej cifrovoj transformacii organizacij vysshego obrazovaniya [Analysis of international experience in developing and using models of digital transformation of higher education organizations]*. *Vestnik KazNPU, Serija «Fiziko-matematicheskie nauki»*. – 2021. – №2(74). – S.32-41. <https://doi.org/10.51889/2021-2.1728-7901.05>

[15] Ahmetov B.S., Lahno V.A. *Zashhita informacii i kiberbezopasnost' cifrovoj obrazovatel'noj sredy universiteta [Information protection and cybersecurity of the digital educational environment of the*

university]. Vestnik KazATK №1 (120), 2022. – S.134-141. <https://doi.org/10.52167/1609-1817-2022-120-1-134-141>

[16] Lakhno, V., Akhmetov, B., Yagaliyeva, B., ...Tsiutsiura, S., Tsiutsiura, M. The Model of Server Virtualization System Protection in the Educational Institution Local Network//Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologiethis link is disabled, 2023, 166, s. 461–475. Scopus, procentil' 34. DOI - 10.1007/978-981-99-0835-6_33

[17] Akhmetov, B.S., Abuova A.K., Izbasova N.B., Matovka, T., Rizak, V. Models and algorithms for optimizing the reserve of equipment to ensure the cybersecurity of the information educational environment of the university// Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 2022, 100(18), pp.5286-5297. Scopus, procentil' 36. <http://www.jatit.org/volumes/Vol100No18/23Vol100No18.pdf>.

[18] Lakhno, V., Oshanova, N., Akhmetova, J., Kurbaniyazov, N., Lakhno, M. Analyzing Students' Online Activity to Enhance Education Quality and Boost University Digital Security. Workshop Cybersecurity Providing in Information and Telecommunication Systems, CPITS, Volume 3654, Pages 426 – 431, ISSN 16130073, 2024

[19] Ahmetov B.S., Oshanova N.T. Iskusstvennyj intellekt kak faktor povysheniya kachestva vysshego obrazovaniya [Artificial Intelligence as a Factor in Improving the Quality of Higher Education], «Integraciya iskusstvennogo intellekta v obrazovatel'nyj process v jepohu global'noj cifrovizacii: Strategii, innovacii i vyzovy kiberbezopasnosti» Mezhdunarodnaja nauchno-prakticheskaja konferenciya, Almaty. S.543-546;

[20] Prezident Qasym-Zhomart Toqaeв Qazaqstan halqyna Zholdauynda [President Kassym-Zhomart Tokayev Kazakhstan Khalkyn Zholdauynda]. <https://egemen.kz/article/348185-toqaeв-zhasandy-intellektininh-mumkindikterin-tolyq-paydalanu-kerek>

[21] Zhasandy intellekti damytudyn 2024-2029 zhyldarza arnalzan tyzhyrymdamasyn bekitu turaly [Zhasandy intelligence damytudyn 2024-2029 zhyldara arnalgan tuzhyrymdamasyn bekitu turaly]. <https://legalacts.egov.kz/npa/view?id=14945497>

[22] A. Rachha and M. Seyam, "Explainable AI In Education : Current Trends, Challenges, And Opportunities," SoutheastCon 2023, Orlando, FL, USA, 2023, pp. 232-239, doi: 10.1109/SoutheastCon51012.2023.10115140.

[23] L. G, B. S, R. D. M, D. J and S. N, "AI-powered Digital Classroom," 2022 International Conference on Communication, Computing and Internet of Things (IC3IoT), Chennai, India, 2022, pp. 1-6, doi: 10.1109/IC3IoT53935.2022.9767944.

[24] R. Sajja, Y. Sermet and I. Demir, "End-to-End Deployment of the Educational AI Hub for Personalized Learning and Engagement: A Case Study on Environmental Science Education," in IEEE Access, vol. 13, pp. 55169-55186, 2025, doi: 10.1109/ACCESS.2025.3554222.

[25] N. Adib, N. Sommer and N. Waksanski-Krynski, "Leveraging the Human Classroom with AI-Powered Resources," 2024 IEEE Digital Education and MOOCS Conference (DEMOcon), Atlanta, GA, USA, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/DEMOcon63027.2024.10747892.

[26] M. Ghaffari, A. Akbari and M. M. Ostani, "A User Experience Study on University of Isfahan's LMS and Exploring Features of AI-Enhanced E-Learning Platforms," 2024 11th International and the 17th National Conference on E-Learning and E-Teaching (ICeLeT), Isfahan, Iran, Islamic Republic of, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/ICeLeT62507.2024.10493098.

[27] L. Wang, J. Li, L. Zhong, Y. Qi, T. Li and Q. He, "A Tensorial LMS Algorithm for Sparse System Based on Kronecker Product Decomposition," 2022 7th International Conference on Communication, Image and Signal Processing (CCISP), Chengdu, China, 2022, pp. 519-523, doi: 10.1109/CCISP55629.2022.9974544.

[28] K. Simbeck, S. Schauer and L. Fernsel, "The System Admin's Perspective: A Discussion on AI in Education with LMS Admins," 2024 21st International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET), Paris, France, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/ITHET61869.2024.10837664.

Н.К. Мукажанов¹, Ж.М. Алибиева¹, М. Тұрдалыұлы^{1,2}, Д.Р. Рашидинов^{3*},
Н.Т. Исимов²

¹ Satbayev University, Алматы қ., Қазақстан

² Халықаралық инженерлік-технологиялық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³ Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: damir.dmr88@gmail.com

ТЕРЕҢ ОҚЫТУДЫ ПАЙДАЛАНА ОТЫРЫП ӨСІМДІКТЕР АУРУЛАРЫН АНЫҚТАУ

Аңдатпа

Зерттеудің негізгі мақсаты, әлемде азық-түлікпен қамтамасыз етудегі шешуші рөл атқаратын өсімдіктердің ауруларын машиналық оқыту және терең оқыту сияқты озық технологияларының көмегімен ерте анықтау болып табылады. Бұл мақалада өсімдік ауруларын анықтау үшін машиналық оқыту мен терең оқыту әдістерін қолданудың соңғы жетістіктері қарастырылған. Зерттеу барысында, 2012-2023 жылдар аралығындағы ғылыми басылымдарға баса назар аударылып, жүргізілген тәжірибелердің дәлдігі мен тиімділігін арттыру үшін, ұсынылған әдістерді қолданудың тиімділігі көрсетілген. Ұсынылған жұмыста, деректердің қолжетімділігіне, бейне сапасына, сондай-ақ дені сау және ауру өсімдіктер арасындағы дифференциацияға қатысты мәселелері секілді, өсімдіктер ауруларын анықтау үшін, машиналық оқыту және терең оқыту алгоритмдері пайдаланылды. Өсімдік ауруларын анықтау бойынша нейрондық желілерін оқыту алма, картоп және қызанақ жемістері бойынша жинақталған деректерге жүргізілді. Зерттеу нәтижесінде, 11 қабатты нейрондық желі 98% дәлдік көрсетті.

Түйін сөздер: машиналық оқыту, терең оқыту, нейрондық желі, жасанды интеллект, орамалы нейрондық желі, кескіндерді классификациялау

Н.К. Мукажанов¹, Ж.М. Алибиева¹, М. Турдалыұлы^{1,2}, Д.Р. Рашидинов³, Н.Т. Исимов²

¹ Satbayev University, Алматы, Казахстан

² Международный инженерно-технологический университет, г. Алматы, Казахстан,

³ Международный университет информационных технологий, г. Алматы, Казахстан,

ВЫЯВЛЕНИЕ БОЛЕЗНЕЙ РАСТЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

Аннотация

Основная цель исследования – использовать передовые технологии, такие как машинное обучение и глубокое обучение, для раннего выявления заболеваний растений, которые играют решающую роль в обеспечении продовольственной безопасности. В статье рассматриваются последние достижения в использовании методов машинного обучения и глубокого обучения для обнаружения болезней растений. Анализ охватывает научные публикации, опубликованные в период с 2012 по 2023 год, подтверждающие эффективность применения данных методов для повышения точности и эффективности экспериментов. В представленной работе алгоритмы машинного обучения и глубокого обучения использовались для обнаружения болезней растений, а также для решения проблем, связанных с нехваткой данных, качеством изображений и точной классификацией здоровых и больных растений. Обучение нейронных сетей для обнаружения болезней растений осуществлялось на данных, содержащих изображения плодов яблок, картофеля и томатов. В результате экспериментов 11-слойная нейронная сеть достигла точности 98%.

Ключевые слова: машинное обучение, глубокое обучение, нейронная сеть, искусственный интеллект, сверточная нейронная сеть, классификация изображений.

N.K. Mukajanov¹, Z.M. Alibiyeva¹, M. Turdalyuly^{1,2}, D.R. Rashidinov³, N.T. Issimov²

¹Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

²International Engineering and Technological University, Almaty, Kazakhstan

³International University of Information Technologies, Almaty, Kazakhstan

DETECTION OF PLANT DISEASES USING DEEP LEARNING

Abstract

The main goal of the study is to utilize advanced technologies, such as machine learning and deep learning, for the early detection of plant diseases, which play a crucial role in ensuring food security. The article examines the latest advancements in the use of machine learning and deep learning methods for detecting plant diseases. The analysis covers scientific publications published between 2012 and 2023, confirming the effectiveness of these methods in improving the accuracy and efficiency of experiments. In this study, machine learning and deep learning algorithms were used to detect plant diseases, as well as to address challenges related to data scarcity, image quality, and the accurate classification of healthy and diseased plants. The training of neural networks for plant disease detection was conducted using datasets containing images of apples, potatoes, and tomatoes. As a result of the experiments, the 11-layer neural network achieved an accuracy of 98%.

Keywords: machine learning, deep learning, neural network, artificial intelligence, convolutional neural network, image classification

Негізгі ережелер

Ауыл шаруашылығы климаттың өзгеруі, халық санының өсуі және азық-түлік қауіпсіздігін қамтамасыз ету қажеттігі сияқты күрделі мәселелерге тап болуда. Өсімдіктер ауруларын ерте кезеңде анықтау мен олардың алдын алу ауыл шаруашылығының тиімділігі үшін маңызды, алайда дәстүрлі әдістер жоғары дәлдікті әрдайым қамтамасыз ете алмайды. Терең оқыту, әсіресе орамалы нейронды желілер (CNN), өсімдіктер ауруларын анықтаудың автоматтандырылған және дәл шешімдерін ұсынады, бұл ауруларды уақтылы емдеу мен олардың таралуын болдырмауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, веб-платформаларды дамыту терең оқыту технологияларын фермерлер мен агрономдардың тәжірибесіне енгізуге көмектеседі. Бұл бағыттағы ғылыми-зерттеу жұмыстары өсімдіктердің жағдайын диагностикалау мен мониторингілеудің неғұрлым дәл және қолжетімді әдістерін әзірлеуге ықпал етеді.

Кіріспе

Табысты егіншіліктің басты аспектілерінің бірі өсімдіктерді сақтау және ауруларды уақтылы анықтау болып табылады. Өсімдік ауруларын диагностикалаудың дәстүрлі әдістері, мысалы, агрономдардың көзбен шолып қарауы, көбінесе, едәуір уақыт пен адами ресурстарды қажет етеді және әрдайым қажетті дәлдікті қамтамасыз ете бермейді. Бұл тұрғыда терең оқыту технологиялары диагностикалық дәлдікті автоматтандыру мен арттырудың инновациялық шешімдерін ұсынады [1,2]. Терең оқыту, атап айтқанда, орамалы нейронды желілер (CNN) бейнелерді жіктеу міндеттерінде жоғары тиімділік көрсетті. Бұл тәсілдер суреттердің күрделі ерекшеліктерін автоматты түрде шығарып, талдай алады, бұл оларды ауыл шаруашылығына қолдануға қолайлы етеді. Зерттеулер көрсеткендей, өсімдіктер ауруларын диагностикалау үшін терең оқытуды пайдалану ауруларды анықтаудың дәлдігі мен жылдамдығын едәуір арттыруға мүмкіндік береді, бұл өз кезегінде ауруларды уақтылы емдеуге және оның таралуының алдын алуға ықпал етеді [3,4]. Терең оқыту модельдерін оқыту мен сынаудың негізгі ресурстарының бірі әртүрлі аурулардан зардап шеккен әртүрлі өсімдіктердің бейнелерінің көптігін қамтитын PlantVille деректер жиынтығы болып табылады. Осы деректерге сүйене отырып, түрлі нейронды желі архитектуралары жасалып, сынақтан өтті, мысалы, VGG, AlexNet, ResNet, және Inception, олар ауруларды жіктеуде жоғары дәлдікті көрсетеді [5]. Сонымен қатар, веб-платформаларды дамыту терең оқыту технологияларын фермерлер мен агрономдардың күнделікті тәжірибесіне біріктіруге мүмкіндік береді. Мұндай

қосымшалар далалық жағдайдағы өсімдіктердің суреттерін түсіру үшін, содан кейін оларды нақты уақыт режимінде ауруды диагностикалау үшін өңдеу үшін пайдаланылуы мүмкін. Бұл өсімдіктердің жай-күйін бақылау процесін жеңілдетіп қана қоймай, оларды күту бойынша жедел шаралар қабылдауға мүмкіндік береді. Осылайша, өсімдіктердің ауруларын анықтау үшін терең оқыту әдістерін қолдану ауыл шаруашылығының тиімділігі мен тұрақтылығын айтарлықтай арттыруға мүмкіндік беретін перспективалы бағытты көрсетеді. Осы саладағы одан арғы ғылыми-зерттеу және тәжірибелік-конструкторлық әзірлемелер өсімдіктердің жағдайларын диагностикалау мен мониторингілеудің неғұрлым дәл және қолжетімді құралдарын жасауға ықпал ететін болады [6-8].

2015 жылы «Nature» журналында жарияланған авторлар Yann LeCun, Yoshua Bengio және Geoffrey Hinton «Deep learning» мақаласында [9] терең оқыту (DL) әдістеріне соның ішінде, орамалы нейронды желілерді (CNN), олардың архитектураларына, сондай-ақ олардың компьютерлік көру, сөйлеуді тану, ауыл шаруашылығы сияқты түрлі салалардағы кең қосымшаларына жан-жақты шолу жасаған. Авторлар нейронды желілердің дамуын және қарапайым модельдерден күрделі терең оқыту архитектураларына көшуді сипаттай отырып, тарихи контекстен басған. Олар көп қабатты перцептрондар бастап, қатенің кері таралу алгоритмдерінің тууы сияқты негізгі тұстарды талқылаған. Мақалада сондай-ақ терең оқыту архитектуралары сипатталған. Оның ішінде: CNN орамалы нейронды желілермен (CNN) бейнелерді торлы топологиямен өңдеу қарастырылған. Табысты CNN архитектураларының мысалдарына AlexNet пен VGG жатады. Рекурентті нейронды желілер (RNN) мәтін және уақыт қатары сияқты тізбекті деректермен жұмыс істеуге арналған. Ұзақ қысқа мерзімді жад (LSTM) және қақпалы рекурентті бірліктер (GRU) — RNN жойылған градиенттер мәселесін шешуге көмектесетін жақсартулар десек болады. Автокодерлер (Autoencoders) - бұл желіге берілетін деректерді неғұрлым сығуға, кодтауға, содан кейін оны кері декодтауға үйретілген. Деректерді генерациялау үшін, мысалы, вариациялық аутокодерлер (VAE) пайдаланылады. Тереңдетілген ықтималдылық моделдері, яғни Байес желілері мен вариациялық әдістер деректердегі күрделі тәуелділіктерді модельдеу үшін қолданылады. Авторлар нейронды желілерді оқыту әдістерін егжей-тегжейлі талқылайды, оның ішінде градиентті түсіруді және оның SGD (стохастикалық градиентті түсіру) және Adam нұсқаларын пайдалануды қарастырған. Сондай-ақ, модельдердегі өнімділікті арттыруға және қайта үйретуді алдын алуға көмектесетін қалыпқа келтіру және тұрақтыландыру әдістері талқыланды. Сонымен қатар авторлар зерттеудің болашақ бағыттарын, соның ішінде нейронды желі архитектурасын жетілдіруді, оқытудың жаңа алгоритмдерін әзірлеуді, модельдердің интерпретациясын арттыруды талқылаған. Сондай-ақ модельдік оқытуды жеделдету үшін неғұрлым қуатты және энергияға тиімді аппараттық құралдардың қажеттілігін айтқан. LeCun, Bengio және Hinton 2015 жылғы "Deep learning" мақаласы терең оқыту және оның қолданылуы мәселелерін түсінуге маңызды үлес қосқан. Ауыл шаруашылығы жағдайында өсімдік ауруларын диагностикалау үшін CNN-ді қолдану ауыл шаруашылығы практикасының өнімділігі мен тұрақтылығын арттыру үшін DL басымдылығын көрсеткен.

Зерттеу әдіснамасы

2012 жылы жарық көрген Алекс Крижевский, Илья Сутскевер мен Джеффри Хинтонның «ImageNet classification with deep convolutional neural networks» мақаласы [10], компьютерлік көру саласындағы революциялық зерттеу болып табылады. Ол AlexNet моделін сипаттайды, ол алғаш рет суреттерді үлкен ImageNet деректер жиынтығына жіктеу міндетінде терең орамалы нейронды желілердің (CNN) елеулі артықшылығын көрсетті. ImageNet деректер жиынтығынан алынған суреттерді жіктеуге қабілетті CNN, онда 1000 санатқа белгіленген 1,2 миллионнан астам сурет бар. Авторлар шешуге тырысқан басты мәселе осындай үлкен деректер жиынтығы бойынша тиімді үйреніп, машиналық оқытудың дәстүрлі әдістерін басып озатын архитектура құру болды. Бұл зерттеуде AlexNet архитектурасы 8 қабаттан: 5 орама қабат және 3 толықбайланысқан қабаттан тұрады. Архитектураның негізгі ерекшеліктері:

белсендіру функциялары ретінде ірі орамалы қабаттарды (11x11, 5x5) және RELU (Rectified Linear Unit) пайдалану, бұл дәстүрлі сигмоидты немесе гиперболалық тангенстермен салыстырғанда тезірек оқу процесін жүргізуге мүмкіндік беретіндігі. Pooling - көріністердің көлемін азайтатын және деректерді қорытатын max-pooling қабаттарын пайдалануы. Dropout - Артық толтырудың алдын алу үшін авторлар оқу кезінде нейрондарды кездейсоқ өшіріп тастау техникасын қолданғандығы, әрі модель архитектурасында есептеулерді жылдамдату және модельдің мөлшерін ұлғайту үшін екі GPU-ға бөліп, параллельді өңдеуді қолдануы. Авторлар жіктеу сапасын AlexNet ImageNet тест деректер жиынтығында 15,3% ең жоғарғы 5 қатеге қол жеткізді, бұл алдыңғы үздік нәтижелерге қарағанда айтарлықтай жақсы болды (26,2%). Үздік 1 қате 37,5% құрады. Осылайша Крижевский, Сутскевер, Хинтонның 2012 жылғы мақаласы компьютерлік көру және терең оқыту тарихындағы маңызды оқиғалардың бірі болды. Ол терең орама нейронды желілер үлкен деректер жиынтығындағы бейнелерді жіктеу тапсырмаларындағы дәстүрлі әдістерден едәуір асып кетуі мүмкін екенін көрсетті. AlexNet компьютерлік көру проблемаларын шешу тәсілдерін дамытып, жетілдіруді жалғастырып келе жатқан VGG, ResNet, Inception сияқты кейінгі архитектураларға жол ашты.

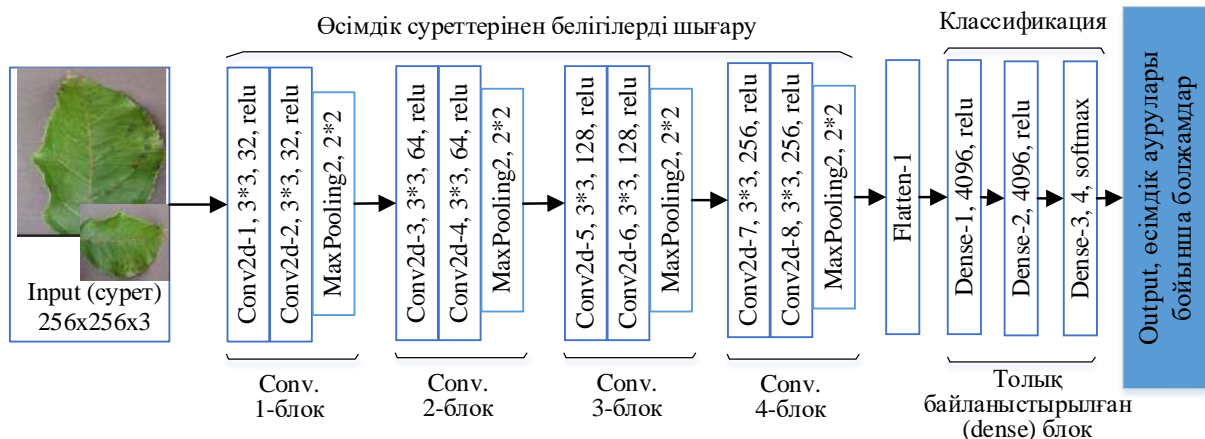
Mohanty, S. P., Hughes, D. P., & Salathé, M. 2016 жылы жарық көрген «Using deep learning for image-based plant disease detection» мақаласы [11] трансферттік оқытуды зерттеуге негізделген, олар суреттерді пайдалана отырып өсімдік ауруларын автоматты түрде диагностикалау үшін CNN-нің әр түрлі архитектураларының тиімділігін бағалауға зерттеу жүргізді. Зерттеу әр түрлі ауруларға шалдыққан өсімдіктердің суреттері бар PlantVillage деректер жиынтығына негізделді. PlantVillage деректер жиынтығына 38 кластың (аурулардың 26 класы және сау өсімдіктердің 12 класы) 54 мыңнан астам суреті кірді. Деректер модельдерді оқыту және бағалау үшін оқу-сынақ жинақтарына бөлінген. CNN архитектуралары ретінде бірінші 5 орамалы қабаттан және 3 толық байланысқан қабаттан тұратын AlexNet PlantVillage тест деректер жиынтығында 99,35% дәлдік көрсеткішіне қол жеткізгенін көрсеткен. Әрі екінші GoogleNet (Inception) концептуалды модульдерді қамтитын неғұрлым күрделі архитектурасы бар 22 қабаттан тұратын GoogleNet сол деректер жиынында 99,24% дәл болды. Нәтижелер алыну үшін моделдерді оқыту үшін стохастикалық градиентті түсіру және қалыпқа келтіру және тұрақтандыру техникалары қолданылды. Екі архитектура да өсімдіктер ауруларын жіктеуде жоғары дәлдік көрсетті, бұл диагностиканы автоматтандыруда терең оқыту әлеуетінің жоғары екендігін растайды. Одан кейінгі зерттеулерде Ферентинос К.П. Өзінің 2018 жылы келтірген «Deep learning models for plant disease detection and diagnosis» мақаласында [12] өсімдік ауруларын диагностикалау үшін CNN-нің әр түрлі архитектураларын салыстыруға бағытталған. AlexNet, VGG, ResNet және Inception сияқты архитектуралар PlantVillage деректер жиынтығында олардың дәлдігі мен тиімділігін бағалау үшін қайта қарастырды. Автордың зерттеулеріндегі деректер жиынтығы Моханти және т.б. зерттеуде қолданылғанға ұқсас, оның ішінде әр түрлі аурулары бар өсімдіктердің суреттері де бар болды. Автор CNN архитектураларына жеке-жеке түсініктемелер берді. AlexNet - классификацияда жоғары дәлдік көрсетті, бірақ жаңа архитектурадан кем түспеді. VGG - қарапайым және тиімді құрылымымен танымал 16-19 қабатты терең архитектура. ResNet - өте терең желілерді жаттықтыру үшін скиптік қосылымдарды пайдаланды. ResNet 99,53% дәлдік көрсеткішіне қол жеткізді. Нәтижелері кездейсоқ қиып алу, айналу, жарықтықтың өзгеруі сияқты деректерді толықтырудың алдыңғы қатарлы әдістері қолданды. ResNet және Inception ең жақсы нәтижелерді 99,53% дәлдікпен көрсетті, бұл олардың бейнелерді жіктеу тапсырмаларындағы артықшылығын растады. AlexNet пен VGG да жақсы нәтиже көрсетті, бірақ жаңа архитектурадан ұтылып қалды. Екі еңбек те өсімдік ауруларын диагностикалау үшін терең оқытуды қолдануда елеулі жетістіктерді көрсетеді. Ферентиностың [12] зерттеуі көрсеткендей, ResNet және Inception сияқты терең нейронды желілер бейнесін пайдалана отырып, өсімдіктер ауруларын диагностикалаудың қуатты құралдары болып табылады. Бұл модельдер ауруларды анықтаудың дәлдігі мен жылдамдығын едәуір арттыра алады, бұл ауыл шаруашылығы практикасын жетілдіруге және өнімділікті арттыруға ықпал етеді.

Өсімдіктердің ауруларын жапырақтарына қарап жіктеу әдістері бойынша қазіргі кезде жасалған басқа да авторлардың зерттеулерін қарастырып, талдағаннан кейін, біз барлық басқа қолданылатын әдістермен салыстырғанда терең оқыту әдістері дәлдігін табу тұрғысынан ең жақсы нәтижеге қол жеткізгенін байқадық. Алайда, терең оқыту әдістерінің ең маңызды шектеуі өсімдіктердің жапырақтары жайлы деректер жиынтығында жиі жетіспейтін үлкен оқыту деректеріне сүйену болып табылады. Өртүрлі өсімдік жапырақтары жайлы жіктеу осы зерттеуде енгізілген: ResNet және VGG архитектуралары жайлы болады. Бұрын айтып өткеніміздей, біздің зерттеуіміздегі бейнелерді талдау арқылы өсімдіктердің жапырақтары арқылы автоматтандырылған жіктеу тәсілі ұсынылды. Модель бастапқы бейнелерден алынған PlantVile деректерін пайдалана отырып оқытады. Пайда болған бейне VGG және Resnet ұсынылған модельдеріне енгізу ретінде пайдаланылады [13]. VGG қолданудағы басты артықшылық ол бір үлкен деңгейдің орнына бірнеше кіші бөліктерге бөлінген деңгейлердің болуы әрі осы бөліктердің шешім қабылдау фнкцияларының көмегімен жылдам бірге жиналуы болып табылады. Оның басты себебі сызықты емес белсенді қабаттардың көп болуында. Сонымен қатар, VGG архитектурасында кіші өлшемдегі орама сүзгілер қолданылады, ол өз кезегінде оқыту кезіндегі қайта оқуты ықтималдылығын азайтады. Сүзгілердің тиімді өлшемі – 3×3 , себебі одан кіші өлшемдер барлық берілген бағыттар бойынша көрші орналасқан пикселдер жайлы ақпараттарды қамти алмайды. Сәйкесінше, VGG моделі бейнелердің кеңістіктің сипаттамаларын талдау үшін ең қарапайым архитектураны ұсынады. Сәйкесінше, VGG моделі бейненің кеңістіктік сипаттамасы үшін ең қарапайым архитектура болып табылады [14]. CNN-ге негізделген Resnet терең оқыту архитектурасы. Ол 18 қабаттан тұрады. Терең нейронды желі моделін қолдану, бейнелерді оқыту және бастапқы кезеңде тереңдік туралы ақпаратты алу үшін қолданылады. Кейіннен оқытылған нейронды желі моделі жаңа суреттерді анықтау немесе жіктеу үшін қолданылады. ResNet архитектурасы өте терең желілер құру мүмкіндігіне ие. Қабаттар үдерісі кезінде қабаттардың шамадан тыс көп болуынан пайда болады, әрі дәлдік деңгейі жылдам деректердің қосылыстарының есебінен төмендейді, бұл бірнеше қабатты айналып өту арқылы сәйкестікті тезірек картаға түсіруге мүмкіндік береді. ResNet бір 7×7 орама қабаттан, екі пуль қабатынан, сегіз қалдық бірліктен, бір толықбайланысқан қабаттан тұрады. Әрбір қалдық бірлік таңдалған деректер жиынтығынан кескіндеменің 10 түрлі түрін қамтитын толықбайланысқан қабатпен қатар екі 3×3 орама қабаттан тұрады. Біздің тәжірибемізде ең соңғы толықбайланысқан қабаттардағы Softmax функциясын және орама қабаттағы белсендіру функциясы ретінде Relu функциясын қамтитын ResNet моделін қолдандық. Бастапқы оқыту коэффициенті 0,0001 деңгейінде белгіленеді және ол оқыту барысында біртіндеп төмендейді [15].

Зерттеу нәтижелері

Бұл зерттеу жұмысында өсімдіктердің ауруларын анықтау үшін толық байланысытырылған (FCNN - fully connected neural network) және CCN нейрондық желілеріне зерттеулер жүргізілді. Аталған нейрондық желілер негізінен деректерді классификациялау үшін қолданылады. Өсімдік ауруларын анықтау бойынша толық байланысытырылған (fully connected neural network) және CCN нейрондық желілерін біріктіре отырып 20 астам архитектуралар әзірленіп, оларға тестер жасалынды. Олардың ішінде жоғары дәлдік көрсеткен екі нейрондық желі архитектурасын осы жұмыста ұсынатын боламыз. Сонымен қатар, зерттеу барысында алынған нәтижелерге сүйене отырып, сурттерді классификациялауда нейрондық желінің қандай архитектуралық құрылымы жақсырақ нәтиже бертіні туралы қысқаша ұсыныстар жасаймыз. Ұсынылатын бірінші нейрондық желі архитектурасы 4 конволюциялық блоктан және толық байланыстырылған блоктан тұрады. Әр бір конволюциялық блок 2 конволюция қабатынан және ішкі іріктеу операциясынан тұрады. Толық байланыстырылған блок 3 толық байланыстырылған нейрондық желі қабаттарынан тұрады. Бұл архитектура жалпы саны 11 нейрондық желі қабаттарынан құраған. Конволюциялық қабаттар суреттерден белгілерді шығару (feature extraction) үшін қолданылса, ал толық байланыстырылған 3 қабат

классификация үшін пайдаланылды. Бұл нейрондық желі архитектурасы сұлбасы 1-суретте берілген.



Сурет 1. Өсімдік ауруларын классификациялаудың 11 қабатты нейрондық желі архитектурасы

Бірінші конволюциялық блок 2 конволюциялық нейрондық желі қабаттарынан және ішкі іріктеу операциясынан тұрады. Бірінші конволюциялық қабат кірісінде 256x256 өлшемді RGB кескінді қабылдайды, сонымен қатар онда 3x3 өлшемді 32 ядро берілген. Екінші конволюциялық қабат кіріс мәндерін алдыңғы қабаттан алады және 3x3 өлшемді 32 ядродан тұрады. Екі қабаттан кейін ішкі іріктеу операциясы (max-pooling, 2x2) орындалады. Ішкі іріктеуде пиксель блоктарының мәндерін біріктіру (қосу) арқылы кескінді 2 есе қысу (өлшемін азайту) процесі жасалады. Екінші конволюциялық блоктың әр бір қабаты 3x3 өлшемді 64 ядролардан тұрады және блок соңында ішкі іріктеу операциясы (max-pooling, 2x2) орындалады. Бұл блоктың бірінші қабаты (Conv2d-3) кіріс мәндерді алдыңғы блоктың ішкі іріктеуінен алады. Үшінші конволюциялық блоктың әр бір қабаты 3x3 өлшемді 128 ядролардан тұрады және блок соңында ішкі іріктеу операциясы (max-pooling, 2x2) орындалады. Бұл блоктың бірінші қабаты (Conv2d-5) кіріс мәндерді екінші блоктың ішкі іріктеуінен алады. Төртінші конволюциялық блоктың әр бір қабаты 3x3 өлшемді 256 ядролардан тұрады және блок соңында ішкі іріктеу операциясы (max-pooling, 2x2) орындалады. Бұл блоктың бірінші қабаты (Conv2d-7) кіріс мәндерді үшінші блоктың ішкі іріктеуінен алады. Жоғарыда берілген барлық конволюциялық қабаттарда «relu (rectified linear units)»-белсендіру (activation) функциясы қолданылды. Белсендіру функциясы-бұл қосқыштың нәтижесін кіріске қабылдайтын және өлшенген кірістердің қосындысын тапсырманы шешу тұрғысынан түсіндіруге болатын барабар шығысқа айналдыру үшін қандай да бір түрлендіруді орындайтын функция. Белсендіру функциясы қандайда бір мән қайтарады, егер x оң сан болса, кері жағдайда 0 мәнін қайтарады.

$$f(x) = \max(0, x) \quad (1)$$

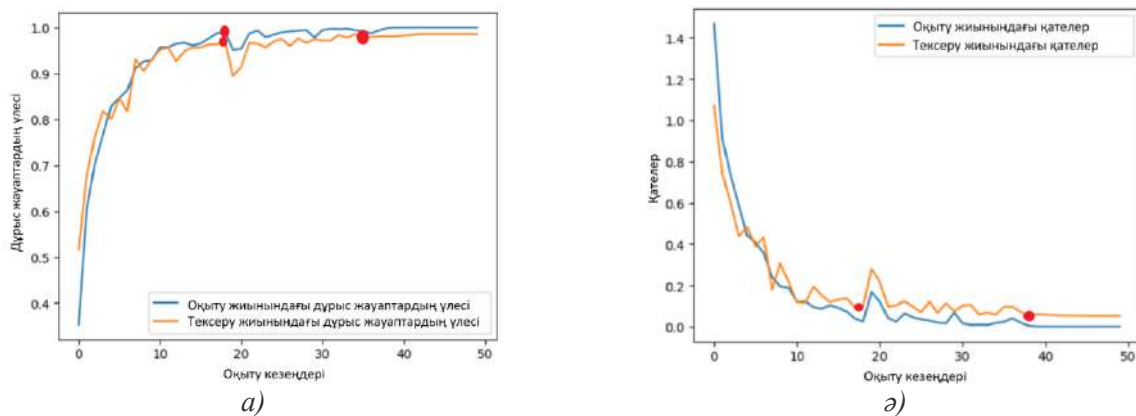
Relu функциясы жақсы жуықтату құралы – кез келген функцияны ReLU комбинациясы арқылы жуықтатуға болады. Тағы бір артықшылығы - бұл функция нейрондар белсендендірген кезде сиректікті тудырады. Яғни, сигмоидтан және гиперболалық тангенстен айырмашылығы, барлық нейрондар белсендірілмейді, бұл есептеу күрделілігін төмендетеді. Бұл қасиет барлық теріс мәндердің жойылуынан туындайды. ReLU пайдалану сигма тәрізді және гиперболалық тангенспен салыстырғанда градиенттің түсуінің конвергенция жылдамдығын айтарлықтай арттырады. Конволюциялық нейрондық желілер арқылы алынған белгілерді кластарға бөлу үшін толық байланыстырылған қабатты қолдануымыз қажет. Бұл үшін желінің конволюциялық бөлігінен толық байланыстырылғанға көшу, көп өлшемді деректерді бір өлшемді векторға түрлендіретін, ешқандай параметрлері жоқ Flatten() қабатын

құру қажет. *Flatten()* қабатынан алынған вектор толық байланыстырылған (*dense*) блокқа беріледі. Толық байланыстырылған (*dense*) блок үш қабаттан тұрады. Бірінші және екінші қабатта толық байланыстырылған 4096 нейрон және «*relu*» белсендіру функциясы берілген. Бұл екі қабат нейрондар арасында барынша толық байланыстарды қамтамасыз ету үшін енгізілді және эмпирикалық тексерулер арқылы тиімді нейрондар саны анықталынды. Келесі, үшінші толық байланыстырылған қабат 4 нейроннан және «*softmax*» белсендіру параметрлерінен тұрады. 4 нейрон классификацияланатын класстар саны, ал «*softmax*» белсендіру ықтималдық бойынша нейрондарды кластарға үлестіреді. Тест барысында, 11 қабатты нейрондық желі 98% дәлдік көрсетті (2-сурет). Бұл біз әзірлеп, тест жүргізген модельдердің ішіндегі ең жоғары көрсеткіш болады.

```
scores = model.evaluate(x_test, y_test, verbose=1)
49/49 [=====] - 25s 514ms/step - loss: 0.1029 - accuracy: 0.9807
```

Сурет 2. 11 қабатты нейрондық желі дәлдігі

Әзірленген нейрондық желіні 50 кезеңнен тұратын оқыту жүргізілді. Оқытуды бақылау бойынша графигі 5-суретте берілген. Оқыту сапасын бақылау графигінде көрсетілгендей (5 (а) суреті), тексеру деректері бойынша дұрыс жауаптардың үлесі 16 кезеңнен кейін аса көтерілмейді және шамамен 36 кезеңнен кейін өзгеріссіз қалады. Бұл дегеніміз 36 кезеңнен кейін нейрондық желіні оқытудың қажеті жоқ. 5-сурет ә-да қателесу бойынша бақылау графигінде а-суреттегідей 16-кезеңнен кейін аса қатты қателесу төмендемейді, ал 36 кезеңнен кейін қаталесу өзгеріссіз түзу сызықпен қалады.

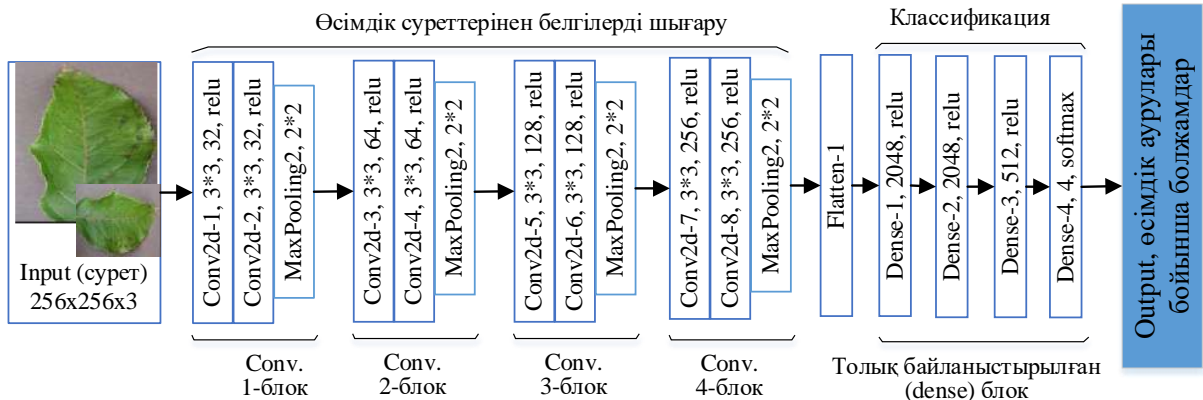


Сурет 3. Нейрондық желіні оқыту сапасын бақылау графигі

Ұсынылатын келесі нейрондық желі архитектурасы 12 қабаттан тұрады. Суреттерден белгілерді шығару үшін алдыңғы архитектураның құрылымы пайдаланылды, яғни 8 қабаты CNN нейрондық желі қабаты, ал, классификация үшін нейрондық қабаттарға өзгеістер енгізілді. Толық байланыстырылған нейрондық желі қабаты саны 4. Бастақы екі қабат 2048 нейроннан тұрса, 3-ші толық байланыстырылған нейрондық желі қабаты 512 нейроннан, ал соңғы қабат 4 нейроннан (классификация санына байланысты) тұрады. Бұл нейрондық желі архитектурасы сұлбасы 4-суретте берілген.

4-суретте берілген нейрондық желі архитектурасының соңғы толық байланыстырылған блогының бірінші екі қабатының (*Dense-1* және *Dense-2*) нейрондар санын 2048 ден төмендету тест барысында дәлдік көрсеткішін төмендетенінін көрсетті. Сол себепті нейрондар саны 2048 болып алынды. Ал келесі, *Dense-3* қабатта нейрондар саны 2048 ден 512 дейін дәлдік көрсеткішіне әсер етпеді, бірақ нейрондар саны 512-ден азайғанда дәлдіктің төмендеуі байқалды. Сол себепті 512 алынды, ал одан көп нейрондар саны параметр мәндерінің көбірек болуына байланысты есептеулер үшін тиімсіз. Соңғы, *Dense-4* қабаттағы 4

классификацияланатын класстар саны және мұнда алдыңғы архитектурадағыдай белсендіру (activation) параметрінде «softmax» қолданылды.



Сурет 4. Өсімдік ауруларын классификациялаудың 12 қабатты нейрондық желі архитектурасы

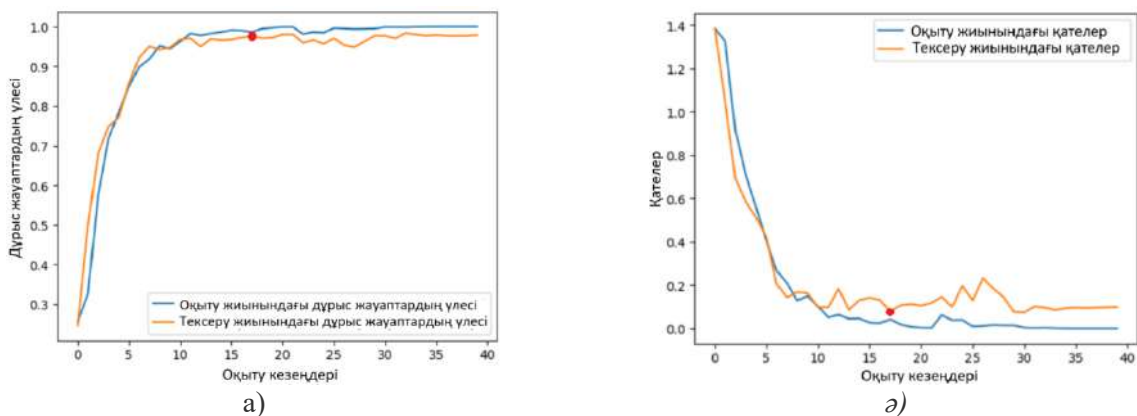
Тест барысында, 12 қабатты нейрондық желі 96,59% дәлдік көрсетті (5-сурет). Бұл біз әзірлеп, тест жүргізген модельдердің ішіндегі екінші жақсы көрсеткіш болады.

```
scores = model.evaluate(x_test, y_test, verbose=1)
```

49/49 [=====] - 24s 494ms/step - loss: 0.2109 - accuracy: 0.9659

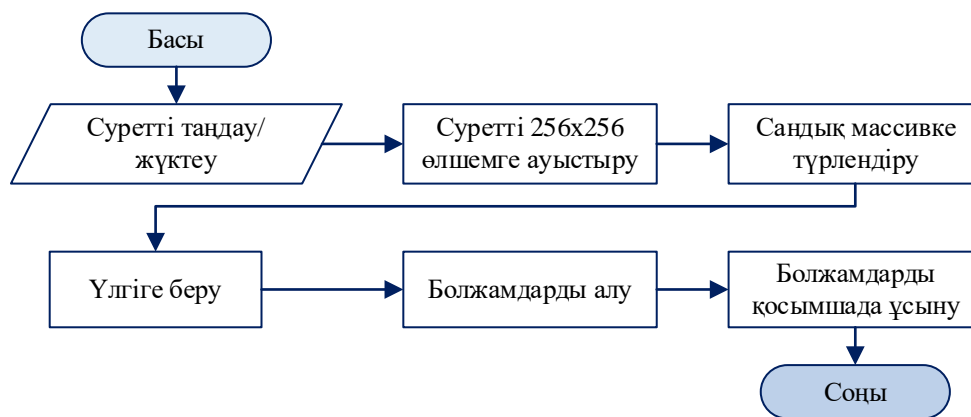
Сурет 5. 12 қабатты нейрондық желі дәлдігі.

Тестілеу мақатында және дұрыс оқыту кезеңін анықтау мақсатында 12 қабатты нейрондық желіге 40 кезеңнен тұратын оқыту жүргізілді. Оқытуды бақылау бойынша графигі 6-суретте берілген. Оқыту сапасын бақылау графигінде көрсетілгендей (а) 6-сурет), тексеру деректері бойынша дұрыс жауаптардың үлесі 17 кезеңнен кейін аса көтерілмейді. Бұл нейрондық желіні 17 кезеңнен кейін оқытудың қажеті жоқ. 6-сурет б-да қателесу бойынша бақылау графигінде а-суреттегідей 17-кезеңнен кейін аса қатты қателесу төмендемейді. Демек, нейрондық желінің бұл архитектурасына 17 оқыту кезеңі жеткілікті.



Сурет 6. 16 қабатты нейрондық желіні оқыту сапасын бақылау графигі

Өсімдік ауруларын анықтау бойынша нейрондық желілерін оқыту алма, картоп және қызанақ жемістері бойынша жинақталған деректерге жүргізілді. Оқытылған модельді қосымшаларда қолдану үшін .h5 форматындағы нұсқасы қалыптастырылды. Ұсынылып отырған нейрондық желіні пайдаланып өсімдік ауруын анықтау қосымшасының жұмыс алгоритмі 7-суретте берілген.



7 сурет. Өсімдік ауруларын анықтауға арналған нейрондық желінің қосымшада жұмыс істеу алгоритмі

Құрылған нейрондық желіні қосымшаларда қолдану үшін келесі әрекеттерді орындау қажет.

1. Суретті таңдау/жүктеу
2. Жүктелген сурет өлшемін 256x256 өлшемге өзгерту. Біздің нейрондық желі 256x256 өлшемді суреттер арқылы оқытылған.
3. Өлшемі келтірілген суреттерті сандық массив деректеріне түрлендіру. Модельді оқытар алдында барлық деректер жиыны сандық массив түрінде түрлендіріліп оқытылды.
4. Массив деректерін модельге беру. Массив деректері сандық массив форматында модельге беріледі.
5. Модельден болжамдарды алу. Алдын-ала оқытылып сақталған модель берілген сурет бойынша болжамды қайтарады. Алынған болжам қосымшаға беріледі.
6. Болжамдарды қосымшада ұсыну. Модельден алынған классификация деректері сандық түрде болғандықтан, оларды пайдаланушыларға ыңғайлы, қосымша талаптарына сәйкес түрге келтіру қажет.

Дискуссия

Қарастырылған ғылыми-зерттеу жұмысы, өсімдік ауруларын анықтауға арналған нейрондық желі архитектураларын құру және алынған нәтижелерін салыстыруды талдайды. Алынған нәтижелер көрсеткендей, 11 қабатты нейрондық желі 98% дәлдікке қол жеткізіп, ең жоғары нәтижені көрсетті, ал 12 қабатты желі 96,59% дәлдікпен екінші үздік модель ретінде анықталды. Бұл айырмашылықтар, зерттеу жұмысындағы, нейрондық желінің архитектурасы мен параметрлерін оңтайландырудың маңыздылығын көрсетеді. Сонымен қатар, зерттеу нәтижелері, модельдерді оқыту кезеңдерінің жеткілікті санын анықтаудың маңыздылығын көрсетті, себебі 36 рет оқытудан кейінгі кезеңдері 11 қабатты модельдің дәлдігін арттырмай, сонымен бірге, 12 қабатты модель үшін 17 кезең жеткілікті болды. Алынған нәтижелерді негізге ала отырып, болашақта модельді жетілдіру үшін деректерді көбейту мен нейрондық желінің құрылымын оңтайландыру және есептеу ресурстарын тиімді пайдалану бағытында қосымша зерттеулер жүргізу қажет.

Қорытынды

Өсімдік ауруларын анықтауға арналған нейронды желілер тапсырманың күрделілігіне және қолда бар деректерге байланысты таңдалады. Мақалада нейронды желілердің ең тиімді және жиі қолданылатын кейбір түрлері жайлы ақпараттар келтірілген. CNN - өсімдіктер ауруларын жіктеу сияқты бейнені талдауға байланысты тапсырмаларды орындау үшін ең танымал таңдау. Олар суреттерден кеңістіктік мүмкіндіктерді алу бойынша жақсы жұмыс атқарады.

Архитектуралардың сипаттамалары: LeNet: кескінді танудың қарапайым тапсырмаларына жақсы сай келетін алғашқы CNN-дердің бірі. AlexNet: Имидж жіктелмесінде жоғары көрсеткіштер көрсету арқылы 2012 жылы ImageNet Challenge-ді жеңіп алған терең CNN. VGGNet: әр түрлі жіктеу тапсырмаларын жақсы орындайтын терең қабатты архитектура. ResNet (Қалдық желілер): градиенттерді түсіру проблемасынсыз өте терең желілерді салуға мүмкіндік беретін қалдық блоктарды қамтиды. Inception: ақпараттың әртүрлі деңгейлерін түсіру үшін әр қабаттағы әр түрлі өлшемдегі сүзгілер комбинациясын пайдаланады. EfficientNet: аз есептеу үстемесімен жоғары дәлдікке қол жеткізу үшін желі тереңдігін, енін және ажыратымдылығын теңестіретін оңтайландырылған архитектура.

Сонымен қатар деректерді алдын ала өңдеу және трансферттік оқыту сипаттамалары да келтірілген. Трансферлік оқыту ImageNet сияқты ірі деректер жиынтығында алдын ала дайындалған модельдерді (мысалы, ResNet, Inception) пайдалануға және оларды өсімдік ауруларын анықтау үшін нақты деректер бойынша қайта даярлауға мүмкіндік береді. Бұл модельді «нөлден» оқыту үшін қажетті уақыт пен ресурстарды айтарлықтай қысқартады. Ал суреттерді өңдеу және деректерді толықтыру оқыту жиынтығының алуан түрлілігін арттыру арқылы модельдің жалпылығын арттыруға көмектеседі. Бұл әсіресе деректер жиынтығы көлемімен шектелсе, пайдалы. Толықтыру әдістерінің: Кескіннің бұрылысы, Масштабтау, Көлденең және тік шағылысу, Жарықтық және қарама-қарсылық өзгерістері, Түсті өзгерту сияқты түрлерін қарыстырсақ болады. Сондай-ақ рекуррентті нейронды желілер RNN және LSTM дәстүрлі түрде тізбекті деректерді өңдеу үшін қолданылғанымен, олар өсімдік жағдайының уақытша үрдістерін ескеру қажет болғанда кескін немесе бейне уақыт сериясын талдау үшін CNN-мен үйлесімде пайдалы болуы мүмкін.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

- [1] Agarwal, M., Singh, A., Arjaria, S., Sinha, A., Gupta, S. (2020). ToLeD: Tomato leaf disease detection using convolution neural network. *Proc. Comput. Sci.* 167 (2019), 293–301. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.03.225>
- [2] Akbar, M., Ullah, M., Shah, B., Khan, R. U., Hussain, T., Ali, F., et al. (2022). An effective deep learning approach for the classification of bacteriosis in peach leave. *Front. Plant Sci.* 13. <https://doi.org/10.3389/fpls.2022.1064854>
- [3] Alzubaidi, L., Zhang, J., Humaidi, A. J., Al-Dujaili, A., Duan, Y., Al-Shamma, O., et al. (2021). Review of deep learning: concepts, CNN architectures, challenges, applications, future directions. *J. Big Data* 8, 1–74. <https://doi.org/10.1186/s40537-021-00444-8>
- [4] Karthik, R., Hariharan, M., Anand, S., Mathikshara, P., Johnson, A., Menaka, R. (2020). Attention embedded residual CNN for disease detection in tomato leaves. *Appl. Soft Comput.* 86, 105933. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.105933>
- [5] Hughes, D.P., & Salathé, M. (2015). An open access repository of images on plant health to enable the development of mobile disease diagnostics through machine learning and crowdsourcing. *ArXiv*, abs/1511.08060. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.08060>
- [6] Deng, R., Tao, M., Xing, H., Yang, X., Liu, C., Liao, K., et al. (2021). Automatic diagnosis of rice diseases using deep learning. *Front. Plant Sci.* 12, 701038. <https://doi.org/10.3389/fpls.2021.701038>
- [7] Savla, D., Dhaka, V.S., Rani, G., Oza, M. (2022). Apple Leaf Disease Detection and Classification Using CNN Models. In: Iyer, B., Crick, T., Peng, S.L. (eds) *Applied Computational Technologies. ICCET 2022. Smart Innovation, Systems and Technologies*, vol 303. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-2719-5_26
- [8] Ferentinos, K.P. (2018). Deep learning models for plant disease detection and diagnosis. *Computers and Electronics in Agriculture*, 145, 311-318. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2018.01.009>
- [9] Brahimi, M., Boukhalfa, K. and Moussaoui, A. (2017) Deep Learning for Tomato Diseases: Classification and Symptoms Visualization. *Applied Artificial Intelligence*, 31, 299-315. <https://doi.org/10.1080/08839514.2017.1315516>

[10] ImageNet classification with deep convolutional neural networks. Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Geoffrey E. Hinton. *Authors Info & Claims. Communications of the ACM*, Volume 60, Issue 6, Pages 84 – 90. <https://doi.org/10.1145/3065386>

[11] Mohanty, S.P., Hughes, D.P. and Salathe, M. (2016) Using Deep Learning for Image-Based Plant Disease Detection. *Frontiers in Plant Science*, 7, 1419-1419. <https://doi.org/10.3389/fpls.2016.01419>

[12] Ferentinos, K.P. (2018) Deep Learning Models for Plant Disease Detection and Diagnosis. *Computers and Electronics in Agriculture*, 145, 311-318. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2018.01.009>

[13] A. Victor Ikechukwu, S. Murali, R. Deepu, R.C. Shivamurthy. ResNet-50 vs VGG-19 vs training from scratch: A comparative analysis of the segmentation and classification of Pneumonia from chest X-ray images. *Global Transitions Proceedings. Volume 2, Issue 2, November 2021, Pages 375-381.* <https://doi.org/10.1016/j.gltp.2021.08.027>

[14]. K. Simonyan, A. Zisserman. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. *3rd Int. Conf. Learn. Represent. ICLR 2015 - Conf. Track Proc (2015)*, pp. 1-14. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.1556>

[15] Mohameth, F. , Bingcai, C. and Sada, K. (2020) Plant Disease Detection with Deep Learning and Feature Extraction Using Plant Village. *Journal of Computer and Communications*, 8, 10-22. <https://doi.org/10.4236/jcc.2020.86002>

References

[1] Agarwal, M., Singh, A., Arjaria, S., Sinha, A., Gupta, S. (2020). ToLeD: Tomato leaf disease detection using convolution neural network. *Proc. Comput. Sci.* 167 (2019), 293–301. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.03.225>

[2] Akbar, M., Ullah, M., Shah, B., Khan, R. U., Hussain, T., Ali, F., et al. (2022). An effective deep learning approach for the classification of bacteriosis in peach leave. *Front. Plant Sci.* 13. <https://doi.org/10.3389/fpls.2022.1064854>

[3] Alzubaidi, L., Zhang, J., Humaidi, A. J., Al-Dujaili, A., Duan, Y., Al-Shamma, O., et al. (2021). Review of deep learning: concepts, CNN architectures, challenges, applications, future directions. *J. Big Data* 8, 1–74. <https://doi.org/10.1186/s40537-021-00444-8>

[4] Karthik, R., Hariharan, M., Anand, S., Mathikshara, P., Johnson, A., Menaka, R. (2020). Attention embedded residual CNN for disease detection in tomato leaves. *Appl. Soft Comput.* 86, 105933. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.105933>

[5] Hughes, D.P., & Salathé, M. (2015). An open access repository of images on plant health to enable the development of mobile disease diagnostics through machine learning and crowdsourcing. *ArXiv*, abs/1511.08060. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.08060>

[6] Deng, R., Tao, M., Xing, H., Yang, X., Liu, C., Liao, K., et al. (2021). Automatic diagnosis of rice diseases using deep learning. *Front. Plant Sci.* 12, 701038. <https://doi.org/10.3389/fpls.2021.701038>

[7] Savla, D., Dhaka, V.S., Rani, G., Oza, M. (2022). Apple Leaf Disease Detection and Classification Using CNN Models. In: Iyer, B., Crick, T., Peng, S.L. (eds) *Applied Computational Technologies. ICCET 2022. Smart Innovation, Systems and Technologies*, vol 303. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-2719-5_26

[8] Ferentinos, K.P. (2018). Deep learning models for plant disease detection and diagnosis. *Computers and Electronics in Agriculture*, 145, 311-318. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2018.01.009>

[9] Brahim, M., Boukhalfa, K. and Moussaoui, A. (2017) Deep Learning for Tomato Diseases: Classification and Symptoms Visualization. *Applied Artificial Intelligence*, 31, 299-315. <https://doi.org/10.1080/08839514.2017.1315516>

[10] ImageNet classification with deep convolutional neural networks. Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Geoffrey E. Hinton. *Authors Info & Claims. Communications of the ACM*, Volume 60, Issue 6, Pages 84 – 90. <https://doi.org/10.1145/3065386>

[11] Mohanty, S.P., Hughes, D.P. and Salathe, M. (2016) Using Deep Learning for Image-Based Plant Disease Detection. *Frontiers in Plant Science*, 7, 1419-1419. <https://doi.org/10.3389/fpls.2016.01419>

[12] Ferentinos, K.P. (2018) Deep Learning Models for Plant Disease Detection and Diagnosis. *Computers and Electronics in Agriculture*, 145, 311-318. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2018.01.009>

[13] A. Victor Ikechukwu, S. Murali, R. Deepu, R.C. Shivamurthy. ResNet-50 vs VGG-19 vs training from scratch: A comparative analysis of the segmentation and classification of Pneumonia from chest X-ray images.

Global Transitions Proceedings. Volume 2, Issue 2, November 2021, Pages 375-381.
<https://doi.org/10.1016/j.gltp.2021.08.027>

[14]. K. Simonyan, A. Zisserman. *Very deep convolutional networks for large-scale image recognition*. 3rd Int. Conf. Learn. Represent. ICLR 2015 - Conf. Track Proc (2015), pp. 1-14.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.1556>

[15] Mohameth, F. , Bingcai, C. and Sada, K. (2020) *Plant Disease Detection with Deep Learning and Feature Extraction Using Plant Village*. *Journal of Computer and Communications*, 8, 10-22.
<https://doi.org/10.4236/jcc.2020.86002>

G.S. Shaimerdenova^{1*}, A.N. Zhidebayeva², R.A. Medetbekova³
Z.Z. Esenkulova¹, Zh.Zh. Azhibekova⁴

¹M. Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan,

²Peoples Friendship University named after Academician A.Kuatbekov, Shymkent, Kazakhstan

³Shymkent university, Shymkent, Kazakhstan

⁴Asfendiyarov Kazakh National Medical University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: azhibekova.z@kaznmu.kz

REVIEW OF COMPUTER MODELING'S CONTRIBUTION TO ENHANCING THE SAFETY AND EFFICIENCY OF INDUSTRIAL FACILITIES

Abstract

The paper examines the crucial function of computer modeling in enhancing the safety and efficiency of industrial facilities. The article discusses several types of computer models, including simulation, forecasting, optimization, stochastic models, and digital twins. It demonstrates how these techniques transform intricate production processes into manageable simulations, thereby significantly enhancing operational management. The use of advanced technologies, such as IIoT, and dependable software platforms, including MATLAB, ANSYS, and MindSphere, facilitates precise real-time data acquisition and iterative model enhancement. The manuscript underscores the fundamental concepts of computer modeling, encompassing system definition, selection, and ongoing validation, and their significance in guaranteeing model accuracy and relevance. This paper presents comprehensive case studies and theoretical analyses that demonstrate the importance of computer modeling in optimizing resource utilization, forecasting equipment failures, and facilitating decisions that enhance the sustainability and competitiveness of industrial operations. Safety and efficiency are crucial to industrial processes, as they significantly impact operational viability, cost management, and regulatory compliance. They safeguard employees, communities, and legal responsibilities against incidents. Manufacturing efficiency is crucial for optimizing resources, minimizing waste, and enhancing productivity and economic performance. In the current competitive market, rigorous environmental and safety laws necessitate the integration of these elements. Ongoing enhancements in safety and efficiency stimulate innovation, attract and retain a skilled staff, and facilitate adaptation to evolving market requirements. The transition to digitization, encompassing enterprise resource planning systems and the Industrial Internet of Things (IIoT), is providing a unified perspective on operations, thereby enhancing decision-making processes. Utilizing these technologies enables industries to gain improved control and understanding of their operations, resulting in substantial improvements in safety and efficiency standards.

Keywords: computer modeling, industrial safety, efficiency optimization, predictive maintenance, digital twins.

Г.С.Шаймерденова¹, А.Н.Жидебаева², Р.А.Медетбекова³, З.З.Есенкулова¹, Ж.Ж. Ажибекова⁴

¹М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент қ., Қазақстан,

²Академик Ә.Қуатбеков атындағы Халықтар достығы университеті, Шымкент қ., Қазақстан,

³Шымкент университеті, Шымкент қ., Қазақстан

⁴С. Ж. Асфендияров атындағы Қазақ ұлттық медицина университеті, Алматы қ., Қазақстан

ӨНЕРКӘСІПТІК ОБЪЕКТІЛЕРДІҢ ҚАУІПСІЗДІГІ МЕН ТИІМДІЛІГІН АРТТЫРУДАҒЫ КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУДІҢ РӨЛІНЕ ШОЛУ

Аңдатпа

Мақалада өнеркәсіптік нысандардың қауіпсіздігі мен тиімділігін арттырудағы компьютерлік модельдеудің ең маңызды функциясы талқыланады. Мақалада симуляция, болжау, оңтайландыру, стохастикалық модельдер және цифрлық егіздерді қоса алғанда, компьютерлік модельдердің бірнеше түрі қарастырылады. Бұл әдістер күрделі өндірістік процестерді басқарылатын модельдеулерге қалай түрлендіретінін көрсетеді, осылайша операциялық басқаруды айтарлықтай жақсартады. IIoT сияқты озық технологияларды және MATLAB, ANSYS және MindSphere сияқты сенімді бағдарламалық

қамтамасыз ету платформаларын пайдалану нақты уақытта нақты деректерді алуды жеңілдетеді және модельді итеративті түрде жақсартады. Қолжазба жүйені анықтауды, таңдауды және үздіксіз тексеруді қамтитын компьютерлік модельдеудің іргелі тұжырымдамаларын және олардың модельдің дәлдігі мен өзектілігін қамтамасыз етудегі маңыздылығын көрсетеді. Бұл мақалада ресурстарды пайдалануды оңтайландыру, жабдықтың істен шығуын болжау және өндірістік операциялардың тұрақтылығы мен бәсекеге қабілеттілігін арттыратын шешімдерді қабылдауды жеңілдету үшін компьютерлік модельдеудің мәнін көрсететін жан-жақты жағдайлық зерттеулер мен теориялық талдаулар ұсынылған. Қауіпсіздік пен тиімділік өндірістік процестер үшін маңызды болып табылады, бұл операциялық өміршеңдікке, шығындарды басқаруға және нормативтік талаптарға сәйкестікке әсер етеді. Олар қызметкерлерді, қауымдастықтар мен заңды жауапкершілікті оқыс оқиғалардан қорғайды. Өндіріс тиімділігі ресурстарды оңтайландыру, қалдықтарды азайту және өнімділік пен экономикалық көрсеткіштерді жақсарту үшін өте маңызды. Бүгінгі бәсекелес нарықта қатаң экологиялық және қауіпсіздік заңдары осы элементтерді біріктіруді талап етеді. Қауіпсіздік пен тиімділікті үздіксіз жақсарту инновацияларды ынталандырады, білікті персоналды тартады және қызмет көрсетеді және өзгермелі нарық талаптарына бейімделуді жеңілдетеді. Кәсіпорын ресурстарын жоспарлау жүйелерін және өнеркәсіптік заттар интернетін (Иот) қамтитын цифрлық трансформация операциялардың біртұтас перспективасын ұсынады, осылайша шешім қабылдау процестерін жақсартады. Бұл технологияларды пайдалану салаларға бақылауды жақсартуға және олардың жұмысы туралы түсінік алуға мүмкіндік береді, нәтижесінде қауіпсіздік пен тиімділік стандарттары айтарлықтай жақсарады.

Түйін сөздер: компьютерлік модельдеу, өнеркәсіптік қауіпсіздік, тиімділікті оңтайландыру, профилактикалық қызмет көрсету, сандық егіздер

Г.С. Шаймерденова¹, А.Н. Жидебаева², Р.А.Медетбекова³, З.З.Есенкулова¹, Ж.Ж. Ажибекова⁴

¹Южно-Казахстанский университет имени М.Ауэзова, г.Шымкент, Казахстан

²Университет дружбы Народов им. академика А.Куатбекова, г.Шымкент, Казахстан

³Шымкент университет, г.Шымкент, Казахстан

⁴С. Ж. Асфендияров атындағы Қазақ ұлттық медицина университет, Алматы, Казахстан

ОБЗОР РОЛИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПОВЫШЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Аннотация

В статье рассматривается важнейшая функция компьютерного моделирования в повышении безопасности и эффективности промышленных объектов. В статье рассматриваются несколько типов компьютерных моделей, включая моделирование, прогнозирование, оптимизацию, стохастические модели и цифровых двойников. В ней показано, как эти методы преобразуют сложные производственные процессы в управляемые моделирования, тем самым значительно улучшая оперативное управление. Использование передовых технологий, таких как Иот, и надежных программных платформ, таких как MATLAB, ANSYS и MindSphere, облегчает получение точных данных в реальном времени и итеративное улучшение модели. В рукописи подчеркиваются фундаментальные концепции компьютерного моделирования, охватывающие определение, выбор и постоянную проверку системы, а также их значение для обеспечения точности и релевантности модели. В этой статье представлены комплексные тематические исследования и теоретические анализы, которые демонстрируют значение компьютерного моделирования для оптимизации использования ресурсов, прогнозирования отказов оборудования и содействия принятию решений, которые повышают устойчивость и конкурентоспособность промышленных операций. Безопасность и эффективность имеют решающее значение для промышленных процессов, влияя на эксплуатационную жизнеспособность, управление затратами и соблюдение нормативных требований. Они защищают сотрудников, сообщества и юридическую ответственность от инцидентов. Эффективность производства имеет решающее значение для оптимизации ресурсов, минимизации отходов и повышения производительности и экономических показателей. На современном конкурентном рынке строгие законы об охране окружающей среды и безопасности требуют интеграции этих элементов. Постоянное повышение безопасности и эффективности стимулирует инновации, привлекает и поддерживает квалифицированный персонал и облегчает адаптацию к меняющимся требованиям рынка. Переход к цифровизации, охватывающий системы планирования ресурсов предприятия и промышленный Интернет вещей (Иот), предлагает единую перспективу операций, тем самым улучшая

процессы принятия решений. Использование этих технологий позволяет отраслям получить улучшенный контроль и понимание своих операций, что приводит к существенному улучшению стандартов безопасности и эффективности.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, промышленная безопасность, оптимизация эффективности, профилактическое обслуживание, цифровые двойники

Introduction

Safety and efficiency are the most essential pillars of industrial operations as they directly impact operational viability, cost management, and compliance. Ensuring safety in industrial facilities not only protects the workforce and surrounding communities but also protects against defects and legal liability arising from industrial accidents. Similarly, production efficiency is crucial for maximizing resource utilization, minimizing waste, and enhancing productivity, ultimately improving the economic performance of the enterprise. In today's competitive marketplace, the integration of these factors is essential to maintaining sustainable operations and a strong corporate reputation [1]. Increasingly stringent environmental and safety regulations further determine the need to implement methods and technologies that enhance both safety and efficiency.

One of the primary factors driving innovation in the industrial sector is the ongoing pursuit of improved safety and efficiency. Businesses may spur innovation in these areas, which in turn can improve existing processes and set new standards, by placing a premium on these factors. Enhancing efficiency and safety also aids in attracting and retaining talent by fostering a responsible and caring work environment, which is highly prized in the modern job market.

Traditionally, improving the safety and efficiency of industrial operations has relied heavily on manual inspections, routine maintenance, and training programs for workers. These methods provide the foundation for identifying potential hazards, preventing equipment failures, and ensuring that work procedures are followed accurately. Traditional safety approaches often include regular drills on the use of personal protective equipment (PPE), compliance with safety protocols, and emergency preparedness [2]. To improve efficiency, the industry has historically relied on lean manufacturing principles, just-in-time inventory management, and workflow optimization to reduce waste and minimize downtime. Additionally, the implementation of quality control and standard operating procedures has played a significant role in ensuring consistent results and reducing errors. However, while these traditional methods are somewhat effective, they typically require substantial human intervention. They can be prone to human error, highlighting the need for more advanced and integrated technology solutions.

As technology advances, the limitations of these traditional methods become increasingly apparent. For example, manual inspection and maintenance can only cover a limited amount of work over a while, often resulting in delays in responding to emerging issues or failure to detect serious problems before they cause significant shortcomings [3]. Additionally, reliance on human input and controls can result in inconsistent data accuracy and timeliness, posing risks to both safety and productivity. Increasingly, technological advances are being utilized to address these issues. Tools such as automated monitoring systems, sensors, and advanced diagnostics are being integrated into traditional systems to improve accuracy and reliability. These technologies provide continuous, real-time monitoring of equipment and processes, which not only helps to detect potential faults or safety risks early but also optimizes operations and reduces energy consumption. Provides a wealth of actionable data [4-6]. Additionally, the shift to digitalization, including the use of enterprise resource planning (ERP) systems and the Industrial Internet of Things (IIoT), provides a comprehensive view of operations, thereby further enhancing decision-making processes. By utilizing these technologies, they can achieve a high level of control and insight into their operations, leading to significant improvements in operational safety and efficiency standards. This technological shift not only complements but also gradually supplants traditional methods, setting new standards for industrial operations in the modern era.

Research methodology

Computer simulation has become a transformative tool in manufacturing facility management, changing the way plants plan, control, and optimize their operations. This technology utilizes mathematical models and simulations to create detailed and accurate representations of manufacturing processes, which can be tested and optimized in a virtual environment before being implemented in the real world. This capability enables the identification of potential problems and performance bottlenecks without the risks and costs associated with physical testing. For example, computational fluid dynamics (CFD) models can simulate fluid flows within a system, allowing engineers to optimize the design of piping and ventilation systems for maximum efficiency and safety. Similarly, finite element analysis (FEA) helps evaluate the structural integrity of components under various loads, significantly improving safety by predicting where failures are likely to occur [7]. Additionally, the use of digital twins—complete virtual replicas of physical assets—allows managers to monitor operations in real-time and perform predictive analysis of the effects of process or design changes. By providing a clear understanding of how changes impact operations, this degree of predictability and control enhances safety protocols, reduces downtime, and supports informed strategic decision-making. As industries increasingly adopt Industry 4.0 technologies, computer simulation will become a central component, combined with IoT devices and artificial intelligence to provide even deeper analysis and granular control of the industrial environment. This integration not only improves current operational efficiency but also drives innovation in asset management, pushing the boundaries of what is possible in industrial operations.

In industrial settings, computer modeling includes several model types, each designed to simulate different aspects of an asset’s operation to improve decision making, predict outcomes, and increase efficiency and safety. Simulation models are perhaps the most common and use algorithms to model the behavior of an industrial system or process under a variety of conditions [8]. These models can be broad (e.g., modeling an entire manufacturing process) or more specific (e.g., modeling the thermodynamic properties of a chemical reactor). Predictive models, on the other hand, use historical data and machine learning techniques to predict future outcomes. These models are essential for preventive maintenance because they estimate the likelihood of equipment failure, enabling timely action to be taken and preventing costly downtime and accidents. Another necessary type is optimization models, which help identify the best decisions about resource allocation, process parameters, and logistics mechanisms to improve productivity and reduce costs. Stochastic models include random and probabilistic elements to account for uncertainty in operations, such as demand variability or supply chain disruptions, providing insights for risk management and contingency planning. In addition, digital twins are an all-encompassing modeling strategy that builds a digital copy of a physical item and updates it in real-time based on data collected from the real thing. By providing an accurate representation of real-world activities and the ability to forecast the effects of changes to configuration, process, or input variables, this type enables continuous monitoring and validation of changes in the virtual space [9]. These computer models, when used in conjunction, provide industrial managers with a robust set of tools for comprehending and managing complex production systems and processes (Figure 1).

Table 1. Types of computer models commonly used in industrial settings

<i>Types of models</i>	<i>Description</i>
<i>Simulation models</i>	<i>The use of algorithms to reproduce the behavior of an industrial system or process under various conditions. These can range from modeling entire production lines to focusing on specific elements such as fluid dynamics in a pipeline.</i>
<i>Predictive models</i>	<i>Using historical data and machine learning techniques to predict future outcomes, these models are invaluable for predictive maintenance, enabling the prediction of equipment failures and the planning of maintenance to prevent them.</i>

<i>Optimization algorithms</i>	<i>Seeking the most cost-effective and efficient ways to allocate resources, as well as the most effective settings for process parameters and logistics setups. They frequently utilize Linear programming and other operations research approaches.</i>
<i>Stochastic models</i>	<i>Add random and probabilistic elements to model scenarios with inherent uncertainty, such as supply chain fluctuations or fluctuations in customer demand. These models are essential for strategic planning and risk management.</i>
<i>Digital twins</i>	<i>Create a complete and dynamic virtual replica of a physical asset that integrates real-time data to simulate and analyze operations. The use of digital twins enables the prediction of actual results without the need for physical testing, facilitating the ongoing testing of process adjustments in a virtual environment.</i>

Numerous hardware and software components are essential to the implementation and growth of computer simulation in the context of industrial facility management. The Industrial Internet of Things (IIoT) is a popular technology; it gathers massive volumes of real-time data from machinery and processes through a network of interconnected sensors and other devices. For models that forecast or simulate, this data is essential. Robust numerical model development environments are provided by programs such as MATLAB and Simulink, while specialized simulation programs like ANSYS cater to specific engineering demands for finite element analysis, and COMSOL Multiphysics is used for multiphysics modeling [10].

To handle and evaluate the massive amounts of data required for predictive modeling, platforms such as Hadoop and specialized database management systems like InfluxDB are commonly utilized. Python libraries such as SciPy and Pandas [11] and IBM tools like SPSS and SAS [12] enable the analysis of complex data and the development of models, which are crucial for predictive analytics and machine learning. Siemens' MindSphere and GE's Predix are two software solutions that provide sophisticated platforms for real-time visualization and digital twins. These platforms interact seamlessly with IoT devices and offer user-friendly interfaces for monitoring and decision-making. Comprehensive operational control is also provided by enterprise resource planning (ERP) systems, such as SAP and Oracle, which help combine multiple data points into a unified framework [12]. This infrastructure relies on these technologies and software packages to optimize design, maintenance, and operations by utilizing precise and actionable computer models.

In an industrial context, computer modeling relies on several core principles and methodologies that ensure the accuracy and usefulness of modeling in decision-making processes. Central to these methodologies is the concept of abstraction, whereby complex real-world systems are simplified to their basic components and relationships to create manageable models. This involves defining the model's boundaries, selecting appropriate variables, and identifying the interactions between these variables [13]. The modeling process also relies on data collection and validation to ensure reliability. Here, historical data and real-time inputs are used to calibrate models, ensuring they accurately reflect the behavior of physical systems under varying conditions. Another fundamental technique is sampling, especially in engineering applications, which involves dividing continuous systems into discrete parts to facilitate numerical analysis, as seen in methods such as finite element analysis for structural modeling [14].

Iterative refinement is another crucial process in which models are continually updated and refined based on new data and reviews to improve accuracy over time. Sensitivity analysis is often performed to determine how changes in input variables affect outcomes, which is essential for risk assessment and optimization. In predictive models, machine learning algorithms are trained based on historical data to identify patterns and predict future outcomes, which requires rigorous training and validation to ensure robustness (Newman & Lowe, 2018). Additionally, scalability must be considered, ensuring that models can be adjusted or expanded as data volumes grow or operational requirements change. Ultimately, applying these principles and methodologies yields dynamic, robust, and scalable models that can effectively simulate complex industrial operations and predict future states, thereby facilitating optimized decision-making and strategic planning (Figure 1).

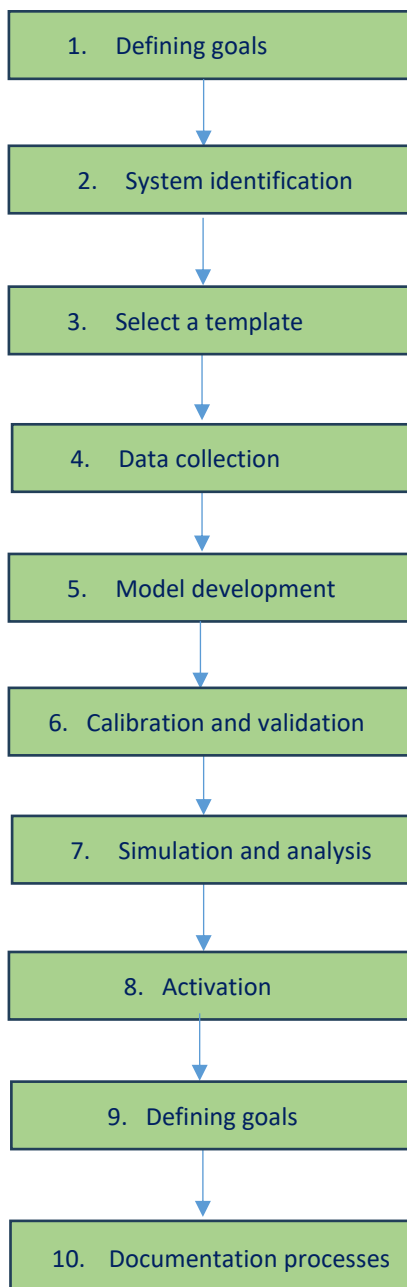


Figure 1. Block diagram detailing the basic principles and methodology of computer modeling for industrial use

Computer modeling employs a set of fundamental principles and methodologies to ensure the accuracy and applicability of simulations used in various industrial applications [1]. The basic principle is to abstract complex real-world phenomena into simplified models by isolating the essential elements and their interactions. This process, known as system identification, involves determining which variables have a significant impact on the system and quantifying their effects [11]. Models are often based on both theoretical foundations and empirical data, which are carefully tested against actual observations to ensure that they accurately reflect the predicted dynamics. In addition, computational models often use sampling to transform continuous variables and equations into discrete counterparts that can be solved numerically, typically using techniques such as finite difference analysis or finite element analysis. This approach is necessary for performing complex calculations related to modeling physical phenomena, such as hydrodynamics or structural stresses [15]. Iterative methods are another framework where models are continually improved

through cycles of modeling, evaluation, and adjustment. This iterative process is crucial for enhancing the model's accuracy, particularly when incorporating new data or adapting to changes in system parameters [13]. Understanding the model's robustness and making judgments under uncertainty both necessitate routinely performing sensitivity analyses to assess how changes in input parameters impact the outputs.

Machine learning algorithms are increasingly finding applications in predictive modeling, which involves analyzing past data to forecast future trends. To minimize overfitting and fine-tune their prediction powers, these models require extensive periods of training and validation. Last but not least, scalability and adaptability receive extra focus to ensure models can adapt to new data or operational changes without compromising accuracy or relevance. By adhering to these guidelines, computer modeling becomes a powerful tool for enhancing the efficacy, safety, and optimization of industrial processes.

Results of the study

Securing Economic Stability in Small Enterprises via Strategic Management and Computational Modeling

In the contemporary market-oriented economy, enterprises must formulate their growth objectives, establish economic policies, streamline corporate processes, and maintain accountability for their performance. Achieving these objectives requires the establishment of efficient systems that ensure financial security, a pressing issue in the contemporary business landscape. The difficulty of sustaining economic security is particularly pertinent for small enterprises due to their increased vulnerability to risks and a range of internal and external threats. Financial security is a multifaceted concept that encompasses various interrelated components. Consequently, effective management necessitates a coordinated and purposeful methodology. To bolster economic stability in small enterprises, it is prudent to establish a systematic management framework that improves resilience and guarantees sustainable operations. Research indicates that utilizing contemporary computing technologies to develop such a model could significantly enhance a company's competitive position and promote market adaptability. Before examining specific security models, it is essential to define economic security within the context of small enterprises. It refers to an enterprise's ability to effectively allocate and utilize resources while recognizing and mitigating potential risks. Efficient models facilitate the early identification and mitigation of economic hazards, enhancing corporate stability and long-term viability. Research suggests that small enterprises frequently regard financial security as the fundamental component of economic stability. Financial security evaluations typically focus on key performance metrics, including solvency, profitability, and operational efficiency.

An effective economic security model should integrate financial stabilization initiatives, liquidity management measures, and methods to enhance long-term financial stability and profitability. By including these elements, enterprises can establish a resilient framework that safeguards against financial risks and market volatility. Measures must be formulated to provide economic security in both the short and long term, establishing a secure basis for continuous company operations. To do this, it is imperative to adopt a systematic methodology that consistently evaluates financial stability, risk exposure, and operational efficiency. The proposed model, depicted in Figure 2, outlines a comprehensive framework for assessing the economic security of small enterprises. This model integrates diverse analytical techniques to identify potential threats, evaluate financial resilience, and develop proactive measures for risk mitigation, thereby ensuring long-term corporate viability.

By utilizing a variety of security evaluation methodologies, the economic security assessment model determines the adequacy of enterprise protection. The picture shows four main techniques that research has identified for measuring security levels. Threshold values are established to ensure effective management and uphold economic security. These numbers denote the maximum allowable operational thresholds; surpassing them can significantly impede corporate operations and render future growth uncertain.

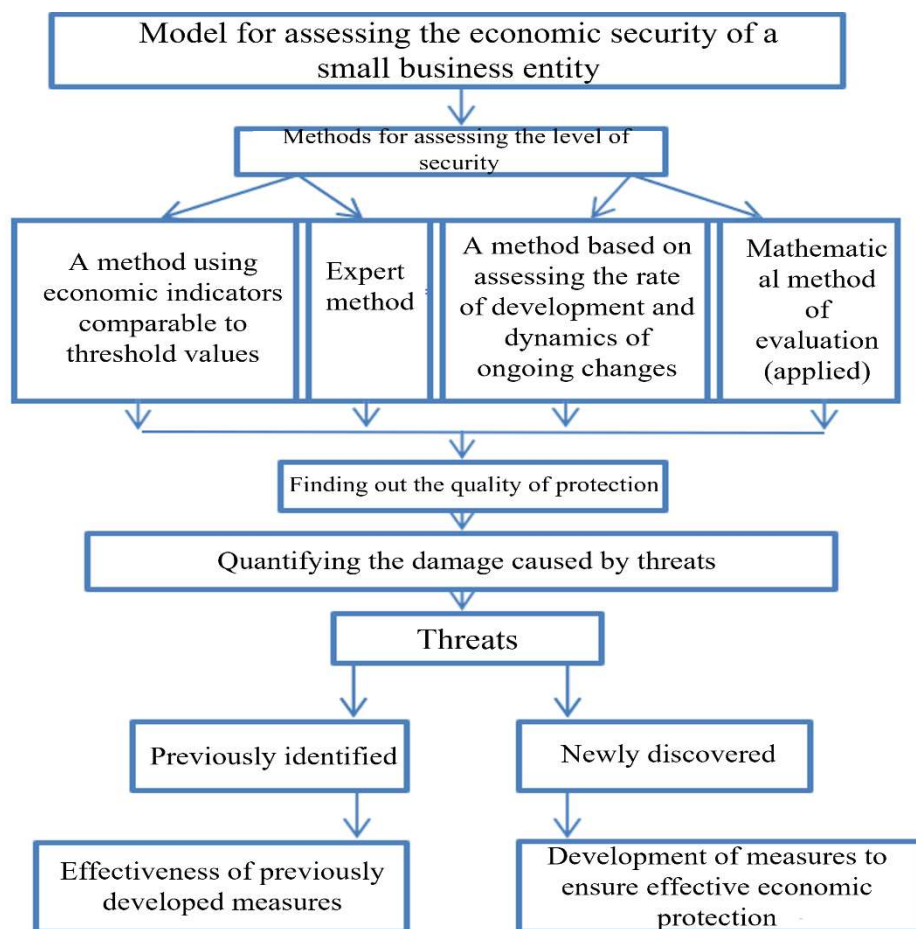


Figure 2. A framework for gauging the financial stability of small enterprises

Quantitative evaluations, performed via various analytical methods, ascertain the precision of these threshold values, which differ in nature and importance. Surpassing key thresholds may result in diminished competitiveness, instability in corporate growth, financial fragility, and a reduction in people and material resources. Studies indicate that sustaining these threshold values is achievable using an efficient internal management style. Expert evaluation techniques rely on professionals' judgments to analyze company trends, assess competitiveness, and determine existing production capacities. Growth rate analysis methodologies focus on identifying the characteristics that facilitate economic growth.

- Mathematical models utilize principles from applied mathematics to evaluate economic security.

Upon a reduction in business protection quality, an immediate quantitative assessment of damages is performed to evaluate financial losses. Subsequently, possible dangers to corporate operations are recognized. The efficacy of previously instituted protective measures is assessed, and if new risks arise, supplementary policies are devised to bolster economic security. Evaluating economic security in the actual world poses considerable difficulties. Implementing practical tests with small enterprises to evaluate security protocols can be too expensive or unfeasible. In these instances, risk-free simulation models can yield significant insights by assessing business performance and resilience against diverse external circumstances. Nonetheless, these models have limitations, as they may inadequately encapsulate real-world complexities, thereby complicating the evaluation of their accuracy in reflecting genuine business realities.

Discussion

In the rapidly evolving digital landscape, conventional physical and visual models are losing significance, giving way to sophisticated computer simulations. These digital models provide a range

of essential experiments designed to evaluate business processes, understand data, and compare various solutions. By assessing many operational parameters, enterprises can identify the most effective solutions for improving economic security.

Computer modeling is an effective tool designed to address various issues. The primary objective is to generate qualitative and quantitative insights from a specified model, which is essential for formulating strategies that enhance protection against internal and external risks affecting small enterprises.

- Qualitative insights obtained from analysis facilitate the identification of previously unrecognized attributes of complex systems, including structural integrity, developmental dynamics, stability, and resilience.

Quantitative analysis provides predictive evaluations, anticipating potential future dangers and trends within the system.

Businesses can utilize computer models to simulate real-world scenarios and assess the potential impact of various economic threats on their operations. These digital experiments facilitate the discovery of possible threats and the evaluation of current security solutions to determine their effectiveness.

The proposed computer model, derived from the previously stated framework, operates as an effective economic mechanism that bolsters enterprise protection. It employs economic and mathematical approaches to forecast potential risks and adverse impacts on corporate operations.

Conclusion

By integrating cutting-edge technology with proven approaches, computer simulation has become a vital tool for optimizing and managing industrial facilities, thereby enhancing sustainability, efficiency, and safety. It can simplify complicated systems into more manageable simulations by combining modeling, prediction, optimization, stochastic models, and digital twins; this knowledge is then used to make better strategic decisions and boost operational performance. Simulations are made more accurate and user-friendly by integrating IIoT with tools like MATLAB, ANSYS, and Siemens MindSphere, which enable the collection of real-time data and the development of models. To ensure that their forecasts are current and accurate, these models adhere to the following fundamental principles: system identification, sampling, iterative refinement, and continuous validation. Businesses in the industrial sector can get a competitive edge in today's dynamic market by implementing these models into their operations. This will enable them to manage their resources more effectively, mitigate risk, and respond promptly to changes in regulations and consumer preferences.

References

- [1] Anderson, G., & Moore, T. (2018). *Integrating IIoT into Existing Manufacturing Systems*. *Journal of Manufacturing Systems*, 48(1), 53–64.
- [2] Brown, L., & Martin, S. (2020). *Safety Protocols and Their Impact on Industrial Accidents*. *Safety Science*, 128, 104733.
- [3] Ellis, R., & Watson, D. (2022). *Innovations in Industrial IoT and Their Impact on Efficiency*. *Journal of Network and Computer Applications*, 175, 102992.
- [4] Foster, C., & Young, A. (2022). *Machine Learning Applications in Industrial Forecasting*. *AI Magazine*, 43(2), 85–99.
- [5] Greene, K., & Murphy, L. (2018). *Implementing ERP Systems in Multinational Corporations*. *Information Systems Management*, 35(2), 123–139.
- [6] Harper, C., & Douglas, F. (2019). *Real-Time Monitoring and Control in Chemical Processing Plants*. *Chemical Engineering Journal*, 366, 541–555.
- [7] Johnson, M., & Thompson, R. (2019). *Computational Fluid Dynamics in Industrial Applications: Current Trends and Future Prospects*. *Journal of Industrial Engineering*, 15(2), 112–130.

- [8] Knight, J., & Bishop, S. (2020). Leveraging Big Data for Operational Excellence in Industry. *Industrial Management Review*, 62(3), 158–175.
- [9] Lee, S., & Kim, J. (2021). The Role of Predictive Maintenance in Enhancing Manufacturing Efficiency. *Industrial Management & Data Systems*, 121(5), 1049–1067.
- [10] Morgan, J., & Phillips, F. (2019). Finite Element Analysis in Structural Engineering: Case Studies and Methodologies. *Structural Engineering and Mechanics*, 69(1), 1–12.
- [11] Newman, P., & Lowe, A. (2018). Predictive Maintenance: A Review. *Maintenance and Reliability*, 20(4), 600–610.
- [12] O'Neil, M., & Jackson, T. (2017). The Environmental Benefits of Efficient Industrial Practices. *Environmental Management and Sustainable Development*, 6(3), 245–262.
- [13] Patel, A., & Gupta, V. (2020). Digital Twins in Industry: From Theory to Practice. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 93, 103678.
- [14] Sanders, T., & McCormick, R. (2021). Challenges of Digital Twin Implementation in Heavy Industries. *Journal of Industrial Technology*, 37(5), 427–442.
- [15] Smith, B., & Daniels, J. (2018). Optimization Models for Resource Allocation in a Manufacturing Facility. *Operations Research Perspectives*, 5(4), 250–266.

ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ. БІЛІМ БЕРУДІ АҚПАРАТТАНДЫРУ
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ. ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
METHODS OF TEACHING COMPUTER SCIENCE. INFORMATIZATION OF EDUCATION

ГТАХР 28.23.27

10.51889/2959-5894.2025.90.2.020

Г.Ж. Ануарбекова^{1*}, **Н.А. Текесбаева¹**, **Б.Қ. Смағұл¹**,
А.Қ. Мошкалов¹, **Қ.А. Беделов¹**

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
*e-mail: gulzat1982@mail.ru

LEGO WEDO АРҚЫЛЫ БАСТАУЫШ СЫНЫП ОҚУШЫЛАРЫНЫҢ
АЛГОРИТМДІК ОЙЛАУЫН ДАМЫТУ

Аңдатпа

Бұл зерттеу бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлау қабілетін дамыту мақсатында Lego WeDo Education конструкторын пайдаланудың тиімділігін анықтауға бағытталған. Жұмыстың негізгі мақсаты – Lego WeDo интерактивті моделі негізінде алгоритмдеу негіздерін оқыту әдістемесін әзірлеп, оны тәжірибе жүзінде сыңқтан өткізу. Бұл зерттеудің мақсаты - тәжірибеге негізделген сабақтардың логикалық ойлау мен жүйелі жоспарлау дағдыларын қалыптастыруға әсерін анықтау, сонымен қатар оқу үдерісінде конструкторды қолданудың тиімділігін бағалау болып табылады. Зерттеу барысында 2-4 сынып оқушыларымен эксперименттік оқыту жүргізілді, оқушылардың жауаптары мен тапсырма нәтижелері талданды. LEGO модельдерімен жұмыс істеуге арналған арнайы сабақ бағдарламасы жасалды. Зерттеу нәтижелері Lego WeDo-мен жүйелі түрде өткізілген сабақтар оқушылардың алгоритмдік ойлау қабілетін айтарлықтай жақсартуға ықпал ететінін көрсетті. Бұл олардың тапсырмаларды талдау, әрекеттер тізбегін құру және нәтижелерді бағалау дағдыларының жақсарғанынан көрінеді. Бұл нәтижелер қазіргі заманда қажетті маңызды құзыреттіліктерді қалыптастыру үшін білім беру процесінде LEGO WeDo-ды пайдаланудың зор мүмкіндігі бар екенін дәлелдейді.

Түйін сөздер: Lego Wedo Education, алгоритмдік ойлау, бастауыш мектеп, программалау.

Г.Ж. Ануарбекова¹, Н.А. Текесбаева¹, Б.Қ. Смағұл¹, А.Қ. Мошкалов¹, Қ.А. Беделов¹
¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
РАЗВИТИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ У УЧАЩИХСЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ
С ПОМОЩЬЮ LEGO WEDO

Аннотация

Исследование направлено на выявление эффективности применения конструктора LEGO WeDo Education для развития алгоритмического мышления у младших школьников. Главная цель работы – создать и проверить методику обучения основам алгоритмизации с использованием интерактивных моделей LEGO WeDo. Задачи исследования включают анализ воздействия практико-ориентированных занятий на формирование навыков логического мышления и последовательного планирования, а также оценку вклада конструктора в образовательный процесс. Методология исследования основывалась на проведении экспериментального обучения учащихся 2-4 классов с применением анкетирования и последующим анализом результатов выполненных заданий. В рамках эксперимента была создана специализированная программа занятий, включающая элементы конструирования и программирования моделей LEGO. Результаты показали, что регулярное использование LEGO WeDo значительно повышает уровень алгоритмического мышления учащихся, что выражается в улучшении навыков анализа задач, формирования последовательности действий и оценки результатов.

Полученные данные свидетельствуют о перспективности внедрения LEGO WeDo в образовательный процесс для развития ключевых компетенций, необходимых в современном мире.

Ключевые слова: Lego Wedo Education, алгоритмическое мышление, начальная школа, программирование.

G.Zh. Anuarbekova¹, N.A. Tekesbaeva¹, B.K. Smagul¹, A.K. Moshkalov¹, K.A. Bedelov¹,

¹Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

DEVELOPING ALGORITHMIC THINKING IN ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS USING LEGO WEDO

Abstract

This study is devoted to the study of the effectiveness of using the LEGO WeDo Education constructor for the development of algorithmic thinking in younger schoolchildren. The purpose of the work is to develop and test a methodology for teaching the basics of algorithmization based on interactive LEGO WeDo models. The objectives of the study included studying the impact of practice-oriented classes on the formation of logical thinking and consistent planning skills, as well as evaluating the effectiveness of using a construction kit in the educational process. The methodology included experimental training with the participation of students in grades 2-4, questionnaires and analysis of the results of the tasks. During the experimental work, a special training program was developed, including the construction and programming of LEGO models. The results of the study showed that systematic classes with LEGO WeDo contribute to a significant increase in the level of algorithmic thinking among students, manifested in improving the ability to analyze tasks, develop a sequence of actions and evaluate results. The data obtained confirm the prospects of using LEGO WeDo in the educational process for the formation of important competencies needed in the modern world.

Keywords: Lego Wedo Education, algorithmic thinking, elementary school, programming.

Негізгі ережелер

Робототехника – ақпараттық технологиялар саласындағы болашағы зор бағыттардың бірі болып табылады. Білім беруде робототехника мектеп оқушыларын оқытудың жаңа пәнаралық тәсілі ретінде физика, мехатроника, технология, математика, кибернетика және АКТ пәндеріндегі білімді біріктіреді [1]. LEGO WeDo конструкторы өз интерактивтілігі мен модельдерді программалау мүмкіндігі арқасында балалардың алгоритмдік ойлау қабілетін қалыптастыруға жағдай жасайды, яғни күрделі тапсырмаларды бірнеше қарапайым әрекетке бөліп, ең тиімді шешімдерді табу дағдысын дамытады. LEGO WEDO конструкторын қолданатын сабақтар балалардың логикалық ойлау қабілетін арттыруға ықпал етеді, өйткені олар конструктор мен сымсыз желі арасындағы байланыс орнатып, қорытынды жасау мен дұрыс шешім қабылдауға жағдай жасайды. Сонымен қатар, LEGO модельдерін құрастыру инженерлік мәселелерді тиімді шешуге қажетті ойлау дағдыларын дамытады. Lego WEDO негізіндегі ойын түріндегі сабақтар оқушылардың мотивациясын арттырып, оқу үдерісін қызықты әрі тартымды етеді. Топтық жұмыс барысында конструкторды пайдалану ынтымақтастық, коммуникациялық дағдылар мен топта жұмыс істеу қабілетін қалыптастыруға септігін тигізеді. Зерттеу нәтижелері LEGO WEDO конструкторын оқыту үдерісінде қолданудың бастауыш сынып оқушыларында алгоритмдік ойлау мен заманауи әлемге бейімделуге қажетті маңызды құзыреттерді тиімді дамытатынын көрсетеді [2]. LEGO WEDO конструкторын оқыту үдерісіне енгізу оқушылардың шығармашылық қабілеттерін, сыни ойлауын және стандартты емес тапсырмаларды шешуге дайындығын арттыруға бағытталған инновациялық білім беру ортасын қалыптастыруға жаңа мүмкіндіктер береді [3]. Осыған орай, жүргізілген зерттеу LEGO WEDO конструкторын бастауыш сынып оқушыларында алгоритмдік ойлау мен басқа да маңызды құзыреттерді дамыту құралы ретінде қолданудың жоғары тиімділігін растайды.

Кіріспе

Қазіргі таңда цифрлық технологиялар білім беру жүйесіне терең енуде, ал алгоритмдік ойлау қабілетін дамыту – оқушылардың болашақта табысты болуына қажетті басты

дағдылардың бірі болып табылады. Алгоритмдік ойлау тек информатика және программалау саласында ғана емес, күнделікті өмірде логикалық ойлау, мәселені жүйелі түрде шешу және тиімді шешім қабылдау дағдыларын жетілдіруге көмектеседі. Осыған байланысты, бастауыш сыныптан бастап оқушыларды алгоритмдік ойлауға үйрету өзекті мәселе болып табылады.

Робототехниканы оқыту арқылы бастауыш сынып оқушылары логикалық ойлау, талдау, проблемаларды шешу және шығармашылық қабілеттерін жетілдіреді. LEGO Education – мектептерде, әсіресе балаларды робототехника, инженерия, кодтау және программалау ұғымдарымен таныстыруда таптырмас құрал болып табылады.

LEGO WeDo Education конструкторы – бұл балалар мен жасөспірімдерге арналған инновациялық білім беру құралдары. Ол балалардың STEM (ғылым, технология, инженерия және математика) саласындағы дағдыларын дамытуға көмектеседі. Конструктор компьютерлік программалау негіздерінен бастап, робототехника мен механикаға дейінгі тақырыптарды қамтиды. LEGO WeDo бағдарламасының көмегімен балалар бағдарламалау арқылы өз роботтарын құрып, оларды түрлі тапсырмаларды орындауға үйрете алады. Бұл жүйе балаларға алгоритмдік ойлау, проблемаларды шешу және командада жұмыс істеу дағдыларын дамытуға мүмкіндік береді. LEGO WeDo Education әртүрлі жас ерекшеліктеріне бейімделген және оқу үдерісін қызықты әрі тиімді етеді [4].

Lego WeDo Education жинағы балабақшадағы кішкентай балалардан бастап, бастауыш сынып оқушыларына дейін робототехника әлеміне қызығушылықтарын арттыруға мүмкіндік береді. Себебі, ойын арқылы оқу – осы жастағы балалар үшін ең тиімді әдістердің бірі. Жинақтағы түрлі-түсті бөлшектерді пайдалана отырып, балалар қоршаған ортадағы заттар мен жануарлардың мүсіндерін құрастырып, оларды жандандыра алады, сондай-ақ техниканың шынайы модельдерін жасап, жетілдіре алады. Осылайша, балалар XXI ғасырда қажет болатын негізгі дағдыларды – алгоритмдік ойлау, техникалық тапқырлық, қарым-қатынас жасау, командада жұмыс істеу және шығармашылық қабілеттерін дамытады. Сонымен қатар, конструктордың ұсақ бөлшектерін қолдану арқылы қолдың ұсақ моторикасын жетілдіруге ықпал етеді [5,6,7]. Lego WeDo робототехникасы балаларға келесі дағдыларды меңгеруге көмектеседі: робототехника, программалау және механиканың негіздерін түсіну; тиімді шешімдерді іздеу және талдау қабілетін дамыту; командада бірлесе жұмыс істеу дағдыларын қалыптастыру; өз идеяларын жүзеге асыруда табандылық таныту; тәжірибелік зерттеулер жүргізу; жаңа техникалық терминдер мен ұғымдарды меңгеру.

Алгоритмдік ойлау – заманауи мектеп оқушыларының білім алу үдерісінің маңызды бөлігі. Технологияның қарқынды дамуы жағдайында оқушылардың логикалық ойлау қабілетін жетілдіру және программалау дағдыларын меңгерту өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Бұл дағдыларды дамыту үшін бастауыш сынып оқушыларына тиімді әрі қызықтыратын әдістер қажет. Солардың бірі – алгоритмдеу негіздерін көрнекі әрі интерактивті түрде оқытуды қамтамасыз ететін білім беру конструкторларын қолдану [8,9].

Бұл зерттеу жұмысы бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлау қабілетін дамыту мақсатында LEGO WeDo Education конструкторын пайдалануға арналған. LEGO WeDo Education-ды таңдау оның қолжетімділігі, қолданудағы қарапайымдылығы және жұмыс нәтижелерін визуалды түрде көрсету мүмкіндігімен негізделген [9,10,11].

Зерттеудің мақсаты – бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлауын дамытуда LEGO WeDo конструкторын қолданудың тиімділігін бағалау. Осыған байланысты, зерттеудің негізгі сұрағы: бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлау қабілеттерін дамытуда LEGO WeDo Education конструкторын қолдану қаншалықты тиімді? Зерттеу аясында келесі міндеттер қойылды: конструкторды пайдалану алгоритмдеу дағдыларының қалыптасуына қалай ықпал ететінін анықтау, сондай-ақ оны оқу үдерісіне енгізудің ең тиімді педагогикалық әдістерін айқындау. Зерттеу барысында бірнеше болжам тексерілді. Негізгі болжам – LEGO WeDo конструкторын жүйелі түрде пайдалану бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлауын дамытуға ықпал етеді.

Қосымша болжамдар ретінде LEGO WeDo сияқты көрнекі және интерактивті құралдарды қолдану балалардың программалау негіздерін үйренуге деген қызығушылығын арттырып, олардың танымдық қабілеттерін жақсартады деген тұжырымдар қарастырылды. Осылайша, жүргізілген зерттеу бастауыш мектептегі оқу үдерісінде LEGO WEDO Education-ды қолдану мүмкіндіктерін зерттеуге бағытталған. Бұл оқушыларда программалау мен алгоритмдеудің негізгі дағдыларын қалыптастыруға көмектеседі және олардың цифрлық әлем жағдайында табысты білім алуы мен болашақта дамуына қажетті алғышарттарды жасайды [12].

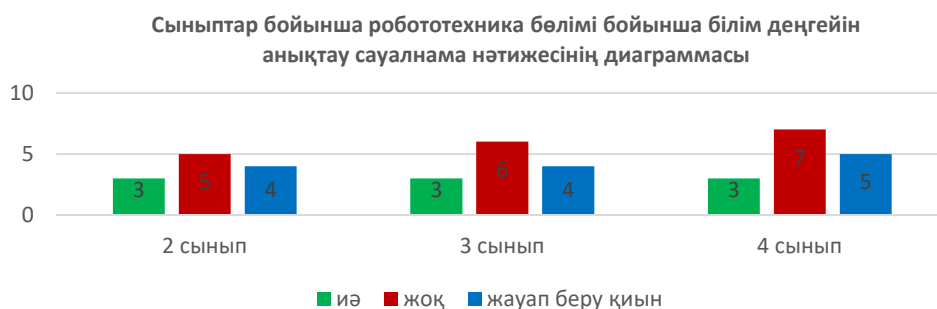
Зерттеу әдіснамасы

Зерттеу барысында бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлауын дамыту үшін LEGO WEDO конструкторын пайдаланудың қажеттіліктері мен жетістіктері талданды. Зерттеу тақырыбы бойынша психологиялық-педагогикалық, оқу және әдістемелік әдебиеттер қарастырылып, LEGO WEDO Education конструкторын қолданудың қазіргі деңгейі зерттелді. Бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлауын дамыту үшін LEGO WEDO Education конструкторын пайдалану әдістемесі әзірленіп, оның эксперимент нәтижелері қорытындыланып, өңдеу жұмыстары жүргізілді. Әлеуметтік сауалнамалар білім беру зерттеулерінде ақпарат алудың пайдалы құралы болып табылады. «Сыныптар бойынша робототехника бөлімі бойынша білім деңгейін анықтау» сауалнамасы Қ.А.Яссауи атындағы №123 мектеп гимназиясының 2,3,4 сынып оқушыларына ұсынылды. Сауалнамаға 40 оқушы қатысты. Сауалнама 7 сұрақтан тұрды. Алынған нәтижелерді талдап көрейік.

Сауалнама зерттеу мақсаттары мен міндеттеріне сәйкес келесідей құрылды:

1. Робототехникаға деген қызығушылықты анықтау;
2. Робототехниканы оқыту үшін қажетті құралдар тобының анықталуы;
3. Тақырыпты оқытуға бөлінетін назардың жеткіліктілігін білу;
4. Оқулықтағы тапсырмалардың мазмұнын түсіну деңгейін бағалау;
5. Робототехника тапсырмаларын деңгейге бөлу қажеттігін анықтау;
6. Тақырыпты оқытуда Lego WeDo Education конструкторын қолдану мүмкіндіктерін білу;
7. Робототехника туралы пікірлерін талдау.

Жүргізілген сауалнамалардың талдауы бойынша робототехникаға деген қызығушылықтың пайда болуы пәннің мазмұнына байланысты екендігі анықталды, ал оқушылардың робототехникаға деген теріс көзқарасы тақырыптың күрделілігі мен түсініксіздігіне байланысты. Оқулықта робототехника тапсырмаларының деңгейге бөлінбеуі және оқушылар үшін робототехникаға қатысты қолданбалы есептерді шешу мүмкіндігінің жоқтығы байқалды. Сонымен қатар, LEGO WEDO Education конструкторын робототехника тақырыбын оқытуда пайдалану мүмкіндігі төмен болып шықты. Оқушылардың көпшілігі робототехника бойынша жобаларды құрастыру және оларға бағдарлама жазу барысында қиындықтарға тап болды. Сыныптар бойынша робототехника бөлімінің білім деңгейін анықтау нәтижелері диаграммада 1-суретте көрсетілген.



Сурет 1. Сыныптар бойынша робототехника бөлімі бойынша білім деңгейін анықтау сауалнама нәтижесінің диаграммасы

Зерттеу нәтижелері

Қ.А.Яссауи атындағы №123 мектеп гимназиясының 2, 3, 4 сынып оқушыларымен «Цифрлық сауаттылық» пәні аясындағы «Робототехника» бөлімін қамтыған толықтырылған және электронды оқу құралы бар жұмыс дәптері арқылы эксперимент жүргізілді. «Робототехника» бөлімі осы жобаны пайдаланып өткізілген сабақтар барысында қарастырылып, оның практикалық жүзеге асуы зерттелді. Оқушылардың тақырыпты 80%-ға меңгергені және пәнге деген қызығушылықтары байқалды. LEGO WEDO Education конструкторын пайдаланып, олар робот модельдерін құрастырды.

Зерттеу нәтижелерін статистикалық әдістер арқылы талдау жүргізіліп, бұл бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлауын дамыту үшін Lego WeDo Education конструкторын пайдалануды жетілдірудің қажеттілігі туралы қорытынды жасауға мүмкіндік берді.

Сауалнаманың нәтижесі бойынша оқушылардың робототехникаға қызығатыны, Lego Wedo Education конструкторын қолдану мүмкіндігі бар екені, бірақ оқулықтағы есептер мазмұнын түсіну деңгейін айқындауы, робототехника бойынша тақырыптарды оқытуға уақыт жеткіліксіздігі анықталды. Осы мәселелерді шешу үшін бастауыш сынып оқушыларына LEGO WEDO Education 2.0 конструкторы арқылы робототехниканы оқыту мақсатында электронды оқыту құралы мен оқу-әдістемелік құрал дайындалды. Электронды оқыту құралы келесі бөлімдерден тұрады:

- Модельдер құру бойынша әдістемелік нұсқаулық;
- Жаттығулар;
- Тест тапсырмалары.

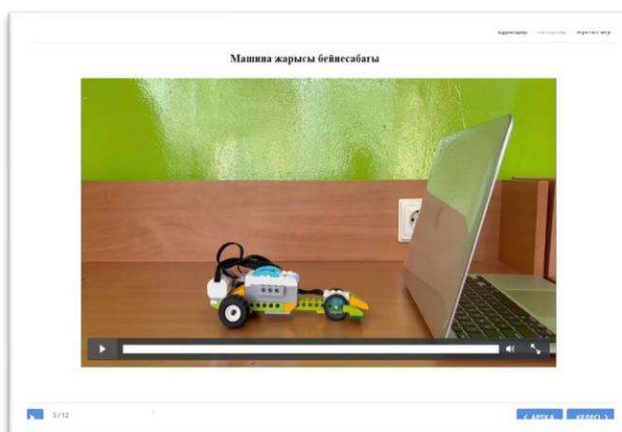
Бастауыш сынып оқушыларына LEGO Education WeDo 2.0 конструкторы арқылы робототехниканы оқыту электронды құралы 2-суретте көрсетілген.



Сурет 2. Бастауыш сынып оқушыларына арналған Lego Education WeDO 2.0 конструкторы арқылы робототехниканы үйретуге арналған электронды құралдың басты беті

Бастауыш сынып оқушыларына LEGO Education WeDo 2.0 конструкторы арқылы робототехниканы оқыту электронды құралы тәжірибелік сабақтардан, өзбетінше орындауға арналған тапсырмалар мен тест сұрақтарынан құралған. Тәжірибелік сабақтарда тапсырмалар үш деңгейге бөлінген, әр деңгейде бес мысалмен түсіндірілген. Төменде берілген 3-суреттерде бірінші деңгейдің мысалдарынан тұратын электронды құралдың видеосабағы көрсетілген.

Зерттеу барысында оқушылармен аптасына бір рет, 12 апта бойы арнайы сабақтар өткізілді. Сабақтарда балалар LEGO WeDo конструкторы арқылы түрлі тапсырмаларды орындап, логикалық және алгоритмдік ойлау қабілеттерін дамытты. Зерттеу жұмыста оқушылардың алгоритмдік ойлау қабілеттерінің дамуын бағалайтын критерийлер нақтыланды.



Сурет 3. Бастауыш сынып оқушыларына Lego WeDo Education 2.0 конструкторы арқылы робототехниканы оқыту электронды құралының видеосабағы

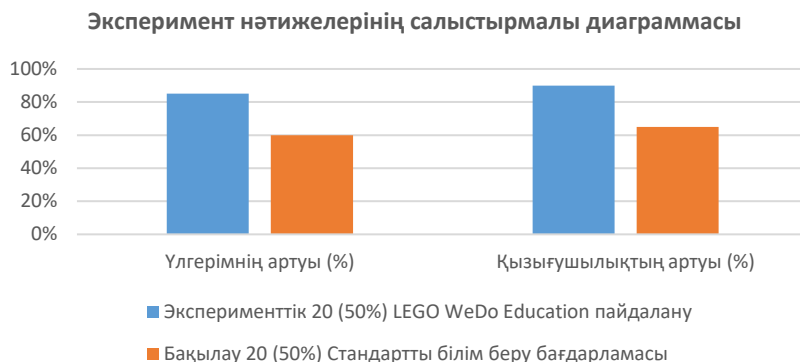
Олар: логикалық ойлау дағдылары – оқушылардың тапсырмалардағы негізгі заңдылықтар мен байланыстарды анықтап, дұрыс шешім қабылдай білуі; қадамдық алгоритм құра білуі – берілген тапсырманы кезеңдерге бөліп, дұрыс реттілікпен орындау қабілеті; программалау негіздерін меңгеруі – LEGO WeDo-да қарапайым кодтар мен әрекеттер тізбегін құрастыру және орындау деңгейі; қателерді анықтау және түзету – алгоритмдегі қателіктерді тауып, оларды түзету қабілеті; шешімнің тиімділігі – тапсырмаларды орындау барысында ең оңтайлы алгоритмдік шешімдерді табу мүмкіндігі; шығармашылық дағдылары – стандартты емес шешімдер ұсыну, жаңа идеяларды алгоритмге енгізе білу; нәтижені түсіндіру және бағалау – құрастырылған алгоритмнің дұрыстығын тексеру және оның тиімділігін дәлелдеп түсіндіру дағдысы; қызығушылық және мотивация – оқушылардың робототехника мен алгоритмдеу сабақтарына деген ынтасы және белсенділігі.

Экспериментке 2, 3, 4-сыныптың 40 оқушысы қатысты. Оқушылар екі топқа бөлінді: бақылау және эксперименттік топтар. 20 оқушыдан тұратын эксперименттік топқа LEGO WeDo Education конструкторын пайдаланып сабақтар өткізілді. Ал бақылау тобына стандартты білім беру бағдарламасы бойынша сабақтар жүргізілді. 1-кесте мен 4-суретте көрсетілгендей зерттеу нәтижесінде эксперименттің топта оқитын оқушылардың оқу үлгерімнің және пәнге деген қызығушылықтың артқаны белгілі болды.

Кесте 1. Бастауыш сынып оқушыларына робототехника бөлімін оқытуда жүргізілген эксперимент нәтижесі

Топ	Оқушы саны	Оқу әдісі	Үлгерімнің артуы (%)	Қызығушылықтың артуы (%)
Эксперименттік	20 (50%)	LEGO WeDo Education пайдалану	85%	90%
Бақылау	20 (50%)	Стандартты білім беру бағдарламасы	60%	65%

Зерттеу нәтижесінде LEGO WeDo Education конструкторын пайдаланған эксперименттік топ оқушылары алгоритмдік ойлау дағдыларын дамытуда жоғары нәтижелер көрсетті. Олар тапсырмаларды жылдам меңгеріп, өз қателерін анықтау және түзету бойынша жақсы көрсеткіштерге қол жеткізді. Сонымен қатар, эксперименттік топтағы оқушылар шығармашылық тұрғыдан белсенді болып, шешімдерді әртүрлі тәсілдермен ұсынды.



Сурет 4. Бастауыш сынып оқушыларына робототехника бөлімін оқытуда жүргізілген эксперимент нәтижесі

Қызығушылық пен мотивация критерийлері бойынша да эксперименттік топтағы оқушылар айтарлықтай жоғары нәтиже көрсетті. LEGO WeDo Education арқылы интерактивті оқыту әдісі олардың оқу үдерісіне деген ынтасын арттырып, алгоритмдік ойлауды дамытудың тиімділігін дәлелдеді.

Дискуссия

Зерттеу нәтижелері LEGO WeDo Education конструкторын пайдалану бастауыш сынып оқушыларының алгоритмдік ойлауын тиімді түрде дамытатынын көрсетті. Бұл мәліметтер өте маңызды, себебі олар оқушыларға негізгі танымдық дағдыларды қалыптастыру үшін практикалық бағытталған оқыту әдістерінің тиімділігін дәлелдейді. Алгоритмдік ойлау, кейінгі программалау негіздерін меңгеруге арналған алғашқы қадам ретінде, қазіргі білім беру жүйесінде визуалды программалау мен робототехника сияқты жаңа әдістерді қолданудың қажеттілігін көрсететін маңызды аспект болып табылады [13, 14, 15].

Бұл зерттеу білім беру технологияларының оқушылардың алгоритмдік ойлауын дамытуға әсерін зерттеген басқа жұмыстардың нәтижелерін растайды. Мысалы, LEGO Mindstorms немесе Scratch сияқты басқа робот-конструкторларды қолдануға арналған зерттеулер де алгоритмдік және логикалық ойлауды дамытуда жақсы нәтижелер берген. Бұл интерактивті және нақты өзара әрекеттесуді ұсынатын конструкторлар бастауыш сынып оқушыларына программалау мен инженерия негіздерін үйретудің маңызды құралы бола алатындығын көрсетеді.

Оқушылардың оқуға деген ынтасы артқаны байқалды, бұл педагогикалық тұрғыдан маңызды болып табылады. Оқуға қызығушылықтың төмендеуі бастауыш сыныптарда жиі кездесетін қиындықтардың бірі, ал LEGO WeDo сияқты құралдарды қолдану оқу үдерісін оқушылар үшін қызықты әрі тартымды етуге мүмкіндік береді. Бұл тек тест нәтижелерімен ғана емес, сондай-ақ эксперименттік топтағы оқушылардың белсенді қатысуы мен ынтымақтастығы жоғары екенін байқаған мұғалімдердің бақылауларымен де расталады.

Осылайша, жүргізілген зерттеу нәтижелері бастауыш сынып оқушыларының оқу үдерісіне LEGO WeDo сияқты инновациялық технологияларды енгізу қажеттілігін көрсетеді, ол дәстүрлі оқыту әдістерін қайта қарауды талап етеді. Бұл технологиялар тек негізгі танымдық дағдыларды дамытуға ғана емес, сонымен қатар оқу үдерісін оқушылар үшін қызықты әрі қолжетімді етуге көмектеседі.

Қорытынды

Зерттеу LEGO WeDo Education конструкторын қолдану бастауыш сынып оқушыларында алгоритмдік ойлауды тиімді дамытуға көмектесетінін көрсетті. LEGO WeDo-мен жұмыс істеген оқушылар логикалық және алгоритмдік ойлау, әрекеттердің реттілігін сақтау және

қарапайым программалар жасау дағдыларында едәуір прогреске жетті, бұл оқу құралдарының балалардың танымдық дамуына оң әсерін тигізетіні туралы болжамды растайды.

LEGO WeDo сияқты интерактивті және практикалық бағыттағы оқыту әдістерін қолдану бастауыш сынып оқушыларына программалаудың негіздерін меңгеруге ғана емес, сондай-ақ оқуға деген қызығушылықтарын арттыруға да ықпал етеді. Қызықты әрі көрнекі оқыту әдістері балалардың оқуға деген ынтасын көтеруде маңызды рөл атқарады.

Осылайша, LEGO WeDo Education технологиясы болашақта дамыған қоғамда алгоритмдік ойлау мен программалау негіздерін меңгеру үшін қажетті құрал болып, білім беру бағдарламасының маңызды бөлігіне айналуы мүмкін.

Пайдаланған дереккөздер тізімі

[1] 1-11 сыныптарға арналған «Робототехника» курсы бойынша оқу бағдарламасы (үйірме немесе вариативті сағат шеңберінде) // Ы. Алтынсарин атындағы Ұлттық білім академиясы. Нұр-Сұлтан, 2022. url: <https://uba.edu.kz/storage/app/media/>

[2] Ануарбекова Г.Д., Усип Г.А., Серғазы Ә.Т., Амай Ж.М. // Lego Education WeDo конструкторымен роботтар құрастыру арқылы бастауыш сынып оқушыларының ойлау қабілеттерін дамыту. // «Қазақстан Республикасында жаратылыс-ғылыми білім беруді дамыту: мәселелері мен болашағы» атты Халықаралық ғылыми-практикалық конференция материалдарының жинағы. - Алматы. - 2024. Б.313-317. url: <https://student.kaznu.kz/ru/Main/FileGet/?fileId=226090>

[3] Мұхамедиева Қ.М. // Методология проектирования и реализации образовательных технологий по робототехнике в вузе. url: https://docs.google.com/Mukhamediyeva_Kymbatsha_diss.pdf

[4] Сорокин С.С. // Робототехниканы оқыту процесінде бастауыш сынып оқушыларында әмбебап оқу әрекеттерін қалыптастыру. url: <https://www.dissercat.com/content/formirovanie-universalnykh-uchebnykh-deistvii-u-mladshikh-shkolnikov-v-protsesse-obucheniya>

[5] Еник О.А. // Мектепке дейінгі мекеменің ақпараттық-білім беру ортасының жобалау элементтері мен робототехникасын бағдарламалық-техникалық қамтамасыз ету. https://dspace.tltsu.ru/bitstream/123456789/7771/1/%D0%95%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%9E.%D0%90.%D0%9F%D0%98%D0%BC_1602%D0%B0.pdf

[6] Ананьевна Ш.Т. // Физика сабақтарында LEGO білім беру конструкторларын пайдалану. https://vkr.pspu.ru/uploads/5279/SHipitsina_vkr.PDF

[7] Патрикеева О.Н. // «Lego WeDo 2.0 бар алғашқы жобалар» техникалық бағыттағы қосымша жалпы білім беретін жалпы дамыту бағдарламасы. <https://www.laplandiya.org/uploads/pages/6721/files/1637573554-93-pervye-proekty-s-lego-wedo20.pdf>

[8] Власова О.С. // Техникалық құрылыс бастауыш сынып оқушыларының жаратылыстану циклі пәндерін игеруді жандандыру құралы ретінде.

[9] <https://new-disser.ru/avtoreferats/01008081452.pdf?ysclid=lwex5p40f6442814317>

[10] Корягин, А.В. Образовательная робототехника (Lego WeDo) [Текст]: Сборник методических рекомендаций и практикумов. / А.В. Корягин, Н.М. Смольянинова. – М.: ДМК Пресс, 2016. Б. 254.

[11] Корягин, А.В. Образовательная робототехника (Lego WeDo) [Текст]: Рабочая тетрадь / А.В. Корягин. – М.: ДМК Пресс, 2016. Б. 96.

[12] Власова, О.С. Образовательная робототехника в учебной деятельности учащихся начальной школы [Текст]: Учебно-методическое пособие / О.С. Власова, А.А. Попова. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. унта, 2014. – 111 с.

[13] Гейхман Л.К., Титова М.В. Образовательная робототехника в работе с детьми дошкольного и младшего школьного возраста // Вестник ПНИПУ. Проблемы языкознания и педагогики. 2015. №4 (14). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obrazovatel'naya-robototekhnika-v-rabote-s-detmidoshkol'nogo-i-mladshego-shkol'nogo-vozrasta> (дата обращения: 04.03.2018).

[14] Толстова Н. А., Бондаренко Д. А., Ганьшин К. Ю. Образовательная робототехника как составляющая инженерно-технического образования // Наука. Инновации. Технологии. 2013. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obrazovatel'naya-robototekhnika-kaksostavlyayuschaya-inzhenerno-tehnicheskogo-obrazovaniya> (дата обращения: 10.03.2024).

[15] Тузикова, И. В. Изучение робототехники - путь к инженерным специальностям [Текст] / И. В. Тузикова: Школа и производство. - 2013.

[16] Электрондық ресурс: <https://education.lego.com/en-us/downloads/retiredproducts/wedo-2/software/>

References

[1] Curriculum for Robotics courses for boys aged 1-11 (circle or variable hour in shonberein) // National Academy of Education named after I. Altynsarin. Nur-Sultan, 2022. url: <https://uba.edu.kz/storage/app/media/>

[2] Anuarbekova G. D. Usip G. A., Sergazy A. T., Atay Zh.M.// LEGO Education WeDo creation of robots by a constructor. // Collection of materials of the international scientific and practical conference "Development in the Republic of Kazakhstan: I'm promoting my future."- Almaty.-2024. pp. 313-317. url: <https://student.kaznu.kz/ru/Main/FileGet/?fileId=226090>

[3] Mukhamedieva K. M. // methods of designing and implementing educational technologies in robotics at the university. url: https://docs.google.com/Mukhamediyeva_Kymbatsha_diss.pdf

[4] Sorokin S. S. // Robotics as a generalization of universal educational actions of beginning great students in the educational process. url: <https://www.dissercat.com/content/formirovanie-universalnykh-uchebnykh-deistvii-u-mladshikh-shkolnikov-v-protse-robototekhnicheskogo-obucheniya>

[5] Erik O. A. // software and technical support for elements and robotics of the information and educational center of a preschool institution. https://dspace.tltsu.ru/bitstream/123456789/7771/1/%D0%95%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%9E.%D0%90.%D0%9F%D0%98%D0%BC_1602%D0%B0.pdf

[6] Ananyevna S. T. // the use of educational LEGO constructors in physics lessons. https://vkr.pspu.ru/uploads/5279/SHipitsina_vkr.PDF

[7] Patrikeeva O. N. // technical orientation "first projects with Lego WeDo 2.0" program of general development of additional general education. <https://www.laplandiya.org/uploads/pages/6721/files/1637573554-93-pervye-proekty-s-lego-wedo20.pdf>

[8] Vlasova O. S. // the origins of technical construction as the activation of the natural science cycle and the development of great students.

https://new-disser.ru/_avtoreferats/01008081452.pdf?ysclid=lwex5p40f6442814317

[9] Koryagin, A.V. educational robotics (Lego WeDo) [text]: collection of methodological recommendations and seminars. / A.V. Koryagin, N. M. Smolyaninova. Moscow: DMK Press, 2016. P. 254.

[10] Koryagin, A.V. educational robotics (Lego WeDo) [text]: workbook / A.V. Koryagin. Moscow: DMK Press, 2016. p. 96.

[11] Vlasova, O. S. educational robotics in the educational activities of younger schoolchildren [text]: an educational and methodological manual / O. S. Vlasova, A. A. Popova. Chelyabinsk: Chelyabinsk edition. the state teacher. unta, 2014. 111 p.

[12] Geikhman L. K., Titova M. V. educational robotics in working with children of preschool and primary school age // bulletin of PNIPU. Problems of linguistics and pedagogy. 2015. No. 4 (14). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obrazovatel'naya-robototekhnika-v-rabote-s-detmidoshkolnogo-i-mladshego-shkolnogo-vozrasta> (date of reference: 03/04/2018).

[13] Tolstova N. A., Bondarenko D. A., Ganshin K. Y. Educational robotics as an integral part of engineering and technical education. Innovation. Technologies. 2013. No. 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obrazovatel'naya-robototekhnika-kaksostavlyayuschaya-inzhenerno-tehnicheskogo-obrazovaniya> (accessed: 03/10/2024).

[14] Tuzikova, I. V. Robotics research - the path to engineering specialties [Text] / I. V. Tuzikova: school and production. - 2013.

[15] Electronic resource: <https://education.lego.com/en-us/downloads/retiredproducts/wedo-2/software/>

А.М. Байганова¹, М.А. Нарымбаева^{1*}

¹Актюбинский региональный университет им.К.Жұбанова, г. Ақтөбе, Қазақстан

*e-mail: madina_n93@mail.ru

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ИНКЛЮЗИВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Аннотация

В условиях развития инклюзивного образования особую значимость приобретает адаптация методов преподавания информатики для детей с особыми образовательными потребностями. Данная статья посвящена исследованию особенностей преподавания информатики в инклюзивной среде с акцентом на разработку и внедрение цифровых образовательных ресурсов, а также методов обучения, учитывающих потребности детей с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ). Целью данного исследования является изучение и анализ особенностей преподавания информатики в рамках инклюзивного образования с последующей разработкой электронно-образовательного ресурса, способствующего формированию базовых навыков компьютерной грамотности у обучающихся с ОВЗ. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи: изучение существующих методов преподавания информатики в инклюзивной среде, анализ образовательных потребностей учащихся с различными формами ОВЗ, разработка и апробация адаптированного цифрового ресурса, а также оценка его эффективности в реальных условиях обучения. Методологическую основу исследования составляют методы анализа педагогической литературы, наблюдения, анкетирования учащихся и педагогов, интервьюирования экспертов, а также проведение педагогического эксперимента. Для оценки эффективности применения ресурса использовался комплекс педагогических и психологических методов диагностики, включая тестирование, анкетирование, метод наблюдения и психологические методики («Лестница успеха», корректурная проба, метод незаконченных предложений и проективные методики). В рамках исследования проводится эксперимент по внедрению обучающего сборника по базовой компьютерной грамотности для детей с задержкой психического развития (ЗПР). Кроме того, рассматриваются возможности использования современных технологий, таких как искусственный интеллект, мультимедийные ресурсы и адаптивные системы обучения, для персонализации образовательного процесса. В исследовании предлагаются практические рекомендации по созданию инклюзивных цифровых образовательных платформ и учебных материалов, направленных на повышение доступности и эффективности обучения информатике для всех категорий обучающихся. Результаты эксперимента продемонстрировали положительную динамику: уровень самостоятельности и цифровых навыков у детей с ООП повысился, количество ошибок снизилось на 40%, а интерес к занятиям вырос. В дальнейшем планируется расширение выборки и включение контрольной группы для более точной оценки эффективности методики. Результаты исследования могут быть полезны преподавателям, разработчикам образовательных технологий и специалистам в области инклюзивного образования, работающим над повышением качества обучения информатике в условиях разнообразия образовательных потребностей.

Ключевые слова: информатика, инклюзивное образование, адаптивные технологии, цифровая грамотность, цифровые образовательные ресурсы.

А.М.Байганова¹, М.А. Нарымбаева¹

¹Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

ИНКЛЮЗИВТІ БІЛІМ БЕРУ ЖАҒДАЙЫНДА ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Аңдатпа

Инклюзивті білім берудің дамуы жағдайында информатика пәнін ерекше білім беру қажеттіліктері бар балаларға оқыту әдістерін бейімдеудің маңызы арта түсуде. Бұл мақала инклюзивті ортада

информатиканы оқыту ерекшеліктерін зерттеуге арналған және цифрлық білім беру ресурстарын әзірлеу мен енгізуге, сондай-ақ ерекше қажеттіліктері бар балалардың қажеттіліктерін ескеретін оқыту әдістеріне баса назар аударады. Зерттеудің мақсаты – инклюзивті білім беру жағдайында информатиканы оқыту ерекшеліктерін зерттеп, электронды білім беру ресурсын әзірлеу, ол ерекше білім беру қажеттіліктері бар оқушылардың компьютерлік сауаттылық бойынша базалық дағдыларын қалыптастыруға ықпал етеді. Осы мақсатқа қол жеткізу үшін келесі міндеттер қарастырылады: инклюзивті ортада информатиканы оқытудың қолданыстағы әдістерін зерттеу, ерекше білім беру қажеттіліктерінің әртүрлі түрлері бар оқушылардың білім алу қажеттіліктерін талдау, бейімделген цифрлық ресурсты әзірлеу және сынақтан өткізу, сондай-ақ оны оқу процесінде қолданудың тиімділігін бағалау. Зерттеудің әдіснамалық негізі ретінде педагогикалық әдебиеттерді талдау, бақылау, оқушылар мен педагогтерге сауалнама жүргізу, сарапшылармен сұхбаттасу және педагогикалық эксперимент әдістері қолданылды. Ресурстың тиімділігін бағалау үшін педагогикалық және психологиялық диагностиканың кешенді әдістері пайдаланылды, соның ішінде тестілеу, сауалнама, бақылау әдісі және бірқатар психологиялық әдістемелер («Жетістік сатысы», коррекциялық сынама, аяқталмаған сөйлемдер әдісі және проективтік әдістемелер). Зерттеу аясында психикалық дамуы тежелген (ПДТ) балаларға арналған компьютерлік сауаттылықты меңгеруге бағытталған оқыту жинағын енгізу бойынша эксперимент жүргізілуде. Сонымен қатар, жасанды интеллект, мультимедиялық ресурстар және бейімделетін оқыту жүйелері сияқты заманауи технологияларды білім беру процесін жекелендіру мақсатында қолдану мүмкіндіктері қарастырылады. Зерттеу нәтижесінде информатиканы инклюзивті жағдайда оқыту қолжетімділігін және тиімділігін арттыруға бағытталған инклюзивті цифрлық білім беру платформаларын және оқу материалдарын әзірлеу бойынша практикалық ұсынымдар ұсынылады. Эксперимент нәтижелері оң динамиканы көрсетті: ерекше білім беру қажеттіліктері бар балалардың (ЕББК) дербестігі мен цифрлық дағдыларының деңгейі артты, қателер саны 40%-ға азайды, сабақтарға қызығушылық жоғарылады. Болашақта әдістеменің тиімділігін неғұрлым нақты бағалау үшін зерттеу үлгісін кеңейтіп, бақылау тобын енгізу жоспарлануда. Зерттеу нәтижелері информатика пәні мұғалімдеріне, білім беру технологияларын әзірлеушілерге және инклюзивті білім беру саласындағы мамандарға әртүрлі білім беру қажеттіліктері жағдайында оқыту сапасын арттыруда пайдалы болуы мүмкін.

Түйін сөздер: информатика, инклюзивті білім беру, бейімделетін технологиялар, цифрлық сауаттылық, цифрлық білім беру ресурстары.

A.M.Baiganova¹, M.A.Narymbaeva¹

¹Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

FEATURES OF TEACHING COMPUTER SCIENCE IN AN INCLUSIVE EDUCATION ENVIRONMENT

Abstract

In the context of the development of inclusive education, the adaptation of teaching methods in informatics for children with special educational needs (SEN) is becoming increasingly important. This paper explores the features of teaching informatics in an inclusive environment, with a focus on the development and implementation of digital educational resources and teaching methods that take into account the needs of children with disabilities. The aim of this research is to study and analyze the specifics of teaching informatics within inclusive education and to develop an electronic educational resource that supports the formation of basic computer literacy skills among students with SEN. To achieve this goal, the following tasks are addressed: studying existing methods of teaching informatics in inclusive settings, analyzing the educational needs of students with various types of SEN, developing and testing an adapted digital resource, and evaluating its effectiveness in actual educational practice. The methodological basis of the study includes analysis of pedagogical literature, observation, surveys of students and teachers, expert interviews, and a pedagogical experiment. To assess the effectiveness of the developed resource, a set of pedagogical and psychological diagnostic methods was used, including testing, surveys, observation, and psychological techniques such as the "Success Ladder", correction test, unfinished sentence method, and projective methods. The research involves an experiment on the implementation of an educational kit on basic computer literacy for children with intellectual developmental delays. Additionally, the study examines the potential of modern technologies – such as artificial intelligence, multimedia tools, and adaptive learning systems – for personalizing the learning process. Practical recommendations are proposed for the creation of inclusive digital educational

platforms and instructional materials aimed at increasing the accessibility and effectiveness of informatics education for all student categories. The results of the experiment demonstrated a positive trend: the level of independence and digital skills among children with special educational needs (SEN) increased, the number of errors decreased by 40%, and interest in the lessons grew. In the future, it is planned to expand the sample and include a control group to more accurately assess the effectiveness of the methodology. The results of the study may be useful to teachers, educational technology developers, and specialists in the field of inclusive education working to improve the quality of informatics instruction in diverse learning environments.

Keywords: informatics, inclusive education, adaptive technologies, digital literacy, digital educational resources.

Основные положения

Актуальность проблемы и цель. Современное образование требует адаптации учебного процесса к индивидуальным особенностям учащихся с особыми образовательными потребностями (ООП), особенно в преподавании информатики. Основы цифровой грамотности могут способствовать социальной интеграции и профессиональному самоопределению таких учащихся. Однако в большинстве случаев образовательные материалы не учитывают специфики восприятия детей с нарушениями интеллекта и зрения. Целью работы является разработка электронного образовательного ресурса, адаптированного для использования в инклюзивной образовательной среде.

Методы и дискуссия. Применялись методы анализа педагогической литературы, анкетирования, интервьюирования, наблюдения и педагогического эксперимента. Разработана и апробирована обучающая брошюра по компьютерной грамотности для детей с задержкой психического развития. Оценка эффективности включала педагогическую и психологическую диагностику (тестирование, метод «Лестница успеха» и др.).

Результаты. Полученные данные показали повышение мотивации и уровня усвоения материала у детей с ООП. Электронный ресурс доказал свою эффективность как адаптивный инструмент обучения информатике. Использование мультимедийных и интерактивных элементов обеспечило более доступное и наглядное объяснение учебного материала.

Выводы. Разработка инклюзивных цифровых образовательных ресурсов способствует расширению возможностей обучения информатике для детей с ООП. Полученные результаты подтверждают необходимость внедрения адаптированных методик и технологий в педагогическую практику.

Введение

Современное образование стремится к созданию равных возможностей для всех учащихся, независимо от их индивидуальных особенностей и потребностей. В этом контексте инклюзивное образование играет ключевую роль, обеспечивая доступность знаний и навыков для детей с особыми образовательными потребностями (ООП). Однако преподавание информатики в условиях инклюзивного образования сталкивается с рядом методических и организационных трудностей, требующих адаптации учебного процесса.

Одной из главных проблем является недостаточная адаптация традиционных методик преподавания информатики к потребностям учащихся с различными формами ООП. Многие дети с особыми образовательными потребностями имеют ограничения в восприятии, обработке и воспроизведении информации, что делает стандартные методы обучения неэффективными. В то же время цифровые технологии предоставляют широкие возможности для индивидуализации учебного процесса, позволяя разработать адаптивные образовательные материалы и интерактивные методики обучения.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки и внедрения новых методик, ориентированных на формирование базовых навыков компьютерной грамотности у детей с ООП. Важно не только предоставить им доступ к информационным технологиям, но и научить их использовать цифровые инструменты для обучения, коммуникации и последующей профессиональной реализации.

На основании анализа образовательной практики и научной литературы можно выделить следующие проблемные положения:

- традиционные учебные программы по информатике в большинстве случаев не учитывают когнитивные, сенсорные и психоэмоциональные особенности детей с нарушениями зрения и интеллекта;
- педагоги испытывают трудности в подборе эффективных цифровых инструментов и форм работы, соответствующих уровню развития обучающихся с ООП;
- слабо развита практика интеграции технологий искусственного интеллекта и мультимедийных средств в инклюзивное обучение информатике;
- уровень цифровой грамотности обучающихся с ООП остаётся низким, что ограничивает их возможности в дальнейшем образовании и социализации.

Целью данного исследования является изучение особенностей преподавания информатики в условиях инклюзивного образования, а также разработка эффективных методов и подходов к обучению, учитывающих индивидуальные потребности учащихся. *Гипотеза исследования* — внедрение адаптивного цифрового ресурса повысит уровень цифровой грамотности и самостоятельности у младших школьников с ЗПР. Актуальность определяется необходимостью равного доступа к ИКТ и повышения качества преподавания информатики в начальной школе.

Методология исследования

Методологическая основа исследования включает комплексный подход, объединяющий теоретические, эмпирические и экспериментальные методы для изучения и совершенствования процесса преподавания информатики в условиях инклюзивного образования. Основное внимание уделяется анализу современных педагогических практик, выявлению потребностей учащихся с особыми образовательными потребностями (ООП) и разработке адаптированных методик обучения, обеспечивающих доступность и эффективность образовательного процесса.

В рамках исследования используются теоретические методы, включая анализ и обобщение научной литературы по вопросам инклюзивного образования, методики преподавания информатики и психолого-педагогического сопровождения детей с особыми образовательными потребностями.

Анализ работ Mel Ainscow и Tony Booth по инклюзивному образованию, в частности их концепции, позволяет рассмотреть ключевые принципы создания адаптивной образовательной среды. David Mitchell акцентирует внимание на эффективных педагогических стратегиях для обучения детей с особыми потребностями [1-2].

Важную роль играет исследование рекомендаций ЮНЕСКО, представленных в Саламанкской декларации (1994), где инклюзивное образование рассматривается как процесс обеспечения равного доступа к обучению для всех детей [3].

В российском контексте анализируются труды Н. Л. Малофеевой, С. Я. Рубинштейн, Е. А. Ковалёвой и И. В. Соловьёвой, которые рассматривают адаптацию образовательных программ, внедрение ассистивных технологий и психологическую поддержку в инклюзивном обучении.

Кроме того, изучаются международные исследования, посвященные использованию цифровых технологий в обучении детей с особыми потребностями, включая работы по программам Scratch для детей с аутизмом, Project Torino для слабовидящих, а также исследования эффективности интерактивных средств обучения [4].

Это позволяет систематизировать существующие подходы и выявить наиболее эффективные стратегии обучения. Дополнительно применяется метод моделирования, который используется для разработки адаптивных образовательных технологий, включая мобильное приложение, учебную брошюру и интерактивный тренажёр по информационной

безопасности. Инклюзивное образование основывается на доступности, уважении разнообразия, учете индивидуальных потребностей, сотрудничестве и формировании толерантной среды. Психолого-педагогические аспекты включают индивидуальный подход, психологическую поддержку, социальную адаптацию, подготовку педагогов и систему комплексного сопровождения [5]. Информатика в школе развивает цифровую грамотность, алгоритмическое мышление и готовит учеников к профессиям будущего, используя игровые, проектные и визуальные методики. Инклюзивное преподавание информатики требует адаптации материалов и индивидуализации обучения, обеспечивая доступность знаний для всех учащихся [6].

Эмпирические методы исследования направлены на получение объективных данных о процессе преподавания информатики в инклюзивной среде. Метод педагогического наблюдения позволяет фиксировать особенности обучения детей с различными формами ООП, их вовлечённость и возникающие трудности. Анкетирование и опросы проводятся как среди учащихся, так и среди педагогов и родителей, что позволяет выявить уровень владения компьютерной грамотностью, а также потребности и ожидания участников образовательного процесса. Анкеты включают вопросы по оценке базовых компьютерных навыков, адаптации учебных материалов и восприятию цифровых технологий в обучении [7].

Для диагностики познавательных процессов и психоэмоционального состояния учащихся применяются психологические методики. Среди них «Лестница успеха», позволяющая оценить уровень мотивации и самооценки, корректурная проба для анализа внимания, методика незаконченных предложений для выявления учебных трудностей и проективные методы, отражающие индивидуальные особенности восприятия учебного материала [8].

Ключевым элементом исследования является педагогический эксперимент, состоящий из трёх этапов: *констатирующего, формирующего и контрольного*. Эксперимент проведён в трёх первых классах школы №1 города Актобе (81 ученик, из них 10 с ОВЗ). Используются методы педагогического наблюдения, анкетирования, тестирования, психологические методики (например, «Лестница успеха», корректурная проба). ЭОР разработан на WordPress с использованием LearnPress, включает 4 модуля: вводный, учебный, практический и контрольный. Задания адаптированы под разные типы нарушений: добавлены голосовые подсказки, визуальные подсказки и игровые элементы.

На *констатирующем этапе* проводилась диагностика исходного уровня знаний и представлений о цифровой грамотности у первоклассников, ранее не имевших опыта работы с компьютером. Анкетирование родителей и педагогов позволило выявить степень знакомства детей с цифровыми устройствами, уровень самостоятельности и возможные трудности в освоении базовых компьютерных навыков. Метод наблюдения за выполнением вводных заданий, таких как сортировка изображений по видам информации и определение каналов связи, помог зафиксировать особенности восприятия детьми ключевых понятий [9]. Для слабовидящих учащихся проверялась возможность работы с аудиоформатом материалов с использованием NaturalReader.

На *формирующем этапе* осуществлялось внедрение адаптированных методик преподавания цифровой грамотности, разработанных на основе рабочей программы (КТП) для 1-го класса. Обучение проходило в игровой форме с использованием интерактивных заданий, направленных на освоение понятий информации, её передачи и безопасного поведения в интернете. Важным элементом являлось включение мультимедийных и аудиовизуальных средств, что обеспечивало доступность материалов для всех учащихся. Для слабовидящих детей рекомендовалось использование NaturalReader для озвучивания учебного материала, а задания сопровождалось крупными и контрастными визуальными элементами [10]. В ходе занятий проводился систематический мониторинг освоения материала, корректировка методик с учётом индивидуальных потребностей детей, а также поддержка педагогов в работе с инклюзивной группой.

На контрольном этапе проводилась повторная диагностика с целью количественной и качественной оценки эффективности предложенной методики. Дети выполняли задания по различению видов информации, определению каналов связи и безопасному использованию сети Интернет [11]. Анкетирование педагогов и родителей позволило зафиксировать субъективные изменения в уверенности детей при работе с цифровыми устройствами. Метод наблюдения помог выявить снижение количества ошибок, повышение самостоятельности и заинтересованности в изучении цифровых технологий [12].

Для обработки данных применялись количественные и качественные методы анализа. Количественный анализ включал статистическую обработку результатов выполнения заданий и анкетирования, что позволило определить динамику освоения компьютерных навыков. Качественный анализ был направлен на интерпретацию наблюдений и комментариев педагогов, выявление ключевых трудностей и успешных стратегий обучения.

Ожидается, что предложенная методика и адаптивные образовательные ресурсы помогут первоклассникам, ранее не имевшим опыта взаимодействия с компьютером, освоить базовые навыки цифровой грамотности в доступной и комфортной форме. Внедрение мультимедийных инструментов, таких как NaturalReader, повысит доступность обучения для слабовидящих детей. Результаты исследования могут быть использованы для дальнейшего развития инклюзивного образования и создания эффективных образовательных программ по цифровой грамотности для детей с различными образовательными потребностями.

Результаты исследования

В современном обществе цифровая грамотность играет ключевую роль в образовательном процессе. Однако дети с особыми образовательными потребностями (ООП), включая детей с задержкой психического развития (ЗПР) и детским церебральным параличом (ДЦП), часто сталкиваются с трудностями в освоении компьютерных навыков. Данная статья посвящена разработке цифровой образовательный ресурса на базе WordPress с использованием плагина LearnPress, предназначенного для обучения детей с ООП основам компьютерной грамотности [13]. Цифровая грамотность является неотъемлемой частью современного образования. Однако для детей с ООП необходимо адаптированное обучение, учитывающее их особенности восприятия и взаимодействия с цифровыми технологиями. Основная цель данной работы – создать инклюзивный образовательный ресурс, который обеспечит доступ к базовым компьютерным навыкам и цифровой безопасности в удобном и интерактивном формате. Выбор платформы для размещения электронно-образовательного ресурса (ЭОР) был основан на ряде критериев, включая простоту использования, адаптивность интерфейса, доступность для детей с ООП и возможность интеграции интерактивных элементов. В результате анализа различных платформ (Moodle, Google Classroom, WordPress) было решено использовать WordPress в связке с плагином LearnPress, поскольку этот инструмент позволяет создать интуитивно понятную структуру ЭОР и предоставляет широкий функционал для организации обучения. ЭОР разработан с учётом возрастных особенностей и первоначального уровня знаний обучающихся, не имеющих опыта работы с цифровыми устройствами.

Образовательный процесс выстроен на основе КТП 1 класса предмета «Цифровая грамотность». Раздел «Информационный этикет» направлен на знакомство с понятием информации, её видами и способами передачи. В рамках данного блока используются сортировочные задания, в которых обучающиеся классифицируют информацию (текстовую, графическую, звуковую и др.), а также практические упражнения по определению источников и приёмников информации. Для формирования навыков безопасного взаимодействия в интернете применяются сценарные задания, моделирующие типичные ситуации онлайн-общения и анализ рисков, связанных с передачей личных данных [14].

Раздел «Мой первый рисунок» посвящён освоению базовых навыков работы с графическими редакторами. В него включены интерактивные упражнения, позволяющие детям создавать простые изображения с помощью геометрических фигур, а также практикумы

по изменению параметров рисунков (размера, цвета, положения объектов). Игровые задания помогают развивать мелкую моторику и пространственное мышление, что особенно важно для начального этапа освоения компьютерных технологий.

Раздел «Алгоритмы в нашей жизни» направлен на формирование у обучающихся алгоритмического мышления и первоначальных навыков программирования. В ходе занятий дети выполняют логические задания на выстраивание последовательности действий, осваивают работу с визуальными блоками в Scratch, создавая простейшие алгоритмы для анимаций и интерактивных программ. В рамках проектных заданий обучающиеся разрабатывают свою первую программу или интерактивную историю, что способствует закреплению знаний и развитию творческого подхода.

Таким образом, электронно-образовательный ресурс включает задания различного типа, позволяющие обучающимся постепенно адаптироваться к работе с компьютером, освоить ключевые цифровые компетенции и безопасно взаимодействовать в цифровой среде.

Все задания разделов расписаны на основе сборника адаптивных заданий. При их создании учитывались особенности обучающихся с особыми образовательными потребностями, включая детей с детским церебральным параличом (ДЦП), слабовидящих и слепых, детей с задержкой психического развития (ЗПР).

Задания ориентированы на развитие цифровой грамотности, понимание основ информационного этикета и безопасного поведения в интернете, а также на освоение базовых навыков работы с компьютером. Для каждой категории детей предусмотрены адаптации, позволяющие сделать обучение доступным, комфортным и эффективным (рис.1).



Рисунок 1. Пример заданий раздела

Для слабовидящих детей рекомендуется открывать PDF-файл сборника и использовать программу NaturalReader для озвучивания материала. Это позволит детям воспринимать текст на слух, а также облегчить процесс чтения. Программа обеспечивает возможность регулировки скорости воспроизведения, что особенно важно для первоклассников, только начинающих осваивать компьютерные технологии.

Во всех заданиях использованы различные методы представления информации:

- Визуальный (крупные изображения, пиктограммы, контрастные цвета для слабовидящих детей, упрощённые схемы для детей с ЗПР);
- Аудиальный (голосовые инструкции, рекомендации по использованию экранного чтения для слепых и слабовидящих).

Задания распределены по темам, начиная с правил безопасного поведения за компьютером и заканчивая основами интернет-безопасности. Использование игровых и практических методов обучения позволяет детям легче усваивать информацию и применять её в повседневной жизни [15]. Сборник станет полезным инструментом как для педагогов и родителей, так и для специалистов, работающих с детьми в условиях инклюзивного образования (рис.2).



Рисунок 2. Пример адаптивного задания

Для реализации ЭОР были предприняты следующие шаги: установка WordPress на хостинге, настройка плагина LearnPress, создание структуры ЭОР, добавление интерактивных элементов (видео, аудио, иллюстрации) и тестирование перед публикацией. Для повышения доступности использованы голосовые подсказки, интуитивно понятный интерфейс и игровые задания. Разработанный электронно-образовательный ресурс позволяет детям с ООП комфортно освоить базовые компьютерные навыки. Дальнейшее развитие проекта включает интеграцию с мобильными устройствами, введение адаптивных технологий и расширение тематики ЭОР. Рассмотрим UML-схему архитектуры образовательного ресурса подробнее (рис.3).



Рисунок 3. UML- схема архитектуры образовательного ресурса

Пользователь заходит на сайт, где может запускать платформу, переходить между модулями и получать инструкции. Вводный модуль включает просмотр инструкций и использование адаптивных функций, таких как изменение шрифта и цветовых схем. Учебный модуль предлагает текстовые материалы, интерактивные задания и функцию Read Aloud для озвучивания текста. Практический модуль позволяет выполнять задания, получать подсказки и использовать готовые шаблоны, например, для написания кода или составления таблиц. Контрольный модуль включает тестирование, автоматические рекомендации и выдачу сертификатов. Для проведения эксперимента по внедрению ЭОР был использован комплекс педагогических и психологических методов диагностики. Эксперимент проведен на базе КГУ СОШ №1 города Актобе среди первых классов: 1 Б (3 ребенка с инклюзией, всего – 27 детей) и 1 В (3 ребенка ОВЗ, всего – 23 учащихся) – в качестве экспериментальных групп, где применялась адаптированная цифровая методика, и 1 Д (4 ребенка с инклюзией, всего – 25 детей) – в качестве контрольной группы, обучавшейся по традиционной программе без использования ЭОР.

Исследование по внедрению адаптивных заданий для обучения первоклассников основам цифровой грамотности организовано в три этапа: входная диагностика, реализация образовательного вмешательства и выходная диагностика.

На входном этапе основное внимание уделялось определению уровня готовности детей к освоению цифровой грамотности. Поскольку учащиеся ранее не имели опыта работы с компьютером, диагностика включала не практические задания, а наблюдение за их реакцией и восприятием информации. Анкетирование родителей и педагогов позволило выяснить, сталкивались ли дети с цифровыми устройствами (телефоном, планшетом, компьютером) и в каком формате. Проводилась адаптированная беседа с детьми, направленная на выявление базовых представлений об информации, её видах и способах передачи. Также использовался метод наблюдения за выполнением вводных заданий, таких как сортировка изображений по видам информации, чтобы определить уровень осознания цифровой среды. Это помогло выявить возможные барьеры в обучении, включая потребность в дополнительной визуальной или аудиоподдержке.

На этапе реализации образовательного вмешательства использовались адаптивные задания, построенные на основе рабочей программы (КТП) для 1-го класса по предмету «Цифровая грамотность». В основу заданий легли принципы инклюзивного обучения: многоформатность представления информации (визуальная, слуховая), пошаговое освоение базовых компьютерных навыков и развитие осознанного использования цифровых технологий. Например, для слабовидящих учащихся рекомендовалось использовать голосовое сопровождение заданий с помощью NaturalReader при работе с PDF-файлом сборника. Задания были организованы в игровой форме, что способствовало повышению мотивации обучающихся. В процессе занятий проводилось систематическое наблюдение за динамикой выполнения заданий, анализировались ошибки, корректировались методы подачи материала с учетом индивидуальных особенностей учеников.

На выходном этапе проводилась повторная диагностика, направленная на количественную и качественную оценку освоенных навыков. Включались задания на определение видов информации, работу с каналами связи, распознавание достоверной и недостоверной информации в интернете, а также соблюдение правил безопасного поведения в сети. Педагоги и родители отметили повышение самостоятельности детей при работе с цифровыми устройствами. Метод повторного наблюдения позволил зафиксировать снижение количества ошибок, увеличение уверенности детей в использовании компьютера и повышение интереса к изучению цифровых технологий.

Результаты исследования показали, что разработанный цифровой образовательный ресурс является эффективным инструментом для обучения детей с ЗПР (рис.4).

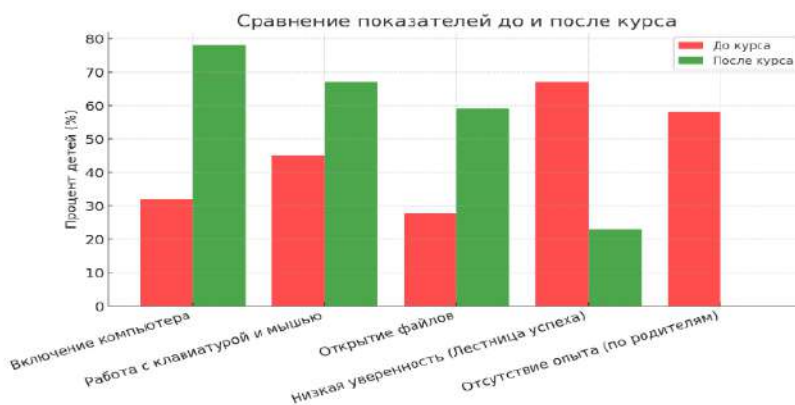


Рисунок 4. Сравнение показателей до и после ЭОР

В ходе входной диагностики только 32% детей умели самостоятельно включать и выключать компьютер, 45% испытывали затруднения в работе с клавиатурой и мышью, а 28% могли открыть файл или папку. По результатам методики «Лестница успеха» 67% обучающихся имели низкую уверенность в своих силах при работе с компьютером. Анкетирование родителей показало, что 58% детей ранее не имели регулярного опыта работы с цифровыми устройствами. Сравнительный анализ показал, что учащиеся из экспериментальных классов продемонстрировали значительное улучшение в уровне цифровой грамотности, самостоятельности и уверенности при работе с компьютером по сравнению с контрольной группой. Так, количество ошибок при выполнении заданий в экспериментальных группах снизилось в среднем на 40%, в то время как в контрольной группе – не более чем на 10%. Также наблюдался рост заинтересованности в обучении: 85% учащихся в экспериментальных группах отмечали устойчивый интерес к занятиям, тогда как в контрольной группе этот показатель составил лишь 52%.

В ходе реализации ЭОР было отмечено, что 85% детей проявили устойчивый интерес к занятиям благодаря использованию игровых элементов и голосовых подсказок. Количество ошибок при выполнении заданий снизилось в среднем на 40%, а время выполнения базовых операций сократилось на 30%.

После завершения ЭОР повторное тестирование показало, что 78% детей смогли самостоятельно включать и выключать компьютер без затруднений, 67% уверенно работали с клавиатурой и мышью, 59% освоили основные действия с файлами (открытие, перемещение, удаление). Согласно методике «Лестница успеха», уровень уверенности детей в работе с компьютером значительно повысился, и доля детей с низким уровнем уверенности снизилась с 67% до 23%. Анкетирование педагогов и родителей выявило положительные изменения: 91% педагогов отметили повышение самостоятельности детей, 76% родителей заметили больший интерес к цифровым устройствам, 63% родителей отметили снижение количества ошибок при выполнении базовых компьютерных действий. Гипотеза подтвердилась: адаптивный цифровой ресурс значительно повысил уровень цифровых навыков.

Таким образом, включение контрольной группы позволило объективно подтвердить превосходство предложенной методики над традиционными формами обучения. Это значительно усиливает научную обоснованность полученных результатов. Тем не менее, для дальнейшего уточнения эффективности рекомендуется расширение выборки, проведение многофакторного анализа и включение учащихся с различными формами ООП из разных регионов.

Дискуссия

Результаты подтверждают необходимость внедрения адаптивных технологий в инклюзивное образование. ЭОР оказался эффективным инструментом формирования базовых

ИКТ-навыков у детей с ОВЗ. Это согласуется с работами D. Mitchell и T. Booth, которые подчеркивают значимость персонализированного подхода, основанного на учете особенностей каждого обучающегося. Особое внимание в исследовании уделено детям с ЗПР, РАС и нарушениями зрения, что позволило апробировать методику в условиях широкой вариативности образовательных потребностей. Применение мультимедийных технологий, аудиоформатов и визуальных подсказок оказалось особенно эффективным в контексте когнитивной нагрузки и особенностей восприятия информации у детей с нарушениями развития. Важно отметить, что использование игровых форм обучения повышает не только усвояемость материала, но и снижает тревожность, способствует развитию социальных навыков, самооценки и уверенности в себе. Это также перекликается с современными подходами к цифровой инклюзии и социальной адаптации через технологии.

Полученные данные могут стать основой для масштабирования подхода на другие возрастные и когнитивные группы. Например, методика может быть адаптирована для учащихся средней школы или использована в системе дополнительного образования, а также интегрирована в мобильные приложения и ассистивные платформы с использованием искусственного интеллекта. Кроме того, необходимо учитывать, что внедрение цифровых ресурсов требует постоянной поддержки педагогов и наличия технических условий. Это ставит перед системой образования задачу не только разработки контента, но и подготовки кадров и обеспечения инфраструктуры.

Заключение

Проведенное исследование подтвердило эффективность разработанного онлайн-ЭОР по основам компьютерной грамотности для детей с задержкой психического развития (ЗПР). Входная диагностика выявила низкий уровень базовых цифровых навыков и неуверенность детей в работе с компьютером, однако после прохождения ЭОР были зафиксированы значительные положительные изменения. Обучающиеся стали более самостоятельными, количество ошибок при выполнении заданий сократилось, а время выполнения базовых операций уменьшилось. Кроме того, наблюдался рост уверенности в своих силах, что является важным фактором успешного освоения цифровых технологий.

Использование игровых элементов, голосовых подсказок и интуитивно понятного интерфейса позволило сделать процесс обучения доступным и увлекательным. Анкетирование родителей и педагогов подтвердило положительную динамику: большинство отметили повышение интереса детей к цифровым устройствам, улучшение их навыков работы с компьютером и возросшую самостоятельность. Разработанный электронно-образовательный ресурс не только помог детям овладеть базовыми компьютерными навыками, но и способствовал формированию уверенности в себе, что особенно важно для обучающихся с особыми образовательными потребностями (ООП).

Список использованных источников

- [1] Mitchell D., Sutherland D. *What really works in special and inclusive education: Using evidence-based teaching strategies*.// Routledge, 2020. P.48-50 https://www.oazeya.ru/sites/default/files/doc/mitchel_tehnologii.pdf
- [2] Panda S., Chakravarty R. *Evaluating the web accessibility of IIT libraries: a study of Web Content Accessibility Guidelines //Performance Measurement and Metrics*. – 2020. – Т. 21. – №. 3. – P. 121-145. DOI: <https://doi.org/10.1108/PMM-02-2020-0011>
- [3] Нарымбаева М.А. *Инклюзивное образование: вызовы и перспективы преподавания информатики*// Международная научная конференция «Приоритетные направления развития науки и образования», 2023, С. 198-203. <https://kazconf.com/files/archive/8939818.pdf>
- [4] Нарымбаева М.А. *Использование технологий дистанционного и онлайн обучения для обеспечения инклюзивного образования*// Республиканская научно-методическая конференция среди организаций образования РК «Тренды в образовании». – 2024, том 2, С. 126-129.

[5] Баймуратова А.Т., Дербисалова Г.С., Альжанова Д.С. Особенности применения мультимедийных технологий для детей с особыми образовательными потребностями: Метод. рекомендации // Алматы: ННПЦ РСИО. 2023. 60с <https://lyl.su/hYqS>

[6] Самсонова Е. В., Мельник Ю. В., Карпенкова И. В. Тьюторское сопровождение обучающихся с особыми образовательными потребностями в условиях инклюзивного образования //Клиническая и специальная психология. – 2021. – Т. 10. – №. 2. – С. 165-182. https://psyjournals.ru/journals/cpse/archive/2021_n2/Samsonova_et_al

[7] Ерсарина А.К., Джангельдинова З.Б., Айтжанова Р.К. Специальная развивающая программа для детей с аутизмом// Алматы. ННПЦ КП.- 2020. - С. 169 <https://special-edu.kz/tipprog/Ersarina/autizmrus.pdf>

[8] Елисеева И.Г., Даурцева Г.Ю. Создание условий для получения образования школьниками с умеренными нарушениями интеллекта в специальной школе: метод. рекомендации// Алматы: ННПЦ РСИО. 2021. С. 61 <https://lyl.su/jlLA>

[9] Рындак В. Г., Аллагулов А. М., Челпаченко Т. В. Цифровые технологии как средство развития инклюзивного образования //Вестник Оренбургского государственного университета. – 2021. – №. 3 (231). – С. 70-78. <https://cyberleninka.ru/article/n/tsifrovye-tehnologii-kak-sredstvo-razvitiya-inklyuzivnogo-obrazovaniya>

[10] Ainscow M. Promoting inclusion and equity in education: lessons from international experiences //Nordic journal of studies in educational policy. – 2020. – Т. 6. – №. 1. – С. 7-16. DOI: <https://doi.org/10.1080/20020317.2020.1729587>

[11] Б.А.Сабденова, А.А.Зинетуллина. Особенности коммуникативных навыков детей с задержкой психического развития// Вестник КазНПУ им. Абая. Серия: Специальная педагогика. – 2023. – №3 (74). – С. 68–70. <https://bulletin-special-pedagogy-kaznpu.kz/index.php/home/article/view/210/157>

[12] Методические рекомендации по обучению предмета «Цифровая грамотность» в начальных классах. – Нур-Султан: НАО имени Ы. Алтынсарина, 2022. – 192 с. <https://lyl.su/BF4s>

[13] Navas-Bonilla C. D. R. et al. Inclusive education through technology: a systematic review of types, tools and characteristics //Frontiers in Education. – Frontiers Media SA, 2025. – Т. 10. – P. 1527851. DOI: [10.3389/educ.2025.1527851](https://doi.org/10.3389/educ.2025.1527851)

[14] WordPress.org. LearnPress – WordPress LMS Plugin [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://wordpress.org/plugins/learnpress/> (дата обращения: 15.02.2025).

[15] Citaristi I. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization—UNESCO //The Europa Directory of International Organizations 2022. – Routledge, 2022. – P. 369-375. <https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.4324/9781003292548-76/united-nations-educational-scientific-cultural-organization%E2%80%9494unesco-ileana-citaristi>

References

[1] Mitchell D., Sutherland D. What really works in special and inclusive education: Using evidence-based teaching strategies.// Routledge, 2020. P.48-50 https://www.ooazeya.ru/sites/default/files/doc/mitchel_tehnologii.pdf

[2] Panda S., Chakravarty R. Evaluating the web accessibility of IIT libraries: a study of Web Content Accessibility Guidelines //Performance Measurement and Metrics. – 2020. – Т. 21. – №. 3. – P. 121-145. DOI: <https://doi.org/10.1108/PMM-02-2020-0011>

[3] Narymbaeva M.A. Inkluzivnoe obrazovanie: vyzovy i perspektivy prepodavaniya informatiki// Mezhdunarodnaja nauchnaja konferencija «Prioritetnye napravlenija razvitija nauki i obrazovaniya», 2023, S. 198-203. <https://kazconf.com/files/archive/8939818.pdf>

[4] Narymbaeva M.A. Ispol'zovanie tehnologij distancionnogo i onlajn obuchenija dlja obespechenija inkluzivnogo obrazovaniya// Respublikanskaja nauchno-metodicheskaja konferencija sredi organizacij obrazovaniya RK «Trendy v obrazovanii». – 2024, tom 2, S. 126-129.

[5] Bajmuratova A.T., Dербисалова G.S., Al'zhanova D.S. Osobennosti primenenija mul'timedijnyh tehnologij dlja detej s osobymi obrazovatel'nymi potrebnostjami: Metod. rekomendacii //Almaty: NNPC RSIO. 2023. 60s <https://lyl.su/hYqS>

[6] Samsonova E. V., Mel'nik Ju. V., Karpenkova I. V. T'jutorskoe soprovozhdenie obuchajushhihsja s osobymi obrazovatel'nymi potrebnostjami v uslovijah inkluzivnogo obrazovaniya //Klinicheskaja i special'naja psihologija. – 2021. – Т. 10. – №. 2. – S. 165-182. https://psyjournals.ru/journals/cpse/archive/2021_n2/Samsonova_et_al

- [7] Ersarina A.K., Dzhangel'dinova Z.B., Ajtzhanova R.K. *Special'naja razvivajushhaja programma dlja detej s autizmom*// Almaty. NNPC KP. - 2020. - С. 169 <https://special-edu.kz/tipprog/Ersarina/autizmrus.pdf>
- [8] Eliseeva I.G., Daurceva G.Ju. *Sozdanie uslovij dlja poluchenija obrazovanija shkol'nikami s umerennymi narushenijami intellekta v special'noj shkole: metod. rekomendacii*// Almaty: NNPC RSIO. 2021. S. 61 <https://ljl.su/jLLA>
- [9] Ryndak V. G., Allagulov A. M., Chelpachenko T. V. *Cifrovye tehnologii kak sredstvo razvitija inkluzivnogo obrazovanija* //Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta. – 2021. – №. 3 (231). – S. 70-78. <https://cyberleninka.ru/article/n/tsifrovye-tehnologii-kak-sredstvo-razvitiya-inklyuzivnogo-obrazovaniya>
- [10] Ainscow M. *Promoting inclusion and equity in education: lessons from international experiences* //Nordic journal of studies in educational policy. – 2020. – T. 6. – №. 1. – S. 7-16. DOI: <https://doi.org/10.1080/20020317.2020.1729587>
- [11] B.A.Sabdenova, A.A.Zinetullina. *Osobennosti kommunikativnyh navykov detej s zaderzhkoj psihicheskogo razvitija*// Vestnik KazNPU im. Abaja. Serija: Special'naja pedagogika. – 2023. – №3 (74). – S. 68–70. <https://bulletin-special-pedagogy-kaznpu.kz/index.php/home/article/view/210/157>
- [12] *Metodicheskie rekomendacii po obucheniju predmeta «Cifrovaja gramotnost'» v nachal'nyh klassah.* – Nur-Sultan: NAO imeni Y. Altynsarina, 2022. – 192 s. <https://ljl.su/BF4s>
- [13] Navas-Bonilla C. D. R. et al. *Inclusive education through technology: a systematic review of types, tools and characteristics* //Frontiers in Education. – Frontiers Media SA, 2025. – T. 10. – P. 1527851. DOI: 10.3389/feduc.2025.1527851
- [14] WordPress.org. *LearnPress – WordPress LMS Plugin [Jelektronnyj resurs]*. – Rezhim dostupa: <https://wordpress.org/plugins/learnpress/> (data obrashhenija: 15.02.2025).
- [15] Citaristi I. *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization—UNESCO //The Europa Directory of International Organizations 2022.* – Routledge, 2022. – P. 369-375. <https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.4324/9781003292548-76/united-nations-educational-scientific-cultural-organization%E2%80%94unesco-ileana-citaristi>

Е.Ы. Бидайбеков¹, Н.И. Пак², И.Т. Салғожа^{1*}, А.Т. Қожағұл¹

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²В.П. Астафьев атындағы Краснояр мемлекеттік педагогикалық университеті,
Красноярск қ., Ресей

*e-mail: i.salgozha@abaiuniversity.edu.kz

БОЛАШАҚ ИНФОРМАТИКА МҰҒАЛІМДЕРІН РОБОТОТЕХНИКАНЫ ОҚЫТУҒА ДАЙЫНДАУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛІК ЖҮЙЕСІН ЭКСПЕРИМЕНТТІК НЕГІЗДЕУ

Аңдатпа

Мақалада болашақ информатика мұғалімдерін білім беру робототехникасын оқытуға дайындауға бағытталған авторлық әдістемелік жүйенің тиімділігін эксперимент арқылы тексерудің нәтижелері ұсынылған. Дайындалған жүйе жобалық оқыту тәсілін, электронды курсты және студенттердің оқу жобаларын орындау мен әдістемелік портфолио жүргізу арқылы практикалық дайындығын қамтиды. Экспериментке педагогикалық жоғары оқу орнының студенттері қатысып, олар бақылау және эксперименттік топтарға бөлінді. Екі топ та дайындықтан және педагогикалық тәжірибеден өту барысында мектеп оқушыларына робототехниканың негіздерін үйретті. Эксперименттен кейін жүргізілген диагностика студенттердің әдістемелік дайындық деңгейі мен оқушылардың робототехниканы меңгеру деңгейін бағалауды қамтиды. Талдау үшін деңгейлік көрсеткіштер, орташа баллдар және Пирсонның χ^2 критерийі қолданылды. Нәтижелер эксперименттік топтың жоғары деңгейге жеткенін, ал олардың оқушылары қорытынды жобаларда жақсы нәтижелер көрсеткенін дәлелдеді. Алынған мәліметтер ұсынылған жүйенің тиімділігін растайды және оны цифрлық және инженерлік бағыттағы педагогтерді даярлау білім бағдарламаларына енгізуге ұсынуға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: білім беру робототехникасы, педагогикалық эксперимент, әдістемелік жүйе, мұғалімдерді даярлау, жобалық оқыту, цифрлық құзыреттер.

E. I. Bidaibekov¹, N.I. Pak², I.T. Salgozha¹, A.T. Kozhagul¹

¹Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

²Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astafyev, Krasnoyarsk, Russia

EXPERIMENTAL JUSTIFICATION OF THE METHODOLOGICAL SYSTEM OF TRAINING FUTURE COMPUTER SCIENCE TEACHERS TO TEACH ROBOTICS

Abstract

The article presents the results of a pedagogical experiment aimed at evaluating the effectiveness of an original methodological system for preparing future computer science teachers to teach educational robotics. The developed system combines a project-based learning approach, the use of an online course, and practical training through the completion of educational projects and the creation of a methodological portfolio. The experiment involved students from a pedagogical university, divided into control and experimental groups. Both groups completed the training course and undertook teaching practice, during which they taught schoolchildren the basics of robotics. Post-experiment diagnostics assessed the students' methodological readiness and the level of robotics proficiency achieved by the schoolchildren. The analysis employed level-based indicators, average scores, and the Pearson χ^2 criterion. The results demonstrated that the experimental group of students achieved a higher level of methodological preparedness, and their pupils showed better outcomes in final project tasks. These findings confirm the effectiveness of the proposed system and support its integration into teacher training programs in digital and engineering disciplines.

Keywords: educational robotics, pedagogical experiment, methodological system, teacher training, project-based learning, digital competencies.

Е.Ы. Бидайбеков¹, Н.И. Пак², И.Т. Сәлғожа¹, А.Т. Қожағұл¹

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

²Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева,
г. Красноярск, Россия

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ К ПРЕПОДАВАНИЮ РОБОТОТЕХНИКИ

Аннотация

В статье представлены результаты педагогического эксперимента, направленного на проверку эффективности авторской методической системы подготовки будущих учителей информатики к преподаванию образовательной робототехники. Разработанная система сочетает проектно-ориентированный подход, использование электронного курса и практическую подготовку студентов через выполнение учебных проектов и ведение методического портфолио. В эксперименте приняли участие студенты педагогического вуза, разделённые на контрольную и экспериментальную группы. Обе группы прошли обучение и педагогическую практику, в ходе которой обучали школьников основам робототехники. Диагностика, проведённая после завершения эксперимента, включала оценку методической готовности студентов и уровня освоения робототехники школьниками. Для анализа использовались уровневые показатели, средние баллы и χ^2 -критерий Пирсона. Результаты показали, что экспериментальная группа студентов достигла более высокого уровня методической подготовки, а их ученики продемонстрировали лучшие результаты по итоговым проектам. Полученные данные подтверждают эффективность предложенной системы и позволяют рекомендовать её для включения в образовательные программы подготовки педагогов в области цифровых и инженерных дисциплин.

Ключевые слова: образовательная робототехника, педагогический эксперимент, методическая система, подготовка учителей, проектное обучение, цифровые компетенции.

Кіріспе

Қазіргі білім беру жүйесінде ақпараттық технологиялардың қарқынды дамуы болашақ информатика мұғалімдерінен жаңа құзыреттер мен біліктіліктерді талап етеді. Осыған байланысты білім алушыларды робототехника негіздеріне оқыту – олардың шығармашылық қабілеттерін, алгоритмдік ойлауын және пәнаралық білімін дамытуда маңызды рөл атқарады. Алайда робототехниканы тиімді оқыту үшін мұғалімнің тек техникалық дайындығы жеткіліксіз: ол арнайы әдістемелік даярлықтан өтуі тиіс. Робототехниканы оқыту — болашақ мамандарды даярлаудың тиімді жолы ретінде қарастырылуда. Қазіргі заманауи білім беру жүйесінде робототехника тек техникалық пән ғана емес, сонымен қатар пәнаралық білім мен дағдыларды біріктіретін, оқытудың инновациялық құралы ретінде қарастырылады. [1]. Сондықтан болашақ информатика мұғалімдерін робототехниканы оқытуға кәсіби және әдістемелік тұрғыда жан-жақты даярлау – педагогикалық білім берудің өзекті міндеттерінің бірі болып отыр. Соңғы жылдары робототехниканы оқыту білім берудің барлық деңгейінде қарқынды түрде жүзеге асырылуда, бұл педагог кадрларды тиісті түрде дайындау қажеттілігін көрсетеді [2]. Мектептегі білім беру жүйесіне робототехниканы енгізу білім беру робототехникасын оқытуға дайын мұғалімдерді сапалы дайындау қажеттілігін анықтады. Қазірдің өзінде педагогикалық жоғары оқу орындарында болашақ информатика және робототехника мұғалімдерін дайындау жүзеге асырылып жатыр [3]. Мектеп оқушыларына робототехниканы тиімді оқыту мұғалімнен арнайы білім мен дағдыларды, соның ішінде жобалық әдістемелер мен заманауи технологияларды меңгеруді талап етеді. Дегенмен, информатика мұғалімдерін әдістемелік даярлаудың дәстүрлі бағдарламалары әрқашан робототехниканың ерекшеліктерін ескере бермейді және көбінесе практикаға бағытталған оқытуға жеткілікті түрде бағытталмайды. Робототехника мұғалімдерін табысты дайындау конструктивизм, зерттеу және жобалық оқыту, жаңа технологияларды белсенді игеруді ынталандыру принциптеріне негізделгендігі педагогикалық әдебиеттерде атап өтілген.

Қазіргі жағдайда жоғары білімнің мемлекеттік жалпыға міндетті стандарты [4], «Білімді ұлт» ұлттық жобасы [5] және «Цифрлық педагогика» бастамасы [6] сияқты Қазақстан Республикасының стратегиялық құжаттары педагогикалық кадрларды даярлау мазмұнын

жаңарту бағытын айқындайды. Бұл құжаттар цифрлық құзыреттілікті дамыту, тәжірибеге бағытталған оқытуды дамыту және инновациялық технологияларды білім беру үдерісіне енгізу қажеттілігіне баса назар аударады. Болашақ мұғалімдерді даярлаудың негізгі құрамдас бөлігі ретінде STEAM және IT бағыттарын, оның ішінде білім беру робототехникасын енгізуге ерекше көңіл бөлінеді. Осылайша, робототехниканы оқытуға мұғалімдерді даярлау тек білім беру ғана емес, сонымен қатар мемлекеттік басымдықтарға жауап береді және заманауи әдістемелік тәсілдер мен цифрлық шешімдерді талап етеді.

Информатика курсы бағдарламалық қамтамасыз етуді жаңарту және кеңейту, электрондық білім беру ресурстарын жаңарту, робототехниканың қарқынды дамуы жоғары білімнің алдына жаңа міндеттер қойды [7]. Педагогикалық кадрларды даярлауға қойылатын заманауи талаптар білім берудің цифрлық трансформациясымен ғана емес, сонымен қатар білім беру робототехникасы мен бағдарламалау сияқты салалардың қарқынды дамуымен де айқындалады. Бұл жоғары педагогикалық білім беру жүйелері оқу үдерісіне заманауи АКТ құралдарын кіріктіріп қана қоймай, болашақ мұғалімдердің робототехника сияқты инновациялық пәндерді оқыту құзыреттілігін мақсатты түрде дамытуы керек дегенді білдіреді.

Осыған орай болашақ мұғалімдерді робототехниканы оқытуға дайындаудың тиімді жүйесін теориялық тұрғыдан негіздеу және дамыту мақсатында авторлық әдістеме негізінде зерттеу жүргізілді. Бұл әдістемелік жүйе «Білім беру робототехникасы» онлайн электронды курсының, көп парадигмалық тәсілдің және жобалық әдістеменің интеграциясы болып табылады. Авторлық әдістеме біртұтас білім беру моделі ретінде түсініледі, оның шеңберінде оқыту әртүрлі педагогикалық парадигмалар (белсенділікке негізделген, тұлғалық-бағдарлы, конструктивистік және т.б.) негізінде цифрлық ортада жүзеге асырылады, ал орталық элементі білім беру робототехникасын оқытуды жүзеге асыру болып табылады.

Осы әдістеме аясында оқушылардың робототехниканы оқытуға дайындығын дамытуға бағытталған педагогикалық эксперимент жүргізілді. Студенттер роботтық жинақтар мен цифрлық құралдарды пайдалана отырып, өздерінің білім беру жобаларын әзірлеп, жүзеге асырды, онлайн оқытуды аяқтады және жоба қызметінің барлық кезеңдерінде қолдау алды. Эксперимент нәтижелері ұсынылып отырған авторлық әдістеменің кәсіби-әдістемелік және цифрлық құзыреттіліктерді дамытуға оң әсерін көрсетті, бұл оның болашақ мұғалімдерді даярлау жүйесіндегі практикалық құндылығы мен өзектілігін растайды.

Бұл авторлық әдістемелік жүйе білім беру робототехникасы жобаларын жүзеге асыру кезеңдеріне бейімделген оқыту әдістерінің үйлесімі бар көп парадигмалық тәсілге негізделген және «Білім беру робототехникасы» онлайн курсы қолдану арқылы жүзеге асырылады [8, 9]. Әдістемелік оқыту үдерісіне жобалық әдістемені енгізу болашақ мұғалімдердің робототехниканы оқытуға дайындығын арттырады және соның нәтижесінде өз білім алушыларының оқу нәтижелерін жақсартады деп болжануда.

Зерттеудің мақсаты

Бұл зерттеудің мақсаты болашақ мұғалімдерді робототехниканы оқытуға дайындаудың әзірленген әдістемелік жүйесінің тиімділігін эксперименталды түрде тексеру болып табылады. Авторлық әдістеме дәстүрлі әдіспен салыстырғанда студенттердің әдістемелік дайындығының жоғары деңгейін және осы студенттер оқытатын мектеп оқушыларына жақсы білім беру нәтижелерін қамтамасыз ететінін анықтау қажет.

Зерттеу әдістері

Педагогикалық экспериментке университеттің 60 студенті (болашақ информатика мұғалімдері) 30 адамнан тұратын бақылау (БТ) және эксперименттік (ЭТ) топтарына бөлінген. Топ контингенті робототехника саласындағы бастапқы оқу үлгерімі бойынша біртекті болды: бастапқы кезеңде бастапқы дайындық деңгейі бойынша БТ мен ЭТ арасында статистикалық маңызды айырмашылықтар табылмады ($p = 0,943 > 0,05$). Бұл эксперименттің тазалығы үшін

маңызды болып табылатын екі топтағы студенттердің білімдері мен дағдыларының салыстырмалы бастапқы деңгейін көрсетеді.

Эксперименттің қалыптастырушы кезеңінде екі топтың студенттері робототехниканы оқыту әдістемесі курсы оқыды, бірақ әртүрлі тәсілдерді қолданды. ЭТ авторлық әдістемелік жүйені енгізді: студенттер «Білім беру робототехникасы» онлайн курсы аясында сызықты емес жобаға негізделген әдістемені қолдана отырып оқытылды. Олар практикалық тапсырмаларды орындады, робототехникада жобалар әзірледі және сабақ жоспарларын, оқу материалдарын және жобаларды қамтитын жеке әдістемелік портфолиоларды жасады. Бақылау тобында дәстүрлі оқыту әдістері қолданылды – теорияны сызықтық зерттеу және жобалық іс-әрекеттерге назар аудармай стандартты практикалық оқыту. Курс барысында барлық студенттер педагогикалық тәжірибеден өтті: олар мектеп оқушыларымен информатика сабақтарында, үйірме жұмыстары аясында робототехника сабақтарын өткізді.

$$Q = (3K1 + 4K2 + 5*K3) / N,$$

мұндағы $K1$, $K2$, $K3$ сәйкесінше төмен, орташа және жоғары деңгейлі оқушылар саны. Бұл көрсеткіш бес балдық шкала бойынша орташа балға тең (3 – төмен, 4 – орташа, 5 – жоғары). Статистикалық талдау 0,05 маңыздылық деңгейінде Пирсон χ^2 сынағы арқылы БТ және ЭТ деңгейлерінің таралуын салыстыруды қамтиды.

Зерттеу нәтижелер

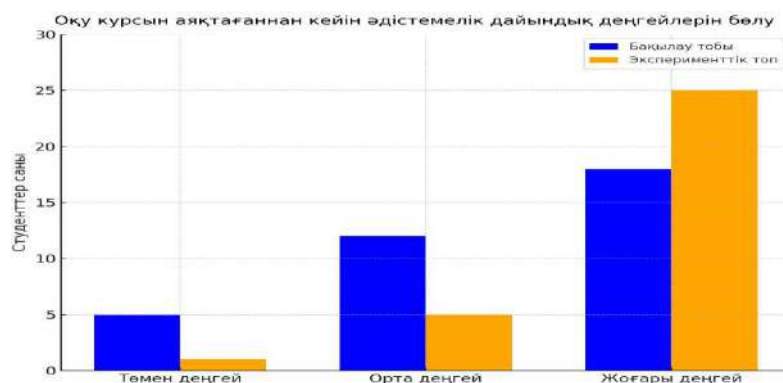
Бастапқы тестілеу. Эксперименттің бастапқы кезеңі топтардың салыстырмалылығын растады: оқуға дейінгі әдістемелік дайындықтың орташа рейтингтік балы БТ-да 3,1 және ЭТ-та 3,2 болды (аса айырмашылық жоқ, $p > 0,05$). Осылайша, қалыптастырушы эксперименттің басында бақылау және эксперимент топтарында біртекті бастапқы шарттар болды. Қалыптастыру кезеңі аяқталғаннан кейін бақылау тобымен салыстырғанда эксперименттік топ студенттерінде көрсеткіштердің айтарлықтай өскені анықталды (1-кесте).

Кесте 1. Студенттердің әдістемелік даярлығы (экспериментке дейін және кейін)

Топтар	Экспериментке дейін	Эксперименттен кейін
Бақылау	3.1	4.3
Эксперименталды	3.2	4.8

Болашақ мұғалімдердің әдістемелік дайындығының орташа стандартталған балы ЭТ-та $X_{\text{exp}} = 4,8$ ($X_{\text{exp.}} = (3*1 + 4*4 + 5*25) / 30 = 4,8$), ал БТ-да – $X_{\text{baq}} = 4,3$ ($X_{\text{baq.}} = (3*5 + 4*11 + 5*14) / 30 = 4,3$) (бес балдық шкала бойынша). Басқаша айтқанда, эксперименттік топтың түлектері бақылау тобындағы әріптестеріне қарағанда, орта есеппен робототехниканы оқытуға дайындығы жоғары деңгейде екенін көрсетті. Деңгейлер бойынша бөлу 1-суреттегі диаграммада көрсетілген.

Тәжірибелік топтағы дайындық деңгейі жоғары студенттердің үлесі бақылау тобындағы ұқсас көрсеткіштен (тиісінше 83% - 47%) айтарлықтай артқан, ал төмен деңгей ЭТ-ғы студенттердің тек 3% -ында ғана байқалды, өз кезегінде БТ-да бұл көрсеткіш 17% -ды құрады. Эксперименттік топтағы 30 оқушының 25-іне жоғары дайындық тән болса, бақылау тобында 14 оқушы ғана жоғары нәтижеге қол жеткізді. Әдістемелік дайындық деңгейлерінің бөлінуіндегі айырмашылықтар статистикалық маңызды болып табылады: χ^2 критерийі эмпирикалық мәннің сыни мәннен асып кеткенін анықтады ($\chi^2 = 9,04 > 5,991$ $df = 2$, $p < 0,05$), бұл тәжірибелік әдістеменің біліктілік нәтижелерін жақсартуға әсерін көрсетеді. Осылайша, мұғалімдерді дайындаудың авторлық әдістемелік жүйесінің жоғары тиімділігі туралы гипотеза студенттердің нәтижелері бойынша расталады.



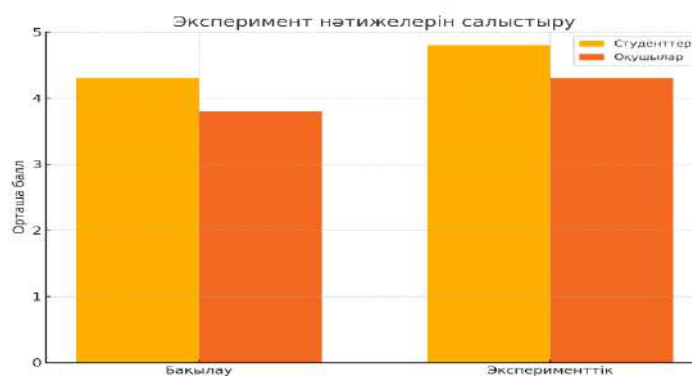
Сурет 1. Студенттердің (болашақ мұғалімдердің) оқу курсы аяқтағаннан кейін әдістемелік дайындық деңгейлерін бөлу: бақылау тобы көк түспен, эксперименттік топ қызғылт сары түспен көрсетілген

Мектеп оқушыларының оқу нәтижелері. Болашақ мұғалімдердің өздерінің құзыреттілігінің өсуімен бірге эксперимент олардың оқушыларының нәтижелерінің жақсарғанын көрсетті (2-кесте).

Кесте 2. Мектеп оқушыларының жобаларды орындауға дайындығы

Топтар	Орташа балл
Бақылау	3.83
Эксперименталды	4.33

Тәжірибелік топ студенттерінің жетекшілігімен робототехниканы оқыған мектеп оқушылары бақылау тобындағы оқушыларға қарағанда робототехника бойынша қорытынды жобалық тапсырманы орындауға жоғары дайындығын көрсетті. Студенттердің ЭТ бойынша дайындығының орташа баллы $Y_{\text{exp}}=4,33$, ал бақылау тобындағы $Y_{\text{baq}}=3,83$ болды. Екі топтағы оқушылардың дайындық деңгейлері салыстырмалы түрде көрсетілді (Сурет2).



Сурет 2. Оқушылардың робототехника жобасын орындауға дайындық деңгейлері (оқыту соңында бағалау)

Эксперименттік топта материалды меңгерудің жоғары деңгейіне сәтті қол жеткізген оқушылардың үлесі айтарлықтай жоғары екені анық (бақылау тобындағы 17%-ға – 47%, яғни 5-ке – 14 оқушы). Тиісінше, ЭТ-ғы студенттердің төменгі деңгейінің үлесі айтарлықтай төмен ($\approx 13\%$ -ға БТ-ғы 34%) – бақылау тобындағы 10-ға – 30 студенттің тек 4-і ғана төмен деңгей көрсетті. Осылайша, мұғалімдерді дайындаудың авторлық жүйесі олардың оқушыларының нәтижелеріне оң әсер етті: ЭТ студенттерімен дайындалған мектеп оқушыларының жартысынан көбі робототехниканы меңгерудің орташа және жоғары деңгейін көрсетті (соның ішінде жартысына жуығы – жоғары деңгей). Статистикалық тестілеу айырмашылықтардың

маңыздылығын растады: χ^2 критерийіне сәйкес ЭТ және БТ-да оқушылардың деңгейлерінің байқалған таралуы $p < 0,05$ (эмпирикалық $\chi^2 = 7,18$ сыни 5,991-ден асады) ерекшеленеді.

Жалпы алғанда, әдістемелік жүйенің тиімділігінің интегралды көрсеткіші (X+Y ұпайларының қосындысы) эксперименттік топ үшін 9,13 болса, бақылау тобы үшін 8,13 болды, бұл жалпы бес балдық шкала бойынша бір бірлік бойынша полипарадигмалық әдістемелік жүйесінің артықшылығын көрсетеді. Бұл өсу ең жоғары мүмкін болатын жалпы балға (10) қатысты шамамен 12%-ға сәйкес келеді, бұл айтарлықтай жақсы нәтиже деп санауға болады.

Дискуссия

Алынған нәтижелер робототехниканы оқытуға мұғалімдерді даярлаудың әзірленген әдістемелік жүйесінің жоғары тиімділігін көрсетеді. Электронды курспен қамтамасыз етілген жобалық-бағдарлы әдістемені қолдану болашақ мұғалімдердің әдістемелік дайындығын айтарлықтай арттырып, шәкірттерінің табысты болуына оң әсерін тигізетіні тәжірибе жүзінде дәлелденді. Студенттердің эксперименттік тобында жоғары құзыретті түлектердің үлесі дәстүрлі әдіспен салыстырғанда екі есе дерлік жоғары болды, бұл практикалық тұрғыдан алғанда робототехниканы оқытуға дайын жас мамандардың жоғары сапасын білдіреді. Бұл мамандармен бірге оқыған студенттердің жақсы нәтижелерге қол жеткізгені де маңызды: олар робототехника жобаларын сенімдірек аяқтап, қажетті білім мен дағдыларды жоғары деңгейде меңгергендігін көрсетті.

Бұл тұжырымдар білім беру робототехникасы бойынша мұғалімдерді дайындаудағы үздік тәжірибелердің заманауи идеяларына сәйкес келеді. Зерттеушілер атап өткендей, робототехника мұғалімдерін оқытудың тиімді бағдарламалары әдетте жобаға негізделген оқыту принциптеріне, тәжірибеге бағытталған тапсырмаларға, ынтымақтастық пен рефлексияға негізделген. Біздің экспериментімізде дәл осы тәсілдерді жүзеге асыру (оқушыларды жобалық іс-әрекетке тарту, әдістемелік өнімдерді жасау, тікелей оқыту тәжірибесі) нәтижелердің статистикалық маңызды жақсаруына әкелді. Бұл әдістемелік оқыту процесінде теория мен практиканы, белсенді әдістер мен цифрлық технологияларды (онлайн курс) кіріктіру жас мұғалімдердің жаңа технологиялармен жұмыс істеуге дайындығын арттыратынын растайды.

Қол жеткізілген өзгерістер тек статистикалық ғана емес, сонымен қатар маңызды педагогикалық мәнге ие екенін атап өткен жөн. Студенттердің орташа дайындық деңгейінің 4,3-тен 4,8 балға дейін артуы студенттердің айтарлықтай бөлігінің жоғары құзыретті санатқа өткенін білдіреді. Сол сияқты мектеп оқушыларының орташа баллының артуы (3,83-тен 4,33-ке дейін) олардың робототехника бойынша білім сапасының айтарлықтай жақсарғанын көрсетеді. Шындығында, авторлық әдістеме болашақ мұғалімдерге мектеп үшін жаңа пәнді оқыту әдістемесін жақсы меңгеруге мүмкіндік берді, бұл олардың алғашқы оқушыларының жетістігіне тікелей әсер етті. Бұл «тасымалдау эффектісі» оқыту тәсілін таңдаудың дұрыстығын растайды: мұғалімнің құзыреттілігін арттыру арқылы біз студенттердің нәтижелерін жанама түрде жақсартамыз.

Сонымен, педагогикалық эксперимент болашақ информатика мұғалімдерін робототехниканы оқытуға дайындаудың әзірленген әдістемелік жүйесі дәстүрлі әдіспен салыстырғанда жоғары нәтиже беретінін көрсетті. Жобалық оқытуға және электронды курсты пайдалануға негізделген авторлық жүйені робототехника және сабақтас инновациялық пәндер бойынша мұғалімдерді әдістемелік даярлау бағдарламаларына енгізуге ұсынуға болады [10]. Бұл білім беру мекемелеріне технологиялармен тиімді жұмыс істей алатын мұғалімдерді дайындауға және мектеп оқушыларында сұранысқа ие инженерлік-техникалық дағдыларды дамытуға мүмкіндік береді. Болашақта экспериментті кеңірек үлгіге дейін кеңейту және ұсынылған жүйенің түлектердің кәсіби қызметіне ұзақ мерзімді әсерін зерттеу жоспарлануда.

Қорытынды

Жүргізілген педагогикалық эксперимент болашақ информатика мұғалімдерін робототехниканы оқытуға дайындаудың әзірленген әдістемелік жүйесінің жоғары тиімділігін растады. Жобаға бағытталған тәсілді электронды курспен және әдістемелік портфолиомен ұштастыра қолдану студенттердің әдістемелік дайындығының деңгейін айтарлықтай арттыруға мүмкіндік берді, бұл өз кезегінде осы студенттердің педагогикалық тәжірибесінің бір бөлігі ретінде сабақ беретін мектеп оқушыларының нәтижелеріне оң әсер етті. Бақылау және эксперименттік топтар арасындағы статистикалық маңызды айырмашылықтар ұсынылған әдістемені педагогикалық жоғары оқу орындарының оқу үдерісіне енгізудің орындылығын растайды. Зерттеу нәтижелері Қазақстан Республикасының заманауи білім беру басымдықтары мен стратегиялық құжаттарына сәйкес келетін цифрлық және инженерлік-педагогикалық құзыреттіліктерді қалыптастырудағы авторлық жүйенің әлеуетін көрсетеді. Әзірленген тәсілді мұғалімдердің біліктілігін арттыру бағдарламаларында, әсіресе цифрландыру және STEAM-бағдарланған оқыту жағдайында кеңінен енгізу үшін ұсынуға болады.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

- [1] Елеусинов А., Исламгожаев Т., Сатымбеков М., Кожазул А. *CVCER: Robot to Learn Basics of Computer Vision and Cryptography // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. — 2018. — Vol. 417. — Art. № 012013. — DOI: 10.1088/1757-899X/417/1/012013.
- [2] Schina D., Esteve-González V., Usart M. *An overview of teacher training programs in educational robotics: characteristics, best practices and recommendations // Education and Information Technologies*. — 2021. — Vol. 26. — С. 2831–2852. — DOI: 10.1007/s10639-020-10377-z.
- [3] Мухамедиева К. М. *Методическая подготовка будущих учителей информатики к обучению образовательной робототехнике : дис. ... канд. пед. наук.* — Алматы, 2023. — 157 с. — URL: https://www.kaznpu.kz/docs/doctoranti/mukhamediyeva/Mukhamediyeva_Kymbatsha_diss.pdf (дата обращения: 02.07.2025).
- [4] *Государственный общеобязательный стандарт высшего образования Республики Казахстан.* — Астана, 2022. — 92 с. — URL: <https://adilet.zan.kz/rus/docs/V2200028916> (дата обращения: 02.07.2025).
- [5] *Министерство образования и науки Республики Казахстан. Национальный проект «Білімді ұлт»: качественное образование для каждого.* — Астана, 2021. — 48 с. — URL: <https://adilet.zan.kz/kaz/docs/P2100000726> (дата обращения: 02.07.2025).
- [6] *Министерство образования и науки Республики Казахстан. Программа повышения цифровой грамотности педагогов «Цифрлық педагог» [Электрон. ресурс].* — Астана, 2021. — URL: <https://digitalschool.kz> (дата обращения: 05.05.2025).
- [7] Ауелбек М. А. *Методическая система подготовки будущих учителей информатики к преподаванию образовательной робототехники: дис. ... д-ра пед. наук.* — Алматы, 2024. — 212 с. — URL: <https://zhetyu.edu.kz/wp-content/uploads/2024/10/Диссертация-2024.pdf> (дата обращения: 02.07.2025).
- [8] Kozhagul A. T., Bidajbekov E. Y., Bostanov B. G., Pak N. I. *Integration of robotics design into the learning process at school // Periódico Tche Química*. — 2020. — Vol. 17, № 35. — С. 404–424. — DOI: 10.52571/PTQ.v17.N35.2020.36_KOZHAGUL_PGS_404_424.PDF
- [9] Кожазулова Ж. Р., Кожазул А. Т. *Білім беру робототехникасы мектептегі жаңа инновациялық оқу технологиясы ретінде // Инновации в образовании: ориентиры и тенденции : материалы IX Междунар. науч.-метод. конф.* — Алматы, 2017. — С. 130–133.
- [10] Бидайбеков Е. Ы., Пак Н. И., Бостанов Б. Г., Кожазул А. Т. *Мектепке робототехникадан мұғалім дайындаудың маңыздылығы және оны оқытудың мазмұны // Педагогика и психология*. — 2019. — № 4 (41). — С. 42–49. — URL: <https://journal-pedpsy.kaznpu.kz/index.php/ped/issue/view/8/99> (дата обращения: 02.07.2025).

References

- [1] Eleusinov A., Islamgojaev T., Satymbekov M., Kozhagul A. (2018) *CVCER: Robot to Learn Basics of Computer Vision and Cryptography*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 417, 012013. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/417/1/012013> (In English)
- [2] Schina D., Esteve-González V., Usart M. (2021) *An overview of teacher training programs in educational robotics: characteristics, best practices and recommendations*. Education and Information Technologies, 26, 2831–2852. <https://doi.org/10.1007/s10639-020-10377-z> (In English)
- [3] Mukhamedieva K. M. (2023) *Metodicheskaja podgotovka budushchikh uchitelej informatiki k obucheniju obrazovatel'noj robototekhnike [Methodical training of future computer-science teachers for teaching educational robotics]*. Candidate's thesis (Pedagogical Sciences). Almaty, 157 p. (In Russian)
- [4] Gosudarstvennyj obshcheobjazatel'nyj standart vysshego obrazovanija Respubliki Kazakhstan [State compulsory standard of higher education of the Republic of Kazakhstan]. Astana, 2022, 92 p. (In Russian)
- [5] Ministerstvo obrazovanija i nauki RK. Nacional'nyj proekt «Bilimdi ult»: kachestvennoe obrazovanie dlja kazhdogo [National project “Educated Nation”: quality education for everyone]. Astana, 2021, 48 p. (In Kazakh/Russian)
- [6] Ministerstvo obrazovanija i nauki RK. (2021) *Programma povyšeniya cifrovoj gramotnosti pedagogov «Cifrlıq pedagog» [Programme “Digital Teacher” for improving educators’ digital literacy] [Electronic resource]*. Astana. Available at: <https://digitalschool.kz> (accessed 05 May 2025) (In Kazakh/Russian)
- [7] Auelbek M. A. (2024) *Metodicheskaja sistema podgotovki budushchikh uchitelej informatiki k prepodavaniju obrazovatel'noj robototekhniki [Methodical system for preparing future computer-science teachers to teach educational robotics]*. Doctoral thesis (Pedagogical Sciences). Almaty, 212 p. (In Russian)
- [8] Kozhagul A. T., Bidajbekov E. Y., Bostanov B. G., Pak N. I. (2020) *Integration of robotics design into the learning process at school*. *Periódico Tche Química*, 17 (35), 404–424. DOI: 10.52571/PTQ.v17.N35.2020.36_KOZHAGUL_PGS_404_424.PDF (In English)
- [9] Kozhagulova Zh. R., Kozhagul A. T. (2017) *Bilim beru robototekhnikasy mekteptegi zhana innovacijalyq oqy tehnologijasy retinde [Educational robotics as a new innovative learning technology at school]*. In: *Innovacii v obrazovanii: orientiry i tendencii (Proceedings of the 9th International Scientific-Methodical Conference)*. Almaty, pp. 130–133. (In Kazakh)
- [10] Bidajbekov E. Y., Pak N. I., Bostanov B. G., Kozhagul A. T. (2019) *Mektepke robototeknikadan muğalim dajyndaudyn maңызdylyғы және ony oqytudyn mazmұny [The importance and content of preparing teachers for school-level robotics]*. *Pedagogika i psihologija*, 4 (41), 42–49. Available at: <https://journal-pedpsy.kaznpu.kz/index.php/ped/issue/view/8/99> (accessed 02 Jul 2025) (In Kazakh)

Б.Г. Бостанов¹ , Е.З. Уксикбаев² , А.Н. Аманов² 

¹Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті,
Түркістан қ., Қазақстан

*e-mail: erkebulan.uxikbayev@ayu.edu.kz

ИНФОРМАТИКАНЫ ОҚЫТУДЫ ЖЕТІЛДІРУГЕ STEM ТӘСІЛДЕРДІ ИНТЕГРАЦИЯЛАУДЫҢ ҚАЖЕТТІЛІГІН ҚАЗАҚСТАН, ҚЫТАЙ, ЖАПОН ЖАҒДАЙЫНДА ЗЕРТТЕУ

Аңдатпа

Қазіргі заманауи білім беру жүйесінде STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) тәсілдерін интеграциялау – ақпараттық технологиялар саласындағы білім мен дағдыларды жетілдірудің маңызды құралы болып табылады. Бұл зерттеу Қазақстан, Қытай және Жапонияның орта мектептерінде информатика пәнін оқыту тәжірибесін салыстыра отырып, STEM тәсілдерін енгізудің қажеттілігін талдайды. Зерттеудің мақсаты – аталған үш елдің білім беру жүйелеріндегі информатика пәнін оқытудың ерекшеліктерін анықтап, STEM әдістемелерінің тиімділігін бағалау және оларды оқыту үрдісіне енгізудің оңтайлы жолдарын ұсыну. Зерттеу барысында сапалық және сандық әдістер қолданылып, нормативтік құжаттар, оқу бағдарламалары, мұғалімдер мен оқушылардың тәжірибелері сарапталады. Алынған нәтижелер Қазақстандағы информатика пәнін оқытуды жетілдіру үшін STEM тәсілдерін енгізудің маңыздылығын дәлелдеуге, сондай-ақ Қытай мен Жапонияның озық тәжірибелерін бейімдеуге мүмкіндік береді. Бұл зерттеу STEM бағыттарын мектеп информатикасына интеграциялау арқылы оқушылардың алгоритмдік ойлауын, шығармашылық қабілеттерін және техникалық сауаттылығын арттыруға ықпал ететінін көрсетеді.

Түйін сөздер: STEM, информатика, орта білім, білім беру жүйесі, Қазақстан, Қытай, Жапония, интеграция.

Б.Г. Бостанов ¹, Е.З. Уксикбаев ², А.Н. Аманов ²

¹Казахский национальный женский педагогический университет, г.Алматы, Казахстан

²Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави,
г. Туркестан, Казахстан

ИЗУЧЕНИЕ НЕОБХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЦИИ STEM ПОДХОДОВ К СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ В УСЛОВИЯХ КАЗАХСТАНА, КИТАЯ, ЯПОНИИ

Аннотация

Интеграция подходов STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) в современной системе образования является важным инструментом совершенствования знаний и навыков в области информационных технологий. В этом исследовании анализируется необходимость внедрения подходов STEM, сравнивая опыт преподавания информатики в средних школах Казахстана, Китая и Японии. Цель исследования – выявить особенности преподавания информатики в образовательных системах трех указанных стран, оценить эффективность методик STEM и предложить оптимальные пути их внедрения в процесс обучения. В ходе исследования используются качественные и количественные методы, анализируются нормативные документы, учебные программы, опыт учителей и учащихся. Полученные результаты позволят доказать важность внедрения подходов STEM для совершенствования преподавания информатики в Казахстане, а также адаптировать передовой опыт Китая и Японии. Это исследование показывает, что интеграция областей STEM в школьную информатику способствует повышению алгоритмического мышления, творческих способностей и технической грамотности учащихся.

Ключевые слова: STEM, информатика, среднее образование, система образования, Казахстан, Китай, Япония, интеграция.

Б.Г. Бостанов¹, Е.З. Уксикбаев², А.Н. Аманов²

¹Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

²Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan

STUDYING THE NEED TO INTEGRATE STEM APPROACHES TO IMPROVING COMPUTER SCIENCE TEACHING IN KAZAKHSTAN, CHINA AND JAPAN

Abstract

The integration of STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) approaches in the modern education system is an important tool for improving knowledge and skills in the field of Information Technology. This study analyzes the need to implement STEM approaches, comparing the experience of teaching computer science in secondary schools in Kazakhstan, China and Japan. The purpose of the study is to identify the specifics of teaching computer science in the educational systems of the three countries, evaluate the effectiveness of STEM methods and propose optimal ways to integrate them into the learning process. In the course of the study, qualitative and quantitative methods are used, regulatory documents, training programs, experience of teachers and students are analyzed. The results will prove the importance of introducing STEM approaches to improve the teaching of computer science in Kazakhstan, as well as adapt the best practices of China and Japan. This study shows that by integrating STEM areas into school computer science, they contribute to improving algorithmic thinking, creativity, and technical literacy of students.

Keywords: STEM, Computer Science, Secondary Education, education system, Kazakhstan, China, Japan, integration.

Негізгі ережелер

Қазіргі әлемде цифрлық технологиялардың қарқынды дамуы білім беру жүйесіне жаңа талаптар қояды. STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) тәсілдерін мектеп информатикасын оқытуға интеграциялау оқушылардың алгоритмдік ойлауын, шығармашылық қабілеттерін және техникалық сауаттылығын дамытуға ықпал етеді. Қазақстанның білім беру жүйесінде STEM әдістерін қолдану қажеттілігі артып келе жатқандықтан, шетелдік тәжірибелерді зерттеу өзекті болып табылады. Зерттеудің мақсаттарына Қазақстан, Қытай және Жапонияның орта білім беру жүйелерінде информатика пәнін оқытуға STEM тәсілдерін енгізудің тиімділігін салыстырмалы талдау және Қазақстан үшін оңтайлы әдістемелік ұсыныстар әзірлеу. Біріккен ұлттар ұйымының шешімімен «XXI ғасыр- ақпараттандыру ғасыры» деп аталады. Қазақстан Республикасы да ғылыми - техникалық прогрестің негізгі белгісі – қоғамды ақпараттандыру болатын жаңа кезеңіне енді. Қоғамды ақпараттандыру - экономиканың, ғылымының, мәдениеттің дамуының негізгі шарттарының бірі. Осы мәселені шешудегі басты рөл мектепке жүктеледі [1]. Зерттеу міндеттеріне Қазақстан, Қытай және Жапониядағы информатика пәнін оқыту жүйесін сипаттау, STEM тәсілдерін енгізудің әдістемелік ерекшеліктерін анықтау, үш елдің тәжірибелерін салыстыра отырып, олардың артықшылықтары мен кемшіліктерін сараптау, Қазақстан жағдайында STEM тәсілдерін тиімді интеграциялау бойынша ұсыныстар әзірлеу жатады. Зерттеу әдістері білім беру бағдарламалары мен нормативтік құжаттарды талдау, сандық және сапалық зерттеу әдістерін қолдану (сұхбат, сауалнама, эксперименттік зерттеулер), озық педагогикалық тәжірибелерді зерделеу және салыстырмалы талдау жасау деп аталады. Зерттеудің ғылыми жаңалығы Қазақстан, Қытай және Жапония білім жүйелеріндегі STEM тәсілдерінің қолданылу деңгейі алғаш рет кешенді түрде салыстырылады. Информатика пәнін оқытуда STEM-ді интеграциялау бойынша жаңа ұсыныстар жасалады. Қазақстандық білім беру жүйесі үшін STEM тәсілдерін енгізудің бейімделген моделі ұсынылады. Практикалық маңыздылығы, зерттеу нәтижелері информатика пәнінің оқу бағдарламаларын жетілдіруге негіз бола алады. Мұғалімдерге арналған әдістемелік құралдар мен ұсыныстар әзірленеді. STEM тәсілдерін енгізу арқылы оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттыруға және болашақ IT мамандарын даярлауға ықпал етеді. Қорыта келгенде STEM тәсілдерін интеграциялау мектеп информатикасын оқыту сапасын арттырудың тиімді жолы болып табылады. Қытай мен

Жапонияның тәжірибесі Қазақстан үшін үлгі ретінде қолданылып, жергілікті білім беру жүйесіне бейімделуі қажет. Зерттеу нәтижелері оңтайлы іске асырылған жағдайда, яғни Информатика пәнін оқытуда STEM әдістерін енгізу арқылы оқушылардың практикалық дағдыларын дамытуға, шығармашылық ойлауын қалыптастыруға және инновациялық әлеуетін арттыруға мүмкіндік туады, деген болжам жасалады.

Кіріспе

Жылдам цифрлық трансформация мектептерде информатика бойынша оқытуға сұранысты арттырды. Дегенмен, дәстүрлі оқыту әдістері оқушыларды тиімді түрде тарта алмайды, бұл қызығушылықтың төмендеуіне және нашар үлгерімге әкеледі. STEM негізіндегі оқыту тәсілдері пәнаралық және практикалық оқу тәжірибесін қамтамасыз етеді, бұл информатика пәні білім алушыға қол жетімді және практикалық мүмкіндік. Бұл мақалада мектептердегі STEM әдістерінің қол жетімділігі және олардың информатиканы оқытуға әсері қарастырылып отыр. Интеграция (лат. *integratio* – қалпына келтіру, толықтыру, *integer* – тұтас, бүтін) – экон. субъектілерді бөлу, олардың арасындағы байланыстарды бұзып, өзара ынтымақты іс-қимылын жою[2]. Өзінің жеке мүдделерін және халық пен бизнестің талап-тілектерін қамтамасыз ету үшін дүниежүзі елдері бірлесе жақындасуға, яғни интеграцияға бағытталған саясат жүргізеді. Оған үдеріс ретінде де, жақындасудың нәтижесі ретінде де қарауға болады. Бірінші мағынасында, бұл - бірлесе қызмет атқаруға, ал кейбір жағдайларда түрлі елдердің бірігуіне әкелетін үдерістер. Екінші мағынасында интеграция ретінде ортақ мақсатқа бірлесе қол жеткізу үшін құрылған мемлекетаралық бірлестіктер алынады [3].

«Интеграциялай оқыту» терминінің терең тарихы мен күрделі негіздері бар. Бұл ұғымның қалыптасуы білім беру саласындағы пәнаралық әдістердің дамуымен тығыз байланысты. Бұл терминді енгізу үдерісі біртіндеп жүзеге асырылып, оқытудағы өз көрінісін кезең-кезеңмен айқындай түсті. Интеграциялай оқыту қазіргі білім беру жүйесінің маңызды әдістерінің бірі, ол білім алушылардың жүйелі ойлау қабілетін дамытуға және әртүрлі пәндер арасындағы байланысты нығайтуға көмектеседі. Бұл тәсіл білім беру жүйесін жаңарту мен заманауи оқыту әдістерін енгізу қажеттілігінің туындаған кезеңінде пайда болды. Себебі, дәстүрлі әдістер өзгермелі әлемде және оқушылардың дағдыларына қойылатын талаптар өскен жағдайларда өзтиімділігін жоғалтады [4]. Сонымен, зерттеу мақсаты – Қазақстан мектептерінде информатика пәнін оқыту сапасын арттыру мақсатында STEM (Ғылым, Технология, Инженерия және Математика) тәсілдерінің қолжетімділігі мен тиімділігін кешенді түрде талдап, халықаралық тәжірибе негізінде STEM әдістерін енгізу бойынша нақты ұсыныстар жасау. Аталған мақсатқа жету үшін төмендегі міндеттер қойылды:

1. Қазақстан мектептеріндегі информатиканы оқыту барысындағы өзекті мәселелер мен STEM әдістерін енгізудің қажеттілігін негіздеу;
2. STEM тәсілдерінің (жобалық оқыту, робототехника, кодтау, геймификация) теориялық негіздерін айқындау және оларды информатика пәнімен интеграциялау жолдарын нақтылау;
3. Қытай мен Жапонияның STEM білім беру тәжірибелеріне талдау жасау және Қазақстандық білім беру жүйесімен салыстырмалы түрде бағалау;
4. Қазақстан мектептерінде STEM әдістерінің қолжетімділігі мен тиімділігін анықтау мақсатында мұғалімдер мен оқушылар арасында сауалнама және сарапшылармен сұхбаттар жүргізу;
5. Зерттеу нәтижелеріне сүйене отырып, Қазақстан мектептеріне арналған STEM интеграциясының тиімді моделін ұсыну және STEM тәсілдерін енгізуге қатысты нақты ұсыныстар әзірлеу.

Осы зерттеудің ғылыми жаңалығы. Қазақстан мектептеріндегі информатика пәнін оқытуда STEM (Ғылым, Технология, Инженерия және Математика) тәсілдерінің қолжетімділігі мен тиімділігін тұңғыш рет жүйелі және кешенді түрде талдаумен сипатталады. STEM әдістерін қолданудың отандық және шетелдік (Қытай, Жапония) тәжірибелерін салыстырмалы талдау арқылы информатика пәнінің сапасын арттыруға арналған

қазақстандық білім беру контекстіне бейімделген нақты модель ұсынылды. Сонымен қатар, зерттеуде алғаш рет мектептерде STEM әдістерін енгізуге қатысты педагогикалық және технологиялық аспектілер біртұтас қарастырылып, Қазақстанның білім беру жүйесіне STEM тәсілдерін интеграциялаудың ғылыми-әдістемелік негіздері толықтырылды. Зерттеудің практикалық маңыздылығы – ұсынылған STEM тәсілдерінің мектептегі информатика пәнін оқыту сапасын арттыруға нақты қолдау көрсетуінде. Зерттеу барысында алынған нәтижелер мен жасалған ұсыныстар:

- Қазақстан мектептерінде STEM оқыту әдістерін тиімді енгізу және дамыту бойынша әдістемелік нұсқауларды әзірлеуге мүмкіндік береді.
- Мұғалімдердің кәсіби біліктілігін арттыруда қолданылатын практикалық семинарлар, тренингтер мен курстарды құру үшін ғылыми негіз бола алады.
- Мектептердің білім беру бағдарламалары мен оқу жоспарларына STEM интеграциясын тереңдетуге бағытталған нақты шешімдерді қабылдауға септігін тигізеді.
- Қазақстандағы білім беру саясатын жүзеге асыратын мекемелер үшін STEM білімін дамыту бойынша стратегиялық шешімдерді қабылдауға ғылыми тұрғыдан негізделген деректерді ұсынады.

STEM оқыту әдістерін біріктіру мектептерде информатиканы оқытуды ынталандыру және маңызды дағдыларды дамыту арқылы айтарлықтай жақсартады. Жобаға негізделген оқыту және геймификация сияқты әртүрлі стратегиялар студенттердің мотивациясы мен оқу үлгерімін жақсартатыны көрсетілді. Келесі бөлімдерде STEM әдістерінің тиімді информатикалық білім беруге қалай ықпал ететіндігінің негізгі аспектілері көрсетілген.

Жақсартылған қатысу мен мотивация

- STEM тәсілдері, әсіресе бағдарламалаудағы, теориялық тұжырымдамаларды практикалық қолдану арқылы білім алушыларды ынталандыруы мүмкін [5].
- Геймификация және жобалық оқыту сияқты белсенді оқыту стратегиялары оқушылардың қызығушылығы мен қатысуының артуымен байланысты [6].
- Сыни дағдыларды дамыту
- STEM білім беру информатикада проблемаларды шешу үшін шешуші болып табылатын есептеуіш ойлауға баса назар аударады [7].
- STEM-ге негізделген оқу бағдарламаларын енгізу студенттерге болашақ технологиялық қиындықтар үшін маңызды шығармашылық және сыни ойлау сияқты сыни дағдыларды дамытуға көмектеседі [6].
- Мұғалімдерді даярлау және институционалдық қолдау
- STEM әдістерін тиімді енгізу мұғалімдердің жан-жақты дайындығын және қарсылықты жеңу үшін институционалдық қолдауды талап етеді [6], [8].
- Білім беру мекемелері мен өнеркәсіп арасындағы серіктестік ресурстардың қолжетімділігін және оқу жоспарының сәйкестігін арттыра алады [8].

Информатикалық білім берудегі STEM әдістерінің артықшылықтары айқын болғанымен, өзгерістерге төзімділік және тиісті оқыту қажеттілігі сияқты қиындықтар сақталады. Бұл мәселелерді шешу информатиканы оқытуды жақсартуда STEM әлеуетін барынша арттыру үшін өте маңызды.

Зерттеу әдіснамасы

Зерттеу барысында әдебиеттерге теориялық шолу әдісі және Салыстырмалы талдау әдісі кеңінен пайдаланылды. Бұл әдістердің мақсаты – STEM тәсілдерін информатика пәнімен интеграциялау мәселесі бойынша әлемдік ғылыми әдебиетте қолжетімді ақпараттарды жүйелі түрде талдап, зерттеу тақырыбының теориялық негізін қалыптастыру.

2.1. Әдебиеттерге теориялық шолу әдісі

Осы мақсатқа жету үшін келесі қадамдар орындалды, ғылыми дереккөздерді жинақтау және сұрыптау іске асты. Google Scholar, Scopus, Web of Science, Springer, IEEE сияқты ғылыми дерекқорлардан STEM білім беру, информатика пәнін оқыту, жобалық оқыту, робототехника,

бағдарламалау, геймификация туралы өзекті ғылыми еңбектер іріктеліп, талдауға негізделді. Талдауға арналған критерийлерді анықтау, Әдебиеттер STEM тәсілдерінің қолданылу тиімділігі, қолжетімділігі, практикалық маңызы және білім беру сапасына әсері сияқты критерийлер бойынша жіктеліп, талданды.

STEM тәсілдерін информатикалық білім беруді біріктіру барысында қиындықтар мен перспективалар туындайды. Бірінші кезекте іске асыруда STEM білім берудің артықшылықтарына қарамастан, бірнеше қиындықтар анықталды. Оларға техникалық инфрақұрылымға шектеулі қолжетімділік, интернет байланысының нашар болуы және цифрлық технологиялар бойынша мұғалімдердің жеткіліксіз дайындығы жатады [9]. Сонымен қатар, оқытушылар мен студенттердің жаңа әдістемелерге мәдени кедергілер мен қарсылығы STEM тәсілдерін тиімді іске асыруға кедергі келтіруі мүмкін [10]. Екіншіден болашақ дамуда STEM білім берудің перспективалары перспективалы, оқу орындары мен технологиялық компаниялар арасындағы ынтымақтастықтың артуы ресурстарды дамыту мен бірлескен жобалар үшін жаңа мүмкіндіктер ашады [9]. Сонымен қатар, геймификация, айналдырылған сыныптар және бірлескен оқыту сияқты белсенді әдістерді біріктіру оқу үлгерімі мен білімді сақтауды жақсартатыны көрсетілді [10].

2.2. Салыстырмалы талдау әдісі

Зерттеу шеңберінде Қазақстанның STEM білім беру жүйесін Қытай және Жапония тәжірибелерімен салыстырып талдау әдісі қолданылды. Бұл әдістің мақсаты – Қазақстандық білім беру жүйесін халықаралық контексте талдап, озық тәжірибелерді ұлттық жағдайға бейімдеудің тиімді жолдарын анықтау. Салыстырмалы талдауды жүзеге асыру кезеңдерді қамтыды – Қазақстан, Қытай және Жапония елдері STEM білім беру саласындағы инновациялық тәжірибелері, ерекшеліктері мен жетістіктеріне қарай таңдап алынды.

Салыстырмалы талдау үшін арнайы өлшемдер (критерийлер) белгіленді:

- STEM тәсілдерін енгізу жасы және мектеп бағдарламасына интеграциялануы;
- STEM пәндерін тереңдетіп оқыту деңгейі;
- Оқушылардың практикалық дағдыларын дамыту ерекшеліктері;
- Мұғалімдердің кәсіби дайындығы мен біліктілігін арттыру шаралары;
- Мемлекеттік қолдау деңгейі және саяси-құқықтық базаның болуы;
- Халықаралық ынтымақтастық және тәжірибе алмасу деңгейі;
- STEM инфрақұрылымының даму дәрежесі (жабдықтау, ресурстарға қолжетімділік).

Зерттеу нәтижелері

Қорытындылай келе айтатын болсақ STEM тәсілдерін информатикалық білім беруге кіріктіру оқушылардың техникалық және проблемаларды шешу дағдыларын дамытуда тиімділігі жоғары екені көрсетілді. Жобаға негізделген оқыту, пәнаралық интеграция, технологияларды біріктіру, мұғалімдерді оқыту және нақты қолданбалар сияқты негізгі стратегиялар оқу нәтижелерін арттыруда маңызды болды (кесте1).

Дегенмен, STEM білім беруді табысты іске асыруды қамтамасыз ету үшін шектеулі ресурстар мен мұғалімдердің жеткіліксіз дайындығы сияқты қиындықтарды шешу қажет. Тәрбиешілер, саясаткерлер және салалық сарапшылар арасындағы ынтымақтастықты дамыту арқылы студенттерді ХХІ ғасырдың талаптарына дайындайтын STEM білім берудің толық әлеуетін іске асыруға болады.

Салыстырмалы талдау нәтижелерінің негізінде Қазақстандағы STEM білім беру жүйесін жетілдіруге бағытталған нақты ұсыныстар мен бейімделген модельдер әзірленді. Қытай мен Жапонияның тәжірибелерінің оңтайлы тұстарын Қазақстандық білім беру жүйесінің ерекшеліктерін ескере отырып енгізудің тиімді жолдары анықталды.

Қытай мен Жапонияның білім беру жүйелері STEM тәсілдерін ерте жастан бастап енгізіп, оқушылардың ғылыми-зерттеу дағдыларын дамытуға бағытталған. Қазақстан да осы бағытта қадамдар жасауда, бірақ толыққанды нәтижелерге қол жеткізу үшін әлі де жұмыстар атқару қажет.

Кесте 1. STEM білім берудегі негізгі стратегиялар, тәсілдер және нәтижелер

Стратегия/Тәсіл	Сипаттамасы	Нәтижесі/Дәйексөз
Жобаға негізделген оқыту	Теориялық білімді долдоню үшін нақты жобаларды қамтиды	Мәселелерді шешуді, ынтымақтастықты және шығармашылықты жақсартады
Пәнаралық интеграция	Ғылым, технология, инженерия және математика тұжырымдамаларын біріктіреді	Оқыту нәтижелерін жақсартады және күрделі есептерді шешудің нақты дағдыларын дамытады
Технологияларды біріктіру	Бағдарламалау, IoT, AI және деректерді визуализациялау сияқты сандық құралдарды пайдаланады	Техникалық тұжырымдамаларды түсінуді жақсартады және оқу тәжірибесін жақсартады
Мұғалімдерді даярлау және кәсіби дамыту	Мұғалімдердің өзіндік тиімділігін және РСК дамытуға назар аударады	Бағалауды дамыту мен технологияларды интеграциялаудағы қиындықтарды шешеді
Нақты әлемдік қосымшалар және проблемаларды шешу	Практикалық проблемаларды шешуге және тәжірибелік оқуға баса назар аударады	Студенттердің STEM пәндеріне деген қызығушылығын және ынтымақын арттырады

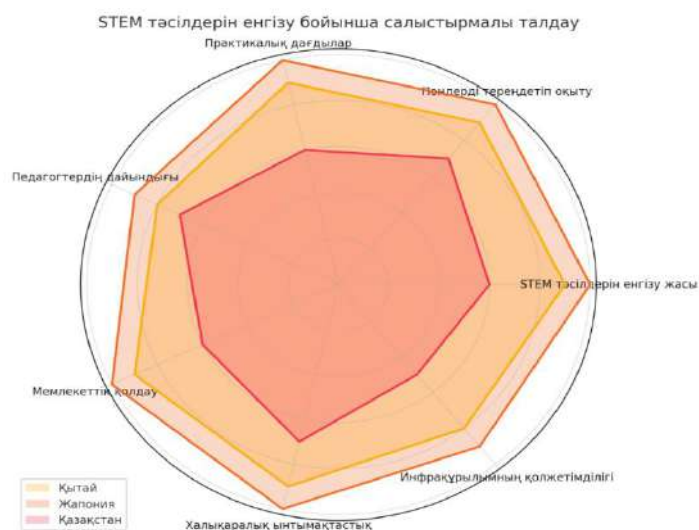
Бұл ретте Қытай мен Жапонияның тәжірибелерін зерттеп, оларды Қазақстандық білім беру жүйесіне бейімдеу маңызды. Төменде кестеде (кесте 2) Қытай, Жапония және Қазақстанның STEM тәсілдерін білім беруде қолдануын жалпы критерийлері бойынша салыстырмалы талдау кестесі ұсынылған:

Кесте 2. Қытай, Жапония және Қазақстанның STEM тәсілдерін қолдануын салыстырмалы талдау

№	Салыстыру критерийлері	Қытай	Жапония	Қазақстан
1	STEM тәсілдерін енгізу жасы	Ерте жасан бастап (бастауыш мектептен)	Ерте жасан бастап (балабақша, бастауыш мектептен)	Орта мектептен басталуда, бірақ бастауышқа қарай көшуде
2	Мектептегі STEM пәндерін тереңдетіп оқыту деңгейі	Жоғары, ғылыми-зерттеу жұмыстары көп	Өте жоғары, технологиялық және инженерлік бағытқа басымдық берілген	Орташа, біртіндеп тереңдетілуде
3	Практикалық дағдыларды дамыту	Ғылыми жобалар мен зерттеу жұмыстарына белсенді қатыстыру арқылы	Тәжірибелік, инженерлік жобалар мен робототехника арқылы	Робототехника үйірмелері, тәжірибелік жұмыстар енді ғана кең таралуда
4	STEM бағыты бойынша педагогтердің дайындығы	Жоғары деңгейде арнайы дайындық жүргізіледі	Жоғары деңгейде арнайы тренингтер мен біліктілік арттыру курстары жүргізіледі	Орташа, көбінесе қосымша курстар мен халықаралық тәжірибелер арқылы
5	Мемлекеттік қолдау деңгейі	Өте жоғары (арнайы мемлекеттік бағдарламалар бар)	Өте жоғары (ұлттық деңгейдегі арнайы бағдарламалар бар)	Орташа (STEM дамыту бойынша арнайы мемлекеттік бағдарламалар енді ғана іске қосылуда)

6	STEM бойынша халықаралық ынтымақтастық деңгейі	Өте жоғары (халықаралық ғылыми жобаларға белсенді қатысады)	Өте жоғары (халықаралық STEM білім беру желілеріне қосылған)	Орташа, алайда халықаралық STEM байқауларына қатысу көбейіп келеді
7	Инфрақұрылым және ресурстардың қолжетімділігі	Жоғары деңгейде жабдықталған зертханалар бар	Заманауи жабдықталған, технологиялық базасы дамыған мектептер көп	Әзірше жеткіліксіз, алайда заманауи жабдықтау жұмыстары жүргізілуде

Төменде берілген STEM тәсілдерін қолдану бойынша Қытай, Жапония және Қазақстанның білім беру жүйелерін салыстыратын радар диаграммасы ұсынылған (сурет 1).



Сурет 1. Салыстырмалы талдау радар диаграммасы

Диаграмма арқылы келесі қорытындыларды жасауға болады. Жапония STEM тәсілдерін енгізу, пәндерді тереңдетіп оқыту, практикалық дағдыларды дамыту және инфрақұрылымның қолжетімділігі жағынан көш бастап тұр. Бұл Жапонияның білім беру жүйесінде STEM әдістерінің барлық бағыты жан-жақты және жоғары деңгейде дамығанын көрсетеді. Қытай да осы көрсеткіштер бойынша жоғары деңгейде тұр, әсіресе мемлекеттік қолдау және халықаралық ынтымақтастық салаларында күшті нәтиже көрсеткен. Ғылыми-зерттеу бағыттары бойынша белсенді жұмыстар жасалуда, бірақ инфрақұрылым мен педагогтердің дайындығы бойынша аздап артта қалып отыр. Қазақстанның білім беру жүйесі STEM тәсілдерін дамытуда біршама артта келеді. Атап айтқанда, инфрақұрылым мен ресурстардың қолжетімділігі, практикалық дағдыларды дамыту, мемлекеттік қолдау деңгейлері бойынша кемшіліктер байқалады. Дегенмен, педагогтерді дайындау мен халықаралық ынтымақтастық бағытында айтарлықтай ілгерілеу бар, бұл болашақта басқа да көрсеткіштерді жақсартуға мүмкіндік береді.

Дискуссия

Шетелдік (Қытай, Жапон) оқыту жүйелеріне талдау. Оны Қазақстандық білім беру жүйесімен салыстыру. Қытай мен Жапонияның білім беру жүйелері тарихи, мәдени және саясаттық әсерлерден қалыптасқан ерекше сипаттамаларға ие, олар Қазақстандағы білім беру шеңберімен қарама-қайшы келеді. Қытайдың білім беру жүйесіне халықаралық білім алмасу мен ынтымақтастықты, әсіресе Қазақстанмен ынтымақтастықты дамытуға бағытталған “Белдеу мен жол” бастамасы сияқты стратегиялық бастамалары қатты әсер етеді. Жапония, екінші жағынан, шетелдік ықпалдарды байырғы тәжірибелермен теңестіретін бірегей білім

беру жүйесін жасады. Қазақстанның білім беру жүйесі қытайлық және жапондық модельдерден сабақ ала отырып, өзінің жаһандық бәсекеге қабілеттілігі мен интеграциясын арттыру үшін реформалар жүргізуде. Келесі бөлімдерде осы жүйелерді егжей-тегжейлі салыстыру берілген. Қытай білім беру жүйесі. Қытай үкіметі STEM білімін дамытуға ерекше көңіл бөледі. Елдегі мектептерде жаратылыстану пәндері тереңдетіліп оқытылады, ал оқушылардың ғылыми-зерттеу дағдыларын дамытуға баса назар аударылады. Сонымен қатар, Қытайда оқушылардың ғылыми жобаларға қатысуы ынталандырылады, бұл олардың шығармашылық және сыни ойлау қабілеттерін арттырады.

Қорытынды

STEM негізіндегі оқыту әдістемесі мектеп деңгейіндегі информатика білімін жетілдірудің перспективалық тәсілін ұсынады. Жобалық оқыту, робототехника және кодтау бастамаларының интеграциясы студенттердің белсенділігі мен есептеу ойлауында оң нәтижелер көрсетті. Дегенмен, STEM ресурстарына және оқытылған оқытушыларға қол жеткізудегі айырмашылықтар айтарлықтай қиындықтар туғызады. Бұл олқылықтарды саяси қолдау, қаржыландыру және мұғалімдерді даярлау арқылы жою болашақ ұрпақ үшін инклюзивті және тиімді информатика білімін қамтамасыз ету үшін өте маңызды.

STEM тәсілдерін информатикаға интеграциялау оқушылардың білімін тереңдетіп, олардың практикалық дағдыларын жетілдіруге көмектеседі. Оқытуда пәнаралық байланыстарды күшейту, практикалық жобаларды енгізу және заманауи технологияларды пайдалану басты стратегиялар болуы тиіс. Осы тәсілдер болашақта IT-индустрияда сұранысқа ие мамандарды дайындауға ықпал етеді.

Қытай мен Жапонияның STEM білім берудегі тәжірибелері Қазақстан үшін құнды үлгі бола алады. Олардың тәжірибелерін зерттеп, Қазақстандық білім беру жүйесіне бейімдеу арқылы мектеп информатика пәнін оқытуды жетілдіруге және оқушылардың ғылыми-зерттеу дағдыларын дамытуға мүмкіндік бар.

Қытай мен Жапон білім беру жүйелері Қазақстан үшін құнды сабақтар ұсынғанымен, әр жүйенің ерекше контексті мен қиындықтарын ескеру қажет. Қытайдың халықаралық ынтымақтастыққа баса назар аударуы және Жапонияның инновациялар мен дәстүр теңгерімі Қазақстанның білім беруді дамытудың қарама-қайшы үлгілерін қамтамасыз етеді. Алайда, Қазақстанның білім беру жүйесін жаһандық стандарттарға реформалау және интеграциялау бойынша күш-жігері оның білім беру ландшафтын жақсартуға деген ұмтылысын көрсетеді.

Жалпы алғанда, Қазақстан үшін STEM тәсілдерін оқытуда Жапония мен Қытайдың тәжірибелерін зерттеу және олардың тиімді тұстарын ұлттық білім беру жүйесіне бейімдеп енгізу маңызды болып табылады. Бұл Қазақстанның мектептегі информатика пәнін оқытуды жетілдіруге және оқушылардың ғылыми-зерттеу қабілеттерін арттыруға зор мүмкіндік береді.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] Әжібекова Ж. Оқу процесінде гипермәтіндік электрондық оқулықтарды енгіз. //«Информатика негіздері», No3,2003.-5-7б.

[2] Қазақ тілі терминдерінің салалық ғылыми түсіндірме сөздігі: Әскери іс. Алматы: «Мектеп» ААҚ, 2001 жыл.

[3] Қаратабанова Р.Ә., Қуанышева Г.А., Байметова Ж.Р., Джаналеева К.М. (2018). География. Жалпы білім беретін мектептердің 8-сынып оқушыларына арналған. 2-бөлім. - Алматы: Алматы кітап баспасы.

[4] Куатова И., & Керимбекова Б.Д. (2024). Состояние изученности интегрированного обучения. Вестник Кокшетауского университета имени Ш.Уалиханова. Серия Педагогические науки, (3), 68–75. <https://doi.org/10.59102/pedagogical/2024/iss3pp68-75>

[5] Rodrigues M. Using STEM to Improve Computer Programming Teaching. Springer, Cham, 2021. P. 542–548 https://doi.org/10.1007/978-3-030-80129-8_38

[6] Herrera-Barzallo, J. G., Hernández-Dávila, C. A., Montes De Oca-Sánchez, I. V., Triviño-Sánchez, J. J., & Vargas-Marín, H. J. (2024). *Estrategias de Enseñanza STEM: Un Análisis de Métodos Activos en el Aula: STEM Teaching Strategies: An Analysis of Active Methods in the Classroom*. *Multidisciplinary Latin American Journal (MLAJ)*, 2(3), 17-33. <https://doi.org/10.62131/MLAJ-V2-N3-002>

[7] Burbaite R., Drasute V., Štuikys V. *Integration of computational thinking skills in STEM-driven computer science education // Global Engineering Education Conference. IEEE, 2018. P. 1824–1832. <https://doi.org/10.1109/EDUCON.2018.8363456>*

[8] Negi, P., and Bishnoi, S. (2024). *STEM Education: Evaluation and Improvement Methods*. *i-manager's Journal on School Educational Technology*, 20(1), 37-42. <https://doi.org/10.26634/jsch.20.1.21009>

[9] Hubal H. u ðp. *Digital Technologies in the Process of Teaching STEM Disciplines: Challenges and Prospects // Cadernos de Educação, Tecnologia e Sociedade. 2024. <https://doi.org/10.14571/brajets.v17.n1.445-458>*

[10] Arteaga-Marín M. u ðp. *Systematic review and a proposal for the implementation of active methodologies in STEM education // Educateconciencia. 2024. <https://doi.org/10.58299/ex92v043>*

References

[1] Äjibekova Zh. (2003) *Oku prosesinde gipermätindik elektrondyq oqulyqtardy engiz [Introduction of hypertext electronic textbooks in the learning process]. «Informatika negizderi», No3, 5–7. (In Kazakh)*

[2] *Qazaq tili terminleriniñ salalyq ğilymi tüsindirme sözdigi: Áskeri is [Kazakh language sectoral scientific explanatory dictionary: Military affairs]. Almaty: «Mektep» AAQ, 2001. (In Kazakh)*

[3] Karatabanova R.Ä., Quanysheva G.A., Baimetova Zh.R., Djanaleeva K.M. (2018) *Geografua. Jalpy bilim beretin mektepterdiñ 8-synyp oqushylarına arnalğan. 2-bölim [Geography. For students of grade 8 of general education schools. Part 2]. Almaty: Almaty kitap baspasy. (In Kazakh)*

[4] Quatova I., & Kerimbekova B.D. (2024) *Sostoianie izuchenosti integrirovannogo obucheniiia [State of the study of integrated learning]. Vestnik Kokshetau universiteti imeni Sh. Ualikhanova. Seriya Pedagogicheskie nauki, (3), 68–75. <https://doi.org/10.59102/pedagogical/2024/iss3pp68-75>*

[5] Rodrigues M. *Using STEM to Improve Computer Programming Teaching*. Springer, Cham, 2021. P. 542–548 https://doi.org/10.1007/978-3-030-80129-8_38

[6] Herrera-Barzallo, J. G., Hernández-Dávila, C. A., Montes De Oca-Sánchez, I. V., Triviño-Sánchez, J. J., & Vargas-Marín, H. J. (2024). *Estrategias de Enseñanza STEM: Un Análisis de Métodos Activos en el Aula: STEM Teaching Strategies: An Analysis of Active Methods in the Classroom*. *Multidisciplinary Latin American Journal (MLAJ)*, 2(3), 17-33. <https://doi.org/10.62131/MLAJ-V2-N3-002>

[7] Burbaite R., Drasute V., Štuikys V. *Integration of computational thinking skills in STEM-driven computer science education // Global Engineering Education Conference. IEEE, 2018. P. 1824–1832. <https://doi.org/10.1109/EDUCON.2018.8363456>*

[8] Negi, P., and Bishnoi, S. (2024). *STEM Education: Evaluation and Improvement Methods*. *i-manager's Journal on School Educational Technology*, 20(1), 37-42. <https://doi.org/10.26634/jsch.20.1.21009>

[9] Hubal H. u ðp. *Digital Technologies in the Process of Teaching STEM Disciplines: Challenges and Prospects // Cadernos de Educação, Tecnologia e Sociedade. 2024. <https://doi.org/10.14571/brajets.v17.n1.445-458>*

[10] Arteaga-Marín M. u ðp. *Systematic review and a proposal for the implementation of active methodologies in STEM education // Educateconciencia. 2024. <https://doi.org/10.58299/ex92v043>*

А.В. Гриншкун ¹, Е.Х. Жабаев^{2*}, М.И. Ревшенова²

¹ Московский городской педагогический университет, г. Москва, Российская Федерация

² Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: ermahan_zh.h@mail.ru

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИИ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ РОБОТОТЕХНИКЕ

Аннотация

Статья посвящена исследованию возможностей применения технологий дополненной реальности (AR) в обучении школьников робототехнике. Рассмотрены ключевые концепции иммерсивных технологий, их классификация и методические подходы к интеграции AR в образовательный процесс. Проведен анализ преимуществ AR в сравнении с традиционными методами обучения, включая повышение наглядности, интерактивности и вовлеченности учащихся. Особое внимание уделено казахстанскому опыту внедрения AR в школьное образование в рамках программы «Цифровой Казахстан». Представлены примеры успешного использования AR в образовательных учреждениях Казахстана, а также зарубежные кейсы, демонстрирующие эффективность технологии в обучении программированию роботов. Рассматриваются вызовы внедрения AR, такие как нехватка оборудования, методическая неподготовленность учителей и необходимость разработки качественного учебного материала. Выявлены два ключевых способа дополнения реальности – добавление нового виртуального объекта и добавление информационного слоя. В заключении сформулированы рекомендации по дальнейшему развитию AR в образовательной сфере, включая необходимость создания национальных AR-приложений и повышения квалификации педагогов.

Ключевые слова: информатизация образования, дополненная реальность, робототехника, иммерсивные технологии, STEM.

А.В. Гриншкун ¹, Е.Х. Жабаев², М.И. Ревшенова²

¹ Мәскеу қалалық педагогикалық университеті, Мәскеу қ., Ресей Федерациясы

² Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ОҚУШЫЛАРДЫ РОБОТОТЕХНИКАҒА ОҚЫТУ КЕЗІНДЕ ТОЛЫҚТЫРЫЛҒАН ШЫНАЙЫЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯСЫН ҚОЛДАНУ МҮМКІНДІКТЕРІ

Аңдатпа

Мақала мектеп оқушыларын робототехникаға оқытуда толықтырылған шынайылық (AR) технологияларын қолдану мүмкіндіктерін зерттеуге арналған. Иммерсивті технологиялардың негізгі тұжырымдамалары, олардың жіктелуі және AR-ны білім беру процесіне біріктірудің әдістемелік тәсілдері қарастырылады. Оқушылардың көрнекілігін, интерактивтілігін және қатысуын арттыруды қоса алғанда, дәстүрлі оқыту әдістерімен салыстырғанда AR артықшылықтарына талдау жүргізілді. "Цифрлық Қазақстан" бағдарламасы шеңберінде мектеп біліміне AR енгізудің қазақстандық тәжірибесіне ерекше назар аударылды. Қазақстанның білім беру мекемелерінде AR-ны табысты пайдалану мысалдары, сондай-ақ роботтарды бағдарламалауды оқытуда технологияның тиімділігін көрсететін шетелдік кейстер ұсынылған. Жабдықтардың жетіспеушілігі, мұғалімдердің әдістемелік дайындығы және сапалы оқу материалын әзірлеу қажеттілігі сияқты AR-ны енгізу мәселелері қарастырылады. Шындықты толықтырудың екі негізгі әдісі анықталды-жаңа виртуалды нысанды қосу және ақпарат қабатын қосу. Қорытындыда ұлттық AR-қосымшаларды құру және педагогтердің біліктілігін арттыру қажеттілігін қоса алғанда, білім беру саласында AR-ны одан әрі дамыту бойынша ұсыныстар тұжырымдалған.

Түйін сөздер: білім беруді ақпараттандыру, толықтырылған шынайылық, робототехника, иммерсивті технологиялар, STEM.

A.V. Grinshkun¹, Ye.H. Zhbayev², M.I. Revshenova²

¹Moscow City University, Moscow, Russia

²Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

THE POSSIBILITIES OF USING AUGMENTED REALITY TECHNOLOGY IN TEACHING ROBOTICS TO SCHOOLCHILDREN

Abstract

The article is devoted to the study of the possibilities of using augmented reality (AR) technologies in teaching robotics to schoolchildren. The key concepts of immersive technologies, their classification and methodological approaches to the integration of AR into the educational process are considered. The advantages of AR in comparison with traditional teaching methods, including increasing visibility, interactivity and student engagement, are analyzed. Special attention is paid to the Kazakh experience of introducing AR into school education within the framework of the Digital Kazakhstan program. Examples of successful use of AR in educational institutions in Kazakhstan are presented, as well as foreign cases demonstrating the effectiveness of technology in teaching robot programming. The challenges of implementing AR are considered, such as lack of equipment, methodological unpreparedness of teachers and the need to develop high-quality educational material. Two key ways of complementing reality have been identified – adding a new virtual object and adding an information layer. In conclusion, recommendations are formulated for the further development of AR in the educational field, including the need to create national AR applications and improve the skills of teachers.

Keywords: informatization of education, augmented reality, robotics, immersive technologies, STEM.

Основные положения

В настоящем исследовании был проведен анализ возможности применения технологии дополненной реальности при обучении робототехнике школьников. Дополненная реальность относится к иммерсивным технологиям – средствам, которые работают в реальном времени и позволяют работать с виртуальными объектами с привязкой к реальному пространству. Дополненная реальность является эффективным средством для обучения школьников робототехнике. В условиях Казахстана использование AR-технологий позволяют решить проблему нехватки учебного оборудования и значительно повысить качество преподавания инженерных и технических дисциплин.

Введение

Технология дополненной реальности позволяет учащимся изучать устройства и принципы работы роботов, визуализируя их в цифровом виде прямо в реальном окружении без изоляции от окружения и учителя. С помощью дополненной реальности школьники могут рассматривать 3D-модели роботов в натуральную величину, изучать их конструкцию и компоненты, и даже наблюдать имитацию работы сенсоров и приводов – без доступа к физическим роботам или лаборатории. Например, вместо реального робототехнического набора можно с помощью приложения дополненной реальности спроецировать модель робота на стол, разбирать ее на части, менять размеры деталей и наблюдать, как робот выполняет виртуальные задачи. Это особенно актуально для школ, где недостаточно оборудования – дополненная реальность выступает в роли “виртуального лабораторного стенда”, восполняя отсутствие дорогостоящих робототехнических комплектов [1]. Исследования подтверждают, что применение интерактивных 3D-моделей в учебном процессе улучшает понимание устройства роботов и принципов их работы, снижая зависимость от наличия материальных ресурсов. Кроме того, дополненная реальность дает возможность «заглянуть внутрь» механизмов – учащиеся могут увидеть, как перемещаются скрытые передачи или протекают сигналы, чего нельзя добиться при простом изучении схем в учебнике.

Методология исследования

Был проведен первичный анализ возможностей применения технологии дополненной реальности при обучении школьников робототехнике. Определены наиболее подходящие способы дополнения реальности при изучении робототехники.

Результаты исследования

Иммерсивные технологии позволяют существенно повысить эффективность обучения за счет повышения наглядности, интерактивности учебных материалов, реализуя более реалистичное взаимодействие с виртуальными объектами. На основе таксономии Милграма и Кашино была сформирована более подходящая для образования классификация иммерсивных технологий. В отличие от оригинальной системы, основанной на разделении носимых на голове дисплеев (HMD, head-mounted display) по степени «знания» устройством свойств реального окружающего мира, предложенная классификация распространяется на любые иммерсивные системы, а не только HMD. Кроме того, главным параметром, по которому происходит отбор, является более «смысловое» свойство, а не техническое – соотношение реальных и виртуальных объектов в поле зрения пользователя (рис. 1).

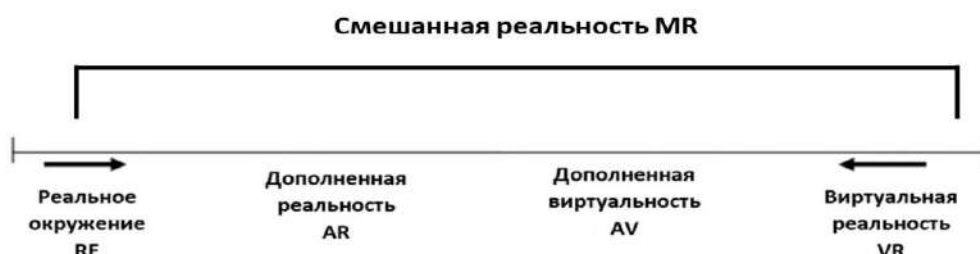


Рисунок 1. Классификация иммерсивных технологий «Континуум Милграма реальность-виртуальность»

1. Реальное окружение (RE) – это среда без применения иммерсивных технологий. Как правило наиболее предпочтительна для образования, однако реальные объекты и модели не всегда доступны, что особенно актуально при изучении робототехники. Позволяет передать не только габариты объектов, но и полноценно организовать физическую обратную связь, что дает возможность вырабатывать рабочие навыки.

2. Смешанная реальность (MR) – это область иммерсивных технологий, в которой реальные и виртуальные объекты существуют в различных соотношениях. Включает в себя дополненную реальность и дополненную виртуальность.

Дополненная реальность (AR) – пространство, в котором реального больше, чем виртуального, то есть при добавлении виртуальных объектов в реальное окружение.

а. Дополненная виртуальность (AV) – пространство, в котором виртуального больше, чем реального, то есть при добавлении реальных объектов в виртуальное пространство.

3. Виртуальная реальность (VR) – полностью виртуальное пространство, в котором можно эмулировать большинство сред и объектов, но при этом затруднительно передать часть физических свойств изучаемых объектов. Изолирует пользователя от окружающего пространства, что затрудняет его взаимодействие с учителем, а также накладывает определенные ограничения на организацию образовательного процесса в рамках классно-урочной системы.

Таким образом, использование технологий дополненной реальности в обучении робототехнике предоставляет ряд преимуществ, особенно в условиях, когда доступ к реальному оборудованию ограничен: во-первых, повышается наглядность и интерактивность обучения. Школьники могут наблюдать работу виртуального робота в реальной обстановке, экспериментировать с его настройками и сразу видеть результат – это гораздо более наглядно, чем статические рисунки или фотографии в учебнике [2]; во-вторых, дополненная реальность

способствует увеличению вовлеченности и мотивации учащихся. Добавление виртуальных элементов (3D-роботов, анимаций) в привычную обстановку делает урок более захватывающим, что подтверждается опытом: дополненная реальность усиливает интерес учеников к тому, как движется и взаимодействует робот, тем самым побуждая их глубже разобраться в программировании и механике [3].

Еще одно существенное преимущество – опыт без рисков. Учащиеся могут пробовать управлять виртуальным роботом или собирать его из деталей в дополненной реальности, не опасаясь поломать дорогое оборудование или нанести себе травму. Это особенно ценно при изучении промышленной робототехники, где реальные роботы громоздки и потенциально опасны. Среда дополненной реальности позволяет имитировать эксперименты, которые были бы сложны или небезопасны в классе. Например, при помощи дополненной реальности можно продемонстрировать работу промышленного роботизированного манипулятора на заводе – школьники увидят, как он двигается, какова зона его досягаемости, при этом нет необходимости иметь реальный манипулятор в школе (рис. 2).



Рисунок 2. Технология дополненной реальности позволяет в безопасной среде изучать наиболее реалистично в том числе промышленных роботов. Добавление нового виртуального объекта.

[Dall-e; Trellis]

Помимо этого, технология дополненной реальности является экономически эффективным решением. Один планшет или смартфон с приложением дополненной реальности может во многом заменить сразу несколько физических наборов – на экране можно отображать любые модели роботов по мере необходимости. Это снижает расходы на оборудование для образовательных учреждений. В условиях Казахстана, где не каждая школа оборудована полноценным STEM-лабораториям, технологии дополненной реальности помогают преодолеть разрыв между школами с разным уровнем оснащения. Как отмечают исследователи, инструменты дополненной реальности стали простым и недорогим способом помочь учащимся преодолеть ограничения, возникшие, например, при дистанционном обучении без доступа к школьным лабораториям. Однако важно отметить, что полностью заменить реальные объекты и модели, даже такая технология как дополненная реальность не способна [4]. Существуют исследования, подтверждающие непосредственное влияние дополненной реальности на успеваемость. По результатам экспериментов, учащиеся, обучавшиеся с использованием технологий дополненной реальности, показывают улучшение академической успеваемости по сравнению с традиционными методами обучения. Дополнительные зарубежные исследования также фиксируют рост показателей: так, по данным экспериментов Стэнфордского университета, применение контента в дополненной реальности может повысить результаты тестов учащихся на 16–26% за счет более глубокого понимания и запоминания материала. Повышение мотивации, наглядности и практического вовлечения через дополненную реальность в конечном итоге способствует лучшему усвоению знаний [5].

В Республике Казахстан тема внедрения AR в образование получает все большее внимание в контексте программы «Цифровой Казахстан». Одним из ярких примеров стала апробация AR-технологий в преподавании естественно-научных дисциплин. Например, в лицее № 85 города Нур-Султан был реализован проект по использованию AR-приложения на уроках физики. С его помощью школьники изучали сложные темы, наблюдая виртуальные физические опыты и приборы прямо на партах. По итогам исследования, проведенного казахстанскими учеными, интерактивные AR-модели улучшили результаты обучения по физике и повысили интерес учащихся к предмету. Учащиеся отмечали, что эксперименты, показанные в дополненной реальности, помогли им лучше понять абстрактные концепции, а учителя фиксировали рост успеваемости и мотивации. Этот казахстанский кейс продемонстрировал, что AR может эффективно компенсировать нехватку школьных лабораторий и оборудования, расширяя возможности преподавания робототехники и наук [6].

Применение AR в обучении робототехнике развивается и за рубежом. В США и странах Европы проводились исследования и пилотные проекты, демонстрирующие эффективность AR для обучения программированию роботов. Так, американские специалисты из Университета Тафтса разработали AR-приложение для популярных школьных роботов LEGO Mindstorms EV3. Учащиеся с помощью планшета видели поверх реального робота данные с его датчиков (цвета, расстояния) в наглядной форме – например, луч ультразвукового дальномера, визуализированный в пространстве (рис. 3). В пилотном испытании с участием восьмиклассников было замечено, что AR-помощник облегчает отладку программ – дети сразу видели, что «видит» их робот, и могли быстрее скорректировать код. Кроме того, виртуальные подсказки снизили барьер входа для тех, кому ранее робототехника казалась слишком сложной. Это подтверждает потенциал AR в упрощении освоения робототехники: даже без большого опыта школьники успешнее справлялись с задачами программирования робота, когда получали визуальную поддержку через AR [7].

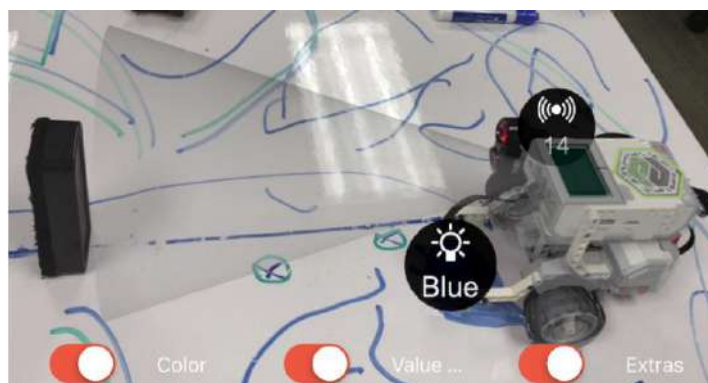


Рисунок 3. Система дополненной реальности визуализирует работу датчиков робота. Добавление информационного слоя.

В Европе в рамках программы Erasmus+ реализован международный проект eROBSON (Educational Robotics at Schools Online with AR), нацеленный на внедрение AR в обучение образовательной робототехнике в школах. Проект возник во время пандемии COVID-19, когда остро проявилась потребность проводить занятия по робототехнике удаленно. В сотрудничестве нескольких университетов была разработана методика использования AR для дистанционного и смешанного обучения робототехнике, включая специальное приложение eROBSON и платформу AR Tutor. Эти инструменты позволили школьникам в разных странах изучать робототехнику дома: они наводили камеру планшета на маркер или объект и видели перед собой виртуального робота, которого можно программировать и изучать, как на реальном занятии. Проект eROBSON продемонстрировал, что AR-технологии могут успешно поддерживать практико-ориентированное обучение робототехнике даже вне классической классно-урочной системы, обеспечивая приближенный опыт, как и при работе с настоящими

конструкторами [8]. Полученные результаты и методические материалы распространяются среди школ Европы, формируя сообщество преподавателей, готовых применять AR на уроках. Также стоит отметить опыт использования AR в промышленном обучении, который постепенно проникает и в образование. В ряде стран (США, Германия, Япония) проводятся эксперименты по обучению студентов программированию промышленных роботов с помощью AR-очков. Так, были разработаны системы, позволяющие обучать работа манипулятора “путем демонстрации”: студент двигает руку с контроллером в AR-среде, а виртуальный робот повторяет эти движения, генерируя программу. Подобные методики показали эффективность и интерактивность – они дают почувствовать процесс обучения робота гораздо лучше, чем чтение инструкций или просмотр видео. Хотя такие подходы больше относятся к вузам и профобучению, со временем они могут найти отражение и в школьных курсах робототехники.

Дискуссия

Для успешного включения AR в школьную программу робототехники необходима разработка продуманных методических подходов. Международный опыт показывает, что наиболее эффективно AR работает в составе смешанного обучения, дополняя традиционные уроки. Например, урок может состоять из теоретической части с обсуждением концепций, за которой следует практическое задание в AR: школьники, разбившись на группы, выполняют виртуальный эксперимент с роботом через приложение. Такой подход был реализован в проекте eROBSON, где AR-модули встроены в типовую программу STEM-дисциплины и используются как лабораторные работы в цифровом формате. Еще одна методика – обучение через проектную деятельность с элементами AR. Школьники могут выполнять мини-проекты, в которых они моделируют в AR собственных роботов для решения определенной задачи. К примеру, в течение четверти ученики разрабатывают дизайн робота-помощника, рисуют эскизы, а затем при помощи AR-приложения создают его 3D-модель и демонстрируют классу его работу в дополненной реальности. Проектный подход с AR развивает творческое мышление и инженерные навыки без потребности в реальных деталях. Также актуальна методика «перевернутого класса» с AR: учащиеся дома изучают базовые концепции (например, смотрят видео), а на уроке, вооруженные планшетами с AR, применяют знания на практике, решая прикладные задачи с виртуальными роботами. Важно, чтобы внедрение AR сопровождалось обучением учителей новым технологиям. Педагоги должны уверенно владеть AR-приложениями, уметь интегрировать их в план урока и комбинировать с другими средствами обучения. В Казахстане проведенное исследование отметило, что для эффективного использования AR в старшей школе требуется повышать цифровую грамотность учителей и снижать их стресс при работе с новыми технологиями [9]. Другими словами, успешность применения дополненной реальности во многом зависит от того, насколько комфортно преподаватель чувствует себя с этими инструментами и как хорошо он подготовлен методически. Методики повышения квалификации могут включать в себя тренинги, обмен опытом между школами, создание методических пособий по применению AR на уроках робототехники. Наконец, разработка контента – тоже часть методики внедрения. Учебные заведения могут либо использовать готовые AR-приложения (например, виртуальные симуляторы популярных робототехнических наборов), либо создавать собственный образовательный контент с помощью конструкторов AR-сценариев. В мире появляются специализированные платформы (тот же ARTutor и др.), позволяющие преподавателям без навыков программирования создавать простые AR-материалы для своих уроков. Важно планировать учебный процесс так, чтобы AR не была самоцелью, а служила инструментом для достижения конкретных результатов обучения. Если методически обосновать, какие темы выигрывают от AR-наглядности (например, изучение устройства датчиков, принципов механики, алгоритмов движения робота), и вписать AR-активности в учебную программу, то технология органично дополняет традиционные методы.

Хотя потенциал AR в образовании высок, на практике школы могут столкнуться с рядом вызовов при внедрении этой технологии. Один из основных – техническое обеспечение. Для работы AR необходимы современные устройства (планшеты, смартфоны или AR-очки) и надежная инфраструктура. Не все школы, особенно в отдаленных регионах, имеют достаточное количество техники или скоростной интернет для поддержания AR-приложений. Это создает риск усиления неравенства между школами: более обеспеченные смогут внедрять AR, а ресурсы ограниченные – нет. Частичное решение предлагает государственная поддержка и инициативы вроде того же «Цифрового Казахстана», направленные на оснащение школ. В перспективе, по мере удешевления технологий, устройства AR станут более доступными, включая появление бюджетных AR-очков или расширение парка школьных планшетов. Второй вызов – методический и психологический барьер. Учителям требуется время и усилия, чтобы освоить новые формы работы. Некоторые педагоги могут скептически относиться к AR, считая это игрушкой или отвлекающим фактором. Необходимо преодолеть сопротивление со стороны преподавателей, показывая реальные преимущества для обучения и предоставляя поддержку. Также важно учитывать, что у учеников может возникать стресс – перегрузка от обилия цифровых эффектов, либо, напротив, чрезмерное увлечение игровой стороной в ущерб учебным целям [10]. Отмечались случаи, когда AR-приложения вызвали у некоторых учащихся трудности в использовании (проблемы с интерфейсом, метками и т.д.), что парадоксально повышало “порог входа” для этих учеников. Таким образом, при внедрении нужно тщательно продумывать удобство приложений, давать инструкции и постепенно усложнять задания, чтобы не отпугнуть новичков техническими нюансами. Еще одна проблема – ограниченное количество качественного образовательного контента. Хотя рынок AR-приложений растет, по некоторым узким темам робототехники может не быть готовых решений. Создание же собственного AR-контента требует либо времени от учителя, либо участия сторонних разработчиков. Перспективным направлением здесь является сотрудничество вузов, EdTech-компаний и школ для разработки локализованных AR-ресурсов на казахском и русском языках, учитывающих специфику программы РК. Несмотря на перечисленные трудности, перспективы применения AR в образовании выглядят очень позитивно. Технология стремительно развивается: с каждым годом устройства становятся мощнее, появляются новые платформы и инструменты для упрощенной разработки AR-сцен. Растет сообщество преподавателей-новаторов, уже накопивших опыт интеграции AR и готовых делиться лучшими практиками. В образовательных планах многих стран AR упоминается как часть стратегии цифровизации обучения. В Казахстане, учитывая акцент на модернизации образования и подготовке учащихся к компетенциям XXI века, AR может занять прочное место в преподавании не только робототехники, но и других предметов (физика, химия, биология, история – где визуализация тоже крайне важна). В долгосрочной перспективе, AR и смежные технологии (VR, смешанная реальность) способны трансформировать школьную среду, сделав обучение более персонализированным, интерактивным и приближенным к реальному миру. Главное – преодолеть начальные барьеры и извлечь из технологий максимальную пользу для образования [11].

При анализе эффективности AR важно сопоставить ее с привычными методами обучения робототехнике – чтением учебников и использованием компьютерных симуляторов. По сравнению с учебниками AR дает несомненное преимущество в наглядности. В то время как учебник может содержать лишь статичные изображения или описания роботов, AR обеспечивает объемное восприятие: ученик может обойти вокруг виртуального робота, рассмотреть его со всех сторон, увеличить или уменьшить масштаб модели. Такая непосредственная визуализация облегчает понимание пространственных аспектов – размеров деталей, пропорций, взаимного расположения компонентов, что в тексте передать сложно. Кроме того, AR добавляет элемент взаимодействия: вместо пассивного чтения у учащегося есть возможность активно манипулировать объектом (разбирать, запускать, изменять параметры), что соответствует принципам деятельностного подхода в образовании. Это делает

усвоение материала более прочным – известно, что учащиеся лучше запоминают то, что делают сами, а не просто читают или слушают.

Если сравнивать AR с компьютерными симуляциями на экране, различия более тонкие. Традиционные симуляторы (виртуальные лаборатории, 3D-модели на компьютере) уже давно используются в обучении робототехнике и дают возможность отрабатывать навыки программирования без реальных устройств. AR, по сути, расширяет идею симулятора, выводя его в окружающее пространство. Ключевое отличие – контекстность и ощущение присутствия. В обычной симуляции модель робота ограничена экраном монитора; ученик воспринимает ее отстраненно. В AR же виртуальный робот появляется прямо перед учеником в классе или дома, как бы становясь частью реального мира. Это создает эффект совместного пространства: учащиеся могут подойти к проекции робота, указать на него рукой, обсудить с одноклассником, как если бы перед ними действительно стояла техника. Благодаря этому AR-сценарии нередко оказываются более увлекательными и наглядными, чем работа с симулятором на ПК. К тому же, AR может задействовать мобильные устройства, давая большую свободу – ученики не привязаны к компьютеру, они могут перемещаться, выполняя задания (например, провести робота по траектории, нарисованной на полу, глядя через планшет). Это приближает виртуальный опыт к реальному практическому занятию. Однако стоит отметить, что AR и традиционные электронные симуляции имеют и схожие ограничения. Обе технологии требуют определенной технической оснащенности и навыков работы с ПО. В отличие от физических экспериментов, виртуальные могут не полностью передавать тактильный опыт, ощущение массы, инерции и других реальных факторов. Поэтому не следует противопоставлять AR классическим методам, а лучше использовать их комплементарно. Учебники по-прежнему важны для теоретической базы и справочной информации; компьютерные симуляторы удобны для отработки кода в комфортной среде. AR же может связать теорию и практику, сделав учебный процесс более осмысленным: прочитав о принципе, ученик сразу видит его проявление на виртуальном объекте, а написав программу – наблюдает, как виртуальный робот выполняет ее в реальном пространстве. Такой цикл «чтение – симуляция – наблюдение в AR – реальный эксперимент» дает наиболее полный образовательный эффект.

С технической точки зрения, наиболее простым для массового внедрения является реализация технологии дополненной реальности на базе мобильных устройства обучающихся. В таком случае, необходимо приложение с поддержкой дополненной реальности с образовательными материалами по робототехнике. При этом существует два фундаментальных подхода к реализации дополненной реальности: добавление нового виртуального объекта, а также наложение виртуального слоя. Добавление виртуального объекта позволяет познакомить обучающегося с как правило недоступным для изучения объектом (см. рис. 2). Модель робота проецируется на маркер дополненной реальности (заранее подготовленное изображение), либо с помощью технологии позиционирования SLAM располагается на определенных системой окружающих пользователя плоскостях. Контекстная связь с реальным окружением при этом достаточно слабая, такие симуляции относительно просты в реализации и масштабировании. Однако к недостаткам стоит отнести отсутствие физической обратной связи. Для добавления виртуального информационного слоя требуется объект в реальности, на который система уже будет позиционировать некоторую модель для повышения наглядности или расширения функционала (см. рис. 3). При этом сохраняется полная физическая обратная связь, однако такие системы сложнее в разработке, а также требуют распространения физических объектов, что затрудняет масштабирование.

Заключение

Подводя итог, дополненная реальность представляет собой эффективное средство обучения робототехнике в школе. Для Республики Казахстан внедрение AR-технологий открывает возможность преодолеть ограниченность материальной базы и вывести преподавание

инженерно-технических дисциплин на новый уровень. Дополненная реальность позволяет изучать устройства и принципы работы роботов в наглядной и интерактивной форме, недоступной при традиционных подходах. Научные исследования и практические кейсы – от казахстанских школ до международных проектов – демонстрируют, что AR повышает интерес учащихся, улучшает усвоение материала и делает возможным проведение виртуальных экспериментов. В условиях, когда школы не всегда могут оборудовать полноценные робототехнические лаборатории, дополненная реальность выступает частичной альтернативой, предоставляя каждому ученику “виртуального робота” для освоения навыков программирования и конструирования. Одновременно необходимо учитывать и решать возникающие вызовы: обеспечивать школы техникой, готовить педагогов к работе с новыми инструментами, создавать качественные учебные материалы и приложения. При правильном подходе AR интегрируется в учебный процесс не как развлечение, а как полноценный дидактический инструмент, дополняющий учебники и реальные практикумы. Сравнение с традиционными методами показывает, что AR не заменяет их полностью, но существенно расширяет дидактические возможности, делая обучение более близким к практике и интересным для современного поколения учеников.

Мобильные приложения по робототехнике с поддержкой технологии дополненной реальности для личных устройств обучающихся позволяют наиболее эффективно масштабировать такой инструментарий среди всех школ Республики Казахстан. При этом, в зависимости от учебной задачи и технических возможностей может применяться как добавление виртуального объекта (при отсутствии физических моделей и образцов), так и добавление информационного слоя (при наличии объектов, но при сложной структуре и недостаточном функционале). Для системы образования Казахстана, нацеленной на инновации, дальнейшее развитие AR-направления может стать значимым шагом. Создание сетевых сообществ учителей, обмен научно-методическими исследованиями, поддержка пилотных проектов на государственном уровне, разработка образовательных мобильных приложений – все это будет способствовать успешному внедрению дополненной реальности. Можно прогнозировать, что уже в ближайшие годы такое средство займет прочное место в классах по робототехнике, а опыт Казахстана в этой области станет примером эффективной модернизации образования в цифровую эпоху.

Благодарность

Статья подготовлена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан в рамках грантового исследования: №AP19579496 «Разработка мобильного приложения по обучению робототехнике для учащихся средней казахской школы».

Список использованных источников

- [1] Mukhtarkyzy K., Abildinova G., Sayakov O. *The Use of Augmented Reality for Teaching Kazakhstani Students Physics Lessons // International Journal of Emerging Technologies in Learning*. – 2022. – Vol. 17, № 12. – P. 215–235.
- [2] Mukhtarkyzy K., Abildinova G., Serik M., Kariyeva K., Sayakov O. *Systematic Review of Augmented Reality Methodologies for High School Courses // International Journal of Engineering Pedagogy*. 2023. Vol. 13, № 4. P. 79–92.
- [3] Cheli M., Sinapov J., Danahy E., Rogers C. *Towards an Augmented Reality Framework for K-12 Robotics Education // Proceedings of the 1st International Workshop on Virtual, Augmented and Mixed Reality for Human-Robot Interaction (VAM-HRI'18), Chicago, IL, USA*. – 2018. – P. 1–4.
- [4] Daineko Ye., Ipalakova M., Tsoy D., Bolatov Zh., Baurzhan Zh., Yelgondy Ye. *Augmented and virtual reality for physics: Experience of Kazakhstan secondary educational institutions // Computer Applications in Engineering Education*. – 2020. – Vol. 28, № 5. – P. 1220–1231.
- [5] Satubaldina A. *Virtual and augmented reality lab launches in capital school to help kids learn // The Astana Times*. – 2019. – 8 April. – URL: <https://astanatimes.com/2019/04/virtual-and-augmented-reality-lab-launches-in-capital-school-to-help-kids-learn/> (дата обращения: 05.03.2025).

[6] Grace C. *Augmented Reality: A Tool for Teaching Students Robot Programming* [Электронный ресурс] // RobotLAB Blog. 2024. URL: <https://www.robotlab.com/blog/augmented-reality-a-tool-for-teaching-students-robot-programming> (дата обращения: 05.03.2025)

[7] Satubaldina A. *Virtual and Augmented Reality Lab Launches in Capital School to Help Kids Learn* // The Astana Times. 2019. URL: <https://astanatimes.com/2019/04/virtual-and-augmented-reality-lab-launches-in-capital-school-to-help-kids-learn/> (дата обращения: 15.03.2025)

[8] eROBSON (*Educational Robotics at Schools Online with Augmented Reality*) [Электронный ресурс] // Официальный сайт проекта e-robson.eu. URL: <https://e-robson.eu/project/> (дата обращения: 15.03.2025).

[9] Temirkhanova M., Abildinova G., Karaca C. *Enhancing digital literacy skills among teachers for effective integration of computer science and design education: a case study at Astana International School, Kazakhstan* // *Frontiers in Education*. 2024. Vol. 9. DOI: 10.3389/feduc.2024.1408512. URL:

[10] Гриншкун А.В., Вознесенская, Н. В. *Применение виртуальных лабораторий в системе общего образования* / Н.В.Вознесенская, А.В. Гриншкун // *Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования*. 2021. № 3(57). С. 40-45. DOI 10.25688/2072-9014.2021.57.3.05. EDN MDTPTY.

[11] Мнацаканян, В. В. *Роль и место лаборатории виртуальной реальности в организации учебных занятий студентов педагогического вуза* / В. В. Мнацаканян // *Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования : Сборник тезисов докладов международной научной конференции, Елец, 29 сентября – 01 октября 2023 года. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2023. – С. 218-221. – EDN JARGPF.*

References

[1] Mukhtarkyzy, K., Abildinova, G., & Sayakov, O. (2022). *The use of augmented reality for teaching Kazakhstani students physics lessons*. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 17(12), 215–235. <https://doi.org/10.31489/2024ped1/29-47>

[2] Mukhtarkyzy, K., Abildinova, G., Serik, M., Kariyeva, K., & Sayakov, O. (2023). *Systematic review of augmented reality methodologies for high school courses*. *International Journal of Engineering Pedagogy*, 13(4), 79–92. <https://doi.org/10.3991/ijep.v13i4.38165>

[3] Cheli, M., Sinapov, J., Danahy, E., & Rogers, C. (2018). *Towards an augmented reality framework for K-12 robotics education*. *Proceedings of the 1st International Workshop on Virtual, Augmented and Mixed Reality for Human-Robot Interaction (VAM-HRI'18), Chicago, IL, USA, 1–4*. https://www.eecs.tufts.edu/~jsinapov/papers/Cheli_VAMHRI2018.pdf

[4] Daineko, Y., Ipalakova, M., Tsoy, D., Bolatov, Z., Baurzhan, Z., & Yelgondy, Y. (2020). *Augmented and virtual reality for physics: Experience of Kazakhstan secondary educational institutions*. *Computer Applications in Engineering Education*, 28(5), 1220–1231. <https://doi.org/10.1002/cae.22297>

[5] Satubaldina, A. (2019, April 8). *Virtual and augmented reality lab launches in capital school to help kids learn*. *The Astana Times*. Retrieved March 5, 2025, from <https://astanatimes.com/2019/04/virtual-and-augmented-reality-lab-launches-in-capital-school-to-help-kids-learn/>

[6] Grace, C. (2024). *Augmented reality: A tool for teaching students robot programming*. *RobotLAB Blog*. Retrieved March 5, 2025, from <https://www.robotlab.com/blog/augmented-reality-a-tool-for-teaching-students-robot-programming>

[7] Satubaldina, A. (2019). *Virtual and augmented reality lab launches in capital school to help kids learn*. *The Astana Times*. Retrieved March 15, 2025, from <https://astanatimes.com/2019/04/virtual-and-augmented-reality-lab-launches-in-capital-school-to-help-kids-learn/>

[8] eROBSON (*Educational Robotics at Schools Online with Augmented Reality*). (n.d.). *Official website of e-robson.eu*. Retrieved March 15, 2025, from <https://e-robson.eu/project/>

[9] Temirkhanova, M., Abildinova, G., & Karaca, C. (2024). *Enhancing digital literacy skills among teachers for effective integration of computer science and design education: A case study at Astana International School, Kazakhstan*. *Frontiers in Education*, 9. <https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1408512>

[10] Grinshkun, A. V., & Voznesenskaja, N. V. (2021). *Primenenie virtual'nyh laboratorij v sisteme obshhego obrazovaniya* [The use of virtual laboratories in the general education system]. *Vestnik MGPU. Serija: Informatika i informatizacija obrazovaniya*, 3(57), 40–45. <https://doi.org/10.25688/2072-9014.2021.57.3.05> (In Russian)

[11] Mnacakanjan, V. V. (2023). *Roľ i mesto laboratorii virtual'noj real'nosti v organizacii uczebnyh zanjatij studentov pedagogičeskogo vuza* [The role and place of the virtual reality laboratory in the organization of educational activities for students of a pedagogical university]. *Fundamental'nye problemy obuchenija matematike, informatike i informatizacii obrazovaniya: Sbornik tezisev dokladov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, Elec, 29 sentjabrja – 01 oktjabrja 2023 goda*, 218–221. (In Russian)

Л.Қ. Жайдақбаева¹, Қ.Қ. Тынышбек^{1*}

¹М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент қ., Қазақстан

*e-mail: kanat_alwyn@mail.ru

БІЛІМ БЕРУДЕГІ ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ: ӘДЕБИЕТТЕРГЕ ЖҮЙЕЛІ ШОЛУ

Аңдатпа

Жасанды интеллектті (ЖИ) білім беру саласына енгізу (Artificial Intelligence in Education- AIED) көптеген перспективаларды қамтитын айтарлықтай зерттеу саласына айналды. Бұл мақала 1463 зерттеу жұмысының библиометриялық талдауына және 118 таңдалған мақаланың мазмұн (контент)-талдауына негізделген әдебиеттерге шолу болып табылады. Шолу мынадай негізгі мәселелерді қарастырады: білім берудегі ЖИ қолданбаларының негізгі санаттары, басым зерттеу тақырыптары мен олардың нәтижелері және зерттеулердің әдіснамалық аспектілері. Талдау адаптивті оқытуды, жекелендірілген оқытуды, интеллектуалды бағалау мен басқаруды, профильдеу мен болжамдауды және оның жаңа өнімдерін қамтитын ЖИ қолданбаларының кең ауқымын көрсетеді. Зерттеу тақырыптары білім беру жүйелерінің техникалық дизайнына, сондай-ақ AIED-ті енгізуді, әсер етуді және мәселелерді зерттеуге тереңірек бағытталған. Шолу сонымен қатар AIED зерттеулерінде қолданылатын теориялардың әртүрлілігін, жарияланымдардың көпсалалы сипатын және жеткіліксіз зерттелген салаларды көрсетеді. Бұл жұмыс AIED зерттеулерінің ағымдағы жағдайын түсінуге және осы динамикалық саладағы болашақ мүмкіндіктерді анықтауға ұмтылатын зерттеушілер үшін құнды ақпарат беретін болады.

Түйін сөздер: жасанды интеллект, информатика, библиометриялық талдау, әдебиеттерге шолу, мазмұнды талдау.

Л.К. Жайдақбаева¹, К.К.Тынышбек¹

¹Южно-Казахстанский университет М.Ауезова, г.Шымкент, Казахстан

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В ОБРАЗОВАНИИ: СИСТЕМНЫЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Аннотация

Внедрение искусственного интеллекта (ИИ) в сферу образования (Artificial Intelligence in Education- AIED) стало значительной областью исследований, охватывающей множество точек зрения. Эта статья представляет собой обзор литературы, основанный на библиометрическом анализе 1463 исследовательских работ и анализе содержания (содержания) 118 выбранных статей. В обзоре рассматриваются следующие основные вопросы: основные категории приложений ИИ в образовании, приоритетные темы исследований и их результаты, а также методологические аспекты исследований. Анализ показывает широкий спектр приложений ИИ, включая адаптивное обучение, персонализированное обучение, интеллектуальную оценку и управление, профилирование и прогнозирование, а также его новые продукты. Темы исследований более глубоко сосредоточены на техническом дизайне образовательных систем, а также на изучении внедрения, воздействия и проблем AIED. Обзор также подчеркивает разнообразие теорий, используемых в исследованиях AIED, междисциплинарный характер публикаций и недостаточно изученные области. Эта работа предоставит ценную информацию для исследователей, стремящихся понять текущее состояние исследований AIED и определить будущие возможности в этой динамичной области.

Ключевые слова: искусственный интеллект, информатика, библиометрический анализ, обзор литературы, контент-анализ

L.K. Zhaidakbayeva¹, K.K. Tynyshbek¹

¹M. Auezov South-Kazakhstan university, Shymkent, Kazakhstan

ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN EDUCATION: SYSTEMATIC REVIEW OF LITERATURE

Abstract

The introduction of artificial intelligence (hereinafter referred to as AI) into education (Artificial Intelligence in Education, hereinafter referred to as AIED) has become a significant field of research, covering many perspectives. This article is a literature review based on a bibliometric analysis of 1463 research papers and a content (content) analysis of 118 selected articles. The review addresses the following key issues: the main categories of AI applications in education, priority research topics and their results, and methodological aspects of research. The analysis highlights a wide range of AI applications, including adaptive learning, personalized learning, intelligent assessment and Management, Profiling and forecasting, and its new products. Research topics focus more deeply on the technical design of educational systems, as well as the study of implementation, impact, and issues of AIED. The review also highlights the diversity of theories used in AIED research, the multidisciplinary nature of publications, and insufficiently studied areas. This work will provide valuable information for researchers seeking to understand the current state of AIED research and identify future opportunities in this dynamic area.

Keywords: artificial intelligence, computer science, bibliometric analysis, literature review, content analysis

Негізгі ережелер

AIED саласындағы негізгі тұжырымдамаларды ашу және түсіну үшін библиометриялық талдау мен мазмұндық талдауды біріктіретін аралас зерттеу әдісін пайдалатын зерттеу жұмысы қарастырылатын болады. Екі тәсілден алынған қорытындылар AIED тұжырымдамаларын жан-жақты түсіну үшін құрастырылған мақсатымызға сәйкес келеді. Бұл зерттеу AIED әдебиеттеріне шолулардың көлемін толықтырады және осы саланың тұжырымдамалық құрылымын түсінудің маңыздылығын атап өтеді.

Кіріспе

Білім беру және академиялық тәжірибелер соңғы уақытта айтарлықтай және ауқымды технологиялық жетістіктерге жетті, бұл жасанды интеллекттің жақында енгізілуінен ерекше көрінеді. Технологиялық зерттеулер мен машиналық оқытудың кіріктірілген инновациялары тілдік генерациялау модельдерін енгізуді жеделдетті [1]. Бұл өз кезегінде контентті жасау технологиясының дамуына және генеративті ЖИ көмегімен цифрлық контент жасау мен сценарийлерді әзірлеуге қатысты инновацияларға әкелді. Білім беруде ЖИ пайдаланудың айқын артықшылықтарына қарамастан, шешілмеген бірқатар мәселелер бар [2,3]. Бұл құралдарды қалай қауіпсіз, этикалық және сенімді түрде пайдалануға болатынын қарастыру қажет. Бұл шолудың мақсаты - қолданыстағы әдебиеттерді бағалау, шешілмеген мәселелерді анықтау және білім беруде ЖИ тиімді пайдалану стратегияларын анықтау болып табылады.

Зерттеу әдіснамасы

Бұл жұмыс библиометриялық талдау мен әдебиетті жүйелі шолуды біріктіретін аралас әдістемені пайдаланады. Библиометриялық талдау - жариялау жылын, атауын, аннотациясын, дәйексөздерін, авторларын және мекемелері сияқты ауқымды зерттеу мақалаларының метадеректерін сандық түрде қорытындылауды қамтиды [4]. Бұл әдіс [5] шолуында қарастырылған, кең ауқымда және деректер көп болған кезде зерттеу саласының жай-күйін тиімді бағалауға мүмкіндік береді. Деректерді талдау үшін Web of Science (WoS) дерекқоры пайдаланылды. Іздеу процесі тақырыпта, аннотацияда немесе кілт сөздерде жасанды интеллект және білім терминдері бар ағылшын тіліндегі мақалалар бойынша жүргізілді. Бастапқы деректер жинағы 2587 мақаланы қамтыды, қолмен сәйкестікті тексеру және толық мәтінге қол жеткізуден кейін, 1984 жылдан 2022 жылдың маусымына дейін жарияланған, түпкілікті деректер жиынтығы 1463 мақаланы құрады [6] (кесте 1).

Кесте 1. Деректер жинағы

Сипаттама	Нәтижелер
Уақыт аралығы	1984:2022 (маусым)
Қосылған журналдар	1,247
Қосылған мақалалар	1,463
Жарияланған кезден бастап орташа жылдар саны	5,62
Құжаттар бойынша орташа дәйексөздер саны	4,09
Келтірілген сілтемелер	60,764
Қосымша кілт сөздер (ID)	1,336
Автордың негізгі сөздері (DE)	5,076

Әдебиеттерді жүйелі шолу - зерттеу мақалаларының мазмұнын талдауды және зерттеушілерді қызықтыратын зерттеулердің тұстарына тереңірек үңілуге мүмкіндік береді [7]. Мазмұндық талдау үшін келесі критерийлерге сәйкес келетін:

- Journal Citation Reports журналында Q1 квантиль санатындағы журналдарында жарияланған;

- ЖИ қолданбалары зерттелетін және олардың оқыту процесіне әсері нақты сипатталған;
- Эмпирикалық зерттеулер қарастырылған 125 эмпирикалық зерттеу мақаласы таңдалды.

Талдау үшін ЖИ оқыту мен мұғалімдерді дамытудың интеграциясына бағытталған мақалалар таңдалды [8]. Scopus және Web of Science (WoS) дерекқорлары арқылы іздеу жүргізілді. Таңдауға алынған критерийлер:

- 2015 жылғы 1 қаңтар мен 2024 жылғы 30 шілде аралығында жарияланған мақалалар;
- Жасанды интеллект («artificial intelligence», «AI», «ChatGPT», «GAI», «Generative AI») және оқыту, кәсіби даму («teaching», «teacher training», «teacher professional development») тақырыптарында, негізгі сөздерде немесе аннотацияларда байланысты терминдерді қамтиды;
- Мұғалімдердің педагогикалық тәжірибеде және кәсіби дамуында ЖИ қолдануына қатысты эмпирикалық зерттеулер;
- Концепциялық жұмыстар, әдебиет шолулары, түсініктемелер, конференция материалдары және басқа да эмпирикалық емес зерттеулер алынып тасталды.

Іріктеу кезеңдері:

1. Қайталанатын мақалаларды жою (485 мақала).
2. Тақырыптар мен аннотациялар бойынша бастапқы іріктеу (696 мақала алынып тасталды).
3. Толық мәтінсіз мақалаларды алып тастау (23 мақала).
4. Толық мәтінді мақалаларды талдағаннан кейін соңғы іріктеу (74 мақала алынып тасталды).
5. Нәтижесінде 15 мақала жүйелі шолуға қосылды (кесте 2).

Кесте 2. Мақалалар тізімі

№	Мақала	Түрі	Рецензияның мазмұны	Мақалаларды рецензиялау уақыты	Зерттеу саласы
1	Kulik & Fletcher, 2016	50 мақалаға жүйелі шолу	Зияткерлік оқыту жүйелерінің тиімділік шамалары синтезделіп, талданған	Көрсетілмеген	Интеллектуалды оқыту жүйелері
2	Chassignol et al., 2018	Әдеби шолу	Білім беру процесінің әртүрлі құрамдас бөліктері бойынша: мазмұн, оқыту әдістері, бағалау және коммуникация бойынша	Көрсетілмеген	Жалпы мәліметтер

			тексерілген қосымшаларды жіктейтін құрылым әзірленген		
3	Zhang et al., 2018	1579 мақаланың библиометриялық зерттеуі	Кітаптану деректеріне сипаттамалық талдау жасалған, соның ішінде жетекші авторлар мен журналдар; Оқытуды талдаудың төрт әдісі және олардың эволюциясының үлгілері жинақталған	1995-2008 жылдар	Тренингтік аналитика
4	Hinojo-Lucena et al., 2019	132 мақаланың библиометриялық зерттеуі	Кітапханалық деректерге сипаттамалық зерттеу жүргізген, оның ішінде жарияланымдардың тенденциялары, көздері, авторлары, ұйымдары және елдері қарастырылған	2007-2017 жылдар	Жоғары білім
5	Zawacki-Richter et al., 2019	146 жұмыстың жүйелі шолуы	Кітапханалық деректерді сипаттамалық талдауды жүргізген, оның ішінде жарияланымдардың тенденциялары, журналдар, елдер, авторлардың тиесілілігі және әдістерді жинақтаған	2007-2018 жылдар	Жоғары білім
6	Charitopoulos et al., 2020	316 жұмыстың жүйелі шолуы	Білім беру мәселелері, оқыту контексттері, пайдаланылған жұмсақ есептеу әдістері және білім беру деректерін талдау мен оқытуды талдаудың әрбір саласы үшін негізгі журналдар қарастырылған	2010-2018 жылдар	Білім беру деректерін интеллектуалдық талдау және зерттеуді оқыту аналитикасы
7	Chen, Xie, & Hwang, 2020	9560 мақаланың библиометриялық зерттеуі	Гранттар, конференциялар, журналдар, бағдарламалық құралдар, мекемелер және зерттеушілер сияқты библиометриялық деректерге сипаттамалық зерттеу жүргізілген	1999-2019 жылдар	Жалпы мәліметтер
8	Chen, Xie, Zou, et al., 2020	45 мақаланың жүйелі талдауы	Журналдағы жарияланымдар, дәйексөздер саны, авторлардың аймақтары мен мекемелері, қолдану сценарийлерінің түрлері, зерттеу мәселелері, қабылданылған ЖИ технологиялары және тиісті анықтамалар талданған	1990-2016 жылдар	Жалпы мәліметтер
9	Guan et al., 2020	Компьютерлік мәтіндік талдау және 425 мақаланың қолмен мазмұндық талдауы	Екі кезең ішінде (2000-2009 және 2010-2018 жылдар аралығында) зерттеу тақырыптарын қарастырған	2000-2019 жылдар	Жалпы мәліметтер
10	González-Calatayud et al., 2021	22 мақаланың жүйелі шолуы	ЖИ анықтамасы, қолданылатын педагогикалық модельдер, ЖИ пайдалану себептері, автоматты баллдарды есептеуді пайдалану және бағалауды салыстыру, ЖИ	2010-2020 жылдар	Оқушыларды бағалау үшін жасанды интеллект

			пайдалану мен пайдаланбау арасындағы бағалаудың дәлдігі қарастырылады.		
11	Hwang & Tu, 2021	43 мақаланың библиометриялық дисплейін талдау және жүйелі шолу	Жарияланым журналының шолуы, мақалалардан үзінділер, келтірілген авторлар, негізгі сөздер, қолдану аймағы, үлгілер тобы, зерттеу әдістері, ЖИ рөлі, қабылданған ЖИ алгоритмдері және зерттеу мәселелері	1996-2020 жылдар	Математикадағы білім берудегі жасанды интеллект
12	Luan & Chin-Chung, 2021	40 эмпирикалық жұмыстың жүйелі шолуы	Зерттеу жұмысының көптеген элементтері, соның ішінде зерттеу мақсаты, оқыту контексті, деректер көздері, студенттердің жеке айырмашылықтары, оқу нәтижелері, оқыту алгоритмдері, алгоритмдерді бағалау және негізгі зерттеу нәтижелері қарастырылады.	2016-2020 жылдар	Машиналық оқытуға негізделген дәлдікті оқыту
13	Okonkwo & Ade-Ibijola, 2021	53 жұмыстың жүйелі шолуы	Чат-бот қолданбаларының түрлері, олардың артықшылықтары, енгізу мәселелері және болашақтың әлеуетті аймақтары жалпыландырылған	2015-2021 жылдар	Білім берудегі чат-боттар
14	Celik et al., 2022	44 мақаланың жүйелі шолуы	AIED-дегі мұғалімдердің рөлі, ЖИ мұғалімдерге ұсынатын артықшылықтар, мұғалімдер ЖИ-ны пайдалану кезінде кездесетін қиындықтар және мұғалімдермен ЖИ-не негізделген зерттеулердегі ЖИ әдістері қарастырылды.	2004-2020 жылдар	Мұғалімдердің көзқарасы
15	Xi & Ouyang, 2022	AI-STEM 63 эмпирикалық зерттеулерінің жүйелі шолуы	STEM біліміндегі AI қолданбаларын және білім беру ақпараты (контент), пәндер (мамандар мен нұсқаушылар), орта және қоршаған орта сияқты байланысты элементтерді қорытындылады	2011-2021 жылдар	STEM біліміндегі AI

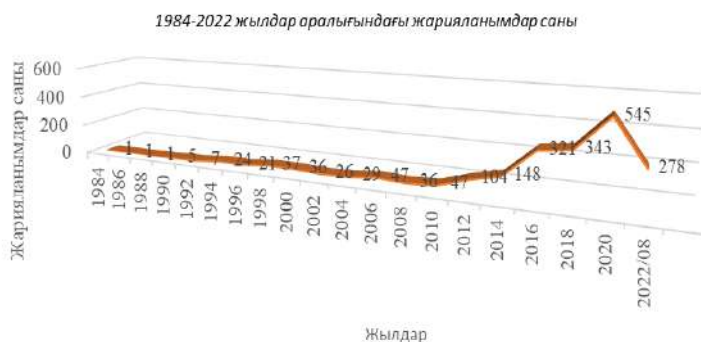
Библиометриялық талдау (жарияланған мақалалардың тенденциялары): мақалалар 1984 жылдан 2022 жылдың маусымына дейінгі кезенді қамтиды [9]. 2017 жылға дейін AIED зерттеудің айтарлықтай саласы болған жоқ, жылдық жарияланымдар саны 50-ден аз. Ал 2017 жылдан кейін, әсіресе 2019 және 2021 жылдар аралығында, ЖИ мүмкіндіктерінің жылдам дамуы және COVID-19 пандемиясы кезінде онлайн оқуға көшуден туындаған айтарлықтай өсу байқалады (сурет 1). Мақалалар AIED-тің пәнаралық сипатын көрсететін информатика, білім және басқару ақпараттық жүйелерін қамтитын әртүрлі журналдарда жарияланады [10] (сурет 2). Ашық журналдар AIED жарияланымдарының негізгі арнасы болып табылады, дегенмен Computers & Education және Computers in Human Behavior сияқты дәстүрлі журналдар дәйексз тұрғысынан көбірек әсер етеді [11] (сурет 3, 4, 5).

Зерттеу нәтижелері

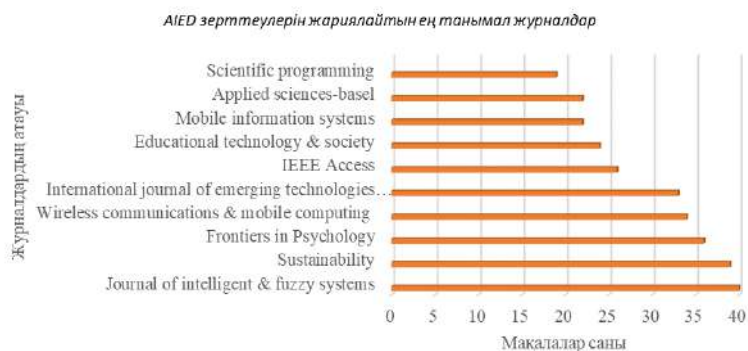
Жоғарыда келтірілген жұмыстарды кең ауқымды қамтитын тақырыптар бойынша үш санатқа бөлуге болады:

- Жалпы шолу мақалалары мен әдебиет шолулары;

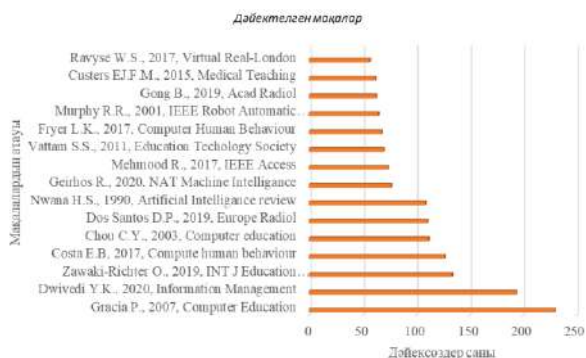
- Машиналық оқыту, интеллектуалды оқыту, чат-боттар және білім беру робототехникасы сияқты танымал ЖИ қолданбалары туралы зерттеулер;
- ЖИ жүйелеріне деген қабылдау және көзқарас туралы зерттеулер.



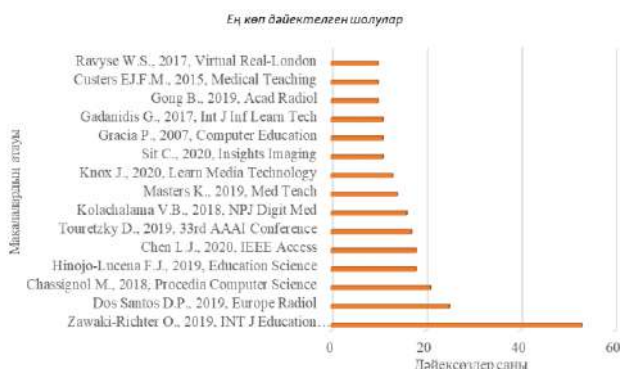
Сурет 1. Жылдар бойынша ғылыми жарияланымдар



Сурет 2. AIED зерттеулерін жариялайтын ең танымал журналдар



Сурет 3. Ең көп дәйектелген мақалалар



Сурет 4. Ең көп дәйектелген шолулар



Сурет 5. Шыңдарға белгіленген мақалалар - AIED-ке маңызды үлес қосқандар

Дискуссия

Негізгі сөздердің бірлескен атауларын талдау (keywords plus және авторлық кілт сөздер) әдебиеттегі тұжырымдамалық үлгілерді анықтады. Өртүрлі ұғымдар арасындағы байланыстар, соның ішінде бейімделгіш оқыту, жекелендірілген оқыту, интеллектуалды оқыту жүйелері және чат-боттар анықталды [12-17]. AIED қолданбаларының төрт негізгі санаты анықталды (сурет 6):

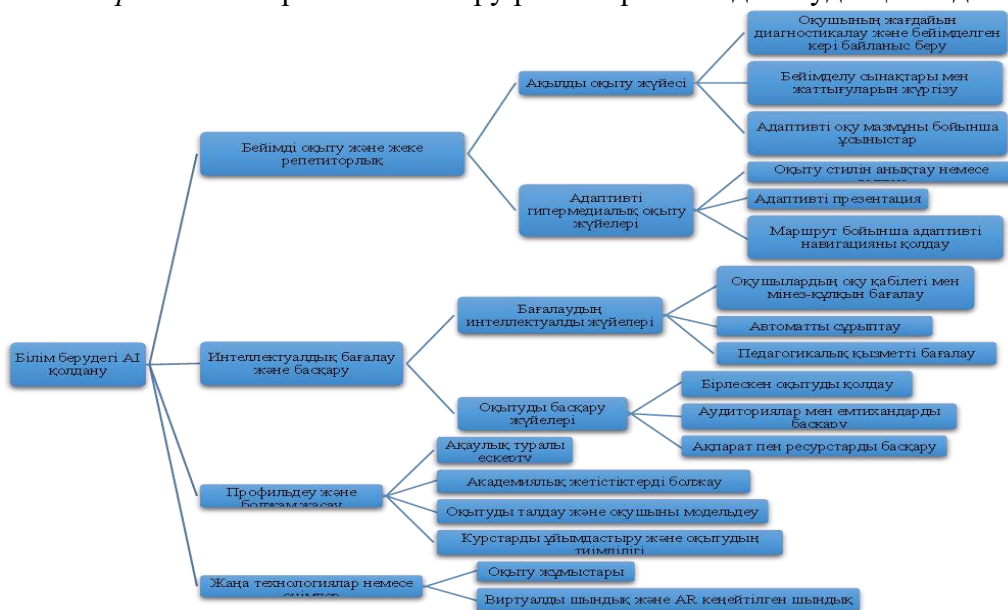
1. *Адаптивті оқыту және жекелендірілген оқыту*: Тұлғаға арналған нұсқаулар мен кері байланыс беру арқылы оқытушының рөлін имитациялайтын интеллектуалды оқыту жүйелері (қысқаша, ағылш. - ITS). ITS функциялары: студенттердің мәртебесін диагностикалау, адаптивті кері байланыс беру, адаптивті тестілеу және нұсқаулар.

Презентациялар мен навигацияны реттей отырып, студенттердің оқу стилі мен қалауын ескеретін адаптивті гипермедиалық оқыту жүйелері (қысқаша, ағылш. - AHLS). AHLS функциялары: оқыту стилін анықтау, адаптивті презентация және навигацияны қолдау.

2. *Ақылды бағалау және басқару*: Оқытуды басқаруды, студенттердің өзара әрекеттесуін және әкімшілік жұмыс процестерін қолдайтын оқуды басқару жүйелері (қысқаша, ағылш. - LMS). LMS функциялары: бірлескен оқуды қолдау, сыныптар мен емтихандарды басқару, ақпарат пен ресурстарды басқару.

3. *Профильдеу және болжау*: студенттердің үлгерімін болжау және оқудан шығып қалу тәуекелдерін анықтау үшін қолданылады.

4. *Жаңа өнімдер*: чат-боттар мен білім беру роботтарын пайдалануды қамтиды.



Сурет 6. AIED қолданбаларының негізгі санаттары

Қорытынды

Бұл зерттеу AIED саласындағы негізгі тұжырымдамаларды ашу және түсіну үшін библиометриялық талдау мен мазмұндық талдауды біріктіретін аралас зерттеу әдісін пайдаланды. Екі тәсілден алынған қорытындылар AIED тұжырымдамаларын жан-жақты түсінуді қамтамасыз ету үшін сәйкес келеді. Бұл зерттеу AIED әдебиеттеріне шолулардың көлемін толықтырады, осы саланың тұжырымдамалық құрылымын түсінудің маңыздылығын атап өтеді.

Ең жиі зерттелетін тақырып AIED жүйелері мен қолданбаларын жобалау болып табылады. Басқа тақырыптарға AIED енгізу және қабылдау, AIED әсері және онымен байланысты мәселелер кіреді. Ең көп қолданылатын әдіс - эксперименттер. Сондай-ақ статистикалық талдау, сауалнамаларды қолданатын зерттеулер, сипаттамалық талдау, сапалы зерттеулер және аралас әдістер қолданылады. Сапалы зерттеулер теорияларды құруда маңызды рөл атқарады, бірақ сирек қолданылады. Ең көп таралған теориялар оқытудың конструктивті теориясы, оқыту стильдерінің теориясы және когнитивті оқыту теориялары. Конструктивизм теориясы білімді студенттер өз тәжірибесі негізінде белсенді түрде құрастырады деп болжайды. Оқу стильдерінің теориялары оқуға деген қалау мен көзқарастағы жеке айырмашылықтарды ескереді. Когнитивті оқыту теориялары білім алудың негізінде жатқан таным мен оқыту процестерін зерттейді. Жоғары және орта білімге ең көп көңіл бөлінеді.

Сонымен қатар, зерттеу жасанды интеллект технологиясының ең соңғы нұсқаларын енгізу қажеттілігін, мектепке дейінгі білім беру контекстінде кешенді зерттеулерді күшейтуді, аралас әдістер арқылы зерттеу сапасын арттыруды, теориялық үлесті басымдыққа қоюды және компьютерлік мамандар, психологтар, оқытушылар мен сарапшылар арасындағы ынтымақтастықты кеңейтуді қоса алғанда, бірнеше болашақ бағыттарды ұсынады.

References

- [1] García, P., Amandi, A., Schiaffino, S., & Campo, M. (2007). Evaluating Bayesian networks' precision for detecting students' learning styles. *Computers & Education*, 49(3), 794–808. DOI: [10.1016/j.compedu.2005.11.017](https://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.11.017)
- [2] Santos, D. P. d., Giese, D., Brodehl, S., Chon, S. H., Staab, W., Kleinert, R., Maintz, D., & Baeßler, B. (2019). Medical students' attitude towards artificial intelligence: A multicentre survey. *European Radiology* 29, 1640–1646. DOI: [10.1007/s00330-018-5601-1](https://doi.org/10.1007/s00330-018-5601-1)
- [3] Chassignol, M., Khoroshavin, A., Klimova, A., & Bilyatdinova, A. (2018). Artificial intelligence trends in education: A narrative overview. *Procedia Computer Science* 136, 16–24. DOI: [10.1016/j.procs.2018.08.233](https://doi.org/10.1016/j.procs.2018.08.233)
- [4] Hinojo-Lucena, F.-J., Aznar-Díaz, I., Cáceres-Reche, M.-P., & Romero-Rodríguez, J.-M. (2019). Artificial intelligence in higher education: A bibliometric study on its impact in the scientific literature. *Education Science*, 9(51), 1–9. DOI: [10.3390/educsci9010051](https://doi.org/10.3390/educsci9010051)
- [5] Chen, L., Chen, P., & Lin, Z. (2020). Artificial intelligence in education: A review. *IEEE Access*, 8, 75264–75278. DOI: [10.36941/ajis-2021-0077](https://doi.org/10.36941/ajis-2021-0077)
- [6] Touretzky, D., Gardner-McCune, C., Martin, F., & Seehorn, D. (2019). Envisioning AI for K-12: What should every child know about AI? *The Thirty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-19)*, Honolulu, Hawaii, USA. DOI: [10.1609/aaai.v33i01.33019795](https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33019795)
- [7] Kolachalama, V. B., & Garg, P. S. (2018). Machine learning and medical education. *NPJ Digital Medicine*, 1(54), 1–3. DOI: [10.1038/s41746-018-0061-1](https://doi.org/10.1038/s41746-018-0061-1)
- [8] Masters, K. (2019). Artificial intelligence in medical education. *Medical Teacher*, 41(9), 976–980. DOI: [10.1002/mef2.70018](https://doi.org/10.1002/mef2.70018)
- [9] Knox, J. (2020). Artificial intelligence and education in China. *Learning, Media and Technology*, 45(3), 298–311. doi.org/10.1080/17439884.2020.1754236
- [10] Sit, C., Srinivasan, R., Amlani, A., Muthuswamy, K., Azam, A., Monzon, L., & Poon, D. S. (2020). Attitudes and perceptions of UK medical students towards artificial intelligence and radiology: A multicentre survey. *Insights into Imaging*, 11(14), 1–6. DOI: [10.1186/c13244-019-0830-7](https://doi.org/10.1186/c13244-019-0830-7)

[11] García, P., Amandi, A., Schiaffino, S., & Campo, M. (2007). Evaluating Bayesian networks' precision for detecting students' learning styles. *Computers & Education*, 49(3), 794–808. DOI: [10.1016/j.compedu.2005.11.017](https://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.11.017)

[12] Gadanidis, G. (2017). Artificial intelligence, computational thinking, and mathematics education. *The International Journal of Information and Learning Technology*, 34(2), 133–139. DOI: [10.1108/IJILT-09-2016-0048](https://doi.org/10.1108/IJILT-09-2016-0048)

[13] Luckin, R., & Cukurova, M. (2019). Designing educational technologies in the age of AI: A learning sciences driven approach. *British Journal of Educational Technology*, 50(6), 2824–2838. DOI: [10.1111/bjet.12861](https://doi.org/10.1111/bjet.12861)

[14] Duong, M. T., Rauschecker, A. M., Rudie, J. D., Chen, P.-H., Cook, T. S., Bryan, R. N., & Mohan, S. (2019). Artificial intelligence for precision education in radiology. *The British Journal of Radiology*, 92(1103), 20190389. DOI: [10.1259/bjr.20190389](https://doi.org/10.1259/bjr.20190389)

[15] Cope, B., Kalantzis, M., & Searsmith, D. (2021). Artificial intelligence for education: Knowledge and its assessment in AI-enabled learning ecologies. *Educational Philosophy and Theory*, 53(12), 1229–1245. DOI: [10.1080/00131857.2020.1728732](https://doi.org/10.1080/00131857.2020.1728732)

[16] Narbekkyzy, A. (2025). Developing students' critical thinking skills through the use of Artificial Intelligence (AI) in Kazakh language lessons. *Eurasian Science Review*, 2(Special Issue), 1791–1802. DOI: [10.63034/esr-327](https://doi.org/10.63034/esr-327). DOI: <https://doi.org/10.63034/esr-327>

[17] Smagulov, Y., Zhiembayev, Z., & Bokan, M. (2025). Artificial Intelligence in Education: Impact, Applications and Future Prospects. *Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and Mathematical Sciences*, 89(1), DOI: [10.51889/2959-5894.2025.89.1.028](https://doi.org/10.51889/2959-5894.2025.89.1.028). DOI: [10.51889/2959-5894.2025.89.1.028](https://doi.org/10.51889/2959-5894.2025.89.1.028)

Б.Е. Қойшыбай*

Астана халықаралық университеті, Астана қ., Қазақстан

*e-mail: beknurkoishybai76@gmail.com

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТТІҢ МЕКТЕПТЕГІ БІЛІМ БЕРУ ЖҮЙЕСІНЕ ЕНГІЗІЛУІН НЕГІЗДЕЙТІН КОНЦЕПТУАЛДЫ ПЕДАГОГИКАЛЫҚ МОДЕЛЬ

Аңдатпа

Бүгінде жасанды интеллект (ЖИ) технологиялары адамзат өркениетінің барлық салаларына еніп, білім беру жүйесін де жаңа парадигмаларға бағыттауда. Алайда Астана мектептеріндегі информатика пәнінің оқу бағдарламасында ЖИ тақырыбына бөлінген 16 сағат теория мен практиканы жүйелі үйлестіруге жеткіліксіз. Бұл жағдай оқушылардың алгоритмдік ойлау қабілетін, заманауи технологиялық құралдармен жұмыс істеу дағдыларын дамытуда елеулі кедергілер туғызады. Осы мәселені шешу мақсатында авторлар халықаралық тәжірибеге (ЮНЕСКО, ЭЫДҰ) сүйене отырып, мектеп деңгейінде ЖИ оқытудың теориялық және практикалық құрамдастарын біртұтас жүйеге келтіретін концептуалды педагогикалық модель ұсынды. Зерттеу барысында 26 сағаттық оқу бағдарламасы әзірленіп, Orange, TensorFlow, PyTorch, Google Colab сынды платформалар қолданылды. Әдістеменің тиімділігі Астана қаласының №111 мектебінде өткізілген педагогикалық эксперимент арқылы дәлелденді: жаңа модельді меңгерген эксперимент тобының нәтижелері бақылау тобымен салыстырғанда едәуір жоғары болды. Осы зерттеу авторлық әдістеменің білім сапасын арттырудағы нақты мүмкіндігін көрсетіп, қазақстандық мектептерге арналған инновациялық шешім ретінде ұсынылады.

Түйін сөздер: жасанды интеллект, мектеп информатикасы, педагогикалық модель, ЮНЕСКО, ЭЫДҰ, білім беру технологиясы, теория мен практика интеграциясы.

Б.Е. Койшыбай

¹Международный университет Астана, г. Астана, Казахстан

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВНЕДРЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ШКОЛЬНУЮ СИСТЕМУ ОБРАЗОВАНИЯ

Аннотация

В настоящее время технологии искусственного интеллекта (ИИ) проникают во все сферы человеческой цивилизации, включая систему образования, формируя новые парадигмы обучения. Однако в учебной программе по информатике казахстанских школ на тему ИИ отведено всего 16 академических часов, что недостаточно для системного сочетания теории и практики. Такая ограниченность существенно затрудняет развитие алгоритмического мышления и навыков работы с современными технологическими инструментами у учащихся. С целью преодоления этой проблемы авторы, опираясь на международный опыт (ЮНЕСКО, ОЭСР), разработали концептуальную педагогическую модель, интегрирующую теоретические и практические компоненты обучения ИИ на школьном уровне. В рамках исследования была создана авторская учебная программа объемом 26 часов с использованием платформ Orange, TensorFlow, PyTorch и Google Colab. Эффективность данной методики была подтверждена педагогическим экспериментом, проведенным в школе №111 города Астаны: результаты экспериментальной группы значительно превысили показатели контрольной. Данное исследование демонстрирует практический потенциал предложенной модели для повышения качества образования и может служить инновационным решением для внедрения ИИ в казахстанских школах.

Ключевые слова: искусственный интеллект, школьная информатика, педагогическая модель, ЮНЕСКО, ОЭСР, образовательные технологии, интеграция теории и практики.

B. Ye. Koishybay

Astana International University, Astana, Kazakhstan

A CONCEPTUAL PEDAGOGICAL MODEL FOR INTEGRATING ARTIFICIAL INTELLIGENCE INTO THE SCHOOL EDUCATION SYSTEM

Abstract

Today, artificial intelligence (AI) technologies are penetrating all domains of human civilization, reshaping education systems with new paradigms of learning. However, in the informatics curriculum of Kazakhstani schools, only 16 academic hours are allocated to the topic of AI—an amount insufficient to ensure a structured integration of theoretical and practical components. This limitation creates significant obstacles to the development of students' algorithmic thinking and their ability to work with modern technological tools. To address this issue, the authors propose a conceptual pedagogical model that integrates both theoretical foundations and practical applications of AI education at the school level, drawing upon international frameworks (UNESCO, OECD). A 26-hour instructional program was developed, incorporating platforms such as Orange, TensorFlow, PyTorch, and Google Colab. The model's effectiveness was validated through a pedagogical experiment conducted at School №111 in Astana: the experimental group showed substantially better results compared to the control group. This study highlights the tangible potential of the proposed methodology to enhance educational quality and serves as an innovative solution for AI integration in Kazakhstani schools.

Keywords: artificial intelligence, school informatics, pedagogical model, UNESCO, OECD, educational technology, theory-practice integration.

Негізгі ережелер

Зерттеу жұмысы мектептегі информатика пәні шеңберінде жасанды интеллектті оқытудың мазмұны мен әдістемесін жаңғырту қажеттігін негіздейді. Қолданыстағы оқу бағдарламасында ЖИ тақырыбына бөлінген сағат санының аздығы мен практикалық мазмұнның жеткіліксіздігі білім алушылардың заманауи цифрлық құзыреттерін қалыптастыруда елеулі шектеулер туғызатыны дәлелденген. Осыған байланысты зерттеуде теория мен практиканы үйлестіретін, халықаралық білім беру тәжірибесіне (ЮНЕСКО, ЭЫДҰ) сәйкес келетін 26 сағаттық оқу бағдарламасы ұсынылған. Зерттеу нәтижелері мектептегі ЖИ білім мазмұнын құрылымдауда және оны тиімді жүзеге асыруда ғылыми-әдістемелік негіз бола алады.

Кіріспе

Қазіргі әлемде жасанды интеллект (ЖИ) технологиялары барлық салада, соның ішінде білім беру жүйесінде де терең өзгерістерге жол ашып отыр. Халықаралық ұйымдардың мәліметтері бойынша, ЖИ білім беру сапасын арттырып қана қоймай, оқушыларды болашақтың цифрлық экономикасына даярлауда шешуші рөлге ие [1]. ЮНЕСКО-ның «AI and Education: Guidance for Policy-makers» атты баяндамасында әрбір елдің білім беру жүйесі ЖИ технологияларымен жұмыс істеуге дайын кадрларды қалыптастыруға бағытталуы қажет екендігі атап көрсетілген [2]. ЭЫДҰ да өз баяндамаларында ЖИ мен автоматтандырудың еңбек нарығына әсері өсіп келе жатқанын, соған сәйкес мектептегі білім мазмұнының да жаңартылуы қажет екенін нақтылайды [3]. Соңғы бірнеше жылда жасанды интеллект білім беру саласына нақты ене бастады. Бұған дәлел қазірге білім беру салаларындағы автоматтандырылған жүйелер мен ақылды чат-боттарды атап айта аламыз. 2024 жылғы 2 қыркүйекте Мемлекет басшысы Қасым-Жомарт Тоқаев халыққа Жолдауында сөз сөйлеп, Қазақстанның жасанды интеллектті кеңінен қолданатын және цифрлық технологияларды қарқынды дамытатын мемлекетке айналуы керектігін ерекше атап өтіп, нақты тапсырмалар жүктеді. Жасанды интеллекттің дамуы және оны білім беру процесіне интеграциялау Қазақстан Республикасы Үкіметінің 2024 жылғы 24 шілдедегі № 592-ші «Жасанды интеллектті дамытудың 2024 – 2029 жылдарға арналған тұжырымдамасын бекіту туралы» қаулысында анық көрсетіліп бекітілген. Қазақстандық білім беру жүйесінде бұл үдеріс енді бастау алуда. Мәселен, ҚР ЖБҒМ бекіткен 10–11-сыныптарға арналған информатика пәнінің жаңартылған оқу бағдарламасында «Жасанды интеллект»

тақырыбына әр сыныпта бар болғаны 8 сағат, яғни барлығы 16 академиялық сағат қарастырылған [4]. Бұл көлем ЖИ секілді кең әрі күрделі тақырыпты толық меңгеруге жеткіліксіз. Сонымен қатар практикалық тапсырмалар тек электрондық кестемен (MS Excel) жұмыс істеу деңгейінде шектелген [5]. Ал шетелдік оқу бағдарламаларында (мысалы, ЮНЕСКО мен ЭЫДҰ ұсынған модельдерде) Orange Data Mining, TensorFlow, Google Colab, PyTorch секілді заманауи құралдар мен кітапханаларды белсенді түрде қолданылады. Мұндай алшақтық еліміздің білім беру жүйесін әлемдік үрдістерден артта қалдыру қаупін тудырады. Зерттеу тақырыбының тандалу себебі де осы мәселенің маңыздылығымен тығыз байланысты. Бұл тек цифрлық сауаттылықты арттыру ғана емес, елдің технологиялық дербестігін қамтамасыз етудің де негізгі шартына айналды [6]. Қазақстанның білім беру жүйесі де бұл бағытта стратегиялық шешім қабылдауы тиіс. ЖИ-ды мектеп пәні ретінде жүйелі оқытудың ғылыми-практикалық маңызы зор. Ол оқушылардың алгоритмдік ойлауын дамытып, оларды нақты деректермен жұмыс істей білуге дағдыландырады. Сонымен бірге, білім беру мазмұнының заманауи технологиялармен үйлесімді болуына мүмкіндік береді. Осы аталған мәселелерді шешу жолдарын іздестіру мақсатында зерттеу келесі негізгі сұрақтарға жауап іздеуді көздейді:

1. Қазақстандық мектептер жағдайында жасанды интеллектті оқыту теориясы мен практикасын өзара үйлестіретін тиімді оқу бағдарламасы қандай болуы тиіс?
2. Халықаралық тәжірибелер (ЮНЕСКО, ЭЫДҰ) негізінде жасанды интеллектті мектеп деңгейіне бейімдеп енгізудің ғылыми-әдістемелік негіздері қалай құрылуы қажет?
3. Ұсынылып отырған модель оқушылардың алгоритмдік ойлау қабілетіне, практикалық машықтарына және білім сапасына нақты қандай әсер етеді?

Аталған сұрақтар зерттеудің логикалық құрылымын айқындайды және жасанды интеллектті мектеп бағдарламасына интеграциялау мәселесіне жүйелі әрі кешенді талдау жүргізуге мүмкіндік береді. Зерттеу мақсаты осы сұрақтарға ғылыми негізделген жауап ұсына отырып, білім беру мазмұнын инновациялық тұрғыда жаңғыртуға үлес қосу болып табылады.

Жасанды интеллектті оқыту мәселесін шетелдік және отандық ғалымдар зерттегенімен, мектеп бағдарламасында оның нақты іске асырылу тәсілдері әлі де аз. Шетелдік тәжірибеде жасанды интеллектті ерте жастан оқыту жақсы дамыған болса, Қазақстанда бұл бағыт жаңа қадамдарды талап етеді. Мәселен, Ф.М. Гафаров, А.Ф. Галимянов [7], У. Холмс, М. Бялик, Ф. Чарльз [8], Л. Розалина [9], Н. Селвин [10], Р. Байкер [11] сияқты ғалымдар жасанды интеллекттің тарихына шолу жасап ғылыми зерттеулер жасаған. Ал жасанды интеллектті білім беруде оқыту әдістемелерін И.Левченко, А.Садықова, Л.И.Карташова, П.А.Меренкова [12] сияқты ғалымдар ұсынса, Қазақстанда бұл тақырып бойынша зерттеулер кеңінен енді ғана қолға алынууда. Бірақ соның өзінде бірнеше ғалымдар терең зерттеулер жүргізген. Атап айтқанда А. Ж. Асамбаев [13], Г.А. Мадьярова, Б.Н. Тұрдақын [14], А.Е. Туребаева [15], М. Қайранбай [16], Ә.Т. Баялы, Н.М. Жунисов, А.Б. Жақсылықов [17], Серик М., Садвокасова А., Дуйсегалиева Н., Самашова Г., Култан Я [18]. Елімізде жасанды интеллектті дамыту бойынша бірнеше институттар бар. Айталық олар – ISSAI, AstanaHub сынды ақылды жүйелер мен жасанды интеллектті дамытушы институттар. Бұл жобалар Азия, Еуропа және АҚШ үлгілерін ескере отырып, Қазақстанда жасанды интеллект саласындағы ұлттық әлеуетті дамытуға бағытталған. Қазақстанда жасанды интеллект саласындағы зерттеулер мен әзірлемелермен 24 жоғары оқу орны мен ғылыми орталық айналысады. InCites (Clarivate Analytics) деректері бойынша, 2018-2022 жылдар аралығында қазақстандық ғалымдар Web of Science Core Collection базасында "Информатика, жасанды интеллект" тақырыбында 191 мақала жариялаған [19].

Бүгінгі күні әлемдік білім беру жүйелері оқу мазмұнын құрастыруда құзыреттілік тәсілін кеңінен қолдануда. Бұл тәсіл оқу нәтижелерін тек игерілетін білім көлемімен емес, сол білімді қолдана алу қабілеттерімен (компетенциялармен) анықтайды. ЮНЕСКО және Экономикалық ынтымақтастық және даму ұйымы (ЭЫДҰ) сияқты халықаралық ұйымдар оқушыларға ХХІ ғасыр дағдыларын меңгертуді, соның ішінде цифрлық сауаттылық пен ЖИ түсініктерін

қалыптастыруды басты мақсаттардың бірі ретінде белгілеуде. Мәселен, ЮНЕСКО деректері бойынша әлем жастарының небәрі 40%-ы цифрлық технологияларды минималды деңгейде пайдалану құзыреттілігін меңгерген [20]. Бұл көрсеткіш білім беру мазмұнын заманауи цифрлық, оның ішінде ЖИ саласына қатысты компоненттермен байыту қажеттігін көрсетеді. Осы орайда көптеген елдер оқу бағдарламаларын жаңа технологиялық реалитарға сай жаңартып отыр. Қазақстанда да білім мазмұнын ЖИ дәуірінің талабына сай бейімдеу туралы мемлекеттік деңгейде мәселе көтерілуде. 2026 жылы енгізілетін жаңа білім стандартына ЖИ элементтері еңбек, яғни әртүрлі пәндерде ЖИ құралдарын қолдану қарастырылуда. Дегенмен пәндер мазмұнын түбегейлі қайта қарау әзірге жоспарланбағаны, негізінен ЖИ-ді оқу құралы ретінде кіріктіру көзделіп отырғаны айтылуда. Бұл – оқыту мазмұнын интеграциялап құрастырудың бір моделі, яғни ЖИ бойынша бөлек пән енгізбестен, қолданыстағы пәндердің аясында ЖИ тақырыптарын сіңіру.

ЖИ оқу мазмұнының жаһандық модельдерін айта кетейік. ЖИ-ді мектепте оқыту әлі жаңадан туындап келе жатқан бағыт болғандықтан, халықаралық деңгейде орта білімге арналған бірыңғай стандарт жоқ. Соған қарамастан ЮНЕСКО бастаған ұйымдар мемлекеттерге бағыт-бағдар беру үшін зерттеулер мен ұсынымдар жариялауда. 2021 жылы ЮНЕСКО 193 елге жүргізген сауалнама нәтижесінде бар болғаны 11 ел ғана орта мектепке арналған арнайы ЖИ оқу бағдарламаларын әзірлеп, бекіткенін анықтады (тағы 4 елде әзірлену үстінде) [20]. Сол зерттеуде ЖИ бойынша білім беру мазмұнына талдау жасалып, орта мектептің ЖИ бағдарламалары қамтитын тоғыз негізгі тақырыптық категория белгіленді [21]. Атап айтқанда, олар: 1) алгоритмдер және программалау; 2) деректерді өңдеу сауаттылығы; 3) нақты өмірлік міндеттерді шешу (контекстік проблемалар); 4) ЖИ этикасы; 5) ЖИ-дің қоғамға тигізетін әсері; 6) ЖИ-дің өзге пәндік салалардағы қолданбалары; 7) ЖИ әдістерін түсіну және пайдалану; 8) ЖИ технологияларын түсіну және қолдану; 9) ЖИ жүйелерін жасау, дамыту дағдылары. Бұл санаттар мектептегі ЖИ курстарының мазмұнында қандай білім-білік блоктары болуы тиіс екенін көрсететін кешенді модель болып табылады. Онда бағдарламалау мен деректер жұмысы тәрізді техникалық білімдерден бастап, этика және әлеуметтік ықпалды түсіну сынды гуманитарлық компоненттерге дейін қамтылған. ЮНЕСКО есебінде сонымен бірге тиімді ЖИ оқу бағдарламасын іске асыру шарттары талданған: мұғалімдерді арнайы даярлау, қажетті оқу құрал-жабдықтар мен орта даярлау, сондай-ақ ұсынылатын оқыту әдістемелері. Әсіресе, жобалық оқыту тәсілі қолданыстағы ЖИ бағдарламаларында кең қолданылатыны аталып өтті [22]. Бұл ЖИ мазмұнын теориялық біліммен қоса, тәжірибелік жобалар арқылы меңгерудің маңызды екенін көрсетеді. Сол сияқты ЖИ *curricula* (оқу бағдарламасы) әзірлеуде платформаға тәуелді болмау, яғни нақты бір бағдарламалық құралға байлап қоймай, негізгі тұжырымдамалық қағидаларды үйрету принципі ұсынылған. Оқу мазмұны ЖИ-дің өткініші емес, тұрақты теориялық негіздеріне сүйенуі керек, сонда ғана оқушылар түрлі технологиялардың астарындағы ортақ қағидатты түсініп, жаңа құралдарға бейімделе алады. Сонымен қатар, ЮНЕСКО баяндамасы ЖИ білім беру мазмұнында шығармашылық пен контекстуалдық этикаға баса көңіл бөлу керектігін ұсынады. Яғни, оқушыларды дайын құралдарды пайдаланушы ғана емес, ЖИ шешімдерін өздері ойлап табуға ынталандыру, және ЖИ-ді қолдануда қоғамның мәдени-этикалық құндылықтарын ескеру дағдыларын қалыптастыру – мазмұн құрастырудың басты қағидаттары. Мұны 2021 жылы қабылданған ЮНЕСКО-ның Жасанды интеллекттің этикасы жөніндегі ұсынымы да қолдайды: аталған құжатта *«мемлекеттер ЖИ технологиялары оқушылар мен мұғалімдердің мүмкіндіктерін кеңейтуге қызмет етуін, сонымен бірге білім берудегі дәстүрлі адамаралық өзара әрекет құндылығын сақтауды қамтамасыз етуі тиіс»* делінген [23]. Демек, ЖИ-ді оқыту мазмұнын адамға қызмет ететін, адамдық құндылықтарды нығайтатын бағытта құру – заманауи модельдердің басты этикалық принципі.

2023–2024 жылдары ЮНЕСКО білім беру жүйелеріне қолдау көрсету мақсатында ЖИ бойынша құзыреттер шеңберін (framework) әзірлеп ұсынды. 2024 жылы жарық көрген «Оқушыларға арналған ЖИ құзыреттерінің шеңбері» оқушыларды ЖИ дәуіріне қажетті білім,

білік және құндылықтармен қаруландырудың құрылымын көрсететін маңызды теориялық модель болып табылады. Аталған шеңберде оқушылар үшін төрт түйінді құзырет саласы айқындалған [24]: (1) *Адамға бағдарланған ой-саналы көзқарас* – ЖИ жүйелерімен өзара әрекетте адамның автономиясын, жауапкершілігін және рөлін түсіну қабілеті; (2) *ЖИ этикасы* – ЖИ технологияларын қауіпсіз, жауапты әрі этикалық тұрғыда қолдану дағдылары (этика-by-design ұстанымдарын қоса); (3) *ЖИ техникасы және қолданбалы дағдылары* – ЖИ жұмыс істеу негіздерін, алгоритмдік ойлауды, деректермен жұмыс және машиналық оқыту сияқты негізгі білім мен дағдыларды игеру; (4) *ЖИ жүйелерін жобалау* – мәселені шешуге арналған жасанды интеллект шешімдерін құрастыру, шығармашылық және дизайн ойлау дағдыларын дамыту. Бұл төрт өлшем оқыту мазмұнындағы білім (knowledge), білік (skills) және құндылықтарды (values) біріктіре отырып, оқушыны жан-жақты құзыреттілікке жеткізуді көздейді. Аталған шеңбердің тағы бір ерекшелігі – ЖИ тақырыптарын оқу жоспарына жеке isolated тақырып ретінде емес, негізгі пәндерге кіріктіре оқытуды ынталандыруы. ЮНЕСКО оқушылардың ЖИ жөніндегі түсініктерін тек информатика сабағында ғана емес, жаратылыстану, математика, тіпті әлеуметтік-гуманитарлық пәндермен байланыстыра қалыптастыруды ұсынады. Мысалы, математикада – алгоритмдер мен деректер, физикада – робототехника немесе сенсорлар, қоғамтануда – ЖИ этикасы талқылануы мүмкін. Мұндай пәнаралық интеграция білім алушыларға ЖИ-дің түрлі қырларын әр тараптан түсінуге мүмкіндік береді. ЮНЕСКО-ның ЖИ-ді білімге енгізудегі адамға бағдарланған тәсілі Пекин консенсусында (2019) және жоғарыда аталған ЖИ этикасы ұсынымында да көрініс тапқан. Жалпы, халықаралық ұйымдар ұсынған құзыреттілік модельдері Қазақстан сынды елдерге ЖИ бойынша өз оқу мазмұнын әзірлеуде ғылыми-әдістемелік негіз бола алады.

Зерттеу әдіснамасы

Зерттеулер негізінде 11 сынып оқушыларына арнап, жасанды интеллектті оқытудың жаңа бағдарламасын ұсынамыз. Ұсынылған «Жасанды интеллектті оқыту» бағдарламасы 26 академиялық сағаттан тұрады және орта білім беру жүйесіндегі 11-сынып оқушыларына жасанды интеллект негіздерін меңгертуге бағытталған. Бағдарлама оқушыларға ЖИ теориясын ғана емес, сонымен қатар оны практикалық тұрғыда қолдануды да үйретеді. Бағдарламаның құрылымы 4 негізгі бөлімнен тұрады, олардың әрқайсысы жасанды интеллекттің белгілі бір бағытын қамтиды. Теориялық материалдар әр бөлімде нақты бағдарламалық жасақтамамен ұштастырылып, оқушыларға жасанды интеллекттің негізгі қағидаларын меңгеруге, машиналық оқыту және тереңдетілген оқыту алгоритмдерін зерттеуге мүмкіндік береді. Бұл оқу мазмұны Қазақстан Республикасы Оқу-ағарту министрінің м.а. 2022 жылғы 15 желтоқсандағы № 500 бұйрығымен бекітілген "Педагог" кәсіптік стандартының талаптарына сәйкес әзірленді (ҚР Әділет министрлігінде 2022 жылғы 19 желтоқсанда № 31149 тіркелген). Мазмұн құрылымы педагогтің цифрлық құзыреттілігін, оқушылардың функционалдық сауаттылығын және заманауи технологиялар негізінде білім беру мазмұнын жаңғырту бағытын басшылыққа ала отырып жасалды (Кесте 1).

Кесте 1. Информатика пәніндегі жасанды интеллектті оқыту бағдарламасының мазмұны

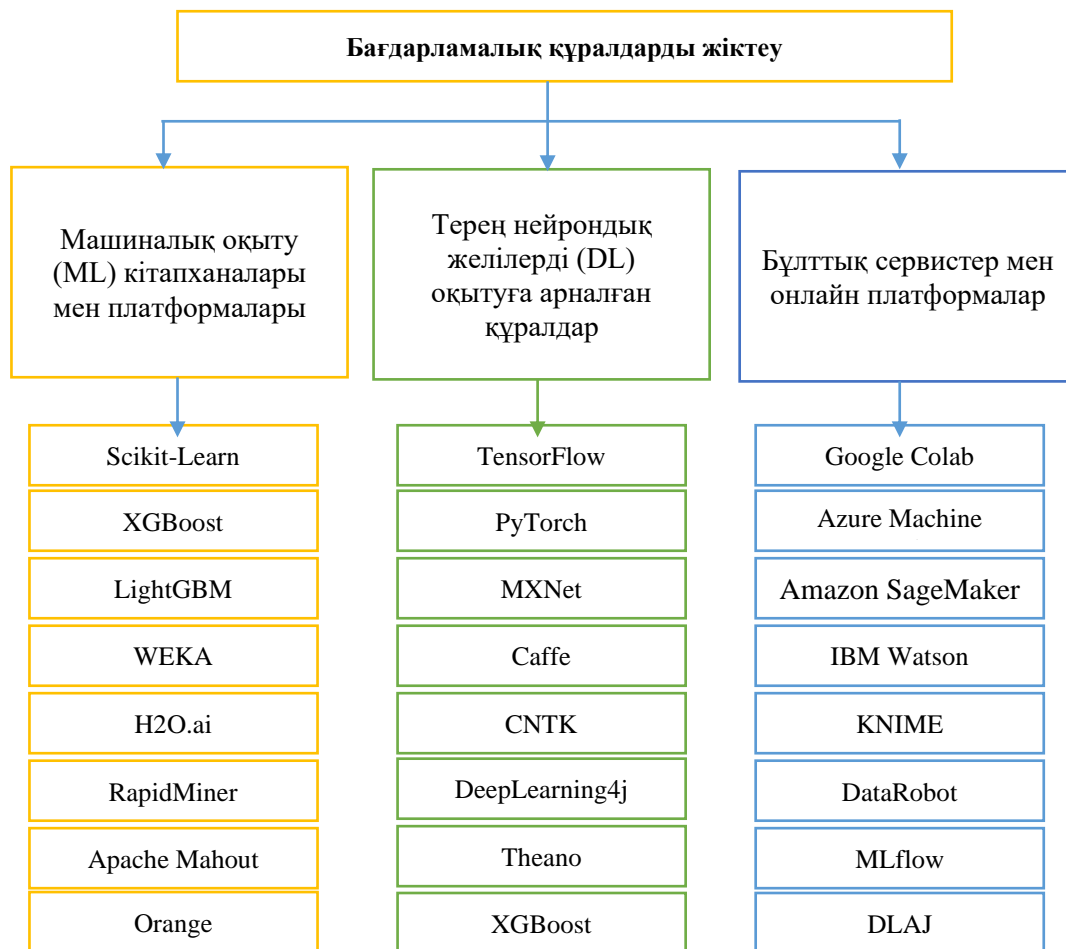
№ р/с	Бөлім атауы	Сағат саны
	1 БӨЛІМ. ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ НЕГІЗДЕРІ (ЖИ түсінігі, тарихы және негізгі бағыттары)	4
1.1	Жасанды интеллектке кіріспе: анықтамасы және негізгі принциптері	1
1.2	Жасанды интеллекттің даму тарихы: Тьюрингтен қазіргі заманға дейін	1
1.3	Жасанды интеллекттің негізгі бағыттары (машиналық оқыту, тереңдетілген оқыту, табиғи тілді өңдеу)	1
1.4	Жасанды интеллектті оқытудың әдістемелік негіздері	1

	БЖБ	
2	БӨЛІМ. МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУ ЖӘНЕ БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ҚҰРАЛДАР (Теориялық негіздер және практикалық қолдану)	6
2.1	<i>Машиналық оқыту (ML): негізгі ұғымдар және қолдану мысалдары</i>	1
2.2	<i>Orange және машиналық оқыту: ML моделін визуалды құру</i>	1
2.3	<i>Scikit-Learn және Python: машиналық оқыту алгоритмдерін код арқылы жүзеге асыру</i>	2
2.4	<i>XGBoost және LightGBM: градиентті бустинг негіздері</i>	1
2.5	<i>Негізгі алгоритмдер: Линеілік регрессия және логистикалық регрессия</i>	1
2.6	<i>Excel және мәліметтермен жұмыс. Деректерді алдын ала өңдеу және визуализациялау</i>	2
	БЖБ	
3	БӨЛІМ. ТЕРЕҢ НЕЙРОНДЫҚ ЖЕЛІЛЕР (DL) ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ОҚЫТУ (Теория және нейрондық желілерді бағдарламалау)	5
3.1	<i>Терең оқыту негіздері: нейрондық желілердің жұмыс принциптері</i>	1
3.2	<i>TensorFlow және тереңдетілген оқыту: нейрондық желілерді құру</i>	1
3.3	<i>PyTorch және нейрондық желілер: модельдерді үйрету және бағалау</i>	2
3.4	<i>MXNet және Caffe: суреттерді тану нейрондық желілерін әзірлеу</i>	1
	БЖБ	
4	БӨЛІМ. ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТКЕ АРНАЛҒАН БҰЛТТЫҚ СЕРВИСТЕР ЖӘНЕ ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТТИ ОҚЫТУДА ТЕОРИЯ МЕН ПРАКТИКАНЫ ИНТЕГРАЦИЯЛАУ (Жасанды интеллектті бұлттық платформаларда үйрету. Жобалық оқыту және зерттеу жұмыстары)	8
4.1	<i>Google Colab және бұлттық ЖИ оқыту</i>	2
4.2	<i>Azure Machine Learning және Amazon SageMaker: модельдерді автоматтандыру</i>	2
4.3	<i>IBM Watson және табиғи тілді өңдеу: мәтіндермен жұмыс</i>	1
4.4	<i>Практикалық жаттығу: машиналық оқыту модельдерін құру</i>	1
4.5	<i>Жобалық жұмыс: шағын ЖИ моделін әзірлеу (Таңдаулы тақырып бойынша)</i>	1
4.6	<i>GPT API және чат-бот жасау: ChatGPT API-мен жұмыс істеу және қарапайым Telegram-бот құру</i>	1
	БЖБ, ТЖБ	1
	Барлығы:	26

Бұл оқу бағдарламасының негізгі мақсаты оқушыларға жасанды интеллекттің негізгі қағидаларын, машиналық оқыту алгоритмдерін және оларды қолдану салаларын түсіндіру, сондай-ақ практикалық тапсырмалар арқылы ЖИ модельдерін құру дағдыларын дамыту. Негізінен қазіргі орта мектептерде Үлгілік оқу бағдарламасы бойынша информатика пәнінде «Жасанды интеллект» курсы оқыту 10-11 сынып оқушылары үшін 16 сағатты құрайды. Бірақ бұл жасанды интеллектті толық түсіну үшін және практика мен теорияны интеграциялау үшін жеткіліксіз деп санаймыз. Біз ұсынып отырған оқыту бағдарламасындағы жаңа мазмұн қазіргі талаптарға және соңғы шыққан бағдарламаларға және бағдарламалау кітапханаларына негізделген. Бұл оқушылардың жасанды интеллектті толық түсініп практика мен теорияны интеграциялауына мүмкіндік береді. Жасанды интеллектті оқытуда тиімді нәтижеге жету үшін тек теориялық материалды ғана емес, практикалық жаттығуларды да енгізу міндетті. Біз талқылаған мектеп оқулықтарында практикалық тапсырмалар жоқ емес, ондағы әдістер мен бағдарламалардың аздығы және тақырыптың толық еместігіне ерекше назар аудардық. Теория мен практиканың интеграциясы оқушыларға алынған білімді нақты жобалар арқылы бекітуге мүмкіндік береді. Жасанды интеллектке арналған бағдарламалық жасақтаманы дұрыс таңдау және оны сабақта тиімді қолдану ЖИ саласындағы болашақ мамандарды даярлаудың негізгі қадамдарының бірі болып табылады.

Заманауи құралдарды оқу үдерісіне кіріктіру оқушылардың тәжірибелік дағдыларын жетілдіруге және ЖИ түсініктерін тиімді игеруіне мүмкіндік береді. Жасанды интеллектті

оқытуда пайдаланылатын бағдарламалық құралдардың әртүрлілігі оқытудың мазмұны мен әдістерін байытады. Осыған байланысты қолданылатын құралдарды үш негізгі категорияға бөліп жіктеуге болады (1-сурет).



Сурет 1. Жасанды интеллектті оқытуда қолданылатын бағдарламалық құралдардың жіктелуі

Осы жіктелген бағдарламалық құралдар 11-сынып информатика сабағында теория мен практиканы біріктіруде әртүрлі рөл атқарады. Мысалы теориялық негіздерді түсіндіру үшін Scikit-Learn, WEKA, Orange сияқты құралдар қолданылады. Бұл платформалар арқылы оқушылар алгоритмдердің қалай жұмыс істейтінін көрнекі түрде зерттей алады. Ал практикалық тапсырмаларды орындау үшін TensorFlow, PyTorch, Keras сияқты құралдар пайдаланылады. Python бағдарламалау тілінде нейрондық желілерді құру және модельдерді оқыту арқылы оқушылар ЖИ-дің нақты жұмыс істеу принциптерін меңгереді. Бұлттық шешімдерді қолдану арқылы оқушылар деректерді өңдеу мен модельдерді орналастыруды үйренеді. Google Colab, Azure ML, Amazon SageMaker сияқты платформалар студенттерге үлкен көлемдегі деректермен жұмыс істеуге мүмкіндік береді. Сондай-ақ, ЖИ-ді нақты жобаларда пайдалану үшін DataRobot, MLflow, KNIME сияқты құралдар оқушыларға автоматтандырылған машиналық оқыту мен модельдерді басқару дағдыларын меңгеруге көмектеседі.

Зерттеу нәтижелері

Эксперименттік зерттеу жұмысы бірізді түрде ұйымдастырылып, оның жүргізілуі үш негізгі кезеңді қамтыды: дайындық кезеңі, негізгі (тәжірибелік) кезең және қорытынды кезең. Әр кезеңнің өзіндік мақсаты, міндеті және күтілетін нәтижесі нақты белгіленіп, әдістемелік жұмыстар жоспарлы түрде жүзеге асырылды.

Дайындық кезеңі (2024–2025 оқу жылы) – бұл кезеңде зерттеу жұмысының теориялық-әдіснамалық негіздері анықталды. Негізгі кезең (2024–2025 оқу жылы) – тәжірибелік-эксперименттік жұмыстар тікелей осы кезеңде жүргізілді. Эксперимент жұмысы Астана қаласындағы жалпы білім беретін №111 мектептің 11 «А» және 11 «Б» сыныптарының базасында жүзеге асты. 11 «А» сыныбы эксперименттік топ ретінде таңдалып, оларға жасанды интеллектті оқытуға арналған арнайы әдістеме енгізілді. Оқушылар Orange платформасында визуалды модельдер құрып, Google Colab ортада Python кодтарын орындап, TensorFlow негізінде қарапайым ЖИ модельдерін жасауға машықтанды. Сонымен қатар, практикалық сабақтарда жобалық тәсіл, командалық жұмыс, мәліметтерді визуализациялау және бағалау құралдары қолданылды. Ал 11 «Б» сыныбы бақылау тобы ретінде дәстүрлі оқу бағдарламасы негізінде білім алды. Бұл кезеңде білім беру мазмұны бірдей, бірақ оқыту тәсілдері әртүрлі болды, осылайша әдістеменің тиімділігін салыстыруға мүмкіндік туды. Қорытынды кезең (2025 жылғы наурыз–мамыр) – бұл кезеңде жүргізілген эксперимент нәтижелері жинақталып, диагностикалық тест арқылы екі топтың оқу жетістіктері салыстырылды. Эксперимент тобы мен бақылау тобының білім сапасы мен ойлау дағдылары арасындағы айырмашылықтар сандық және сапалық тұрғыдан бағаланды. Жиналған мәліметтер статистикалық өңдеуден өткізілді, оның ішінде орташа балл, стандартты ауытқу, дисперсия, вариация коэффициенті сияқты көрсеткіштер есептелді. Зерттеу қорытындысы ретінде жасанды интеллектті оқыту әдістемесінің тиімділігі дәлелденді және оны білім беру тәжірибесіне енгізудің негізділігі айқындалды.

Зерттеудің басты мақсаты – жасанды интеллектті оқытуға арналған әдістеменің оқушылардың білім сапасына, логикалық ойлау деңгейіне және практикалық машықтарына ықпалын анықтау. Эксперименттік жұмыс Астана қаласындағы жалпы білім беретін №111 мектептің екі 11-сыныбында өткізілді. Зерттеу нысаны Президент Қ. Тоқаевтың бастамасымен жүргізілген «Жайлы мектеп» ұлттық жобасы негізінде салынған мектеп.

Диагностикалық тест сұрақтары Bloom таксономиясының "білу", "түсіну", "қолдану" деңгейлеріне негізделіп құрылды. Сұрақтар төмендегі мазмұндық бағыттарды қамтыды:

- ЖИ-дің негізгі анықтамасы мен қолдану салалары;
- Машиналық оқыту мен нейрондық желілердің ерекшеліктері;
- Orange, TensorFlow, Google Colab сияқты платформалардың қолданылу ерекшеліктері;
- ЖИ модельдерінің сапасын бағалау көрсеткіштері (MAE, RMSE, R²);
- ЖИ мен адамның айырмашылығы;
- ЖИ-дің этикалық аспектілері.

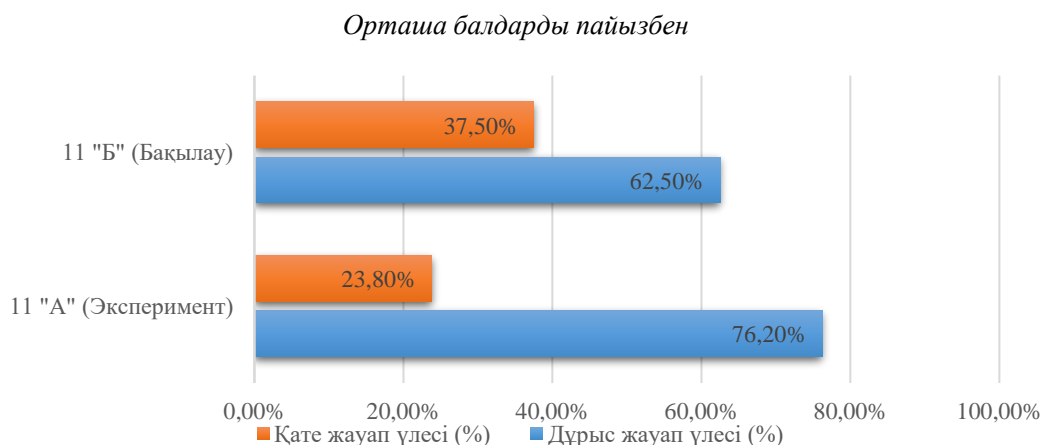
Эксперименттік жұмыстың алғашқы кезеңінде 11 "А" (эксперимент) және 11 "Б" (бақылау) сыныптарының оқушыларына жасанды интеллект тақырыбы бойынша диагностикалық тест жүргізілді. Тесттің нәтижелері әр топтағы оқушылардың бастапқы білім деңгейін сандық тұрғыда бағалауға мүмкіндік берді. Тестілеудің сандық көрсеткіштері төмендегі кестеде берілген (Кесте 2).

Кесте 2. Салыстырмалы талдау

Топ	Оқушы саны	Орташа балл	Максималды балл	Минималды балл
11А(Эксперимент)	21	9.14	12	6
11 Б (Бақылау)	16	7.50	10	4

Бұл кестеден байқауға болады: эксперимент тобының орташа балы бақылау тобынан 1.64 баллға жоғары. Бұл – әдістемелік жаңартудың оң әсерінің алғашқы дәлелі. 11 "А" сынып оқушылары бастапқы диагностикалық тестте орта есеппен 76,2% нәтижеге қол жеткізді. Бұл олардың жасанды интеллект ұғымдары бойынша белгілі бір базалық дайындық деңгейіне ие екенін көрсетеді. Орташа балл – 9,14, максималды балл – 12, минималды балл – 6 болғанын ескерсек, сынып ішіндегі білім деңгейі біршама біркелкі болғаны байқалады. 11 "Б" сынып

оқушыларының орташа көрсеткіші 62,5%-ды құрады, яғни орташа балл – 7,5 балл. Бұл сыныпта да белгілі бір білім қоры бар екенін байқаймыз, бірақ нәтижелері 11 "А" сыныбымен салыстырғанда айтарлықтай төменірек. Сонымен қатар, бақылау тобындағы максималды балл – 10, ал минималды балл – 4 болған, бұл топтағы оқушылар арасында білім деңгейінің ауытқуы жоғары болғанын көрсетеді. Дегенмен, нәтижелердің толық көрінісін алу үшін қосымша статистикалық өңдеу жүргізілді (Сурет 2).



Сурет 2. Бастапқы диагностикалық тест нәтижесінің талдауы

Енді қорытынды кезеңнің нәтижелерді пайызық түрде көрсетейік. Ол үшін оқушылардың сауалнама нәтижелерін сандық түрде талдап алдық. Талдауды 3-ші және 4-ші кестелерден байқауға болады.

Кесте 3. Бақылау тобы 11 Б сынып оқушыларынан (16 оқушы) жасанды интеллектті оқыту бойынша қамтылған тест нәтижелері

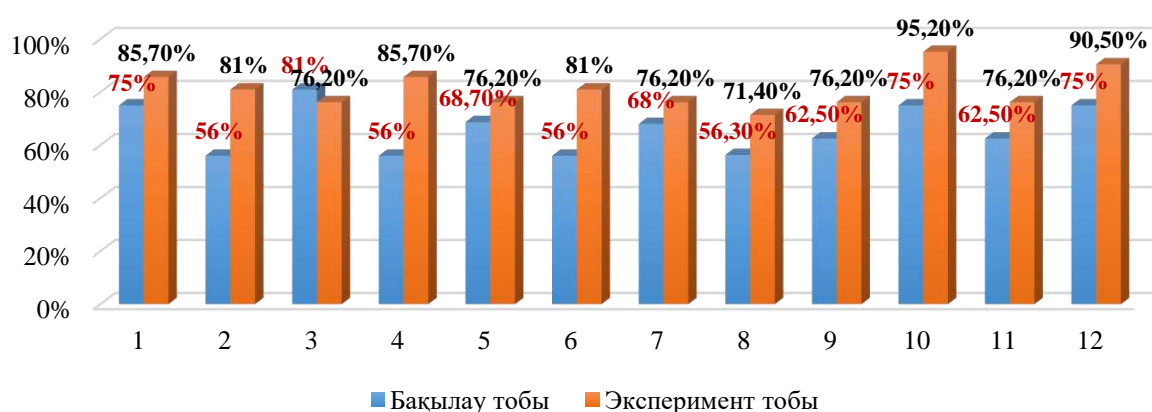
№	Сұрақтар	Оқушы саны	Дұрыс жауап бергендер	Оқушы саны	Дұрыс емес жауап бергендер
1	Жасанды интеллект не үшін қолданылады?	12	75%	4	25%
2	Сызықтық регрессия моделінің мақсаты қандай?	9	56%	9	56,3%
3	Orange платформасында қай элемент дерек көзін білдіреді?	13	81%	7	43,7%
4	Python-да ЖИ құру үшін ең жиі қолданылатын кітапхана қайсы?	9	56%	9	56,3%
5	ЖИ модельінің дәлдігін қалай бағалаймыз?	11	68,7%	5	31,3%
6	Google Colab қандай мақсатта пайдаланылады?	9	56%	9	56,3%
7	PyTorch-та модельге қандай қабат қосылады?	11	68%	9	56,3%
8	ЖИ модель нәтижесі неге әрқашан дұрыс бола бермейді?	9	56,3%	7	43,7%
9	Жасанды интеллект пен адамның басты айырмашылығы қандай?	10	62,5%	6	37,5%
10	ЖИ жүйесі қандай жағдайда дұрыс нәтиже бермейді?	12	75%	7	43,7%
11	Жасанды интеллекттің этикалық мәселесі нені қамтиды?	10	62,5%	6	37,5%
12	Нейрондық желілерде "эпоха" ұғымы нені білдіреді?	12	75%	8	50%

Кесте 4. Эксперимент тобы 11 А сынып оқушыларынан (21 оқушы) алынған сауалнама нәтижелері:

№	Сұрақтар	Оқушы саны	Дұрыс жауап бергендер	Оқушы саны	Дұрыс емес жауап бергендер
1	Жасанды интеллект не үшін қолданылады?	15	85,7%	6	28,6%
2	Сызықтық регрессия моделінің мақсаты қандай?	17	81%	4	19%
3	Orange платформасында қай элемент дерек көзін білдіреді?	16	76,2%	5	23,8%
4	Python-да ЖИ құру үшін ең жиі қолданылатын кітапхана қайсы?	18	85,7%	3	14,3%
5	ЖИ модельінің дәлдігін қалай бағалаймыз?	16	76,2%	5	23,8%
6	Google Colab қандай мақсатта пайдаланылады?	17	81%	4	19%
7	PyTorch-та модельге қандай қабат қосылады?	16	76,2%	5	23,8%
8	ЖИ модель нәтижесі неге әрқашан дұрыс бола бермейді?	15	71,4%	6	28,6%
9	Жасанды интеллект пен адамның басты айырмашылығы қандай?	16	76,2%	5	23,8%
10	ЖИ жүйесі қандай жағдайда дұрыс нәтиже бермейді?	20	95,2%	1	4,8%
11	Жасанды интеллекттің этикалық мәселесі нені қамтиды?	16	76,2%	5	23,8%
12	Нейрондық желілерде "эпоха" ұғымы нені білдіреді?	19	90,5%	2	9,5%

Кесте 3 мен 4 нәтижелерін салыстыру арқылы жасанды интеллектті оқытуда қолданылған әдістеменің тиімділігі айқын көрінеді. Бақылау тобында оқушылардың дұрыс жауап пайызы көп жағдайда 56–75% аралығында болса, эксперимент тобында бұл көрсеткіш 76–95% аралығында болған (Сурет 3.).

Дұрыс жауап бойынша екі топтың салыстырмалы талдауы



Сурет 3. Сауалнамалық тест нәтижесінде дұрыс жауап бойынша екі топтың салыстырмалы талдауы

Әсіресе "эпоха", "этикалық мәселе", "Google Colab", "Python кітапханасы" сияқты күрделі сұрақтарға эксперимент тобы жоғары нәтижелер көрсетті. Бұл тәжірибелік оқыту барысында оқушылардың теориялық білімді тереңірек меңгеріп, практикалық дағдыларды да жақсы игергенін білдіреді. Сонымен қатар, оқушылардың ЖИ құралдарын нақты қолдану

ерекшеліктерін түсінуі артып, талдау жасау қабілеттері дамыған. Жалпы, әдістеменің мазмұны мен форматы оқушылардың қызығушылығын арттырып, нәтижелі білім алуға ықпал еткен.

Эксперимент тобы үшін:

- Орташа балл $x_1 = 9.14$
- Стандартты ауытқуы $\sigma_1 \approx 1.52$
- Вариация коэффициенті: $V_1 = \frac{\sigma_1}{x_1} \cdot 100\% \approx 16.63\%$
- Бақылау тобы үшін:
- Орташа балл: $\bar{x}_2 = 7.50$
- Стандартты ауытқуы: $\sigma_2 \approx 1.83$
- Вариация коэффициенті: $V_2 = \frac{\sigma_2}{z_2} \cdot 100\% \approx 24.40\%$

Вариация коэффициентінің аз болуы эксперимент тобында нәтиже тұрақтырақ екенін, яғни оқыту әдістемесі біркелкі нәтиже бергенін дәлелдейді.

Бұл көрсеткіш мәліметтердің орташа мәннен қаншалықты ауытқитынын көрсетеді. Эксперимент тобында бұл мән 1.52, ал бақылау тобында 1.83 болды. Бұл – эксперимент тобы оқушыларының білім деңгейі біркелкі және тұрақты болғанын білдіреді.

Білім деңгейінің тұрақтылығын анықтайтын бұл коэффициент эксперимент тобында 16.63%, ал бақылау тобында 24.40% болды. Вариация неғұрлым аз болса, нәтиже соғұрлым тұрақты деген сөз.

Эксперименттік жұмыстың сенімділігі мен объективтілігін қамтамасыз ету үшін бақылау және эксперимент топтарының бастапқы және қорытынды нәтижелері салыстырмалы түрде талданды.

Қорытынды бақылау нәтижелері:

- Бақылау тобы – 62,84 балл
- Эксперимент тобы – 82,01 балл

Қорытынды нәтижеде айқын айырмашылық байқалды – эксперимент тобы бақылау тобынан 19,17 баллға жоғары нәтиже көрсетті. Бұл – енгізілген оқыту әдістемесінің оң әсерінің айқын дәлелі.

Дискуссия

Эксперименттік зерттеудің нәтижелерін тереңірек дәлелдеу үшін бақылау және эксперимент топтарының білім жетістіктерінің айырмашылығының статистикалық маңыздылығын анықтау қажет. Бұл үшін екі топтың орташа балдарының айырмашылығы кездейсоқ па, әлде шынымен де қолданылған оқыту әдістемесінің тиімділігін көрсететін мағыналы айырмашылық па екенін анықтау маңызды. Ол үшін t-эмпирикалық көрсеткіш есептеледі.

Орташа мәндер (\bar{x} және \bar{y}):

- Эксперимент тобы (11 «А») - 21 оқушы:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1} = 10.19 \quad (1)$$

- Бақылау тобы (11 «Б») - 16 оқушы:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2} = 6.81 \quad (2)$$

Бұл сандардан көрініп тұрғандай, эксперимент тобының орташа көрсеткіші айтарлықтай жоғары. Орташа айырмашылықтың қатесі (σ_{x-y}). Орташа мәндердің айырмашылығын салыстырғанда, оның қаншалықты сенімді екенін білу үшін орташа айырмашылықтың қатесі (σ_{x-y}) есептеледі.

Бұл үшін келесі формула қолданылады:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \quad (3)$$

Мұндағы:

- $\sum (x_i - \bar{x})^2$ - эксперимент тобының дисперсиясы,
- $\sum (y_i - \bar{y})^2$ - бақылау тобының дисперсиясы,
- $n_1 = 21, n_2 = 16$ - екі топтағы оқушылар саны.

Осы формула негізінде есептеу нәтижесі:

$$\sigma_{x-y} \approx 0.371$$

t-эмпирикалық мәні.

Екі топтың орташа баллдарының айырмашылығының статистикалық маңыздылығын дәлелдеу үшін t эмпирикалық мәнін мына формуламен есептейміз:

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{x-y}} = \frac{10.19 - 6.81}{0.371} \approx 9.11 \quad (4)$$

Қорытынды және интерпретация: t-эмпирикалық мәнің жоғары болуы ($t \approx 9.11$) нәтижелер арасындағы айырмашылықтың кездейсоқ емес, нақты әдістеменің нәтижесі екенін дәлелдейді. Жалпы қабылданған t-критикалық мән (мысалы, еркіндік дәрежесі 35 үшін 0.05 деңгейінде $t_{\text{кр}} \approx 2.03$) көрсеткішінен әлдеқайда жоғары.

Бұл дегеніміз:

- Эксперимент тобының жетістігі бақылау тобынан айтарлықтай жоғары;
- Қолданылған оқыту әдістемесі статистикалық дәлелмен тиімді екені нақтыланды;
- Зерттеудің ғылыми негізі құрылымды және сенімді;

Осылайша, алынған деректер зерттеудің гипотезасын толық растады. Жүргізілген тәжірибелік-эксперименттік зерттеу нәтижелері жасанды интеллектті оқытудың авторлық әдістемесінің тиімділігін нақты дәлелдеп берді. Эксперимент тобы мен бақылау тобының бастапқы дайындық деңгейлері бірдей болғанымен, қорытынды бақылау нәтижелерінде айтарлықтай айырмашылық анықталды. Эксперимент тобының оқушылары жасанды интеллект ұғымдарын тереңірек меңгеріп, практикалық тапсырмаларды орындауда жоғары нәтижелер көрсетті.

Статистикалық өңдеу нәтижесінде t-эмпирикалық көрсеткіштің мәні 9,11-ге тең болып, бақылау мен эксперимент топтарының арасында елеулі айырмашылық бар екенін дәлелдеді. Бұл көрсеткіш енгізілген оқыту әдістемесінің нәтижелілігін және білім сапасына нақты ықпалын көрсетеді.

Қорытынды

XXI ғасырдың ақпараттық қоғамында жасанды интеллект (ЖИ) технологиялары адамзат өмірінің барлық салаларында терең қолданыс тауып отыр. Осы орайда білім беру жүйесі де бұл үдерістен шет қалмауы тиіс. Жас ұрпақты цифрлық сауаттылыққа ғана емес, сонымен қатар жасанды интеллекттің мәнін ұғынып, оны дұрыс қолдануға бағытталған даярлық білім беру сапасының ажырамас бөлігіне айналуы қажет. Осыған орай, аталған зерттеу жұмысының мақсаты – орта білім беру жүйесінде, нақтырақ айтқанда, 11-сынып информатика пәні шеңберінде жасанды интеллектті оқытудың мазмұны мен әдістемесін теориялық және практикалық тұрғыда негіздеу болды.

Осы тұрғыда келесі ұсынастарды ұсынамыз:

-Жасанды интеллектті информатика пәнінің тұрақты бөлігі ретінде енгізу. Орта білім беру жүйесінде 10–11-сынып информатика курсына жасанды интеллект тақырыбы бойынша

арнайы модуль енгізу ұсынылады. Бұл оқушылардың заманауи технологияларды ерте кезеңде меңгеруіне мүмкіндік береді.

-Оқыту платформаларын кеңінен қолдану. Оқыту барысында Orange, TensorFlow, Google Colab сияқты ашық қолжетімді платформаларды пайдалану ұсынылады. Бұл оқушылардың практикалық машықтарын дамытуға және дербес жобалық жұмыстар орындауға ықпал етеді.

-Мұғалімдердің біліктілігін арттыру. Жасанды интеллектті оқытуда мұғалімдердің кәсіби даярлығын жетілдіру үшін арнайы курстар мен тренингтер ұйымдастыру қажет. Әсіресе, Python тілінде кодтау және мәліметтерді талдау бағытындағы дағдыларды дамыту маңызды.

-Этикалық аспектілерді енгізу. Оқушыларды жасанды интеллект құралдарын жауапкершілікпен және саналы түрде қолдануға үйрету үшін оқыту барысында ЖИ этикасы мәселелерін арнайы қарастыру ұсынылады.

-Жасанды интеллект негізінде жобалық жұмыстарды дамыту. Оқу барысында оқушыларға шағын ЖИ жобаларын әзірлеу тапсырмаларын беру олардың шығармашылық және зерттеушілік қабілеттерін арттырады. Мұндай жобалар мектепшілік, аудандық және республикалық деңгейдегі ғылыми жарыстарда ұсынылуы мүмкін.

-Оқыту мазмұнын жаңарту. Информатика оқулықтары мен оқу бағдарламаларын қайта қарастырып, жасанды интеллекттің негізгі ұғымдарын, модельдеу әдістерін және машиналық оқыту принциптерін қарапайым тілмен түсіндіруді қамтамасыз ету қажет.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] UNESCO. *Artificial Intelligence and Education: Guidance for Policy-makers*. – Paris: UNESCO Publishing, 2019. – 156 p.

[2] OECD. *Artificial Intelligence in Education: Challenges and Opportunities*. – OECD Working Papers, 2021. – 48 p.

[3] OECD. *Trends Shaping Education 2022*. – Paris: OECD Publishing, 2022. – 120 p.

[4] ҚР Білім және ғылым министрлігі. *Жалпы орта білім беру ұйымдарына арналған «Информатика» пәнінен оқу бағдарламасы (10–11-сыныптар)*. – Нұр-Сұлтан: Ы. Алтынсарин ат. ҰБА, 2022. – 44 б.

[5] Ы. Алтынсарин атындағы Ұлттық білім академиясы. *«Информатика» пәнінен оқу мазмұнын жаңарту бойынша әдістемелік ұсынымдар*. – Астана, 2023. – 28 б.

[6] Ергали М. *Жасанды интеллект және ұлттық қауіпсіздік: интеграцияланған көзқарас // Ұлттық зерттеулер журналы*. – 2023. – №4. – Б. 41–49.

[7] Гафаров Ф.М., Галимянов А.Ф. *Искусственные нейронные сети и приложения: учеб. пособие*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. – 121 с.

[8] Холмс У., Бялик М., Фейдл Ч. *Искусственный интеллект в образовании: перспективы и проблемы для преподавания и обучения*. – М.: Альпина ПРО, 2022. – 304 с.

[9] LaCroix R. *AI-Powered Personalized Learning: The Future of Education*. – New York: Springer, 2021. – 256 p.

[10] Selwyn N. *Education and AI: A Critical Perspective*. – London: Routledge, 2021. – 198 p.

[11] Baker R. *Learning Analytics and AI in Education*. – New York: Cambridge University Press, 2019. – 312 p.

[12] Levchenko I.V., Sadykova A.R., Kartashova L.I., Merenkova P.A. *Teaching Artificial Intelligence in Secondary School: From Development to Practice // RUDN Journal of Informatization in Education*. – 2023. – Vol. 20, No. 3. – P. 265–280. – DOI: 10.22363/2312-8631-2023-20-3-265-280.

[13] Асамбаев А.Ж. *Жасанды интеллект негіздері: оқулық*. – Алматы: Дәуір, 2011. – 136 б.

[14] Мадьярова Г.А., Тұрдақын Б.Н. *«Жасанды интеллект негіздері» элективті курсының құрылымдық мазмұнын қалыптастыру // Абай атындағы ҚазҰПУ Хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы*. – 2023. – №4(84). – Б. 269–277. – DOI: 10.51889/2959-5894.2023.84.4.026.

[15] Туребаева А.Е. *Информатиканы оқытуда жасанды интеллект қолдану әдістемесі // Вестник науки*. – 2024. – №11(80), Т.3. – Б. 1474–1477.

[16] Қайранбай М.Ж. *Машинаны үйрету: оқу құралы*. – Алматы, 2023. – 102 б.

[17] Баялы Ә.Т., Жунисов Н.М., Жақсылықов А.Б. *Жасанды интеллект технологиялары негізінде терең оқытудың қолданылуын зерттеу // Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік*

университетінің хабарлары. Математика, физика, информатика сериясы. – 2023. – №4(27). – Б. 78–88. – DOI: 10.47526/2023-4/2524-0080.07.

[18] Serik M., Sadvakassova A., Duisegalıyeva N., Samashova G., Kultan J. Project-based learning for machine learning in computer vision courses: Case study of Kazakhstan and Slovakia // *International Journal of Innovative Research and Scientific Studies*. – 2025. – Vol. 8, No. 2. – P. 1183–1196. – DOI: 10.53894/ijirss.v8i2.5422.

[19] Қазақстан Республикасы Үкіметі. Қазақстан Республикасында жасанды интеллектті дамытудың 2023–2029 жылдарға арналған тұжырымдамасын бекіту туралы: ҚР Үкіметінің қаулысы №592, 2024 жылғы 20 сәуір. – [Электрон. ресурс]. – Қолжетімді: <https://adilet.zan.kz/kaz/docs/P2400000592>

[20] ЮНЕСКО. K–12 AI curricula: A mapping of government-endorsed AI curricula. – Париж: ЮНЕСКО, 2022. – 47 б. – [Электрон. ресурс]. – Қолжетімді: <https://unesco.org/open-access>

[21] UNESCO. K–12 AI Curricula: A Mapping of Government-Endorsed AI Curricula. – Paris: UNESCO, 2022. – 81 p. – ISBN 978-92-3-100497-1.

[22] UNESCO. *Recommendation on the Ethics of Artificial Intelligence*. – Paris: UNESCO, 2021. 38 p.

[23] UNESCO. *The Impact of Artificial Intelligence on Education*. – Paris: UNESCO, 2023. – 55 p. – [Electronic resource]. – Available at: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000381137>

[24] UNESCO. *Artificial Intelligence Competency Framework for Students*. – Paris: UNESCO, 2024. – 53 p. – ISBN 978-92-3-100603-6.

References

[1] UNESCO (2019) *Artificial Intelligence and Education: Guidance for Policy-makers*. Paris: UNESCO Publishing, 156.

[2] OECD (2021) *Artificial Intelligence in Education: Challenges and Opportunities*. OECD Working Papers, 48.

[3] OECD (2022) *Trends Shaping Education 2022*. Paris: OECD Publishing, 120.

[4] QR Bilim zhane ғылым министрлігі (2022) *Jalpy orta bilim беру uymdaryna arналған "Informatika" paninen oqu bagdarlamasy (10–11-synypтар) [Curriculum for the subject "Informatics" for general secondary education organizations (grades 10–11)]*. Nur-Sultan: Y. Altynsarin at. ŪBA, 44. (In Kazakh)

[5] Y. Altynsarin atyndaғы *Ultyq bilim akademijasy (2023) "Informatika" paninen oqu maznunyn jaһartu boıynsha adistemelik usynymdar [Methodological recommendations for updating the content of the subject "Informatics"]*. Astana, 28. (In Kazakh)

[6] Erǵali M. (2023) *Zhasandy intellekt zhane ultyq qauipsizdik: integraciialyq kozqaras [Artificial intelligence and national security: An integrated approach]*. *Ūltyq zertteuler zhurnaly*, №4, 41–49. (In Kazakh)

[7] Gafarov F.M., Galimjanov A.F. (2018) *Iskusstvennyye nejronnyye seti i prilozhenija: ucheb. posobie [Artificial neural networks and applications: textbook]*. Kazan': Izd-vo Kazan. un-ta, 121. (In Russian)

[8] Holms U., Bjalik M., Fejdl Ch. (2022) *Iskusstvennyj intellekt v obrazovanii: perspektivy i problemy dlja prepodavanija i obuchenija [Artificial intelligence in education: prospects and challenges for teaching and learning]*. M.: Alpina PRO, 304. (In Russian)

[9] LaCroix R. (2021) *AI-Powered Personalized Learning: The Future of Education*. New York: Springer, 256.

[10] Selwyn N. (2021) *Education and AI: A Critical Perspective*. London: Routledge, 198 p.

[11] Baker R. (2019) *Learning Analytics and AI in Education*. New York: Cambridge University Press, 312.

[12] Levchenko I.V., Sadykova A.R., Kartashova L.I., Merenkova P.A. (2023) *Teaching Artificial Intelligence in Secondary School: From Development to Practice*. *RUDN Journal of Informatization in Education*, Vol. 20, No. 3, 265–280. DOI: 10.22363/2312-8631-2023-20-3-265-280.

[13] Asambaev A.Zh. (2011) *Zhasandy intellekt negizderi: oqulyq [Fundamentals of artificial intelligence: textbook]*. Almaty: Dәuir, 136. (In Kazakh)

[14] Madjarova G.A., Turdaqyn B.N. (2023) *"Zhasandy intellekt negizderi" elektivti kursynyn qurylymdyq maznunyn qalyptastyrw [Structuring the content of the elective course "Fundamentals of Artificial Intelligence"]*. *Abai atyndaғы QazŪPU Habarshysy. Fizika-matematika ғылымдары serijasy*, №4(84), 269–277. DOI: 10.51889/2959-5894.2023.84.4.026. (In Kazakh)

- [15] Turebaeva A.E. (2024) *Informatikany oqytuda zhasandy intellekt qoldanw adistemesi [Methodology of using artificial intelligence in teaching informatics]*. *Vestnik nauki*, №11(80), T.3, 1474–1477. (In Kazakh)
- [16] Qairanbai M.Zh. (2023) *Mashinany yjretw: oqu quraly [Machine learning: a study guide]*. Almaty, 102. (In Kazakh)
- [17] Bajaly Ә.Т., Zhunisov N.M., Zhaxylyqov A.B. (2023) *Zhasandy intellekt tehnologijalary negizinde tereñ oqytwdyn qoldanylywın zerttew [Research on the application of deep learning based on artificial intelligence technologies]*. *K.A. Iasawi atyndaғы Halyqaralyq qazaq-türk universitetiniң habarshysy. Matematika, fizika, informatika serijasy*, №4(27), 78–88. DOI: 10.47526/2023-4/2524-0080.07. (In Kazakh)
- [18] Serik M., Sadvakassova A., Duisegaliyeva N., Samashova G., Kultan J. (2025) *Project-based learning for machine learning in computer vision courses: Case study of Kazakhstan and Slovakia*. *International Journal of Innovative Research and Scientific Studies*, Vol. 8, No. 2, 1183–1196. DOI: 10.53894/ijirss.v8i2.5422.
- [19] Qazaqstan Respublikasy Ūkimeti (2024) *Qazaqstan Respublikasında zhasandy intellekti damytudyn 2023–2029 jıldarға арналған tuzhyrymdamasyn bekitu turaly: KR Ūkimetinin qaulysy №592, 2024 jyly 20 sawir [Concept for the development of artificial intelligence in the Republic of Kazakhstan for 2023–2029: Government decree №592]*. [Elektron. resurs]. Kolzhetimdi: <https://adilet.zan.kz/kaz/docs/P2400000592>
- [20] YUNESCO (2022) *K–12 AI curricula: A mapping of government-endorsed AI curricula*. Parizh: YUNESCO, 47 b. [Elektron. resurs]. Kolzhetimdi: <https://unesco.org/open-access>
- [21] UNESCO (2022) *K–12 AI Curricula: A Mapping of Government-Endorsed AI Curricula*. Paris: UNESCO, 81 p. ISBN 978-92-3-100497-1.
- [22] UNESCO (2021) *Recommendation on the Ethics of Artificial Intelligence*. Paris: UNESCO, 38.
- [23] UNESCO (2023) *The Impact of Artificial Intelligence on Education*. Paris: UNESCO, 55. [Electronic resource]. Available at: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000381137>
- [24] UNESCO (2024) *Artificial Intelligence Competency Framework for Students*. Paris: UNESCO, 53 p. ISBN 978-92-3-100603-6.

Sh.Zh. Ramankulov¹, N.N. Zhaksylyk^{1*}, B.A. Kurbanbekov¹

¹ Khoja Ahmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan.

* e-mail: nurkozha.zhaksylyk@ayu.edu.kz

ASSESSING THE IMPACT OF STEM EDUCATION ON STUDENTS' ACADEMIC PERFORMANCE IN SOLAR ENERGY STUDIES

Abstract

Integrating STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) Education into Solar Energy Curricula as a Key Strategy for Enhancing Students' Interaction and Understanding of Solar Energy Technologies. STEM education can be considered a key strategy for integrating solar energy studies into academic curricula to enhance students' interaction and comprehension of solar energy technologies. This approach not only fosters critical thinking and problem-solving skills but also prepares students for future careers in sustainable energy. The objective of this study is to evaluate the effectiveness of implementing STEM methods in solar energy education. The efficiency of STEM education in solar energy can be assessed through various criteria, including curriculum development, pedagogical strategies, and environmental awareness. As part of this study, scientific research related to this topic and STEM projects based on alternative energy sources were analyzed. A pedagogical experiment was conducted within the physics education curriculum for the course "Alternative Energy Sources." A total of 51 students participated in the experiment. The learning process utilized an educational-scientific stand designed to study the physical characteristics of solar energy converters, Vernier sensors for data collection, and the Vernier Graphical Analysis program to analyze the relationship between solar panel performance and light intensity. Quantitative data were analyzed using mathematical-statistical methods in the JASP software to observe the correlation between the frequency of STEM product usage and exam scores. The Pearson correlation coefficient was found to be $r = 0.575$, indicating a positive correlation, with $p < 0.001$, confirming statistical significance. Linear regression analysis yielded a value of $R^2 = 0.331$, suggesting that the use of STEM products explains approximately 33% of the variation in exam scores. The study results confirm that the use of STEM-based educational tools focused on solar energy positively impacts students' academic performance. The findings highlight the significance of incorporating STEM approaches into solar energy education programs, contributing to the training of highly qualified specialists in the field of renewable energy. This research can serve as a foundation for the implementation of innovative technologies in the education system.

Keywords: STEM education, solar panel, Vernier, solar energy, alternative energy sources, academic performance.

Ш.Ж. Раманкулов¹, Н.Н. Жақсылық¹, Б.А. Курбанбеков¹

¹ Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік Университеті, Түркістан қ., Қазақстан.

КҮН ЭНЕРГЕТИКАСЫН ОҚУДАҒЫ STEM БІЛІМ БЕРУДІҢ БІЛІМ АЛУШЫЛАРДЫҢ АКАДЕМИЯЛЫҚ ҮЛГЕРІМІНЕ ӘСЕРІН БАҒАЛАУ

Аңдатпа

STEM (Ғылым, Технология, Инженерия және Математика) білімін күн энергиясы бойынша оқу бағдарламаларына интеграциялау студенттердің Күн энергиясы технологиялары бойынша өзара әрекеттесуі мен түсінігін арттырудың негізгі стратегиясы ретінде қарастырсақ болады. Бұл тәсіл сыни тұрғыдан ойлау мен проблемаларды шешу дағдыларын дамытып қана қоймайды, сонымен қатар студенттерді тұрақты энергетика саласындағы болашақ мансапқа дайындайды. Бұл зерттеудің мақсаты Күн энергетикасын оқытуда STEM әдістерін енгізу тиімділігін анықтау болып табылады. Күн энергиясындағы STEM білімінің тиімділігін әртүрлі өлшемдер бойынша бағалауға болады, атап айтсақ оқу бағдарламаларын әзірлеу, педагогикалық стратегиялар және экологиялық сананы дамыту. Зерттеу аясында осы тақырып төңірегіндегі ғылыми еңбектерге, баламалы энергия көздеріне негізделген STEM жобаларға талдау жасалды. Физика білім беру бағдарламасындағы «Баламалы энергия көздері» курсы оқытуда педагогикалық эксперимент ұйымдастырылды. Педагогикалық экспериментке 51 білім алушы

катысты. Оқу барысына «Күн энергиясын электр энергиясына түрлендіргіштердің физикалық сипаттамаларын зерттеуге арналған оқу-ғылыми стенді», нәтижелерді алу үшін Vernier датчиктері және Vernier Graphical Analysis бағдарламасы қолданылып, Күн панелінің өнімділігі мен жарықтылық арасындағы байланыс зерттелді. Сандық деректер STEM өнімдерін қолдану жиілігі мен осы пәннің емтихан бағаларының арасындағы байланысты бақылап, JASP бағдарламасы көмегімен математикалық-статистикалық талдау жасалды. Пирсон корреляциясының мәні $r=0,575$, яғни оң корреляция, және $p<0,001$ Корреляция статистикалық тұрғыдан маңызды екенін көрсетеді. Сызықты регрессиялық талдау мәні $R^2 = 0.331$, яғни STEM өнімдерін қолдану емтихан бағасының өзгерісінің шамамен 33%-ын түсіндіреді. Зерттеу нәтижесінде Күн энергетикасына бағытталған STEM өнімдерді білім беруде қолдану студенттердің білім деңгейлеріне оң әсер ететіне көз жеткіздік. Зерттеу нәтижелері STEM тәсілдерін Күн энергетикасы бойынша білім беру бағдарламаларына енгізудің маңыздылығын айқындады. Бұл оқыту әдістері жаңартылатын энергия саласында жоғары білікті мамандар даярлауға көмектеседі. Осы зерттеу білім беру жүйесінде инновациялық технологияларды қолдануға негіз бола алады.

Түйін сөздер: STEM білім, күн панелі, Vernier, күн энергетикасы, баламалы энергия көздері, академиялық үлгерім.

Ш.Ж. Раманкулов¹, Н.Н. Жаксылық¹, Ж.М. Битибаева², Б.А. Курбанбеков¹

¹Международный казахско-турецкий Университет имени Х.А.Ясави, г.Туркестан, Казахстан

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ STEM-ОБРАЗОВАНИЯ НА АКАДЕМИЧЕСКУЮ УСПЕВАЕМОСТЬ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ИЗУЧЕНИИ СОЛНЕЧНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

Аннотация

Интеграция STEM-образования (Наука, Технологии, Инженерия и Математика) в учебные программы по солнечной энергии как ключевая стратегия повышения взаимодействия и понимания технологий солнечной энергии среди студентов. STEM-образование можно рассматривать как ключевую стратегию интеграции изучения солнечной энергии в учебные программы с целью улучшения взаимодействия студентов с технологиями солнечной энергии и их понимания. Такой подход не только развивает критическое мышление и навыки решения проблем, но и подготавливает студентов к будущей карьере в области устойчивой энергетики. Целью данного исследования является оценка эффективности внедрения STEM-методов в преподавание солнечной энергетики. Эффективность STEM-образования в данной области можно оценивать по различным критериям, таким как разработка учебных программ, педагогические стратегии и развитие экологического сознания. В рамках исследования был проведен анализ научных работ по данной теме и STEM-проектов, основанных на альтернативных источниках энергии. Педагогический эксперимент был организован в рамках курса «Альтернативные источники энергии» образовательной программы по физике. В эксперименте приняли участие 51 студент. В учебном процессе использовался учебно-научный стенд для исследования физических характеристик преобразователей солнечной энергии, датчики Vernier для сбора данных и программа Vernier Graphical Analysis для анализа связи между производительностью солнечной панели и интенсивностью освещения. Количественные данные анализировались методами математико-статистического анализа в программе JASP, чтобы определить взаимосвязь между частотой использования STEM-продуктов и экзаменационными оценками. Коэффициент корреляции Пирсона составил $r = 0.575$, что указывает на положительную корреляцию, а $p < 0.001$, что подтверждает статистическую значимость. Линейный регрессионный анализ показал значение $R^2 = 0.331$, то есть использование STEM-продуктов объясняет примерно 33% изменения экзаменационных оценок. Результаты исследования подтверждают, что использование STEM-продуктов, ориентированных на солнечную энергетику, положительно влияет на академическую успеваемость студентов. Выводы подчеркивают важность внедрения STEM-подходов в образовательные программы по солнечной энергетике, что способствует подготовке высококвалифицированных специалистов в области возобновляемых источников энергии. Данное исследование может стать основой для внедрения инновационных технологий в систему образования.

Ключевые слова: STEM-образование, солнечная панель, Vernier, солнечная энергетика, альтернативные источники энергии, академическая успеваемость.

Негізгі ережелер

Зерттеу студенттердің теориялық және практикалық құзыреттілігін арттыру үшін STEM әдістерін күн энергиясын оқытуға біріктірудің маңыздылығын көрсетеді. Vernier датчиктерімен және Vernier Graphical Analysis бағдарламалық жасақтамасымен бірге күн энергиясын электр энергиясына түрлендірудің физикалық сипаттамаларын зерттеуге арналған оқу стендін қолдана отырып, студенттер ғылыми ізденістермен белсенді айналысады. Бұл тәсіл фотоэлектрлік принциптерді тереңірек түсінуге ықпал етеді, практикалық мәселелерді шешуге ықпал етеді және нақты уақыттағы деректерді жинауға және талдауға мүмкіндік береді, осылайша технологияға негізделген тергеу процестерінің өзектілігін арттырады.

Сонымен қатар, STEM өнімін қолдану жиілігі мен емтихан нәтижелері арасындағы күшті корреляция ($r=0.575$) мұндай интеграцияның нақты академиялық артықшылықтарын көрсетеді. Студенттер жаңартылатын энергия көздері туралы түсініктерін жетілдіріп қана қоймай, сонымен қатар маңызды аналитикалық және инженерлік дағдыларды дамытады. Осылайша, зерттеу STEM-ге негізделген педагогикалық стратегиялардың болашақ мамандарды тұрақты дамуға бағытталған дамып келе жатқан энергетика секторында өркендеу үшін қажетті құзыреттіліктермен қалай тиімді қамтамасыз ететінін көрсетеді.

Кіріспе

Ғылым, Технология, Инженерия және Математика (STEM) білімін күн энергиясын оқытуға біріктіру, әсіресе оның оқушылардың үлгеріміне әсерін бағалауда зерттеудің негізгі бағыты ретінде пайда болды. Жаңартылатын энергия көздеріне жаһандық екпін күшейген сайын, білім беру мекемелері студенттерді осы саладағы болашақ мансаптары үшін қажетті дағдылар мен білімдермен қамтамасыз ету үшін күн энергиясы бойынша оқу бағдарламаларын көбірек қабылдауда. STEM білімінің көп қырлы сипаты, әсіресе күн энергиясын оқытумен үйлескенде, студенттердің ғылыми принциптер туралы түсінігін арттырып қана қоймайды, сонымен қатар қазіргі жұмыс күшінде табысқа жету үшін қажетті сыни ойлау мен мәселелерді шешу дағдыларын дамытады [1-3].

Зерттеулер көрсеткендей, STEM білімінің негізгі құрамдас бөлігі болып табылатын жобалық оқыту оқушылардың күн энергиясы тақырыптарына деген қызығушылығы мен қызығушылығын айтарлықтай арттырады. Мысалы, Suryadi et al, күн батареяларын жобалау және сынау сияқты практикалық жобаларға қатысатын студенттер мотивацияның жоғарылауын және фотоэлектрлік принциптерді тереңірек түсінуді көрсететінін атап көрсетеді [4]. Бұл тәжірибелік оқыту тәсілі студенттерге теориялық білімдерін практикалық жағдайда қолдануға мүмкіндік береді, осылайша олардың оқу үлгерімін нығайтады. Сонымен қатар, зерттеулер виртуалды шындықты пайдалану және интерактивті модельдеу сияқты оқытудың инновациялық әдістерін енгізу студенттерге күн энергиясы тұжырымдамаларын зерттеуге қызықты орта беру арқылы оқу тәжірибесін одан әрі жақсарту алатынын көрсетеді [5-6].

Күн энергиясын оқытудағы STEM білімінің тиімділігі саланың қажеттіліктеріне сәйкес келетін құзыреттіліктерді дамытуда да көрінеді. Kuo & Chang түлектердің жұмыс берушілер іздейтін қажетті дағдыларға ие болуын қамтамасыз ету үшін инженерлік білімге, әсіресе күн энергиясы контекстінде жұмысқа қабілеттілік көрсеткіштерін біріктірудің маңыздылығын атап көрсетеді [7-8]. Бұл сәйкестік студенттерді дереу жұмысқа орналасуға дайындап қана қоймайды, сонымен қатар қарқынды дамып келе жатқан энергетикалық сала бойынша ұзақ мерзімді мансаптық табысқа ықпал етеді. Сонымен қатар, STEM білім беруде қолданылатын белсенді оқыту стратегиялары студенттердің аз қамтылған топтары арасындағы үлгерімдегі олқылықтарды азайтатыны, осылайша осы саладағы инклюзивтілік пен әртүрлілікке ықпал ететіні дәлелденді [9-10].

STEM интеграциясын және оқу-стендтерін қолдану студенттердің зерттеу дағдыларына, қызығушылығына, білім алу мотивациясына, үлгеріміне оң әсерін тигізгенімен, оқу процесіне

қосу үшін технологиялық, әдістемелік мәселелерді шешу қажет. Сонымен қатар, білім беру саласындағы зерттеу жұмыстарында мынадай жеткіліксіздіктер бар:

-Баламалы энергияны оқытуда STEM білім беруді қолдану бойынша ғылыми зерттеулердің, әдістемелік құралдардың жеткіліксіздігі.

-Материалдық-техникалық базаның жеткіліксіз болғанынан туатын студенттердің күн энергетикасы саласындағы нақты ақпараттармен қамтамасыз етілмеуі.

Бұл зерттеу осы қайшылықтардан өтуге бағытталған жұмыстарды жоспарлауға көмектесіп, білім беру сапасы мен процесіне айтарлықтай оң өзгерістер беруі мүмкін. Оқу үлгерімін арттырумен қатар, STEM білім беру жүйесіндегі күн энергиясын оқыту студенттердің қоршаған ортаны қорғау мотивациясын арттырады. Жаңартылатын энергия технологияларымен өзара әрекеттесу арқылы студенттер тұрақтылық мәселелері және климаттың өзгеруі сияқты жаһандық мәселелерді шешудегі күн энергиясының рөлі туралы көбірек хабардар болады [11]. Бұл хабардарлық өте маңызды, өйткені студенттер ақпараттандырылған азаматтар мен энергетика саласындағы болашақ көшбасшылар рөліне ауысады.

Күн энергетикасы бойынша STEM өнімді қолдану арқылы студенттер күн панельдерінің өнімділігі мен жарықтылықтың арасындағы байланысы мысалында жүзеге асады. Жұмыс оқу стенді, Vernier энергия датчигі (GoDirect Energy) және Vernier Graphical Analysis бағдарламасы көмегімен жүзеге асыды. Бұл жұмыс олардың күн энергетикасы туралы білімдерін арттырып, бұл саладағы қызығушылығын арттырады. Сонымен қатар, бұл жұмыста студенттер ғылыми зерттеу дағдыларын қалыптастырады.

Әдебиеттік шолу

Күн энергетикасындағы STEM білімінің маңызды аспектілерінің бірі – оның пәнаралық сипаты, бұл студенттерге әртүрлі ғылыми салалар арасындағы ұғымдарды байланыстыруға мүмкіндік береді. Нігде зерттеуі жаңартылатын энергия көздеріне негізделген дизайнға бағытталған STEM білімінің студенттердің экологиялық мәселелер жөніндегі сыни ойлауын және ғылыми мансапқа деген қызығушылығын айтарлықтай арттыратынын көрсетеді [12]. Бұл пәнаралық тәсілді Indahwati одан әрі қолдайды, ол STEAM (Ғылым, Технология, Инженерия, Өнер және Математика) шеңберінде дербес оқыту мен физикадағы инновацияларды біріктірудің маңыздылығын атап өтеді. Бұл әсіресе Тұрақты даму мақсаттарына (SDGs) қол жеткізу контекстінде сыни ойлау дағдыларын дамытуға ықпал етеді [13]. Мұндай интеграция оқу үдерісін байытып қана қоймай, білім беру нәтижелерін жаһандық тұрақтылық мақсаттарымен сәйкестендіреді.

Сонымен қатар, педагогтердің көзқарастары мен ұстанымдары тиімді STEM оқу бағдарламаларын жүзеге асыруда шешуші рөл атқарады. Güven және Çakır зерттеуі жаңартылатын энергияға деген мұғалімдердің оң көзқарасы мен олардың сыни ойлау бейімділігі арасында өзара байланыс бар екенін анықтады. Бұл жаңартылатын энергия білімін жоғары бағалайтын педагогтердің өз студенттерінде де осыған ұқсас көзқарастар қалыптастыру ықтималдығы жоғары екенін көрсетеді [14]. Бұл мұғалімдерді даярлау бағдарламалары жаңартылатын энергияның маңыздылығына ерекше мән беруі қажет екенін көрсетеді, өйткені бұл қолайлы оқу ортасын қалыптастыруға ықпал етеді. Сонымен қатар, Genç зерттеуі жаңартылатын энергия тақырыптарын орта мектеп бағдарламасына енгізудің қажеттілігін атап көрсетеді, бұл студенттердің осы технологиялар туралы түсінігін тереңдетіп, олардың қабылдауын жақсартуға мүмкіндік береді [15].

Күн энергетикасындағы тиімді STEM білімінің тағы бір маңызды құрамдас бөлігі – практикалық, жобалық негіздегі оқу тәжірибесін дамыту. Muliyati зерттеуі STEM-ге негізделген жобалық оқыту (PjBL) аясында студенттердің жаңартылатын энергияға байланысты нақты мәселелерді шешуіне мүмкіндік беретін жұмыс парақтарын әзірлеудің маңыздылығын ерекше атап көрсетеді [16]. Бұл практикалық тәсіл студенттердің оқу үдерісіне белсенді қатысуын қамтамасыз етіп қана қоймай, теориялық білімдерін нақты жағдайларда қолдануға көмектеседі, осылайша күн энергетикасы ұғымдарын тереңірек меңгеруге ықпал

етеді. Сол сияқты, Okonkwo зерттеуі орта мектептегі STEM оқу бағдарламаларына тұрақты даму білімін енгізуді қарастырады. Ол жаңартылатын энергия технологиялары мен жасыл химияға назар аудара отырып, студенттердің тұрақты даму тәжірибелерін жақсырақ түсінуіне мүмкіндік береді [17].

Инновациялық оқыту әдістерінің, соның ішінде симуляциялар мен виртуалды зертханалардың рөлін жоққа шығаруға болмайды. Мысалы, Guo және әріптестері сипаттаған микроторлық жүйелерге арналған виртуалды зертхананы дамыту студенттердің жаңартылатын энергия технологиялары, соның ішінде күн энергетикасы туралы білімін және түсінігін едәуір арттырғанын көрсетті [18]. Мұндай интерактивті оқу ортасы студенттерге күрделі энергетикалық жүйелермен басқарылатын жағдайда тәжірибе жасауға және жұмыс істеуге мүмкіндік береді, осылайша олардың оқу нәтижелерін жақсартады.

Сонымен қатар, STEM білімінде шығармашылық элементтерді енгізу студенттердің қызығушылығы мен түсінігін арттыра алады. Renny және әріптестері өнер мен ғылымды біріктіру арқылы, мысалы, люминесцентті күн шоғырландырғыштарын бейнелеу жобалары арқылы, студенттердің креативті ойлауын дамытып, оларды күн энергетикасы туралы біліммен қамтамасыз етуге болатынын көрсетеді [19]. Бұл тәсіл оқыту үдерісін қызықты етіп қана қоймай, сонымен қатар студенттерді жаңартылатын энергия шешімдеріне шығармашылық тұрғыдан қарауға ынталандырады.

STEM білімінің студенттердің жаңартылатын энергияға деген көзқарасына ықпалы Sulaiman зерттеуінде де айқын көрінеді. Ол күн фотоэлектрлік жүйелерін оқытуда Minecraft Education сияқты интерактивті құралдарды пайдаланудың тиімділігін зерттей отырып, олардың білім алушылардың қызығушылығы мен түсінігін арттырудағы рөлін көрсетеді [20]. Мұндай инновациялық білім беру құралдары күрделі ғылыми ұғымдарды студенттерге қолжетімді әрі түсінікті етіп жеткізуге көмектеседі, осылайша олардың жаңартылатын энергия технологияларына деген қызығушылығын арттырады.

Білім мен дағдыларды жетілдірумен қатар, күн энергетикасындағы STEM білім беру экологиялық сауаттылықты қалыптастыруда да маңызды рөл атқарады. Mustain және Herlina зерттеуі STEM білімінің студенттерге ақпаратты сыни тұрғыдан талдауға және энергияны пайдалану мен үнемдеуге қатысты саналы шешімдер қабылдауға мүмкіндік беретінін көрсетеді [21]. Бұл әсіресе климаттың өзгеруі сияқты жаһандық мәселелер аясында аса маңызды, өйткені тұрақты даму тәжірибелерін ілгерілету үшін білімді азаматтар қажет.

Сонымен қатар, күн энергетикасындағы STEM білімінің тиімділігі жаңартылатын энергия тұтынуын арттырудағы білімнің рөлін атап көрсететін зерттеулермен де расталады. Мысалы, Jamshid және әріптестері білім деңгейінің жоғары болуы жаңартылатын энергияны көбірек тұтынумен өзара байланысты екенін анықтады. Бұл білімнің энергетикалық ауысуды жеделдетудегі негізгі қозғаушы күш екенін көрсетеді [22]. Бұл жаңартылатын энергия тақырыптарын оқу бағдарламаларына енгізудің қажеттілігін айқындайды, өйткені бұл болашақ ұрпақты тұрақты энергетикалық тәжірибелерге дайындауға мүмкіндік береді.

Жоғары оқу орындарының жаңартылатын энергия туралы түсінікті қалыптастырудағы рөлі де ерекше маңызды. Pantchenko және әріптестері атап өткендей, жаңартылатын энергия курстарындағы практикалық зертханалық тәжірибелер студенттердің бұл технологияларға деген қызығушылығы мен түсінігін едәуір арттыра алады [23]. Мұндай тәжірибелік оқыту мүмкіндіктері теориялық білім мен практикалық қолдану арасындағы алшақтықты жою үшін өте маңызды, осылайша студенттерді жаңартылатын энергия көздері саласындағы мансапқа дайындайды.

STEM жобаларындағы Vernier датчиктерін және Vernier Graphical Analysis қолдану бойынша жасалған жұмыстарға талдау жасайық. Себебі, Vernier графикалық анализін білім беруде, әсіресе физика және STEM білім беру контекстінде қолдану оқушылардың көрнекі бейнелеу және деректерді талдау арқылы күрделі ұғымдарды түсінуін жақсарту қабілетінің арқасында қарқын алды. Бұл әдіс теориялық білім мен практикалық қолдану арасындағы

тереңірек байланысты жеңілдету үшін технологияны пайдаланады, осылайша оқушылардың белсенділігі мен оқу нәтижелерін жақсартады.

Vernier графикалық талдау құралдарын пайдаланудың маңызды артықшылықтарының бірі – студенттердің кинематикалық графиктерді интерпретациялау дағдыларын жақсартуға тиімді ықпал етуі. Martin және әріптестері атап өткендей, Vernier ұсынған бейне талдау құралдары студенттерге қозғалысты визуализациялауға және оны физикалық әрі математикалық модельдермен байланыстыруға мүмкіндік береді. Бұл өзара байланыс кинематика мен динамиканы тереңірек түсінуге ықпал етеді, өйткені студенттер теориялық білімдерінің нақты уақыттағы көрінісін тікелей бақылай алады [24]. Мұндай құралдарды оқу бағдарламасына енгізу тек түсінікті жақсартып қана қоймай, сонымен қатар студенттерді ғылыми зерттеу мен тәжірибелік жұмысқа тартуға ықпал етеді.

Сонымен қатар, білім беру материалдарында графикалық көрнекіліктерді қолдану оқыту тиімділігін арттыратыны белгілі. Khine және Liu ғылыми оқулықтардағы графикалық көрнекіліктерді сипаттамалық талдау арқылы визуалды құралдардың күрделі ғылыми ұғымдарды түсіну мен есте сақтауға көмектесетінін атап көрсетеді [25]. Бұл Vernier графикалық талдауының принциптерімен сәйкес келеді, өйткені ол деректерді қарапайым әрі түсінікті ету үшін графикалық көрнекіліктерді пайдаланады, осылайша студенттер үшін ақпараттың қолжетімділігін арттырады.

Графикалық талдау құралдарының тиімділігіне қатысты зерттеулер интерактивті және динамикалық визуалды құралдардың оқу нәтижелерін жақсартуға ықпал ететінін растайды. Wang және әріптестері интерактивті графикалық ұйымдастырушыларды қолдану когнитивті белсенділікті арттырып, оқу тәжірибесін тереңдете түсетінін анықтады [26]. Бұл Vernier графикалық талдау құралдарын, әсіресе интерактивті мүмкіндіктері бар функцияларын оқу үдерісіне енгізу студенттердің қызығушылығын арттырып, оқыту ортасын анағұрлым тартымды ете алатынын көрсетеді.

Сонымен қатар, білім беруде графикалық талдауды қолдану жоғары деңгейлі ойлау дағдыларын дамытуға ықпал етеді. Zulfarina және әріптестері қозғалыс графикасы мен визуалды симуляцияларды пайдалану студенттердің сыни ойлау және проблемаларды шешу қабілеттерін жақсарта алатынын анықтады. Бұл STEM саласында деректерді талдау мен күрделі құбылыстарды түсінуді қажет ететін дағдыларды қалыптастыруда маңызды рөл атқарады [27]. Графикалық деректермен өзара әрекеттесу арқылы студенттерге академиялық және нақты контексте маңызды дағдылар болып табылатын ақпаратты талдау, синтездеу және бағалау ұсынылады.

Сонымен Vernier графикалық талдауын білім беруде қолдану студенттердің STEM пәндері бойынша оқуын арттырудың қуатты құралы ретінде қызмет етеді. Көрнекі бейнелеу және интерактивті деректерді талдау арқылы күрделі ұғымдарды тереңірек түсінуге ықпал ете отырып, бұл құралдар түсінуді жақсартып қана қоймайды, сонымен қатар оқушылардың сыни ойлауы мен белсенділігін арттырады. Мұндай әдістемелерді оқу практикасына енгізу студенттерді заманауи ғылыми-техникалық ландшафттардың сын-қатерлеріне дайындау үшін өте маңызды.

Зерттеу әдіснамасы

«Күн энергиясын электр энергиясына түрлендіргіштердің физикалық сипаттамаларын зерттеуге арналған оқу-ғылыми стендті» қолдану арқылы анықталды. Педагогикалық экспериментке физика білім беру бағдарламасындағы «Баламалы энергия көздері» курсынан 51 білім алушы қатысты. Зерттеу барысында күн панелінің өнімділігін жарықтылық деңгейімен салыстыру үшін арнайы оқу-ғылыми стенд және Vernier Graphical Analysis бағдарламасы пайдаланылды.

«Баламалы энергия көздері» курсына студенттер STEM өнім арқылы күн панельдерінің жұмысымен таныты. Сонымен қатар, күн панельдерінің өнімділігіне жарықтылық деңгейінің қалай әсер ететін зерттеді.

Зерттеу алдында мынадай ғылыми гипотезалар әзірленді:

H0: STEM интеграциясы студенттердің академиялық үлгеріміне және күн энергетикасы туралы түсінігіне айтарлықтай әсер етпейді.

H1: STEM интеграциясы студенттердің академиялық үлгеріміне және күн энергетикасы туралы түсінігіне айтарлықтай әсер етеді.

Зерттеу құралдары

Зерттеу барысында келесі құралдар қолданылды:

Күн панельдерін зерттеу үшін «Күн энергиясын электр энергиясына түрлендіргіштердің физикалық сипаттамаларын зерттеуге арналған оқу-ғылыми стендті» қолданылды. Токты, кернеуді өлшейтін электронды вольтамперметр, онымен қоса GoDirect Energy датчигі (нақты мәндерді компьютерлік талдау жасау үшін), жарықтың спектрлік таралуын өлшеуге арналған (көп сенсорлы деректер) құрылғы GlobiLab құрылғысы қолданылды. Алынған нәтижелерді компьютерге ендіру және вольт-амперлік сипаттамасын алу үшін Vernier Graphical Analysis қосымшасын және GlobiLab қосымшасын қолданамыз. Бұл зерттеу жүйесі күн панельдерімен әр түрлі эксперименттер жүргізуге арналған. Орнату арқылы келесі сынақ түрлерін орындауға болады:

- Күн панельдерінің ашық тізбек кернеуін анықтау, яғни жүктеме болмаған кезде панель бере алатын максималды кернеу.

- Күн панельдерінің қысқа тұйықталу тогын өлшеу, бұл панель оның электродтары жүктемесіз тұйықталған кезде шығара алатын максималды ток.

- Күн батареяларының Вольт-Ампер сипаттамаларын алу, бұл әртүрлі жарық жағдайларында элементтегі токтың кернеуге тәуелділігін талдауға мүмкіндік береді.

Гипотезаларды тексеру және математикалық-статистикалық талдаулар жүргізу үшін JASP бағдарламасы қолданылды. Зерттеу нәтижесі курс соңындағы студенттердің қортынды емтихан бағаларымен алынды.

Деректерді жинау және талдау

«Баламалы энергия көздері» курсы бойынша күн панелдерінің жұмыс принциптерін түсінуде студенттердің STEM өнімдерін қолдану жиілігі мен академиялық үлгерімінің байланысын анықталды. JASP бағдарламасы арқылы STEM өнімдерді қолдану жиілігі (X) мен емтихан нәтижелері (Y) арасындағы байланысы, TEM оқытудың студенттердің үлгеріміне ықпалын тексерілді. Сонымен қатар, STEM оқыту әдістерінің академиялық үлгерімге қаншалықты әсер ететінін сандық түрде өлшеу арқылы регрессиялық талдау жасалды

Зерттеу нәтижелері

Студенттерге әртүрлі параметрлердің, соның ішінде жарықтылықтың, күн панелдерінің өнімділігіне әсерін зерттеу тапсырылды. Осы кезеңде олар энергияның түрлену процесін және күн энергиясы жүйелерінің жалпы жұмыс істеу принциптерін меңгерді.

Студенттер күн панелінің өнімділігін оңтайландыру үшін түсу бұрышын өзгерте отырып модельдер құруға бағытталды. Бұл кезеңде олар Vernier Graphical Analysis бағдарламасын қолданып, нақты уақыт режимінде деректер жинау мүмкіндігіне ие болды. Деректерін талдау арқылы платформа қуат өндіру деңгейін, тиімділігін және күн панелінің жалпы өнімділігін бақылауға көмектесті.

Студенттер панельдің өнімділігі мен жарықтылық арасындағы байланыс туралы ақпараттар жинап, олардың байланыс графиктерін салды. Математикалық тәуелділіктерін есептеді.

Vernier Graphical Analysis бағдарламасы арқылы күн панельдерінің вольтамперлік сипаттамасын бақылау – студенттердің күн энергетикасындағы негізгі заңдылықтарды тікелей зерттеуіне мүмкіндік беретін тәжірибелік әдіс. Бұл бағдарлама ток пен кернеудің өзгерістерін нақты уақыт режимінде тіркеп, графиктер түрінде ұсынады. Нәтижесінде студенттер күн батареясының жұмыс істеу қағидаларын терең түсініп, әртүрлі жарықтандыру немесе жүктеме жағдайында алынатын қуат пен тиімділіктің көрсеткіштерін тікелей талдай алады. Бұл тәсіл

теория мен практиканы байланыстыратын, ғылыми-зерттеу дағдыларын дамытатын маңызды оқу құралы болып табылады.

STEM жобаларды қолдану арқылы білім алушылар күн панельдерінің жұмыс істеу принципін, энергия түрлендіру процестерін және тиімділік көрсеткіштерін тәжірибе жүзінде зерттеп, нақты есептеулер жүргізе алады (1-сурет).



Сурет 1. STEM жобаларды күн энергетикасын оқытуды іске асыру

Vernier Graphical Analysis бағдарламасы мен STEM жобаларын интеграциялау студенттердің зерттеушілік және практикалық дағдыларын жетілдіруге айтарлықтай ықпал етеді. Студенттер энергетикалық параметрлерді өлшеу, оларды талдау және нәтижелерді теориялық болжамдармен салыстырып, салыстырмалы талдау жүргізуге үйренеді. Олар алынған көрсеткіштерді зертханалық жағдайлармен салыстыра отырып, пайда болған айырмашылықтардың себептерін анықтайды және өз ұсыныстарын әзірлейді. Осылайша, білім алушылар нақты ғылыми мәселелерді шешуге бағытталған дербес зерттеу дағдыларын игеріп, энергия тиімділігін арттыруға қатысты жаңа идеялар ұсына алады.

Күн панелінің шығыс қуаты мен жарық интенсивтілігі арасындағы байланысты зерттеу жұмысының сипаттамасы

IV қисықтары күн батареясы бере алатын максималды токты, максималды кернеуді және максималды қуатты көрсетеді. Графиктің вертикаль осьі ашық тізбек кернеуінен ($V_{ат}$), горизонтальді осьі қысқа тұйықталу тоғынан ($I_{қт}$) құрылған тіктөртбұрыш графиктің үлкенірек аймағына созылады. Кіші тіктөртбұрыш график осьтерімен және максималды шығыс қуатындағы максималды ток және кернеумен (I_{max} және V_{max}) анықталады. Толтыру коэффициенті - кіші тіктөртбұрыштың ауданы үлкен тіктөртбұрыштың ауданына тең:

$$FF = \frac{I_{max}V_{max}}{I_{қт}V_{ат}} \quad (1)$$

Ашық тізбек кернеуі $V_{ат}$ - кедергі шексіз болған кезде (яғни тізбек тұйықталмаған кезде) тізбекте ток болмайды. $I_{қт}$ қысқа тұйықталу тоғы кедергі шамамен 0 Ом және кернеу 0 В болған кездегі ток шамасы. Бұл жағдай тізбекті жүктеменің орнына қарапайым сыммен тұйықтау арқылы өлшенеді.

Жұмыстың мақсаты.

- Токты, кернеуді және қуатты анықтау үшін энергия датчигін пайдалану.

- Күн батареялары өндіретін электр энергиясы мен түсетін жарықтың арасындағы байланысты зерттеу

- Күн панелі үшін вольтамперлік сипаттамасын алу.

Құралдар

- Графикалық талдау қолданбасы. (Vernier Graphical Analysis, GlobePHIS)

- Энергиядатчигі (Go Direct Energy)

- Vernier ауыспалы жүктемесі
- Оқу стенді
- Жарықтылықты анықтайтын детектор (Люксометр)

Эксперименттік зерттеу барысында жарықтылықтың өзгеруіне байланысты фотоэлектрлік панельдің кернеу және ток мәндеріне әсері төмендегі 1-кестеде берілген.

Кесте 1. Экспериментті орындау барысында алынған нәтижелер

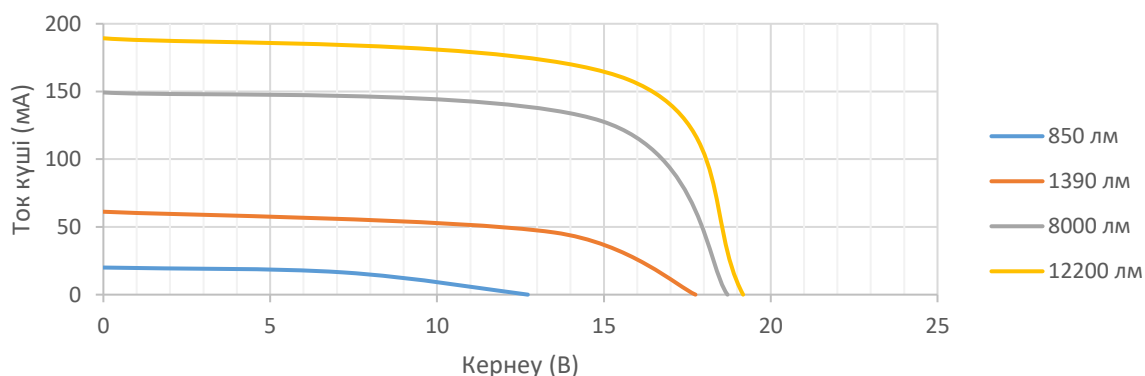
Жарықтылық, (Лм)	$V_{ат}$ (В)	$I_{қт}$ (мА)	V_{max} (В)	I_{max} (мА)
850	12,721	20,013	7,16	16,469
1390	17,745	61,221	13,508	45,928
8000	18,705	149,277	14,931	128,144
12200	19,173	189,304	15,741	158,677

Алынған нәтижелерді пайдаланып әр түрлі жарықтылықтағы максимал қуат шамасын есептеуге болады. Ол мына формуламен анықталынады:

$$P_{max} = I_{max}V_{max} \quad (2)$$

Алынған нәтижелерді қолдана отырып күн батареясының вольт-амперлік сипаттамасын (IV қисығы) сыздық (2-сурет).

Күн батареясының әр түрлі жарықтылықтағы вольт-амперлік сипаттамасы



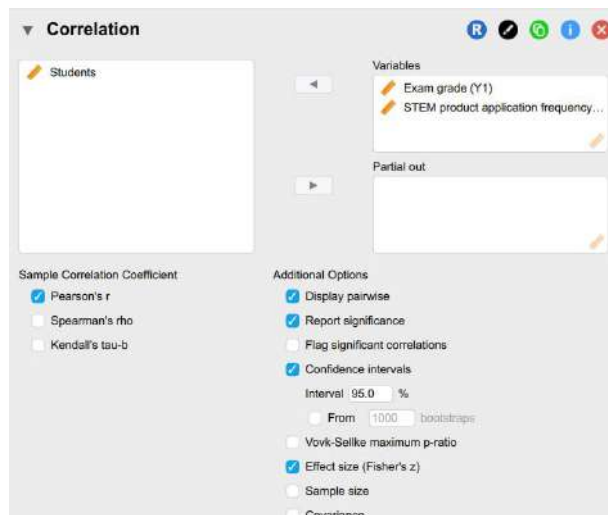
Сурет 2. Алынған нәтижелерді қолдана отырып күн батареясының әр түрлі жарықтылықтағы вольт-амперлік сипаттамасы (IV қисығы)

Бұл экспериментті қортындылай келе, күн батареяларының шығыс қуаты жарықтылыққа тікелей тәуелді екенін байқай аламыз. 4 түрлі жарықтылықтағы IV қисығы бұл тәуелділікті анық көрсетеді.

STEM білім беруге негізделген педагогикалық эксперимент нәтижелері. Пирсон корреляциясы.

Баламалы энергия көздері курсы аясында ұйымдастырылған педагогикалық экспериментке 51 студент қатысты. Эксперимент барысында «Күн энергетикасы» тақырыбы бойынша STEM өнімдер қолданылып, студенттердің тәжірибелік және зертханалық жұмыстарға белсенді қатысу деңгейі бақыланды. Оқу үрдісінде түрлі зерттеу-ізденіс тапсырмалары беріліп, студенттер күн панелдерінің қуат шығару ерекшеліктерін, жарықтандыру жағдайына байланысты өзгерістерін, сондай-ақ энергетикалық тиімділікті арттыру тәсілдерін талдауға мүмкіндік алды.

JASP бағдарламасында Пирсон корреляция коэффициентін есептеу үшін алдымен деректерді енгізіп немесе импорттап, "Regression" → "Correlation Matrix" мәзіріне өту қажет. Бұл бөлімде талдау жасауға қажетті айнымалылар таңдалады. Бағдарлама таңдалған айнымалылар арасындағы байланыс күшін анықтап, Пирсонның r коэффициентін автоматты түрде есептейді және оның статистикалық мәнділігін (p -мәнін) көрсетеді (3-сурет).



Correlation

Pearson's Correlations		Pearson's r	p	Lower 95% CI	Upper 95% CI	Effect size (Fisher's z)	SE Effect size
Exam grade (Y1)	STEM product application frequency (number of hours) (X1)	0.575	< .001	0.370	0.727	0.656	0.136

Сурет 3. JAPS бағдарламасында Пирсон корреляцияны есептеу

r – Пирсон корреляциясы, p - маңыздылық деңгейі, CI – сенімділік интервалы (жоғары және төменгі), z – Фишер түрлендіруі, SE – әсер мөлшері.

Бұл талдау емтихан бағасы (Y1) мен STEM өнімді қолдану жиілігі (X1) арасында $r = 0.575$ шамасында оң әрі статистикалық тұрғыдан маңызды корреляция бар екенін көрсетеді ($p < 0.001$). Сенімділік аралығы $[0.370; 0.727]$ мәндері толығымен оң аймақта орналасқан, бұл байланыстың оң бағытта екенін тағы да растайды. Fisher's z мәні 0.656 және оның стандартты қатесі 0.136 – алынған корреляцияның орташа-жоғары деңгейде екендігін және нәтижелердің салыстырмалы түрде сенімді екенін білдіреді. Демек, STEM өнімдерін көп қолданған студенттердің емтихан бағасы, әдетте, жоғары болады деген қорытынды жасауға болады (4-сурет).

Model Summary - Exam grade (Y1)

Model	R	R ²	Adjusted R ²	RMSE
M ₀	0.000	0.000	0.000	25.686
M ₁	0.575	0.331	0.319	21.199

Note. M₁ includes STEM product application frequency (number of hours) (X1)

Сурет 4. Сызықты регрессиялық талдау нәтижесі

Бұл кестеде сызықтық регрессияның екі моделі көрсетілген:

* M₀ (Intercept моделі): Тек константаны қамтиды, тәуелді айнымалының орташа мәнін ғана болжайды.

- R = 0.000, R² = 0.000: Модель ештеңені түсіндірмейді, тек константаға сүйенеді.

- RMSE = 25.686: Модель қателігінің орташа мәні жоғары.

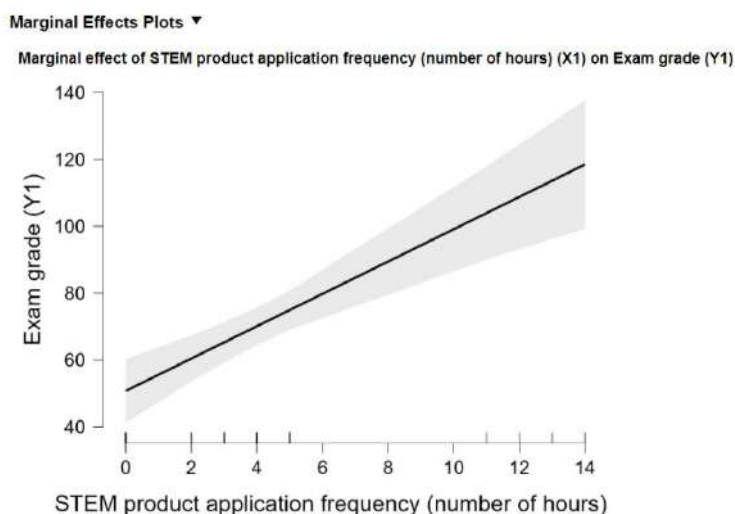
* M₁ (STEM өнімдерін қолдану жиілігін қамтитын модель):

- $R = 0.575$: STEM өнімдерін қолдану жиілігі (X1) мен емтихан бағалары (Y1) арасында орташа- жоғары деңгейде оң байланыс бар.

- $R^2 = 0.331$, Adjusted $R^2 = 0.319$: STEM өнімдерін қолдану емтихан бағасының өзгерісінің шамамен 33%-ын түсіндіреді.

- $RMSE = 21.199$: Модельдің қателігі константа моделіне қарағанда төмен, бұл STEM әдістерін қолдану жиілігі негізінде бағаларға дәлдеу болжам жасауға болатынын көрсетеді.

Қорытындысында M_1 моделі M_0 -ге қарағанда едәуір тиімді, STEM өнімдерін қолдану жиілігі емтихан бағаларын елеулі дәрежеде болжайтынын дәлелдейді. JASP бағдарламасында STEM өнімді қолдану жиілігі мен студенттердің үлгерімі арасындағы байланысты визуализациялау үшін Marginal Effects Plots қолданылады. Бұл графикалық құрал регрессиялық модель негізінде тәуелсіз айнымалының әсерін анық және көрнекі түрде көрсетеді (5-сурет).



Сурет 5. JASP бағдарламасынан алынған STEM өнімді қолдану жиілігі мен үлгерім арасындағы байланысы (Marginal Effects plots)

Marginal Effects графигі STEM өнімдерін қолдану жиілігі (X1) артқан сайын емтихан бағасының (Y1) біртіндеп жоғарлайтынын көрсетеді. Орталық сызық – регрессиялық модельдің болжамы, ал сұр аймақ – сенімділік аралығы (қате шамасы). Графиктегі айқын оң еңкіш сызық STEM әдістерінің жиі қолданылуы студенттердің оқу үлгерімін едәуір жақсартатынын айғақтайды.

Дискуссия

Осы зерттеу нәтижелері күн энергетикасын оқытудағы STEM тәсілінің білім алушылардың үлгеріміне және мотивациясына оң ықпал ететінін растайды. Алынған деректер ($r=0.936$, $p<0.001$) студенттердің STEM өнімдерін жүйелі қолдануы емтихан нәтижелерінің едәуір жақсаруымен байланыстылығын көрсетті. Практикалық жоба жұмысы теориялық білім мен оның нақты өмірдегі қолданылуы арасындағы байланысты қамтамасыз етеді. Миппа-ның зерттеуі инновациялық және интерактивті оқыту әдістерінің, соның ішінде жобалық оқытудың, жоғары білім беру деңгейіндегі студенттердің STEM дағдыларын айтарлықтай жақсартатынын көрсетеді [28]. Сонымен қатар, Vernier энергия датчигінің (GoDirect Energy) және Vernier Graphical Analysis бағдарламасының қолданылуы зертханалық жұмысты оңтайландырып, студенттерге нақты уақыт режимінде өлшеу жүргізу арқылы теориялық білімді тәжірибемен ұштастыруға мүмкіндік берді. Бұл тәсіл студенттердің зерттеушілік дағдыларын дамытуға ықпал етіп, жаңартылатын энергия көздерінің инженерлік қырларын терең түсінуіне себепкер болды.

Зерттеуге қатысқан 51 студенттің нәтижелері STEM оқыту стратегияларының қысқа мерзімді жетістіктерін ғана емес, болашақта тұрақты энергетика саласындағы кәсіби

даярлыққа да айтарлықтай үлес қосатынын байқатты. Қатысушылар күн панелінің өнімділігі мен жарықтылықтың өзара байланысын талдау арқылы жаңартылатын энергия көздерінің жұмыс істеу механизмі жөнінде нақты түсінік алды. Бұдан бөлек, студенттердің деректермен жұмыс істеу, оларды талдау және ғылыми қорытынды шығару дағдылары жетілді. Дегенмен, материалдық-техникалық базаның жеткіліксіздігі және оқытушылардың әдістемелік дайындығы сияқты шектеулер STEM әдістерін толыққанды енгізуге кедергі келтіруі мүмкін. Күн энергетикасын оқытуға қажетті техникалық база көбінесе жеткіліксіз болып табылады. Мысалы, Marquez және оның әріптестері күн батареяларын оқытуда озық бейнелеу технологияларын қолданудың маңыздылығын атап өтеді, бұл студенттердің күн энергетикасы технологияларын тереңірек түсінуіне ықпал ете алады. Алайда, көптеген білім беру мекемелерінде мұндай ресурстардың қолжетімділігі шектеулі, бұл оқытушыларға тиімді білім беру үшін маңызды болып табылатын тәжірибелік сабақтарды ұйымдастыруды қиындатады [28]. Бұл мәселе жоғары оқу орындары мен колледждерде арнайы оқу стендтерін көбейту, педагогтарға арналған біліктілікті арттыру курстарын ұйымдастыру секілді шараларды талап етеді.

Зерттеу барысында анықталған тағы бір маңызды тұжырым – экологиялық сана мен қоршаған ортаға жауапкершілікпен қарау деңгейінің артуы. Күн энергиясы тақырыптарын STEM негізінде оқыту барысында студенттер тұрақты энергия көзі ретінде күн энергиясының рөлін ұғынып, жаһандық климат өзгерістері мен ресурстарды ұтымды пайдалану мәселелеріне тереңірек үнілді. Мұндай экологиялық ойлау қабілеті жастардың болашақта жауапты азамат әрі салалық маман ретінде қалыптасуына ықпал жасайды.

Қорытынды

Зерттеу нәтижелері күн энергетикасын оқытуда STEM әдістерін қолдану студенттердің академиялық үлгерімін және пәнге деген қызығушылығын арттыратынын көрсетті. Vernier энергия датчиктері және Vernier Graphical Analysis бағдарламасы арқылы жүргізілген практикалық жұмыстар студенттердің күн панелі өнімділігі мен жарықтылық арасындағы байланысты жан-жақты зерттеуге мүмкіндік берді. Пирсон корреляциясының жоғары мәні ($r=0.575$, $p<0.001$) STEM тәсілдерінің тиімділігін айқындаса, регрессиялық талдаулар ($R^2=0.331$) бұл тәсілдің емтихан нәтижелеріне елеулі әсер ететінін нақтылап берді. Marginal effect plot графигінен STEM өнімдерді қолдану жиілігі мен студенттердің үлгерімі арасында оң сызықты байланыс бар екенін байқауға болады.

Сонымен қатар, педагогикалық эксперимент студенттердің зерттеушілік және аналитикалық дағдыларын дамытуда STEM әдістерінің маңызды екенін растады. Мұндай тәсіл жаңартылатын энергия саласында жоғары білікті мамандарды даярлауға ғана емес, экологиялық сананы арттыруға да ықпал етеді. Алдағы уақытта оқу орындарында STEM білім беру мен технологиялық құралдарды кеңінен пайдалану, материалдық-техникалық базаны нығайту, оқытушылардың әдістемелік шеберлігін дамыту жұмыстары жалғаса берсе, күн энергетикасын оқыту сапасы мен студенттердің оқу жетістігі жаңа белестерге көтеріледі. Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті тарапынан қаржыландырылған (*грант №AP23488947*).

Алғыс

Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті тарапынан қаржыландырылған (*грант №AP23488947*).

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

[1] Sulaiman, M. K. A., Halim, L., Mohamad Arsad, N., & Mohamad Yasin, R. (2023). Exploring challenges for integrating solar pv technology in secondary schools' education. *Proceedings of the 2nd International*

Conference on Social Sciences, ICONESS 2023, 22-23 July 2023, Purwokerto, Central Java, In. <https://doi.org/10.4108/eai.22-7-2023.2335096>

[2]Senthil, R. (2022). Recent innovations in solar energy education and research towards sustainable energy development. *Acta Innovations*, (42), 27-49. <https://doi.org/10.32933/actainnovations.42.3>

[3]Supian, F. L., Tho, S. W., Wong, Y. Y., Mohd Azmi, M. S., Hosman, N. J., Ratnawulan, R., ... & Al Naim, A. F. (2023). The evaluation of a technology-embedded solar energy stem (sestem) module: a pilot implementation of modern teaching tool for diploma science students. *Jurnal Pendidikan IPA Indonesia*, 12(4), 590-597. <https://doi.org/10.15294/jpii.v12i4.43994>

[4]Suryadi, A., Lidya, N., Habibah, H., & Suwarna, I. P. (2024). Study on the development and implementation of an interdisciplinary solar panel project to enhance students' interest in stem. *Research and Development in Education (RaDEn)*, 4(1), 415-427. <https://doi.org/10.22219/raden.v4i1.32881>

[5]AlQallaf, N., AlQallaf, A., & Ghannam, R. (2024). Solar energy systems design using immersive virtual reality: a multi-modal evaluation approach. *Solar*, 4(2), 329-350. <https://doi.org/10.3390/solar4020015>

[6]Alqallaf, N. and Ghannam, R. (2024). Immersive learning in photovoltaic energy education: a comprehensive review of virtual reality applications. *Solar*, 4(1), 136-161. <https://doi.org/10.3390/solar4010006>

[7]Kuo, C., Chang, C., & Huang, C. (2014). Constructing employability indicators for enhancing the effectiveness of engineering education for the solar industry. *International Journal of Photoenergy*, 2014, 1-11. <https://doi.org/10.1155/2014/491353>

[8]Kuo, C. and Chang, C. (2014). Building professional competencies indices in the solar energy industry for the engineering education curriculum. *International Journal of Photoenergy*, 2014, 1-6. <https://doi.org/10.1155/2014/963291>

[9]Theobald, E. J., Hill, M. J., Tran, E. T., Agrawal, S., Arroyo, E. N., Behling, S., ... & Freeman, S. (2020). Active learning narrows achievement gaps for underrepresented students in undergraduate science, technology, engineering, and math. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(12), 6476-6483. <https://doi.org/10.1073/pnas.1916903117>

[10]Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M. J., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., ... & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23), 8410-8415. <https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111>

[11]Oluwaseun Augustine Lottu, Vincent Ebhohime Ehiaguina, Sodrudeen Abolore Ayodeji, Tina Chinyere Ndiwe, & Uchenna Izuka (2023). Global review of solar power in education: initiatives, challenges, and benefits. *Engineering Science & Technology Journal*, 4(4), 209-221. <https://doi.org/10.51594/estj.v4i4.583>

[12]Hiğde, E. (2022). An interdisciplinary renewable energy education: investigating the influence of stem activities on perception, attitude, and behavior. *Journal of Science Learning*, 5(2), 373-385. <https://doi.org/10.17509/jsl.v5i2.41864>

[13]Indahwati, S. D., Rachmadiarti, F., Hariyono, E., Prahani, B. K., Wibowo, F. C., Bunyamin, M. A. H., ... & Satriawan, M. (2023). Integration of independent learning and physics innovation in steam-based renewable energy education to improve critical thinking skills in the era of society 5.0 for sustainable development goals (sdgs) 2030. *E3S Web of Conferences*, 450, 01010. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202345001010>

[14]Güven, G. and Çakır, N. K. (2019). The relation between teachers' attitudes towards renewable energy sources and critical thinking dispositions. *Journal of Baltic Science Education*, 18(5), 717-731. <https://doi.org/10.33225/jbse/19.18.717>

[15]Genç, M. and Durak, B. (2023). Pre-service teachers' perception of renewable energy sources: a case study of düzce university. *Mimbar Sekolah Dasar*, 10(3), 561-577. <https://doi.org/10.53400/mimbar-sd.v10i3.55005>

[16]Mulyati, D., Prastiawan, F., & Mutoharoh, M. (2023). Development of stem project-based learning student worksheet for physics learning on renewable energy topic. *Journal of Physics: Conference Series*, 2596(1), 012078. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2596/1/012078>

[17]Chioma Angela Okonkwo, Adenike Omonijo Toromade, & Oluwatosin Omotola Ajayi (2024). Stem education for sustainability: teaching high school students about renewable energy and green chemistry. *International Journal of Applied Research in Social Sciences*, 6(10), 2533-2545. <https://doi.org/10.51594/ijarss.v6i10.1664>

[18]Guo, L., Vengalil, M., Abdul, N. M. M., & Wang, K. (2021). Design and implementation of virtual laboratory for a microgrid with renewable energy sources. *Computer Applications in Engineering Education*, 30(2), 349-361. <https://doi.org/10.1002/cae.22459>

[19]Renny, A., Yang, C., Anthony, R., & Lunt, R. R. (2018). Luminescent solar concentrator paintings: connecting art and energy. *Journal of Chemical Education*, 95(7), 1161-1166. <https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.7b00742>

[20]Muhamad Kamarul Azman Sulaiman, M. K. A. S. (2024). Empowering the next generation: using minecraft education to teach solar photovoltaic concepts in secondary school. *International Journal of Information and Education Technology*, 14(7), 976-987. <https://doi.org/10.18178/ijiet.2024.14.7.2125>

[21]Mustain, I. and Herlina, Y. (2019). Stem for establishing energy literacy in maritime vocational education. *Scientiae Educatia*, 8(2), 131. <https://doi.org/10.24235/sc.educatia.v8i2.5520>

[22]Jamshid, J., Villanthenkodath, M. A., & Velan, N. (2022). Can educational attainment promote renewable energy consumption? evidence from heterogeneous panel models. *International Journal of Energy Sector Management*, 16(6), 1017-1036. <https://doi.org/10.1108/ijesm-06-2021-0015>

[23]Pantchenko, O., Shahab, S., Tate, D. J., Matteini, P., Isaacson, M., & Shakouri, A. (2011). Work in progress — enhancing students learning through instructional videos during hands-on laboratories on renewable energy sources. 2011 *Frontiers in Education Conference (FIE)*. <https://doi.org/10.1109/fie.2011.6142717>

[24]Martin, T. A., Frisch, K. E., & Zwart, J. (2020). Systematic errors in video analysis. *The Physics Teacher*, 58(3), 195-197. <https://doi.org/10.1119/1.5145415>

[25]Khine, M. S. and Liu, Y. (2017). Descriptive analysis of the graphic representations of science textbooks. *European Journal of STEM Education*, 2(3). <https://doi.org/10.20897/ejsteme/81285>

[26]Wang, X., Mayer, R. E., Pu, Z., & Lin, L. (2021). Benefits of interactive graphic organizers in online learning: evidence for generative learning theory.. *Journal of Educational Psychology*, 113(5), 1024-1037. <https://doi.org/10.1037/edu0000606>

[27]Zulfarina, Z., Agustin, M. W., Nursal, N., & Yustina, Y. (2022). Motion graphic: design for biology learning coordination system to improve high order thinking skills (hots). *Jurnal Pendidikan Sains Indonesia*, 10(1), 151-160. <https://doi.org/10.24815/jpsi.v10i1.23340>

[28]Marquez, S., Varra, T., Christensen, C., Rajasekharan, O., Dojan, C., Hobbs, J., ... & Sambur, J. B. (2023). Lbic imaging of solar cells: an introduction to scanning probe-based imaging techniques. *Journal of Chemical Education*, 100(2), 1011-1016. <https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.2c00623>

Г.И. Салгараева¹, Ж.Б. Базаева¹, Б. Сабит¹

¹ Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

* e-mail: bazaeva.zh@qzpu.edu.kz

AR ТЕХНОЛОГИЯСЫНА НЕГІЗДЕЛГЕН МОБИЛЬДІ ҚОСЫМШАНЫ ИНКЛЮЗИВТІ БІЛІМ БЕРУ ЖАҒДАЙЫНДА ЕСТУ ҚАБІЛЕТІ ЗАҚЫМДАНҒАН БАЛАЛАРҒА БЕЙІМДЕУ

Аңдатпа

Бұл мақалада зерттеу шеңберінде есту қабілеті зақымданған балаларға информатиканы оқытуда AR технологиясының мүмкіндіктері бар үйретуші мобильді қосымшаны интеграциялау мәселесі қарастырылған. Зерттеу жұмысының аясында есту қабілеті зақымданған балаларға арналған арнайы (түзету) мектептің 9 сынып оқушыларына информатиканы оқыту процесіне AR технологияға негізделген үйретуші мобильді қосымшаны қолдану эксперименті жасалды. Зерттеудің мақсаты, цифрлық трансформация жағдайында инклюзивті білім беру ортасын қамтамасыз ету үшін есту қабілеті зақымданған балаларға информатиканы оқытуда арнайы үйретуші мобильді қосымшаны интеграциялау тиімділігін анықтау болды. Қосымшаның тиімділігін бағалау мақсатында оқу материалын игеру деңгейін анықтау үшін алдын-ала және кейінгі тестілеу алынды. Эксперимент барысында цифрлық инклюзия құралы ретінде әзірленген AR мүмкіндіктері бар үйретуші мобильді қосымшаны тиімді қолданудың педагогикалық шарттары анықталды және оқу материалын сапалы игерудің жолдары ұсынылды. Алынған деректерді талдау AR технологиясын пайдаланудың тұжырымдамалық аппараты, алгоритмдік ойлауды және цифрлық объектілермен жұмыс істеудің практикалық дағдыларын игеру сапасына оң әсерін анықтауға мүмкіндік берді. Эксперимент нәтижесінде инклюзивті білім беру ортасында цифрлық технологиялардың, оның ішінде нақты объектілер мен цифрлық мазмұнды бірыңғай білім беру кеңістігінде қолдануға мүмкіндік беретін толықтырылған шынайылық (AR, Augmented Reality) технологияларының информатиканы оқытудағы тиімділігі анықталды. Есту қабілеті зақымданған оқушылар үшін толықтырылған шынайылық (AR) технологиясының визуалды сипаты құнды, себебі ол оқу материалын жақсырақ түсінуге, қатысуға және тұрақты академиялық оқу мотивациясын қалыптастыруға ықпал ететіні дәлелденді. Осы зерттеудің нәтижесінде есту қабілеті зақымданған балаларға информатиканы оқытуда AR технологиясының мүмкіндіктерін қолдануға қатысты болашақ зерттеулерге ұсыныстар жасалды.

Түйін сөздер: инклюзивті білім беру, есту қабілеті зақымданған балалар, үйретуші мобильді қосымша, толықтырылған шынайылық технологиясы, ADDIE моделі

Г.И. Салгараева¹, Ж.Б. Базаева¹, Б. Сабит¹

¹ Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

АДАПТАЦИЯ МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ AR ДЛЯ ДЕТЕЙ С НАРУШЕНИЯМИ СЛУХА В УСЛОВИЯХ ИНКЛЮЗИВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Аннотация

В рамках данного исследования рассмотрена проблема интеграции обучающего мобильного приложения с возможностями технологии AR при обучении информатике детей с нарушениями слуха. В ходе исследовательской работы был проведен эксперимент по использованию обучающего мобильного приложения, основанного на технологии AR, в процессе обучения информатике для учащихся 9 классов специальной (коррекционной) школы для детей с нарушениями слуха. Целью эксперимента было определить эффективность интеграции специального обучающего мобильного приложения в обучение информатике детей с нарушениями слуха, чтобы обеспечить инклюзивную образовательную среду в условиях цифровой трансформации. С целью оценки эффективности приложения было получено предварительное и последующее тестирование для определения уровня усвоения учебного материала. В ходе эксперимента были определены педагогические условия эффективного использования обучающего мобильного приложения с возможностями AR,

разработанного как инструмент цифровой интеграции, и предложены пути качественного усвоения учебного материала. Анализ полученных данных позволил выявить положительное влияние использования технологии AR на качество овладения понятийным аппаратом, алгоритмическим мышлением и практическими навыками работы с цифровыми объектами. В результате эксперимента определена эффективность цифровых технологий в инклюзивной образовательной среде, в том числе технологий дополненной реальности (AR, Augmented Reality), позволяющих интегрировать реальные объекты и цифровой контент в единое образовательное пространство. Визуальный характер технологий дополненной реальности (AR) ценен для учащихся с нарушениями слуха, поскольку было доказано, что она способствует лучшему пониманию учебного материала, участию и формированию устойчивой академической мотивации к обучению. В результате этого исследования были сделаны рекомендации для будущих исследований использования возможностей технологии AR в обучении информатике детей с нарушениями слуха.

Ключевые слова: инклюзивное образование, дети с нарушениями слуха, обучающее мобильное приложение, технология дополненной реальности, модель ADDIE

G.I. Salgarayeva¹, Zh.B. Bazayeva¹, B. Sabit¹

¹ Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

ADAPTION OF MOBILE APPLICATION BASED ON AR TECHNOLOGY FOR CHILDREN WITH HEARING IMPAIRMENTS IN INCLUSIVE EDUCATION

Abstract

This study examines the issue of integrating a mobile learning app with AR technology capabilities in teaching computer science to children with hearing impairments. As part of the research, an experiment was conducted on the use of a mobile learning app based on AR technology in the process of teaching computer science to 9th-grade students of a special (correctional) school for children with hearing impairments. The purpose of the experiment was to determine the effectiveness of integrating a mobile learning app with AR technology in teaching computer science to children with hearing impairments to ensure an inclusive educational environment in the context of digital transformation. To assess the effectiveness of the app, pre- and post-tests were conducted to determine the level of mastery of the educational material. During the experiment, pedagogical conditions for the effective use of a mobile learning app with AR capabilities, developed as a digital inclusion tool, were identified and ways to qualitatively master the educational material were suggested. Analysis of the data obtained allowed us to determine the positive impact of AR technology on the quality of mastering the conceptual apparatus, algorithmic thinking, and practical skills of working with digital objects. The experiment revealed the effectiveness of digital technologies in inclusive education, including augmented reality (AR) technologies, which allow the combination of real objects and digital content in a single educational space, in teaching computer science. The visual nature of AR technology is valuable for students with hearing impairments, as it has been proven to contribute to better understanding of educational material, participation, and formation of sustained academic motivation for learning. As a result of this study, recommendations were made for future research on the use of AR technology in teaching computer science to children with hearing impairments.

Keywords: inclusive education, children with hearing impairments, educational mobile application, augmented reality technology, ADDIE model

Негізгі ережелер

Ақпараттық-коммуникациялық технологиялардың (АКТ) негіздерін меңгерудің маңыздылығы біздің заманымызда өмірдің ажырамас бөлігіне айналды. Сонымен қатар, білім беру үрдісінде ерекше қажеттіліктері бар балаларға информатиканы оқытудың принциптері мен әдістерінің өзіндік ерекшеліктері бар және ең алдымен олардың психофизикалық даму ерекшеліктерінің жеткілікті кең ауқымымен анықталды. Бұл мақалада арнайы (түзету) мектепте білім беру жағдайында ерекше білім беру қажеттілігі бар оқушыларға информатика сабақтарын ұйымдастыру мен өткізудің және олардың ақпараттық-коммуникациялық құзіреттілігін дамытудың педагогикалық тәжірибесі көрсетілген. Біз оқушылардың қабылдау ерекшеліктерін ескере отырып, оқу материалын бейімдеу және түрлендіру үшін қолданылатын педагогикалық және дидактикалық технологияларды ұсынамыз.

Кіріспе

Білім берудің цифрлық трансформациясы жағдайында әрбір оқушының физикалық мүмкіндіктеріне қарамастан сапалы білімге қол жеткізе алатын инклюзивті білім беру ортасын қамтамасыз ету ерекше маңызды. Мектеп оқушыларының ең осал санаттарының бірі – есту қабілеті зақымданған балалар, олар үшін ақпаратты қабылдау және өңдеу арнайы дидактикалық тәсілдер мен технологиялық шешімдерді қажет етеді. Есту қабілеті зақымданған балаларды оқыту кезінде мұғалімдер бұл балалардың естуден гөрі көру қабілетіне көбірек назар аударуы керек. Сонымен қатар, олармен жұмыс істеу кезінде оқыту әдістері мен формаларын таңдағанда олардың жеке ерекшеліктеріне сүйену қажет (Кесте 1).

Кесте 1. Есту қабілеті зақымданған балалардың жеке ерекшеліктері

Жеке қасиеттері	Өзіне деген сенімсіздік, ұйымшылдық пен мақсат қою деңгейінің төмендеуі
Сөйлеу коммуникациясы	Сөйлеу дағдылары саласындағы (біреудің сөйлеуін түсінбеу, сөздерді баяу немесе түсініксіз айту) және ойлау саласындағы (ұғымдар мен терминдер жүйесін қалыптастырудағы кедергілер) қиындықтар
Моральдық-этикалық идеялар	Моральдық-этикалық идеяларды қалыптастыру процесіндегі қиындықтар: мұндай оқушылар әртүрлі жағдайларды тым нақты бағалайды, оларға басқалардың эмоцияналдық күйлерін түсіну қиын болуы мүмкін
Зейін	Зейіннің жоғары деңгейі (көру-есту зақымдануының орнын толтыру және көбінесе жасөспірімдер қалыпты балалар назар аудармайтын күнделікті өмірде бір нәрсені байқай алады)
Жауапкершілік	Ересектер беретін тапсырмаларға жауапкершілікпен қарау

Есту қабілеті зақымданған балаларға информатиканы оқытуда белсенді әдістерді қолдану балалардың пәнге деген қызығушылығын арттыру арқылы оқытудың максималды тиімділігіне қол жеткізуге мүмкіндік береді.

Бүгінде есту қабілеті бұзылған «заманауи» балалар, сондай-ақ олардың құрдастары смартфондар мен әлеуметтік медиасыз өмірлерін елестете алмайтын ұрпақ өкілдері болып табылады. Есту қабілеті зақымданған балалардың алдыңғы буынында бүгінгідей интернет пен АКТ пайдаланатын оқыту мүмкіндіктері болған жоқ [1]. Сондықтан, бүгінде оқыту процесінде инновациялық АКТ құралдарын пайдалану дамып келеді. Қазіргі қарқынды цифрлық дәуірде инновациялық технологиялар біздің оқыту және оқыту әдістерімізге төңкеріс жасауда. Осы инновациялардың ішінде толықтырылған шынайылық (AR) білім беру тәжірибемізді өзгертетін трансформациялық күш ретінде ерекшеленеді. Виртуалды компоненттерді материалдық ортаға біріктіре отырып, AR технологиясын қолданып интерактивті оқыту оқушылар үшін иммерсивті атмосфераны жасайды.

Бүгінгі білім беру саласында кеңінен қолданылуы керек осындай технологиялардың бірі – толықтырылған шынайылық технологиясы. Толықтырылған шынайылық технологиясы (AR) – бұл білім алушыларды күрделі материалды зерттеуге тартудың қосымша құралы ретінде қолдануға болатын ақпараттық технологияның түрі. Қазіргі кезде бұл технология оқыту мен оқуды жақсартуда маңызды рөл атқаратын, мұғалім мен оқушы арасында интерактивті қарым-қатынас орнатуға мүмкіндік беретін иммерсивті орта. AR технологиясының артықшылығы – бұл пайдаланушының нақты әлемді виртуалды объект арқылы қабылдауын жақсарту болып табылады [2].

1997 жылы Азуманың жариялаған ғылыми еңбегінде көрсетілгендей [2], AR технологиясын медицина, өндіріс, бейнелеу, роботтардың траекториясын жоспарлау, ойын-сауық және әскери салаларда қолдануға болады. 2001 жылы Азума және басқалар [3] AR технологиясының үш жаңа тобын қосты: мобильді қосымшалар, бірлескен қосымшалар және коммерциялық қосымшалар. Осы үш жаңа топ білім беру саласында көптеген зерттеу мүмкіндіктерін ашты. Оқыту тәсілдеріне келетін болсақ, Hadi және т.б. ғалымдар [4] AR қолдануды үш санатқа бөлді: рөлдерді ерекшелеу [5], орындарды ерекшелеу [6] және

тапсырмаларды ерекшелену [2]. Бірінші санат оқушыларды AR ортасында әртүрлі тапсырмалар орындауға арналған [4]. Мысалы, Dunleavy және т.б. [7] оқушыларға таза ауада тапсырмаларды орындауды берді. Екінші санат оқушылардың физикалық ортамен өзара әрекеттесуіне назар аударған [4]. Ishihara және т.б. [8] телефон камерасы қабылдаған әлемді оқушының орналасқан жері мен қоғамдастығы туралы ақпаратпен біріктіретін толықтырылған шынайылықтың ACCampus мобильді жүйесін жасаған. Үшінші санат AR технологиясы көмегімен оқу тапсырмаларын әзірлеуге арналған. Мысалы, Najrasouli және т.б. [9] EULER табиғаты туралы білім алу үшін иммерсивті оқытудың M-AR модулін жасап, қолданды. AR қосымшаларының басым бөлігі инженерия, ғылым, медицина, биология, архитектура салаларында практикалық оқытуды ұйымдастыру мен 3D зерттеу мақсатында пайдаланылды. 1-суретте білім беру саласында толықтырылған шынайылық технологиясын пайдалану туралы ақпарат көрсетілген [6].



Сурет 1. Білім беруде толықтырылған шынайылық технологиясын пайдалану

Толықтырылған шынайылық технологиясын білім беруде пайдаланудың тиімділігін көптеген ғалымдар зерттеп, өз тұжырымдарын берген. Зерттеушілер Lampropoulos және тағы басқалар [10] толықтырылған шынайылықты (AR) оқушылардың ынтасын, белсенділігін арттырып, оқуды қызықты етеді. Бұл сонымен қатар, оқушылардың дербестікке, құзыреттілікке және туа біткен қажеттіліктерін қанағаттандыруға көмектесті, бұл олардың ішкі және сыртқы мотивациясын одан әрі арттырады. Сонымен қатар, AR әлеуметтік дағдылардың дамуына ықпал етті, тиесілілік сезімін қалыптастырды және тақырыпты түсінуді жақсартуға ықпал етті. Зерттеу AR технологиясын геймификациямен және маңызды ойындармен біріктіру когнитивті және әлеуметтік-эмоционалдық дамуды тиімді түрде арттырып, білім беру нәтижелерінің жақсаруына әкелуі мүмкін деген қорытындыға келген. Ал индонезиялық зерттеушілердің еңбегінде Индонезиядағы арнайы мектептерде есту қабілеті зақымданған оқушыларға коммуникация, қабылдау, дыбыс және ырғақ (DCPS) дағдыларын қалай үйретітінін қарастырды [11]. Бұл зерттеу аудио, кескіндер, жазулар және сигналдар бар смартфондар арқылы оқуды жеңілдететін және қызықты ететін толықтырылған шынайылықты (AR) технологиясы арқылы осы дағдыларды үйретудің жаңа әдістерінің қажеттілігін атап көрсетеді. Есту қабілеті зақымданған оқушылар үшін бейне негізіндегі оқытуды инклюзивті ету кезінде, әдетте, жақсы әзірленген мәтіндік субтитрлерді қосу арқылы оқу материалдарына қолжетімділікті жақсартуға баса назар аударылды [12]. Толықтырылған шынайылық (AR) және виртуалды шындық (VR) оқушыларға есте қалған пәндік білімдерін нақты өмірде қолдануға мүмкіндік береді [13].

AR технологиясы оқушыларды интерактивті тәжірибеге баулу арқылы оқуды жақсартуға мүмкіндік береді. Осы технологиялардың көмегімен оқушылар динамикалық визуалды эффектілермен және есту сигналдарымен өзара әрекеттесе алады, бұл пәнге деген қызығушылықты арттырады. Сондай-ақ, олар интерактивті және иммерсивті бола отырып, оқу

тәжірибесін арттырумен қатар, қызықты модельдеу мен виртуалды әлемдерді құруға мүмкіндік береді. Сондықтан, бұл технологиялар физикалық немесе конгитивті проблемалары бар оқушылар үшін қолжетімділікті арттырады, бұл әділ білім беру тәжірибесін қамтамасыз етеді [14].

Ал LiantoBuliali [15] зерттеуіне сүйенсек, AR элементі есту қабілеті зақымданған оқушылар үшін геометрияны жақсырақ түсінуге ықпал еткен. Әйтпесе тек дерексіз сипаттамалар арқылы түсіну қиын геометриялық ұғымдарды көрнекі және интерактивті көріністерін қамтамасыз ету оң нәтижесін берген. Бұл көрнекі тәсіл есту қабілеті зақымданған оқушылардың есту қабілетіне емес, көру қабілетінің тәуелділігіне сәйкес келеді, бұл оларға кеңістік қатынастарды зерттеуге, фигуралардың қасиеттерін түсінуге және геометриялық фигураларды нақтырақ тануға мүмкіндік береді. Яғни, AR дәстүрлі оқыту әдістерінде жиі дерексіз болып табылатын күрделі геометриялық идеяларды түсіну үшін өте маңызды визуализацияны жақсартады.

Оқытуда AR пайдалану арқылы, әсіресе есту қабілеті зақымданған балалар үшін, технологиялық жетістіктерге сәйкес келетін неғұрлым тартымды, мультимодальды оқу ортасын құруға болады. Subagya, Anggrellanggi, A., Priyono және Sari, E.K. зерттеуіне сәйкес, AR негізіндегі медиа интерактивті және мәдени тұрғыдан өзекті оқу нысандарын ұсыну арқылы коммуникацияны, дыбысты қабылдау және ырғақ дағдыларын жақсарта алады [16]. Ол сондай-ақ кәдімгі медианың шектеулерін қарастырады, оқытуды қолжетімді етеді, смартфондар арқылы басқаруды жеңілдетеді және оқушыларды ынталандырады. Сонымен қатар, AR әртүрлі оқу қажеттіліктерін қанағаттандыра алатын динамикалық, мультимедиялық мазмұнды ұсынады, мұндай санатты балалар үшін түсінуді, сөздік қорын және тілін дамыту мүмкіндігін арттырады.

Әдетте қалыпты еститін адамдар қоршаған ортада болып жатқан әртүрлі оқиғаларды тану үшін дыбысты сигнал ретінде пайдаланады; дегенмен, бұл саңырау немесе есту қабілеті зақымданған адамдар үшін мүмкін емес және мұндай мазмұнда олар қоршаған ортаны еркін анықтай алмауы мүмкін. Сондықтан, күнделікті өмірде болып жатқан дыбыстарды анықтай алатын және оларды аудиторияның орнына көрнекі түрде көрсете алатын ыңғайлы ресурс жасау мектепте оқушыларды пәнді оқытуда, соның ішінде біздің зерттеуіміздегі информатика пәнін визуалды AR технологиясы негізіндегі мобильді қосымша бұл кедергіні біршама оңтайландыруға септігін тигізеді.

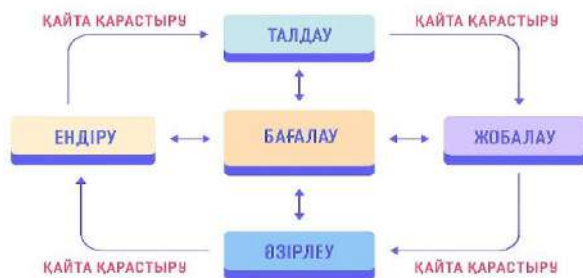
Зерттеу әдіснамасы

Зерттеу жұмысын жүргізу үшін ADDIE моделі қолданылды. ADDIE моделі оқытудың тиімді қосымшаларын жасау үшін оқыту технологияларын жобалауда ең көп қолданылатын модельдердің бірі болып табылады. Бұл модель программа әзірлеушілерге, сондай-ақ мұғалімдерге оңтайлы оқу материалдарын әзірлеуге көмектеседі және оқу процесін жеңілдетеді. [17].

ADDIE моделі бес кезеңнен тұрады (Сурет 2):

1. Оқу процесінің қазіргі жағдайын, қажеттіліктерін талдау кезеңі;
2. Әзірленетін мобильді қосымшаның мазмұнын бірінші кезеңде анықталған қажеттіліктерге сай жобалау кезеңі;
3. Мобильді қосымшаның мазмұнына сай мультимедианы әзірлеу кезеңі;
4. Әзірленген мобильді қосымшаны оқу үрдісіне ендіру кезеңі;
5. Әзірленген мобильді қосымша бойынша пайдаланушылардан кері байланыс алу және бағалау.

ADDIE моделінің жұмыс принципіне сай біз есту қабілеті зақымданған балаларға арналған арнайы (түзету) мектеп-интернатының 9-сынып оқушыларына информатика пәнін оқыту процесін бақыладық (1-кезең). Есту қабілеті зақымданған оқушыларды информатика пәнін оқытуда зерттеу үшін бақылаудың келесі критерийлері анықталды (Сурет 3).



Сурет 2. ADDIE моделі

Бұл критерийлер оқушылардың есту қабілеті оқу материалын меңгеруде қаншалықты әсер ететінін анықтауға арналған.

Танымдық критерийлер

- Нұсқаулықты түсіну (ауызша, жазбаша, визуальды);
- Оқу материалын меңгеру деңгейі;
- Білімді практикада қолдана алу дағдысы;
- Логикалық және алгоритмдік тапсырмаларды орындау қабілеті.

Қарым-қатынас критерийлері

- Оқу диалогындағы белсенділігі (сұрақтар қою, жауап беру);
- Жұпта немесе топта жұмыс жасау қабілеті;
- Мұғаліммен және сыныптастармен қарым-қатынас орнатуда ым-ишара, жазбаша және ауызша байланыс түрін қолдану;
- Талқылауға қатысу.

Мінез-құлық критерийлері

- Түсіндіру және практика барысында оқушы зейінінің шоғырлануы;
- Мәтіндік және визуалды сигналдарға реакциясы (презентация, программа кодтары, оқулық мәтіні);
- Тапсырманы өз бетінше орындау;
- Қиындық туғанда, шешімін табу үшін табандылық таныту.

Эмоционалды-мотивациялық критерийлер

- Пәнге қызығушылық деңгейі;
- Оқыту процесіндегі баланың жағымды немесе жағымсыз эмоцияларын білдіру;
- Өз күшіне сену деңгейі;
- Жаңа технологиялар мен оқыту әдістеріне дайын болу.

Бейімделген технологияларды қолдану

- Бейімделген құралдармен (субтитрлер, визуалды көмекші және т.б.) жұмыс жасау дағдысы;
- Баламалы каналдар (мәтін, визуализация) арқылы ақпаратты қабылдау;
- Арнайы компьютерлік программалар немесе мобильдік қосымшаларды пайдалану тиімділігі.

Сурет 3. Бақылау критерийлері

Бақылау нәтижесінде информатиканы оқыту барысында оқушыларға ауызша нұсқауларды түсіну қиындық туғызатыны, демек, нұсқаулардың мәтіндік формасы, визуалды көмекшілер және ақпараттың мультимедиялық түрі қажет екендігі анықталды. Сонымен қатар, оқушылар визуалды ақпаратты қабылдауда белсенділік танытады, бірақ, ауызша берілетін ақпаратқа аса мән бермейді. Сабақ барысында оқушылар бейімделген технологияларды белсенді қолданады,

сол үшін бұл технологиялардың түрін кеңейту қажет. Сыныптағы оқушылар мұғаліммен немесе сыныптастармен диалог құруда қиналады, сол себепті жұптық және топтық жұмыстар арқылы қарым-қатынас дағдыларын дамыту қажет. Егер оқу материалы мен тапсырмалар визуалды формада берілсе, онда оқушылар оқу материалын меңгеруде қызығушылық танытады және сұрақтарға жауап береді. Сонымен қатар, 9-сынып оқушыларында абстрактілі және алгоритмдік ойлауды дамытуда тапсырманы орындау үшін қадам-қадаммен берілетін нұсқаулар, визуалды алгоритмдер және модельдер қолданылуы қажет деген тұжырым жасалды.

Оқушылардың ақпаратты меңгеру деңгейін анықтау үшін алдын-ала тест (pre-test) өткізілді (2-3 кезең). Бұл кезеңдерде зерттеу барысында қолданылатын AR-технологияға негізделген үйретуші мобильді қосымшаның мазмұны және дизайны жобаланып, әзірленді. Мобильді қосымшадағы оқу материалы мен тапсырмалардың оқушылардың тақырыпты түсініп, жан-жақты дамуына әсерін анықтау және нәтижелерін салыстыру үшін кейінгі тест (post-test) алынды. Оқушылардың оқу материалдарын есте сақтау процесі оқытудың маңызды құрамдас бөлігі болып табылады. Есту қабілеті зақымданған, психикалық дамуы тежелген оқушыларда есте сақтаудың екі түрін де (қасақана және байқаусыз) дамытуға бірдей көңіл бөлу керек. Есту қабілеті зақымданған оқушыларда механикалық, бейнелік және мағыналық есте сақтаудың дамуы бірдей тежелген. Сондықтан информатика сабақтарында оқулық мәтінімен және көрнекі материалдармен жұмыс істегенде мұндай балалар тек жаңа материалды меңгеруде ғана емес, бұрын оқылғанды жаңғыртуда да қиындықтарға тап болады. Тағы бір маңызды мәселе – балалардың күнделікті сөйлеуінде сирек қолданылатын немесе мүлде қолданылмайтын сөздерді, тіпті тұтас тіркестерді түсінбеуі.

Физикалық тұрғыдан келетін болсақ, әдебиеттерде VR пайдалану кезіндегі физиологиялық ыңғайсыздықты [18] және психологиялық жайсыздықты [19] атап өтеді. Физиологиялық ыңғайсыздық жүрек айнуы мен окулomotorлық, бас айналу, бұлыңғыр көру және айналуы, қимылдық тұрақсыздығы, ұйқышылық, көздің шаршауы және көз, қол координациясының нашарлауы сияқты қозғалыс аурулары ретінде пайда болуы мүмкін. Сондықтан, біз өз зерттеуімізде тәуекелге бармай, зерттелген кейстері бар AR технологиясын пайдалануды жөн санадық. ADDIE моделінің төртінші кезеңіне сай, әзірленген үйретуші мобильді қосымша 9-сыныптың оқушыларына информатика пәнін оқыту процесіне енгізілді. Педагогикалық ықпал етуге есту қабілеті зақымданған балаларға информатика пәнінен Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрінің 2018 жылғы 20 қыркүйектегі №469 бұйрығына 24-қосымшадағы Есту қабілеті бұзылған (нашар еститін, кейін естімей қалған) білім алушыларға арналған негізгі орта білім беру деңгейінің 5-10 сыныптары үшін «Информатика» пәнінен жаңартылған мазмұндағы үлгілік оқу бағдарламасына сәйкес «Компьютерлік жүйелер» бөлімінің «компьютер құрылғысы» бөлімшесі бойынша тестілеуден өтті. Осыдан кейін, оқушыларға AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымша арқылы оқу материалдары және тапсырмалары берілді (Сурет 4).



Сурет 4. AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны оқу процесінде оқушылардың қолдануы

ADDIE моделінің бірінші кезеңінде жүргізілген бақылаудың нәтижесінде анықталған аспектілердің бірі қарым-қатынас орнатудағы қиындық болған. Сол себепті, мобильді қосымшаны пайдаланып, информатиканы оқыту процесі жұптық жұмыс арқылы жүзеге асырылды. Сонымен қатар, бақылау нәтижесінде есту қабілеті зақымданған балалар үшін берілетін ақпараттың визуалды болуы маңызды екенін ескере отырып, оқушыларға AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшада ақпарат мәтіндік, бейне және 3D графикамен берілген. Зерттеуге қатысқан оқушылардың арасында есту қабілеті аз зақымданған оқушылардың бар болуын ескере отырып, мобильді қосымшаны дыбыстық ақпаратпен қамтамасыз ету қарастырылған. Бұл есту қабілеті зақымданған балалар ұсынылатын ақпараттың визуалды және дыбыстық, екі түрін де қабылдайтынын дәлелдейді (Сурет 5).



Сурет 5. Есту қабілеті зақымданған балалардың визуалды және дыбыстық ақпаратты қабылдауы

Сондай-ақ, зерттеу жүргізілген сыныптардың арасында орыс сыныбы болғандықтан, әзірленген мобильді қосымша мазмұны екі тілде берілген. Бұл, мобильді қосымшаның оқыту процесіндегі қолданысын арттыра түсті.

Зерттеу нәтижелері

ADDIE моделінің бесінші кезеңінде әзірленген мобильді қосымша бойынша пайдаланушылардан кері байланыс алу және бағалау болатын. Оқушылар эксперимент жүргізгеннен кейін когнитивтік дағдыларын бағалау үшін қайтадан сынақтан өтті. 2-кестеде тестілеуге дейінгі және кейінгі тест нәтижелеріне сәйкес сипаттамалық статистика берілген (Jamovi программасында арқылы): n – респонденттер саны, SD – Стандартты ауытқу, SE – стандартты қате және t -тест.

Кесте 2. Негізгі нәтижелері

Тест	N	Mean (мәні, N)	SD	SE	t	t - критикалы қ мәні (t - critical)
Pretest	16	9.67	2.09	0.540	-17.2	2.144
Posttest	16	13.93	2.19	0.565		

Нөлдік гипотеза H_0 – AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны қолдана отырып, информатика сабағында есту қабілеті зақымданған оқушылардың қабылдау дағдыларының артуына педагогикалық емес, кездейсоқ факторлар әсер етеді деп тұжырымдайды. H_1 баламалы гипотезасы - AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны қолданудың педагогикалық әсеру есту қабілеті зақымданған оқушылардың информатиканы оқытуда танымдық дағдыларының дамуына әсер етеді деп топшылайды.

Нәтижелерге сүйене отырып, жүргізілген жұптық t -критерийдің нәтижелері AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны қолданғаннан кейін оқушылардың білім көрсеткіштеріне статистикалық тұрғыда маңызды айырмашылық бар

екенін көрсетті: $t(14) = -17$, $p < 0.001$ және t -критикалық мәні 2.144. Тестілеуден кейінгі нәтиже ($M = 13.93$, $SD=2.19$) тестілеуге дейінгі көрсеткіштерден едәуір асып түсті ($M = 9.67$, $SD = 2.09$). Бұл көрсеткіш AR технологиясын қолдану оқушылардың оқу жетістігіне нақты оң әсер еткенін дәлелдейді. Демек, H_0 нөлдік гипотезасы қабылданбайды және AR технологиясына негізделген мобильді қосымшаны қолдана отырып информатиканы оқыту жақсы оқу нәтижелеріне қол жеткізу үшін есту қабілеті зақымданған оқушылардың танымдық дағдыларын дамытуға әсер етті деген балама гипотеза қабылданады.

Дескриптивті талдау нәтижелері көрсеткендей, AR технологияларын қолдану барысында оқушылардың орташа ұпайы алдын-ала алынған тестте 9.67, ал кейінгі алынған тестте 13.93 болды. Сонымен қатар, медианалық мән де 9-дан 14-ке өскен, бұл жалпы оқушылардың ілгерілеуін дәлелдейді. Ұпайдың стандартты ауытқуы (SD) шамамен бірдей болғанымен, орташа мәнінің өсуі статистикалық тұрғыдан және практикалық тұрғыдан маңызды. Таралу нормасының бұзылуын ескере отырып (Shapiro-Wilk $p = 0.025$), сонымен қатар Wilcoxon W критерийі қолданылды, ол айырмашылықтардың маңыздылығын растады ($W = 0$, $p = 0.003$). Бұл талдау нәтижелеріне деген сенімді арттырады. Яғни, есту қабілеті зақымданған оқушыларды информатика пәнінен оқытуда визуалды-интерактивті қолдаудың жоғары тиімділігін көрсетеді.

Дискуссия

Эксперимент нәтижелері есту қабілеті зақымданған мектеп оқушыларына информатиканы оқытуда толықтырылған шынайылық (AR) технологияларын қолданудың жоғары әлеуетін растайды. Тестілеуге дейінгі және кейінгі нәтижелер арасындағы статистикалық маңызды айырмашылықтар AR технологиясына негізделген құралдарды енгізу оқу үлгерімін жақсартып қана қоймай, сонымен қатар ыңғайлы және ынталандыратын білім беру ортасын қамтамасыз ететінін көрсетеді. AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымша түзету білім беру мазмұнында ерекше маңызға ие, мұнда көрнекі ақпарат негізгі рөл атқарады. Интерактивті 3D модельдерін, анимацияларды және толықтырылған шынайылық элементтерін пайдалану ұғымдарын көрнекі және тереңірек меңгере алды.

Сондай-ақ, сабақ барысындағы бақылаулар келесідегілерді көрсетті:

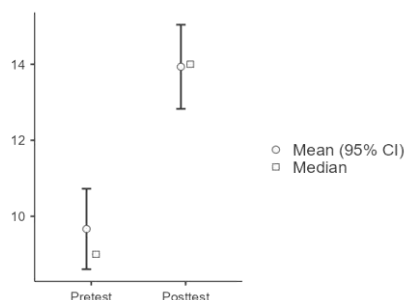
- Оқушылардың оқу процесіне араласу белсенділігінің артуы;
- Тапсырмаларды орындау кезінде дербес әрекеттердің артуы;
- Оқушылар мен мұғалім арасындағы байланыстың жақсаруы (көрнекі белгілер мен мультимодальды нұсқаулар арқылы).

Дегенмен, белгілі бір қиындықтар да анықталды, соның ішінде:

- AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымша түзету сыныптарының нақты қажеттіліктеріне бейімдеу қажеттілігі (интерфейс, ақпаратты жеткізу жылдамдығы);
- Оқу үдерісін техникалық жабдықтауға қойылатын талаптардың жоғарылауы (мобильдң құрылғылар, тұрақты интернет байланысы);
- Мұғалімдерді инклюзивті ортада AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны оқыту процесінде қолдану үшін әдістемелік дайындықтың қажеттілігі.

Осылайша, AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны білім беру тәжірибесіне енгізу кешенді тәсілді қажет етеді: педагогикалық бейімдеу, техникалық дайындық және аудиторияның ерекшеліктерін ескеру үйлесімі. Жүргізілген зерттеу есту қабілеті зақымданған оқушыларға информатиканы оқыту процесінде толықтырылған шынайылықта (AR) қолданудың тиімділігін растады. Педагогикалық эксперимент нәтижелерін талдау негізінде келесі қорытынды жасауға болады:

- AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымша оқушылардың оқу үлгерімін жақсартады: тестілеуден кейінгі нәтижелердің алдын-ала тестілеумен салыстырғанда (орта есеппен +4 ұпай) статистикалық маңызды өсуі оқу материалын меңгеру сапасының жақсарғанын көрсетеді (Сурет 6).



Сурет 6. Оқу материалын меңгеру сапасының жақсаруы

- AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны қолдану арқылы цифрлық инклюзия мотивациясын арттырады: оқушылар пәнге деген қызығушылықтарын арттырды, жаңа тақырыпты саналы түрде меңгеруге талпынды.

- AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны қолдану әдістемелік және техникалық дайындықты талап етеді: есту қабілеті зақымданған оқушылардың қабылдау ерекшеліктерін ескеру, қолданбалы интерфейсті бейімдеу және мұғалімдердің мультимодальды білім беру ортасында жұмыс істеуге дайындалуын қамтамасыз ету қажет.

Қорытынды

AR технологиясы және осы технологияға негізделген үйретуші мобильді қосымшаны қолдану есту қабілеті зақымданған оқушылардың информатика пәнінен шынайы қызығушылығын оятып, оқу материалын мазмұнды меңгеруде айтарлықтай нәтижелерге әкелді. Зерттеу барысында қолданылған ADDIE моделі AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны жүзеге асыруда қойылатын талаптарды анықтауға мүмкіндік берді. Жүргізілген зерттеу жұмысының нәтижесінде инклюзивті білім беруде, оның ішінде есту қабілеті зақымданған оқушыларды оқытуда AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны пайдалану, оқушылардың оқу процесіне зейінін тұрақтандырады және танымдық қабілеттерін арттырады. Қорытындылай келгенде, AR технологиясына негізделген мобильді қосымшаны пайдалану оқушылар мен мұғалімдер үшін информатиканы оқыту барысында оңтайлы екендігі анықталды.

Сонымен қатар, зерттеу жұмысының нәтижесінде анықталған қиындықтарды жою мақсатында AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны инклюзивті сыныптардың қажеттіліктеріне қарай бейімдеу, мұғалімдерді инклюзивті ортада AR технологиясына негізделген үйретуші мобильді қосымшаны оқыту процесінде қолдану бойынша әдістемелік нұсқаулық әзірлеу және мобильді қосымшалардың мүмкіндіктерін арттырып, оқу процесіне кеңінен қолдану ұсынылады.

Алғыс

Бұл зерттеу AP19679272 «Есту қабілеті зақымданған балаларға инклюзивті білім беру үшін үйретуші мобильді қосымшалар әзірлеу» атты жобаны іске асыру шеңберінде орындалған.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

[1] Красавина, Ю. В., Пономаренко, Е. П., Жуйкова, О. В., Серебрякова, Ю. В. Особенности использования информационно-коммуникационных технологий для обучения глухими и слабослышащими студентами технического вуза // Мир педагогики и психологии: международный научно-практический журнал. I Междунар. науч.-практ. конф.: «Развитие науки и образования: актуальные вопросы, достижения и перспективы развития». – Нижний Новгород: Науч.-изд. центр «Открытое знание», 2019. – № 12 (41). – С. 114.

[2] Azuma, R. A survey of augmented reality // Presence: Teleoperators and Virtual Environments. – 1997. – Vol. 6, № 4. – P. 355–385. <https://doi.org/10.1162/pres.1997.6.4.355>

- [3] Azuma, R., Baillot, Y., Behringer, R., Feiner, S., Julier, S., MacIntyre, B. *Recent advances in augmented reality // IEEE Computer Graphics and Applications.* – 2001. – Vol. 21, № 6. – P. 34–47. <https://doi.org/10.1109/38.963459>
- [4] Hadi, S. H., Permanasari, A. E., Hartanto, R., et al. *Developing augmented reality-based learning media and users' intention to use it for teaching accounting ethics // Education and Information Technologies.* – 2022. – Vol. 27. – P. 643–670. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10660-7>
- [5] Holley, D., Hobbs, M. *Using augmented reality to engage STEM students with an authentic curriculum // E-Learning, E-Education, and Online Training. eLEOT 2015: Proceedings.* – Springer, 2016. – Vol. 160. – P. 110–117. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28883-3_14
- [6] Buchner, J. *Generative learning strategies do not diminish primary students' attitudes towards augmented reality // Education and Information Technologies.* – 2022. – Vol. 27. – P. 701–717. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10672-3>
- [7] Dunleavy, M., Dede, C., Mitchell, R. *Affordances and limitations of immersive participatory augmented reality simulations for teaching and learning // Journal of Science Education and Technology.* – 2009. – Vol. 18, № 1. – P. 7–22. <https://doi.org/10.1007/s10956-008-9119-1>
- [8] Ishihara, M., Rattanachinalai, P. *Learning basic concept of computer programming with path-finding task in AR and its properties // Education and Information Technologies.* – 2022. – Vol. 27. – P. 719–742. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10674-1>
- [9] Hajirasouli, A., Banihashemi, S. *Augmented reality in architecture and construction education: State of the field and opportunities // International Journal of Educational Technology in Higher Education.* – 2022. – Vol. 19. – P. 39–67. <https://doi.org/10.1186/s41239-022-00348-9>
- [10] Lampropoulos, G., Keramopoulos, E., Diamantaras, K., Evangelidis, G. *Integrating augmented reality, gamification, and serious games in computer science education // Education Sciences.* – 2023. – Vol. 13, № 6. – P. 618. <https://doi.org/10.3390/educsci13060618>
- [11] Berke, L., Seita, M., Huenerfauth, M. *Deaf and hard-of-hearing users' prioritization of genres of online video content requiring accurate captions // Proc. of the 17th Int. Web for All Conf.* – 2020. – P. 1–12.
- [12] Bhavya, B., Chen, S., Zhang, Z., Li, W., Zhai, C., Angrave, L., Huang, Y. *Exploring collaborative caption editing to augment video-based learning // Educational Technology Research and Development.* – 2022. – Vol. 70, № 5. – P. 1755–1779.
- [13] Hung, C. Y., Lin, Y. T., Yu, S. J., Sun, J. C. Y. *Effects of AR-and VR-based wearables in teaching English: The application of an ARCS model-based learning design // Journal of Computer Assisted Learning.* – 2023. – Vol. 39, № 5. – P. 1510–1527.
- [14] Al-Ansi, A. M., Jaboob, M., Garad, A., Al-Ansi, A. *Analyzing augmented reality (AR) and virtual reality (VR) recent development in education // Social Sciences & Humanities Open.* – 2023. – Vol. 8, № 1. – Article 100532. <https://doi.org/10.1016/j.ssaho.2023.100532>
- [15] LiantoBuliali, J. *Innovative learning model with augmented reality technology for deaf students // Ilkogretim Online.* – 2021. – Vol. 20, № 1. – Article 56.
- [16] Subagya, Anggrelanggi, A., Priyono, Sari, E. K. *Opportunity to provide augmented reality media for the intervention of communication, perception, sound, and rhythm for deaf learners based on cultural context // Pegem Journal of Education and Instruction.* – 2023. – Vol. 13, № 4. – P. 158–163. <https://doi.org/10.47750/pegegog.13.04.19>
- [17] Samsudin, M. R., Sulaiman, R., Guan, T. T., Yusof, A. M., Yaacob, M. F. C. *Mobile application development through ADDIE model // International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development.* – 2021. – Vol. 10, № 2. – P. 1017–1027.
- [18] Chattha, U. A., Janjua, U. I., Anwar, F., Madni, T. M., Cheema, M. F., Janjua, S. I. *Motion sickness in virtual reality: An empirical evaluation // IEEE Access.* – 2020. – Vol. 8. – P. 130486–130499. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3009921>
- [19] Tychsen, L., Foeller, P. *Effects of immersive virtual reality headset viewing on young children: Visuomotor function, postural stability, and motion sickness // American Journal of Ophthalmology.* – 2020. – Vol. 209. – P. 151–159. <https://doi.org/10.1016/j.ajo.2019.09.014>

References

- [1] Krasavina Ju. V., Ponomarenko E. P., Zhujkova O. V., Serebrjakova Ju. V. *Osobennosti ispol'zovanija informacionno-kommunikacionnyh tehnologij dlja obuchenija gluhimi i slaboslyshashimi studentami tehnicheskogo vuza / Mir pedagogiki i psihologii: mezhdunarodnyj nauchno-prakticheskij zhurnal. I Mezhdunarodnaja nauchno-prakticheskaja konferencija: «Razvitie nauki i obrazovanija: aktual'nye voprosy, dostizhenija i perspektivy razvitija» 34 Nizhnij Novgorod: Nauchno-izdatel'skij centr «Otkrytoe znanie», 2019. No12 (41) – c. 114 [in Russian]*

- [2] Azuma, R. A survey of augmented reality // *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*. – 1997. – Vol. 6, № 4. – P. 355–385. <https://doi.org/10.1162/pres.1997.6.4.355>
- [3] Azuma, R., Baillot, Y., Behringer, R., Feiner, S., Julier, S., MacIntyre, B. Recent advances in augmented reality // *IEEE Computer Graphics and Applications*. – 2001. – Vol. 21, № 6. – P. 34–47. <https://doi.org/10.1109/38.963459>
- [4] Hadi, S. H., Permanasari, A. E., Hartanto, R., et al. Developing augmented reality-based learning media and users' intention to use it for teaching accounting ethics // *Education and Information Technologies*. – 2022. – Vol. 27. – P. 643–670. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10660-7>
- [5] Holley, D., Hobbs, M. Using augmented reality to engage STEM students with an authentic curriculum // *E-Learning, E-Education, and Online Training. eLEOT 2015: Proceedings*. – Springer, 2016. – Vol. 160. – P. 110–117. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28883-3_14
- [6] Buchner, J. Generative learning strategies do not diminish primary students' attitudes towards augmented reality // *Education and Information Technologies*. – 2022. – Vol. 27. – P. 701–717. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10672-3>
- [7] Dunleavy, M., Dede, C., Mitchell, R. Affordances and limitations of immersive participatory augmented reality simulations for teaching and learning // *Journal of Science Education and Technology*. – 2009. – Vol. 18, № 1. – P. 7–22. <https://doi.org/10.1007/s10956-008-9119-1>
- [8] Ishihara, M., Rattanachinalai, P. Learning basic concept of computer programming with path-finding task in AR and its properties // *Education and Information Technologies*. – 2022. – Vol. 27. – P. 719–742. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10674-1>
- [9] Hajirasouli, A., Banihashemi, S. Augmented reality in architecture and construction education: State of the field and opportunities // *International Journal of Educational Technology in Higher Education*. – 2022. – Vol. 19. – P. 39–67. <https://doi.org/10.1186/s41239-022-00348-9>
- [10] Lampropoulos, G., Keramopoulos, E., Diamantaras, K., Evangelidis, G. Integrating augmented reality, gamification, and serious games in computer science education // *Education Sciences*. – 2023. – Vol. 13, № 6. – P. 618. <https://doi.org/10.3390/educsci13060618>
- [11] Berke, L., Seita, M., Huenerfauth, M. Deaf and hard-of-hearing users' prioritization of genres of online video content requiring accurate captions // *Proc. of the 17th Int. Web for All Conf.* – 2020. – P. 1–12.
- [12] Bhavya, B., Chen, S., Zhang, Z., Li, W., Zhai, C., Angrave, L., Huang, Y. Exploring collaborative caption editing to augment video-based learning // *Educational Technology Research and Development*. – 2022. – Vol. 70, № 5. – P. 1755–1779.
- [13] Hung, C. Y., Lin, Y. T., Yu, S. J., Sun, J. C. Y. Effects of AR-and VR-based wearables in teaching English: The application of an ARCS model-based learning design // *Journal of Computer Assisted Learning*. – 2023. – Vol. 39, № 5. – P. 1510–1527.
- [14] Al-Ansi, A. M., Jaboob, M., Garad, A., Al-Ansi, A. Analyzing augmented reality (AR) and virtual reality (VR) recent development in education // *Social Sciences & Humanities Open*. – 2023. – Vol. 8, № 1. – Article 100532. <https://doi.org/10.1016/j.ssaho.2023.100532>
- [15] LiantoBuliali, J. Innovative learning model with augmented reality technology for deaf students // *Ilkogretim Online*. – 2021. – Vol. 20, № 1. – Article 56.
- [16] Subagya, Anggrelanggi, A., Priyono, Sari, E. K. Opportunity to provide augmented reality media for the intervention of communication, perception, sound, and rhythm for deaf learners based on cultural context // *Pegem Journal of Education and Instruction*. – 2023. – Vol. 13, № 4. – P. 158–163. <https://doi.org/10.47750/pegegog.13.04.19>
- [17] Samsudin, M. R., Sulaiman, R., Guan, T. T., Yusof, A. M., Yaacob, M. F. C. Mobile application development through ADDIE model // *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development*. – 2021. – Vol. 10, № 2. – P. 1017–1027.
- [18] Chattha, U. A., Janjua, U. I., Anwar, F., Madni, T. M., Cheema, M. F., Janjua, S. I. Motion sickness in virtual reality: An empirical evaluation // *IEEE Access*. – 2020. – Vol. 8. – P. 130486–130499. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3009921>
- [19] Tychsen, L., Foeller, P. Effects of immersive virtual reality headset viewing on young children: Visuomotor function, postural stability, and motion sickness // *American Journal of Ophthalmology*. – 2020. – Vol. 209. – P. 151–159. <https://doi.org/10.1016/j.ajo.2019.09.014>

Sh. Turashova^{1*} , K. Seiduali¹ , U. Bazarbayeva¹ ,
Sh. Urazgaliyeva¹ , M. Yersin¹ 

¹ Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: sh.turashova@abaiuniversity.edu.kz

DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES IN TEACHING FUTURE INFORMATICS TEACHERS TO CREATE IOT DEVICES

Abstract

The Internet of Things (IoT) today is not just a technological trend, but a reality that is rapidly changing our lives. Cisco predicts that by 2030, the number of connected devices in the world will increase and reach 500 billion. This means that IoT will become an integral part of the future and the demand for IoT specialists will grow steadily. In this regard, preparing the younger generation for life in the IoT world is becoming a critically important task. The inclusion of IoT issues in the school's Informatics curriculum is an important step towards developing the necessary knowledge and skills for students. However, for the successful implementation of this program, it is necessary to provide schools with competent informatics teachers with not only theoretical knowledge, but also practical skills in the field of IoT. This will ensure high-quality education for students, prepare them for life in the IoT world and contribute to the development of this promising area of technology. To improve the effectiveness of teacher training, it is advisable to use modern teaching methods and digital educational resources. However, an analysis of existing scientific and methodological research in the field of teaching Internet of Things technology allows us to note an objectively small number of works devoted to the training of future informatics teachers in the field of IoT, especially in modern conditions of digitalization of education. The purpose of this study is to develop and test a model for teaching future informatics teachers how to create IoT devices as part of interdisciplinary projects based on modern digital educational resources. Research results: as part of an interdisciplinary IoT-based project, an automatic watering system for indoor plants was developed, the most effective digital educational resources and a learning model for creating and developing this IoT device were identified and developed using them. The degree of student satisfaction with the learning process of creating IoT devices using digital educational resources was assessed.

Keywords: digital educational resources, modern learning tools, IoT devices, interactive technologies, multimedia technologies, training of future informatics teachers.

Ш. Тұрашова¹, Қ. Сейдуәлі¹, Ү. Базарбаева¹, Ш. Уразғалиева¹, М.Е. Ерсін¹

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ИОТ ҚҰРЫЛҒЫЛАРЫН ҚҰРУ БОЙЫНША БОЛАШАҚ ИНФОРМАТИКА МҰҒАЛІМДЕРІН ОҚЫТУДАҒЫ ЦИФРЛЫҚ БІЛІМ БЕРУ РЕСУРСТАРЫ

Аңдатпа

Заттар интернеті (IoT) бүгінде тек технологиялық тренд емес, біздің өмірімізді тез өзгертетін шындық. Cisco компаниясының болжамы бойынша, 2030 жылға қарай әлемде қосылған құрылғылардың саны артып, 500 миллиардқа жетеді. Бұл IoT болашақтың ажырамас бөлігі болады және IoT мамандарына сұраныс тұрақты түрде артады дегенді білдіреді. Осыған байланысты, өскелең ұрпақты IoT әлемінде өмір сүруге дайындау маңызды міндетке айналуға мектептегі информатика бағдарламасына IoT сұрақтарын қосу-оқушылардың қажетті білім мен дағдыларды қалыптастыру жолындағы маңызды қадам. Алайда, бұл бағдарламаны сәтті жүзеге асыру үшін мектептерді тек теориялық білімі ғана емес, сонымен қатар IoT саласында практикалық дағдылары бар құзыретті информатика мұғалімдерімен қамтамасыз ету қажет. Бұл оқушыларды сапалы оқытуды қамтамасыз етуге, оларды IoT әлемінде өмір сүруге дайындауға және технологиялардың осы перспективалық бағытын дамытуға ықпал етуге мүмкіндік береді. Мұғалімдерді даярлаудың тиімділігін арттыру үшін оқытудың заманауи әдістері мен цифрлық білім беру ресурстарын қолданған жөн. Алайда, заттар интернеті технологиясын оқыту саласындағы қолданыстағы ғылыми-әдістемелік зерттеулерді талдау

IoT саласында, әсіресе білім беруді цифрландырудың қазіргі жағдайында болашақ информатика мұғалімдерін даярлау мәселелеріне арналған жұмыстардың объективті аз санын атап өтуге мүмкіндік береді. Бұл зерттеудің мақсаты болашақ информатика мұғалімдерін заманауи цифрлық білім беру ресурстарына негізделген пәнаралық жобалар шеңберінде IoT құрылғыларын құруға оқыту моделін әзірлеу және сынақтан өткізу болып табылады. Зерттеу нәтижелері: пәнаралық жоба аясында IoT негізінде бөлме өсімдіктерді автоматты суару жүйесі әзірленді, ең тиімді цифрлық білім беру ресурстары және осы IoT құрылғысын жасау процесін оқыту моделі анықталды және әзірленді, оларды пайдалана отырып, цифрлық білім беру ресурстары көмегімен IoT құрылғыларын құруды оқыту процесіне студенттердің қанағаттану дәрежесі бағаланды.

Түйін сөздер: цифрлық білім беру ресурстары, заманауи оқыту құралдары, IoT-құрылғылар, интерактивті технологиялар, мультимедиялық технологиялар, болашақ информатика мұғалімдерін оқыту.

Ш. Турашова¹, К. Сейдуали¹, У. Базарбаева¹, Ш. Уразғалиева¹, М.Е. Ерсин¹

¹ Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан

ЦИФРОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ В ОБУЧЕНИИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ СОЗДАНИЮ IoT-УСТРОЙСТВ

Аннотация

Интернет вещей (IoT) сегодня – это не просто технологический тренд, а реальность, которая стремительно меняет нашу жизнь. По прогнозам компании Cisco, к 2030 году количество подключенных устройств в мире увеличится и достигнет 500 миллиардов. Это означает, что IoT станет неотъемлемой частью будущего и спрос на специалистов в области IoT будет неуклонно расти. В этой связи, подготовка подрастающего поколения к жизни в мире IoT становится критически важной задачей. Включение вопросов по IoT в школьную программу информатики – это важный шаг на пути к формированию у учащихся необходимых знаний и навыков. Однако, для успешной реализации этой программы, необходимо обеспечить школы компетентными учителями информатики, обладающими не только теоретическими знаниями, но и практическими навыками в области IoT. Это позволит обеспечить качественное обучение учащихся, подготовить их к жизни в мире IoT и способствовать развитию данного перспективного направления технологий. Для повышения эффективности подготовки педагогов целесообразно использовать современные методы обучения и цифровые образовательные ресурсы. Однако анализ существующих научно-методических исследований в области обучения технологии интернета вещей позволяет отметить объективно малое количество работ, посвященных вопросам подготовки будущих учителей информатики в области IoT, особенно в современных условиях цифровизации образования. Целью данного исследования является разработка и апробация модели обучения будущих учителей информатики созданию IoT-устройств в рамках междисциплинарных проектов на основе современных цифровых образовательных ресурсов. Результаты исследования: в рамках междисциплинарного проекта на базе IoT разработана система автоматического полива комнатных растений, определены и разработаны наиболее эффективные цифровые образовательные ресурсы и модель обучения процессу создания разработки данного IoT-устройства с их использованием оценена степень удовлетворенности студентов процессом обучения созданию IoT-устройств с использованием цифровых образовательных ресурсов.

Ключевые слова: цифровые образовательные ресурсы, современные средства обучения, IoT-устройства, интерактивные технологии, мультимедийные технологии, обучение будущих учителей информатики.

Main provisions

The idea of the research is to develop and test a model for teaching future informatics teachers to create IoT devices using digital educational resources (DER) as part of an interdisciplinary project. As a practical task, an automatic plant watering system based on the Arduino and TinkerCad platforms was implemented. The research used methods of pedagogical design, questionnaires and analysis of digital tools. The results showed that the use of SDG increases the motivation and involvement of students, promotes the formation of practical skills and improves the quality of training of future teachers in the context of digitalization of education.

Introduction

Currently, a new system of higher pedagogical education is being formed, focused on training specialists capable of integrating modern technologies into the educational process. One of the key areas of such training is the training of future informatics teachers to create IoT devices, which requires the use of effective digital educational resources.

Digital Educational Resources (DER) are modern learning tools implemented in digital format [1]. Their use is aimed at improving the effectiveness of the educational process, developing practical skills among students and solving key teaching tasks.

Modern educational standards are focused on the active introduction of digital technologies into the educational process.

In high school, learning the basics of the Internet of Things is included in the Informatics program, which examines the basic principles of smart devices and their role in the digital ecosystem. School textbooks on Informatics for 11th grade present topics related to the concept of IoT, intelligent control systems, as well as the development of projects using hardware and software platforms [2].

Special attention is paid to the practical development of technologies, including software modeling and design tools. One of the effective training resources in this area is Cisco Packet Tracer, a powerful computer network simulator that allows you to simulate the operation of IoT devices, analyze their interaction, and test various operating scenarios. Using such tools allows students to learn the basics of working with IoT without the need for physical equipment, which makes learning more accessible and interactive.

In modern educational practice, more and more attention is being paid to interdisciplinary projects that allow students to apply knowledge from various fields to solve practical problems. IoT technologies can become an effective tool for such projects, combining Informatics, physics and mathematics. For the successful implementation of such initiatives in the educational process, a teacher must know how to integrate digital tools, as well as develop educational resources that allow students to master working with IoT devices in practice.

The use of modern digital educational resources is becoming an integral part of the training of future informatics teachers, providing access to educational materials, simulation environments, and software platforms for designing and programming IoT devices [3]. They contribute not only to the optimization of the educational process, but also to its individualization, allowing students to master the material at a pace convenient for them, apply the acquired knowledge in practice and develop their own IoT projects.

In modern conditions, the key task of training future informatics teachers is not only to transfer fundamental knowledge to them, but also to form their competencies in the field of digital technologies and the Internet of Things. Students who actively use digital educational resources acquire independent learning skills, the ability to work with large amounts of information, analyze and apply modern technologies in practice.

A special role in this process belongs to the teacher, who must not only be familiar with the methods of using data centers, but also be able to organize an educational environment that includes digital platforms, virtual laboratories, tools for programming and testing IoT devices. This requires new approaches to the training of teaching staff, ensuring the formation of the necessary competencies to work in a digital educational environment [4].

The introduction of digital educational resources into the process of teaching future informatics teachers how to create IoT devices opens up wide opportunities for improving the quality of specialist training. The use of interactive e-courses, cloud services, training simulators and specialized software environments allows students to master the design, programming and testing of IoT systems in practice.

Digital educational resources provide flexibility and adaptability of learning, the ability to integrate modern development tools into the learning process, support teamwork and remote interaction [5].

Thus, digital educational resources are becoming not just an auxiliary tool, but an essential element of the educational process that allows future informatics teachers to effectively master and apply Internet of Things technologies [6]. Their competent use helps to increase the level of training of specialists who are able to implement modern educational programs focused on the digital transformation of the educational process.

Research methodology

Digital educational resources play a key role in mastering academic disciplines, consolidating theoretical knowledge and developing practical skills. They also facilitate the organization of intermediate and final control, assessment of independent and household work, as well as provide opportunities for self-monitoring and knowledge correction.

A teacher introducing digital educational resources into the educational process is faced with the task of choosing the optimal type of resource in accordance with the objectives of the lesson, studying the methodology of its application and evaluating the effectiveness of its use [7]. In addition, it is possible to develop your own digital educational resources adapted to the specifics of the training course.

One of the most accessible and illustrative examples of IoT devices that can be implemented in the educational process is the Arduino-based automatic irrigation system for indoor plants.

This project allows students to explore key aspects of how IoT works, including sensor applications, data processing, and device management.

The design of an automatic irrigation system provides an opportunity to study the principles of interaction of electronic components and programming of microcontrollers, as well as to create a functioning device capable of monitoring soil moisture levels and controlling water supply [8].

Necessary components

The following hardware components are used to implement the automatic irrigation system:

- The Arduino Nano board is a control microcontroller that provides irrigation control algorithms.
- Soil moisture sensor – measures the soil moisture level and transmits the data to the controller.
- Water pump (pump) – responsible for supplying water to the plant.
- Relay module – controls the operation of the pump, ensuring a secure connection.
- Connecting wires – used to connect all components.
- Water supply tubes – direct the liquid from the pump to the plant.

Software and operating algorithm

The controller is programmed via the Arduino IDE, and TinkerCad can be used to test the model.

The algorithm of the system includes the following steps:

1. Data reading – the humidity sensor measures the moisture level in the soil and transmits the information to the Arduino.
2. Reading analysis – the microcontroller compares the received data with a preset threshold value.
3. Making a decision – if the soil moisture is below the set level, the Arduino activates the relay module.
4. Irrigation activation – a water pump is turned on, which supplies water through a drip irrigation system.
5. Turning off the pump – when the required humidity level is reached, the water supply stops.

The variety of digital educational resources allows teachers to choose the most appropriate tools, depending on the educational goals and the level of training of students. The classification of digital educational resources according to various criteria are shown in Table 1.

Table 1. Classification of digital educational resources.

<i>Basis of classification</i>	<i>Types of digital educational resources</i>
<i>By the type of information provided</i>	<i>Text resources, audio resources, audiovisual resources, visual resources, interactive models, combined resources</i>
<i>For the intended purpose</i>	<i>Educational resources, educational resources</i>
<i>By the availability of a printed equivalent</i>	<i>Digital analogues of printed publications, resources originally created in digital format</i>
<i>On teaching methods</i>	<i>Conventional, learning tools, programmed, problematic, combined</i>

Using digital educational resources

Various digital educational resources are proposed to improve learning efficiency, including educational platforms, massive open online courses (MOOCs), and data visualization tools.

Educational platforms

Educational platforms provide access to structured courses, interactive laboratories, simulators of IoT environments, as well as tools for project activities [9]. For example:

- Flexibly adapt the learning process to the level of students' training.
- Develop the digital competencies of future teachers.
- Integrate IoT learning into a single educational ecosystem.

Massive Open Online Courses (MOOCs)

MOOCs are a sought-after distance learning format that is actively used to train future informatics teachers in the field of IoT [10].

They provide the following advantages:

- Access to relevant knowledge in the field of IoT regardless of the place of residence.
- Practice-oriented learning through simulators and virtual labs.
- A personalized learning trajectory tailored to the individual needs of students.
- Formation of digital competencies necessary for working in modern educational environments.

The use of digital educational resources in the training of future informatics teachers opens up wide opportunities for mastering the principles of designing IoT devices. The development of educational projects, such as a smart irrigation system, allows students not only to consolidate their theoretical knowledge, but also to gain practical experience working with microcontrollers, sensors and actuators [11].

The integration of digital technologies, including educational platforms, online courses and visualization tools, improves the quality of the educational process, promotes individualization of learning and the formation of key digital competencies.

Results of the study

To successfully master IoT technologies, students must not only learn how individual components work, but also be able to integrate them into a single device. Digital educational resources play a significant role in this process, which help at every stage of creating an IoT device, making learning more visual, interactive and effective [12].

At the stage of selecting and describing the necessary equipment. The most suitable ones are:

- Augmented reality infographics – helps students quickly learn the characteristics of the equipment [13]. For example, an infographic showing the operation scheme of soil moisture sensors and the interaction of the main components (electromagnetic valves, controllers) allows you to visually present the device of a smart automatic irrigation system. The use of AR technologies makes it possible to view 3D models of sensors, pumps, and valves, evaluating their performance in real space. The model shows in the figure 1.

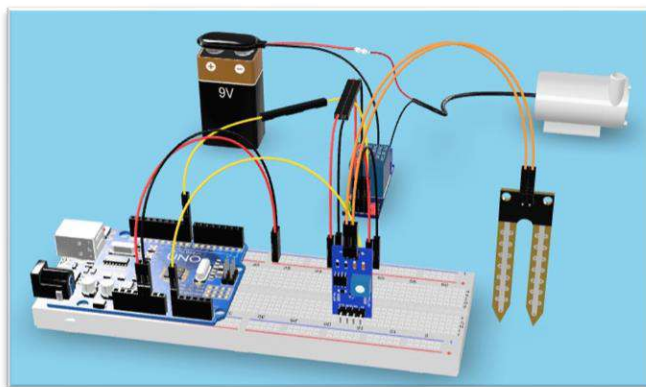


Figure 1. Development of automatic irrigation system

At the stage of building an IoT device creation scheme:

- Video scribing is a method of animated narration that helps explain the principles of operation of a smart irrigation system [14].
- Screencast recordings of the screen with a step-by-step demonstration of work in TinkerCad and Cisco Packet Tracer, showing the process of connecting sensors and configuring the system. The model shows in the figure 2.

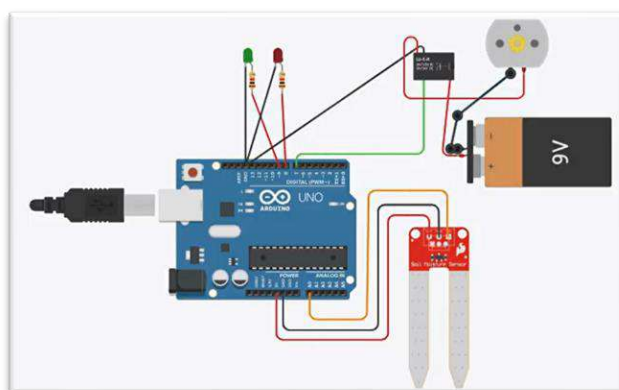


Figure 2. Automatic irrigation system via the Arduino IDE and TinkerCad

At the prototype assembly stage:

- Interactive video – allows students to make decisions during device assembly, test the system and fix errors.
- A chatbot is a virtual assistant that advises on assembly, configuration, and troubleshooting issues [15].

All listed educational resources can be posted on a special website or in a multimedia textbook.

- Website is a single resource with video tutorials, diagrams, instructions and tests.
- Multimedia book – an electronic manual with integrated interactive elements.

Evaluating the effectiveness of digital educational resources

To assess the impact of the use of data analysis on learning, a survey was conducted among 3rd-year students majoring in Informatics. 216 students participated in the study.

The survey includes questions about the usefulness, convenience, and effectiveness of the digital resources presented in table 2:

Table 2. Survey of 3rd year students of the Informatics specialty on the effectiveness of the digital resources presented.

№	Questions	No (%)	I find it difficult to answer (%)	Yes (%)
1	Was the digital educational resource useful to you when studying the Smart Plant Watering project?	14%	3%	83%
2	Have infographics and video scribing helped to better understand the stages of creating an IoT device?	2%	10%	88%
3	Was the process of working with the online TinkerCad platform convenient when designing the device circuit?	4,5%	5,5%	90%
4	Were you able to assemble a prototype of the device without difficulty using the digital materials provided?	1%	7%	92%
5	Was the mobile application developed clear and easy to control the device?	0%	25%	75%
6	Did the interactive videos and virtual labs help in understanding how IoT devices work?	10%	20%	70%
7	Were the learning materials of the multimedia book or website sufficient for self-study?	8%	60%	32%
8	Would you like to use similar digital learning resources in future learning projects?	12%	8%	80%
9	Was it convenient to interact with the instructor and students through online platforms (GitHub, Google Colab)?	10%	8%	82%
10	Do you feel that the use of DER has increased your IoT knowledge and skills?	2%	24%	74%

The results of the study show that 83% of the students indicated that digital educational resources (DERs) were useful, and 88% confirmed that infographics and video scribing helped them to better understand the steps involved in building an IoT device. During the design phase, 90% of students found the TinkerCad platform user-friendly and 92% had no difficulty assembling the prototype using the digital materials provided. However, 25% of students found it difficult to rate the usability of the mobile app, which may indicate a need for improvement. 80% of students expressed a desire to use such DERs in the future, which confirms their practical value and relevance in the educational process. These results highlight key aspects that ensure the successful integration of digital learning resources into teaching.

Discussions

One of the most significant factors of effectiveness is the availability and completeness of educational materials that cover both theoretical and practical aspects of the discipline. This allows students not only to familiarise themselves with the basics of how IoT systems components work, but also to apply the knowledge gained during project activities.

Integration of DER with modelling and programming platforms such as TinkerCad and Arduino IDE is integral to effective learning [13]. These tools allow students to design and test circuits of IoT devices in a virtual environment, which significantly lowers the threshold of entry into the study of Internet of Things technologies.

In addition, the use of interactive elements (video tutorials, simulations, test tasks) contributes to a deeper understanding of the material. Interactive methods activate students' learning activities, increase their level of involvement and allow to demonstrate the operation of hardware and software components of IoT systems. To improve the objectivity of knowledge control, it is advisable to

introduce automated testing tools (testing and simulation tasks), which provides not only timely feedback, but also the possibility of individual learning pace.

Another important factor is the adaptation of the interface of digital educational resources, which makes it possible to ensure the convenience of work on various devices (PCs, tablets, smartphones). This approach increases the accessibility of learning materials and promotes continuous learning outside of the classroom. Personalisation of the educational process, based on taking into account the level of students' preparation, also plays a significant role. The inclusion of adaptive learning features allows each student to master the material at a comfortable pace, receiving the necessary additional clarification or, conversely, moving on to more complex tasks [14]. Practice-oriented learning is an important component of IoT training, so the introduction of lab activities and step-by-step tutorials is necessary to build applied design and programming skills in students. Finally, the effectiveness of digital educational resources increases significantly when they are integrated with the university's learning platforms (Google Classroom, Microsoft Teams). This allows creating a unified educational environment that provides interaction between students and teachers, access to learning materials and automated checking of assignments. Thus, the use of digital educational resources helps not only to increase students' motivation, but also to develop their practical skills in the field of IoT, which is of key importance for the training of qualified specialists in this field.

Conclusion

The use of digital educational resources in teaching future informatics teachers to create IoT devices is a promising direction in modern pedagogy. Interactive and multimedia technologies promote deeper learning of complex topics, increase the level of student engagement and ensure the formation of key professional competences. The development and implementation of effective teaching methods with the use of DER significantly improve the training of specialists in the field of IoT and digital technologies. In the future, it is possible to expand the functionality of digital educational resources by introducing artificial intelligence technologies, adaptive learning systems and virtual reality. This will make it possible to integrate IoT even deeper into the educational process and create a more flexible and personalised learning model.

Acknowledgements

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan within the project «IoT Transformation of an Educational Institution: Design, Implementation of Smart Classrooms and Training of Specialists in the Field of IoT for Education» (IRN AP23490844).

Список использованных источников

[1] Графова, О.П. (2020). Электронный образовательный ресурс и цифровой образовательный ресурс: сходства и различия понятий / О.П. Графова, Л.В. Витвицкая // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. – С. 163-166. <http://elib.pnzgu.ru/library/1604434366> (дата обращения: 05.03.2025).

[2] Ongarbayeva, A.D., Kaldybaev, S.K., Kasymaliev, M.U., Kozhasheva, G.O., Yermekova, N.S. (2021). Methodology of preparing future computer science teachers to create electronic educational resources. *World Journal on Educational Technology: Current Issues*. 13(3), 386-396 <https://doi.org/10.18844/wjet.v13i3.5933> (дата обращения: 05.03.2025).

[3] Burd, Barry & Barker, Lecia & Divitini, Monica & Fermin Perez, Felix Armando & Russell, Ingrid & Siever, Bill & Tudor, Nicoleta. (2017). Courses, Content, and Tools for Internet of Things in Computer Science Education. 125-139. 10.1145/3174781.3174788. (Дата цитирования 8.03.2025) <https://doi.org/10.1145/3174781.3174788> (дата обращения: 05.03.2025).

[4] Victor Callaghan. (2012). Buzz-Boarding; practical support for teaching computing based on the internet-of-things. In 1st Annual Conference on the Aiming for Excellence in STEM Learning and Teaching, Imperial College, London & The Royal Geographical Society. 12–13.

- [5] Как построить цифровую образовательную среду [Электронный ресурс]. – <http://www.edutainme.ru/post/manifesto-upd/> Режим (Дата доступа: цитирования 10.03.2025)
- [6] Akhmetova O. , Issayev C. and Kaiyrgaliyeva A. (2020). FORMATION FUTURE COMPUTER SCIENCE TEACHERS' COMMUNICATIVE ABILITIES IN STUDYING INTERNET OF THINGS (IoT). Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and mathematical sciences. 72, 4 (Dec. 2020), 188–195. <https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.29>.
- [7] Современная образовательно-информационная среда / А.М. Кондаков, М.Л. Кондакова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [file:///C:/Users/1/Downloads/Kondakov_A.M.,_Kondakova_M.L.Sovremennaya_obraz\(BookFi\).pdf](file:///C:/Users/1/Downloads/Kondakov_A.M.,_Kondakova_M.L.Sovremennaya_obrazovatelno-obraz(BookFi).pdf) (дата обращения: 10.03.2025).
- [8] Dr.Faouzi Bouslama and Dr. Faisal Kalota. (2016). Creating Smart Classrooms to Benefit from Innovative Technologies and Learning Space Design\ International Journal of Instructional Media, vol.10, pp.423-634. DOI:10.1109/CTIT.2013.6749486
- [9] Массовый открытый онлайн-курс. Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Массовый_открытый_онлайн-курс. (дата обращения: 12.03.2025).
- [10] МООК и открытое образование: Значение для высшего образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://openeducation.net/services/mook-i-otkrytoe-obrazovanie-znachenie-dlyavysshego-obrazovaniya/>. (дата обращения: 12.03.2025).
- [11] М. Б. Лебедева, М. А. Горюнова. (2019). Применение цифровых образовательных ресурсов на современном уроке : метод. пособие / – СПб.: ЛОИРО, – 127 с.
- [12] Song Shuqiang, Zhong Xiaoliu, Li Haixia, Du. (2014). Smart Classroom: from Conceptualization to Construction\, Jing Information Technology Center Tsinghua University Beijing, China, vol.45, pp.343-765.
- [13] Лозенко Г.Ф., Кривоплясова Е.В. (2015). Использование электронных образовательных ресурсов для подготовки будущих учителей информатики // Личность, семья и общество: вопросы педагогики и психологии. №2 (49). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-elektronnyh-obrazovatelnyh-resursov-dlya-podgotovki-buduschih-uchiteley-informatiki> (дата обращения: 21.03.2025)
- [14] Федорова Г.А. (2014). Разработка и применение электронных образовательных ресурсов в структуре методической подготовки бакалавров в педагогическом вузе // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. №3 (29). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-i-primenenie-elektronnyh-obrazovatelnyh-resursov-v-strukture-metodicheskoy-podgotovki-bakalavrov-v-pedagogicheskom-vuze> (дата обращения: 22.03.2025)

References

- [1] Grafova, O.P. (2020). Jelektronnyj obrazovatel'nyj resurs i cifrovoj obrazovatel'nyj resurs: shodstva i razlichija ponjatij / O.P. Grafova, L.V. Vitvickaja // Sovremennoe obrazovanie: nauchnye podhody, opyt, problemy, perspektivy. – S. 163-166. <http://elib.pnzgu.ru/library/1604434366> (date of application: 05.03.2025)
- [2] Ongarbayeva, A.D., Kaldybaev, S.K., Kasymaliev, M.U., Kozhasheva, G.O., Yermekova, N.S. (2021). Methodology of preparing future computer science teachers to create electronic educational resources. World Journal on Educational Technology: Current Issues. 13(3), 386-396 <https://doi.org/10.18844/wjet.v13i3.5933>. (date of application: 05.03.2025)
- [3] Burd, Barry & Barker, Lecia & Divitini, Monica & Fermin Perez, Felix Armando & Russell, Ingrid & Siever, Bill & Tudor, Nicoleta. (2017). Courses, Content, and Tools for Internet of Things in Computer Science Education. 125-139. 10.1145/3174781.3174788. <https://doi.org/10.1145/3174781.3174788> (date of application: 05.03.2025)
- [4] Victor Callaghan. (2012). Buzz-Boarding; practical support for teaching computing based on the internet-of-things. In 1st Annual Conference on the Aiming for Excellence in STEM Learning and Teaching, Imperial College, London & The Royal Geographical Society. 12–13.
- [5] Kak postroit' cifrovuju obrazovatel'nuju sredu [Jelektronnyj resurs]. – <http://www.edutainme.ru/post/manifesto-upd/> Rezhim (date of application: 10.03.2025)
- [6] Akhmetova O, Issayev C. and Kaiyrgaliyeva A. (2020). FORMATION FUTURE COMPUTER SCIENCE TEACHERS' COMMUNICATIVE ABILITIES IN STUDYING INTERNET OF THINGS (IoT). Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and mathematical sciences. 72, 4 (Dec. 2020), 188–195. <https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.29>.

[7] *Sovremennaja obrazovatel'no-informacionnaja sreda* / A.M. Kondakov, M.L. Kondakova [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa: [file:///C:/Users/1/Downloads/Kondakov_A.M.,_Kondakova_M.L.Sovremennaya_obraz\(BookFi\).pdf](file:///C:/Users/1/Downloads/Kondakov_A.M.,_Kondakova_M.L.Sovremennaya_obraz(BookFi).pdf) (date of application: 10.03.2025)

[8] Dr.Faouzi Bouslama and Dr. Faisal Kalota. (2016). *Creating Smart Classrooms to Benefit from Innovative Technologies and Learning Space Design* \ *International Journal of Instructional Media*, vol.10, pp.423-634. DOI:10.1109/CTIT.2013.6749486

[9] *Massovyj otkrytyj onlajn-kurs. Vikipedija* [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa: https://ru.wikipedia.org/wiki/Massovyj_otkrytyj_onlajn-kurs. (date of application: 12.03.2025)

[10] *MOOK i otkrytoe obrazovanie: Znachenie dlja vysshego obrazovanija* [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa: <https://openeducation.net/services/mook-i-otkrytoe-obrazovanie-znachenie-dlyavysshego-obrazovaniya/>. (date of application: 12.03.2025).

[11] M. B. Lebedeva, M. A. Gorjunova. (2019). *Primenenie cifrovyyh obrazovatel'nyh resursov na sovremennom uroke : metod. posobie* / – SPb.: LOIRO, – 127 s.

[12] Song Shuqiang, Zhong Xiaoliu, Li Haixia, Du. (2014). *Smart Classroom: from Conceptualization to Construction* \ *Jing Information Technology Center Tsinghua University Beijing, China*, vol.45, pp.343-765.

[13] Lozenko G.F., Krivopljasova E.V. (2015). *Ispol'zovanie jelektronnyh obrazovatel'nyh resursov dlja podgotovki budushhih uchiteley informatiki // Lichnost', sem'ja i obshhestvo: voprosy pedagogiki i psihologii. №2 (49). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-elektronnyh-obrazovatelnyh-resursov-dlya-podgotovki-buduschih-uchiteley-informatiki> (date of application: 21.03.2025)*

[14] Fedorova G.A. (2014). *Razrabotka i primeneniye jelektronnyh obrazovatel'nyh resursov v strukture metodicheskoy podgotovki bakalavrov v pedagogicheskom vuze // Vestnik KGPU im. V.P. Astaf'eva. №3 (29). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-i-primeneniye-elektronnyh-obrazovatelnyh-resursov-v-strukture-metodicheskoy-podgotovki-bakalavrov-v-pedagogicheskom-vuze> (date of application: 22.03.2025)*

К.С. Тыныш¹, В.Б. Рыстыгулова^{2*}, Ж.К.Сыдыкова¹,
Ш.Е.Жусипбекова³, Г.Қ. Төленова⁴

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Қ. Құлажанов атындағы Қазақ технология және бизнес университеті, Астана қ., Қазақстан

³С.Д. Асфендияров атындағы Қазақ ұлттық медициналық университет, Алматы қ., Қазақстан

⁴Ы.Алтынсарин атындағы Арқалық педагогикалық университеті, Арқалық қ., Қазақстан

*[e-mail: RystygulovaV@gmail.com](mailto:RystygulovaV@gmail.com)

РОБОТОТЕХНИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІН ҚОЛДАНУ НЕГІЗІНДЕ ФИЗИКА КУРСЫНЫҢ ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТАРЫН ЖЕТІЛДІРУ

Аңдатпа

Мақалада робототехника элементтерін қолдану арқылы физика курсының зертханалық жұмыстарын жетілдіру мәселесі қарастырылған. Заманауи білім беру жүйесінде робототехниканың мүмкіндіктері білім алушылардың физикалық құбылыстарды түсінуді жеңілдетіп, олардың танымдық белсенділігі мен шығармашылық қабілеттерін дамытуға, техникалық білімдерін арттыруға бағытталған. Зерттеу жұмысы барысында робототехника элементтерін оқыту процесіне енгізудің теориялық және практикалық аспектілері талданған. Робототехника негізінде жасалған зертханалық жұмыстар және робототехниканың көмегімен физикалық заңдарды нақты модельдер арқылы түсіндіру оқушылардың теориялық білімдерін практикамен байланыстыруына, олардың ғылыми-зерттеу дағдыларын қалыптастыруға және STEAM бағытындағы дағдыларды дамытуға ықпал ететіндігін сауалнама нәтижелері арқылы дәлелденген. STEAM тәсіл шеңберінде физика және информатика бойынша зертханалық жұмыстарға робототехниканы интеграциялау интерактивтілікті, пәнаралық және цифрлық технологияларды тәжірибеге бағдарланған игеруді қамтамасыз ете отырып, білім беруді ақпараттандыруды күшейтеді.

Түйін сөздер: робототехника элементтері, физикалық зертханалық жұмыстар, зерттеушілік дағды, пәнаралық технология, STEAM, білім беруді ақпараттандыру.

К.С. Тыныш¹, В.Б. Рыстыгулова², Ж.К. Сыдыкова¹, Ш.Е. Жусипбекова³, Г.Қ. Туленова⁴

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

²Казахский университет технологии и бизнеса имени К. Кулажанова, г.Астана, Казахстан

³Казахский национальный медицинский университет им. С.Д. Асфендиярова, г.Алматы, Казахстан

⁴Арқалық педагогический университет им. Ы.Алтынсарина, г.Арқалық, Казахстан

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ КУРСА ФИЗИКИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ РОБОТОТЕХНИКИ

Аннотация

В статье рассматривается проблема совершенствования лабораторных работ курса физики с применением элементов робототехники. В современной системе образования возможности робототехники направлены на содействие пониманию обучающимися физических явлений, развитие их познавательной активности и творческих способностей, повышение технических знаний. В ходе исследовательской работы проанализированы теоретические и практические аспекты внедрения элементов робототехники в процесс обучения. Результаты анкетирования доказали, что лабораторные работы на основе робототехники и интерпретация физических законов с помощью конкретных моделей с помощью робототехники способствуют связыванию теоретических знаний учащихся с практикой, формированию у них научно-исследовательских навыков и развитию навыков по направлению STEAM. Интеграция робототехники в лабораторные работы по физике и информатике в рамках STEAM подхода усиливает информатизацию образования, обеспечивая интерактивность, междисциплинарное и практико-ориентированное освоение цифровых технологий.

Ключевые слова: элементы робототехники, физические лабораторные работы, исследовательские навыки, междисциплинарные технологии, STEAM, информатизация образования.

K.S. Tynysh¹, V.B. Rystygulova², Zh.K. Sydykova¹, Sh.E. Zhusipbekova³, G.K. Tulenova⁴

¹Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

²Kazakh University of Technology and Business named after K. Kulazhanov, Astana, Kazakhstan

³Kazakh National Medical University named after S.D. Asfendiyarov, Almaty, Kazakhstan

⁴Arkalyk Pedagogical University named after Y. Altynsarina, Arkalyk, Kazakhstan

IMPROVING THE LABORATORY WORK OF THE PHYSICS COURSE BASED ON THE USE OF ROBOTICS ELEMENTS

Abstract

The article discusses the problem of improving the laboratory work of the physics course using elements of robotics. In the modern education system, the possibilities of robotics are aimed at promoting students' understanding of physical phenomena, developing their cognitive activity and creative abilities, and improving technical knowledge. In the course of the research, the theoretical and practical aspects of the introduction of robotics elements into the learning process are analyzed. The results of the survey proved that laboratory work based on robotics and the interpretation of physical laws using specific models using robotics contribute to linking students' theoretical knowledge with practice, forming their research skills and developing skills in the field of STEAM. The integration of robotics into laboratory work in physics and computer science within the STEAM approach enhances the informatization of education, providing interactivity, interdisciplinary and practice-oriented development of digital technologies.

Keywords: elements of robotics, physical laboratory work, research skills, interdisciplinary technologies, STEM, informatization of education.

Кіріспе

Қазіргі уақытта ғылыми-техникалық прогрестің қарқынды дамуы білім беру жүйесіне де өз әсерін тигізуде. Бүгінгі таңда оқытудың жаңа әдістері мен технологияларын енгізу – білім сапасын арттырудың негізгі бағыттарының бірі. Әсіресе, жаратылыстану пәндерін, соның ішінде физиканы оқытуда инновациялық тәсілдерді қолдану өзекті мәселеге айналып отыр. Физика заңдарын түсіну үшін теориялық біліммен қатар, тәжірибелік жұмыстар мен эксперименттік зерттеулер маңызды рөл атқарады. Заманауи білім беру жүйесінде ғылыми-техникалық прогрестің дамуымен қатар оқыту әдістемелерін жаңғырту қажеттілігі туындап отыр. Физика пәні – табиғат заңдылықтарын түсіндіретін, күрделі құбылыстарды тәжірибе жүзінде көрсететін ғылым. Ғылыми зерттеулерде де, физиканы оқытуда да эксперимент білімнің қайнар көзі, физикалық құбылыстардың дәлелділік белгісі, логикалық және математикалық операцияларды жүргізу үшін бастапқы нүкте, теория мен тәжірибенің байланысының дәлелі болып табылады [1]. Робототехника – ғылым мен техниканың тоғысқан саласы, ол механика, электроника, бағдарламалау және физика заңдарын біріктіреді. Бүгінде көптеген елдерде мектеп бағдарламасына робототехниканы енгізу арқылы оқушылардың техникалық білімін арттыруға баса назар аударылуда. Робототехника қазіргі уақытта тек инженерлік салада ғана емес, білім беруде де ерекше орын алып отыр. Физика курсында зерттеулер жүргізуде робототехниканы қолдану адамның күнделікті іс-әрекетіне қазірдің өзінде енгізілуде. Және жыл сайын біріншіден, роботтар жоғарғы технологияларға ие болуда, ал екіншіден, жұмысты жеңілдетуде. Соның арқасында әуесқой пайдаланушылардың бұл салаға қызығушылығы артып жатыр [2]. Оның көмегімен физикалық құбылыстарды көрсету мен білім алушылардың шығармашылық қабілеттерін дамытуда көптеген артықшылықтарға қол жеткізуге болады. Робототехниканың көмегімен физикалық заңдарды нақты модельдер арқылы түсіндіру және білім алушылардың зерттеушілік қабілетін арттыруға мүмкіндік туады. Соның ішінде ең қарапайымы – физика пәнінен демонстрациялық және зертханалық жұмыстарды робототехниканың көмегімен жүзеге асыру [3]. Робототехниканың білім беру жүйесіндегі рөлі білім алушылардың тек білімді қабылдаушы ғана емес, оны жасаушы ретінде әрекет етуімен сипатталады. Заманауи зерттеулер көрсеткендей, робототехника негізінде жасалған эксперименттер оқушылардың теориялық білімдерін практикамен байланыстыруына, сондай-ақ олардың ғылыми-зерттеу дағдыларын қалыптастыруына

көмектеседі [4]. Сонымен қатар, мұндай тәсіл оқыту процесін интерактивті және қызықты ете отырып, STEM бағытындағы дағдыларды дамытуға ықпал етеді. Физика сабағында робототехника элементтерін қолдану бірнеше артықшылық береді. *Біріншіден*, ол күрделі физикалық заңдарды қарапайым құралдар арқылы түсіндіруге көмектеседі. Мысалы, теңүдемелі қозғалыс кезінде дененің еркін түсу үдеуін LEGO Mindstorms EV3 роботтарын пайдалану арқылы анықтауға болады. *Екіншіден*, робототехника физикалық эксперименттердің қолжетімділігін арттырады. Робототехника физикалық тәжірибелерді виртуалды және шынайы түрде өткізуге мүмкіндік береді. *Үшіншіден*, робототехника элементтері білім алушылардың шығармашылық және сыни ойлау қабілетін дамытады. Олар роботтарды құрастыру және олардың көмегімен тәжірибелер жүргізу арқылы техникалық дағдыларын жетілдіреді. Бұл болашақ мамандардың жаңа технологияларды меңгеруіне жағдай жасайды.

Әдебиеттерге шолу

Д.М. Блинов зерттеулерінде физика және информатика сабақтарында LEGO MINDSTORMS EDUCATION EV3 жинағын пайдалану білім алушыларға эксперименттік жұмысқа деген қызығушылықты дамытуға, зерттеулерде роботтарды пайдалану дағдыларын жетілдіруге және инженерлік және техникалық шығармашылыққа ынталандыруға көмектесетіндігі туралы қорытынды жасалған [5]. Келесбаев К., Раманкулов Ш., Нуризинова М., Курбанбеков Б., Паттаев А. авторлар мақаласы STEM тәсілі аясында физика сабақтарында LEGO EV3 жиынтығын қолданудың тиімділігін зерттеуге бағытталған. Нәтижелер робототехникалық элементтерді қолдану білім алушылардың оқу жетістіктерін айтарлықтай жақсартатынын көрсетті, бұл оқытуға дейінгі және кейінгі нәтижелерді статистикалық талдаумен расталған [6]. Мақалада [7] жүйелі талдау мен эксперименттік зерттеулерді пайдалана отырып, білім алушылардың меңгеру деңгейін зерттеуге бағытталған педагогикалық эксперименттерге талдау жүргізілген, бұл оқыту әдістерін жетілдіру және оқытудың тиімділігін арттыру үшін жаңа технологияларды әзірлеу деңгейін анықтау қажеттілігін талап ететіндігі дәлелденген.

Зерттеудің әдіснамасы

«Теңүдемелі қозғалыс кезіндегі дененің үдеуін анықтау» зертханалық жұмысын LEGO Mindstorms EV3 роботымен ұйымдастыру әдістемесін қарастырайық. Зерттеу жұмысында робототехника элементтерін физика курсының зертханалық эксперименттерінде қолданудың тиімділігін анықтау мақсатында әртүрлі әдістер қолданылды.

«Теңүдемелі қозғалыс кезіндегі дененің үдеуін анықтау» зертханалық жұмысын LEGO Mindstorms EV3 роботымен ұйымдастыру бірнеше кезеңнен тұрады. Алдымен *бірінші кезеңде* зертханалық жұмысты орындауға қажетті құралдар әзірленеді, құрастырылады, эксперимент бірнеше рет жүргізіліп нақты сан мәндері алынады [8].

«Теңүдемелі қозғалыс кезіндегі дененің үдеуін анықтау» зертханалық жұмысының мақсаты: Көлбеу науамен қозғалып келе жатқан шардың үдеуін есептеу [9, б.256]. Зертханалық жұмысқа қажетті құрал-жабдықтар: микропроцессорлық блок, үлкен қозғалтқыш, жанасу датчигі, шар, зертханалық науа, Lego Mindstorms EV3 жиынтықтары (1-сурет).

Зертханалық жұмыстың қысқаша теориясына тоқталсақ: Теңүдемелі қозғалыс – дененің үдеуі уақытқа тәуелсіз тұрақты болатын қозғалыс түрі. Басқаша айтқанда, дененің жылдамдығы бірқалыпты өзгереді. Егер дененің үдеуі оң болса, оның жылдамдығы артады (үдемелі қозғалыс), ал үдеу теріс мәнге ие болса, жылдамдық кемиді (баяулайтын қозғалыс).



Сурет 1. «Теңүдемелі қозғалыс кезіндегі дененің үдеуін анықтау» зертханалық жұмысын жасауға қажетті құрал-жабдықтар

Үдеу (a) – дененің жылдамдығының өзгеру шапшаңдығын сипаттайтын физикалық шама. Ол жылдамдық өзгерісінің уақытқа қатынасымен анықталады:

$$a = \frac{g - g_0}{t}, \quad (1)$$

мұнда: g – қозғалыстың соңғы жылдамдығы (м/с),
 g_0 – бастапқы жылдамдық (м/с),
 t – қозғалыс уақыты (с).

Егер дене тыныштықтан қозғалысын бастаса ($g_0 = 0$), онда үдеу формуласы:

$$a = \frac{g}{t}. \quad (2)$$

Теңүдемелі қозғалыс жағдайында дененің жүрген жолы (S) төмендегі теңдеумен есептеледі:

$$S = g_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Бастапқы жылдамдық нөлге тең болғанда ($g_0 = 0$), бұл теңдеу былайша жазылады:

$$S = \frac{at^2}{2}. \quad (4)$$

Осыдан үдеуді анықтауға арналған формула шығады:

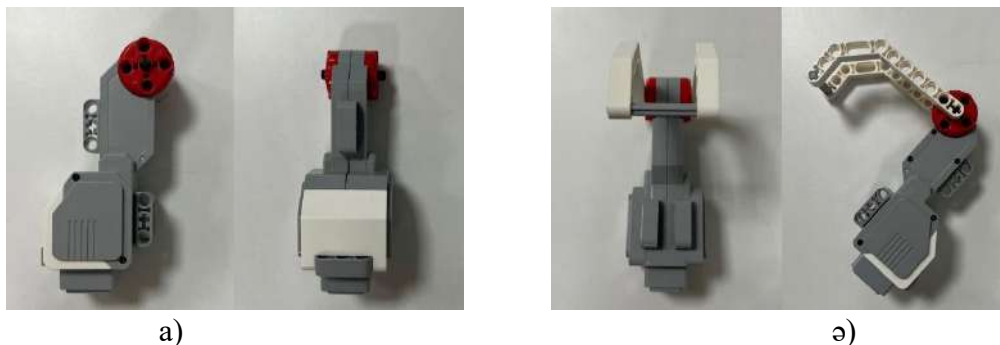
$$a = \frac{2S}{t^2}. \quad (5)$$

Көлбеу науамен қозғалып келе жатқан шардың үдеуін анықтау үшін шардың белгілі бір t уақытта жүріп өтетін S орын ауыстыруының ұзындығы өлшенеді. Бастапқы жылдамдықсыз ($g_0 = 0$) тең үдемелі қозғалыс кезінде $S = \frac{at^2}{2}$ болатындықтан, S орын ауыстыру ұзындығы мен t уақытын өлшеп алып, шардың үдеуін анықтауға болады [10]:

$$a = \frac{2S}{t^2}. \quad (6)$$

Зертханалық жұмысқа арналған құрылғыны жинау нұсқаулығы:

1. Құрылғыны жинау үшін ең алдымен үлкен қозғалтқышқа Lego Mindstorms EV3 бөлшектерін бөгет ретінде жалғау керек. Бұл бөгет жанасу датчигінен команда келгенше шарды ұстап тұрады. Үлкен қозғалтқыш – дөңгелек немесе механикалық қол қызметінде күшті айнаруды қамтамасыз ету қызметін атқарады (2-сурет).



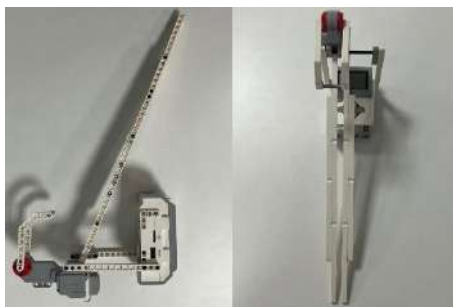
Сурет 2. а) үлкен қозғалтқыш, б) үлкен қозғалтқышқа жалғанған бөгет қызметін атқарушы

2. Үлкен қозғалтқышты Lego Mindstorms EV3 бөлшектерінің көмегімен микропроцессорлық блокқа орнатыңыз. Микропроцессорлық блок – роботтың барлық әрекеттерін басқаруда шешуші рөл атқарады, орындалуы керек барлық іс-әрекеттер осы блок арқылы жүзеге асырылады (3-сурет).



Сурет 3. Микропроцессорлық блокқа үлкен қозғалтқышты орнату

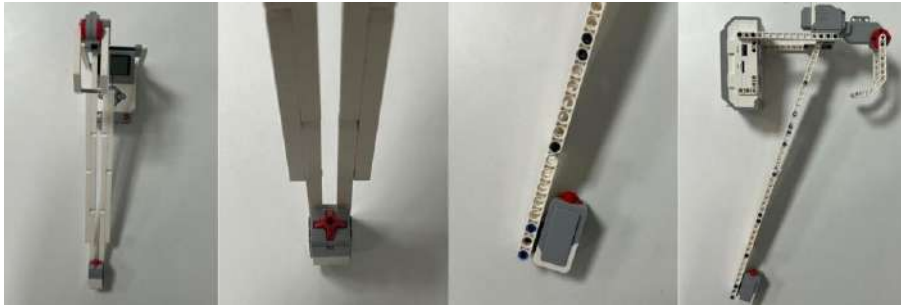
3. Жұмысқа қажетті зертханалық науаны Lego Mindstorms EV3 бөлшектері көмегімен дайындаңыз (4-сурет).



Сурет 4. Науаны дайындау процесі

4. Науаның төменгі тұсына жанасу датчигін орнатыңыз. Бұл датчик шардың тоқтауына әсер етіп, уақытты анықтауға көмектеседі. Жанасу датчигі – сыртқы ортамен физикалық байланысты анықтау мақсатында қолданылады. Датчиктің қызыл түймесіне дене жанасқанда микропроцессорлық блокқа сигнал жіберіледі (5-сурет).

5. Үлкен қозғалтқыштың оң жақ бөлігіне жанасу датчигін тігінен орнатыңыз. Датчиктің қызыл түймесін басқанда үлкен қозғалтқышта орналасқан бөгет көтеріліп, шардың қозғалысына мүмкіндік береді (6-сурет).



Сурет 5. Уақытты анықтау үшін қолданылатын жанасу датчигін орнату

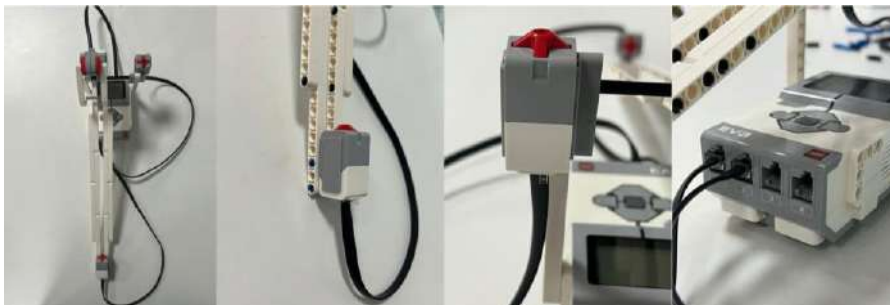


Сурет 6. Бөгеттің көтерілуіне әсер ететін жанасу датчигін орнату

Жанасу датчиктері мен үлкен қозғалтқышты микропроцессорлық блокқа Lego Mindstorms EV3 кабельдері арқылы жалғаңыз. Үлкен қозғалтқышты тек А, В, С, D порттарына, ал жанасу датчиктері 1, 2, 3, 4 порттарына жалғанады (7, 8-суреттер).

- А, В, С, D порттары: қозғалтқыштарды немесе айнаруды басқаруды қажет ететін басқа да құрылғыларды қосуға арналған, яғни роботтың қозғалысын басқаруға әсер етеді.

- 1, 2, 3, 4 порттары: жанасу, түс, ультрадыбыс датчиктерін қосуға арналған, қоршаған ортамен өзара әрекеттесу, мәлімет алу үшін қолданылады.



Сурет 7. Жанасу датчиктерін порттарға жалғау



Сурет 8. Үлкен қозғалтқышты порттарға жалғау

Жұмысты орындау тәртібі:

1. Қондырғы нұсқаулықта көрсетілгендей етіп жиналады.
2. Өлшеуіш құралдың көмегімен шардың орын ауыстыру ұзындығын S өлшенеді (ара қашықтық шар қозғалысының басталу нүктесінен бастап науаның соңына бекітілген жанасу датчик деңгейіне дейін өлшенеді).
3. Науаның төменгі бөлігінде тағы бір жанасу датчигі бекітіледі, ол көлбеу жазықтықпен домалап түскен шарға «әсер етеді».
4. Микропроцессорлық блокта шардың қозғалыс уақытын тіркеу үшін бағдарламалық секундомер қосылады. Шар науаның төменгі бөлігіне бекітілген жанасу датчигіне түскенде бағдарламалық секундомер тоқтатылады. Нәтижесінде шардың t қозғалыс уақыты өлшенеді және мәні микропроцессорлық блоктың экранына шығарылады.
5. Науаның көлбеулігін өзгертпей (тәжірибе шарты өзгермеуі тиіс) тәжірибені 5 рет қайталау керек.
6. Өлшеу нәтижелерін 1-кестеге жазамыз.

Кесте 1. Эксперименттің өлшеу және есептеу нәтижелері

№ р/с	Өлшеу нәтижелері		Есептеу нәтижелері
	Жол, S , м	Уақыт, t , с	Үдеу, a , м/с ²
1	0.2	0.34	3.46
2	0.22	0.36	3.395
3	0.24	0.38	3.324
4	0.26	0.40	3.25
5	0.28	0.41	3.33

7. (1) формуланы қолдана отырып әр тәжірибе үшін шардың үдеуі есептелінеді.
8. Ешбір өлшеу абсолют дәл болмайды, есептеу барысында қателіктер кетуі мүмкін. Осындай қателіктерді мейілінше азайту үшін тәжірибе шартын өзгертпей, өлшеу жұмыстарын бірнеше рет қайталап орындап, арифметикалық орташа мәнін есептеген жөн [11]. Ары қарай есептеулер төмендегі реттілік бойынша орындалады.

Үдеудің орташа мәні:

$$a_{opt} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5},$$

өлшеудің абсолюттік қателігі:

$$\Delta a = |a_{opt} - a_i|,$$

абсолюттік қателіктің орташа мәні:

$$\Delta a_{opt} = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \Delta a_4 + \Delta a_5}{5},$$

салыстырмалы қателігі:

$$\varepsilon = \frac{\Delta a_{opt}}{a_{opt}} \cdot 100\% .$$

есептеліп, өлшеу қателігінің мәні анықталады.

Зерттеудің нәтижелері

Екінші кезеңде білім алушылар арасында сауалнама жүргізілді. Сауалнамаға Республикалық физика-математика мектебінің 9 «С» және 9 «G» сыныптарынан 32 оқушы қатысты. Оларға робототехника элементтерін қолданудың тиімділігі мен қажеттілігі туралы бірнеше сұрақ қойылды. Сауалнама сұрақтары және жауап нұсқалары мен сауалнама нәтижелері 2-кестеде келтірілген.

Кесте 2. Сауалнама нәтижелері

Сұрақтар	Жауап нұсқалары	Қатысушылар саны	Жауап үлесі (%)
1. Робототехника қызықты болды ма?	Иә	29	91%
	Жоқ	2	6%
	Білмеймін	1	3%
2. Физикалық заңдарды түсіну жеңілдеді ме?	Иә	27	84%
	Жоқ	3	9%
	Айтарлықтай өзгеріс болған жоқ	2	6%
3. Физикаға қызығушылық артты ма?	Иә	25	78%
	Жоқ	5	16%
	Айырмашылық жоқ	2	6%
4. Робот өлшеулері дәлірек болды ма?	Иә	26	81%
	Жоқ	4	12%
	Дәстүрлі әдіс дәлірек болды	2	6%
5. Дәстүрлі әдіспен алынған үдеу мәні	$2 \div 3.8 \text{ м/с}^2$	24	75%
	$2.5 \div 3.2 \text{ м/с}^2$	6	19%
	3.2 м/с^2 жоғары	2	6%
6. Роботпен алынған үдеу мәні	$3.2 \div 3.6 \text{ м/с}^2$	28	87%
	$3.5 \div 3.8 \text{ м/с}^2$	4	12%
	3.7 м/с^2 жоғары	0	0%
7. Өлшеулердің ауытқулары	Дәстүрлі әдіс $\pm 0.3 \div 0.5 \text{ м/с}^2$, робот $\pm 0.1 \div 0.2 \text{ м/с}^2$	23	72%
	Дәстүрлі әдіс $\pm 0.5 \div 0.7 \text{ м/с}^2$, робот $\pm 0.2 \div 0.3 \text{ м/с}^2$	7	22%
	Айырмашылық жоқ	2	6%
8. Робот көмегімен алынған үдеу мәні дәлірек болды ма?	Иә	30	94%
	Жоқ	2	6%
	Айырмашылық жоқ	0	0%

Сауалнама нәтижелері бойынша оқушылардың 94%-ы робот көмегімен алынған өлшеулер дәлірек екенін мойындады. Бұл нәтижелер келесідей факторлармен түсіндіріледі:

-Роботтың өлшеу дәлдігі – LEGO Mindstorms EV3 роботында уақыт миллисекундпен өлшенеді, ал адам секундомерді қолданғанда кішігірім реакция кешігуі болады.

-Датчиктерді пайдалану – жанасу датчиктері арқылы уақыт автоматты түрде тіркеледі.

-Өлшеу қатесінің төмендеуі – адам өлшем жасаған кезде $\pm 0.3 - 0.5 \text{ м/с}^2$ болса, роботта $\pm 0.1 - 0.2 \text{ м/с}^2$ деңгейінде болды.

Осылайша, робототехника көмегімен физикалық өлшеулердің нақтылығы жоғары екенін дәлелдей аламыз. Бұл оқыту сапасын арттырып қана қоймай, оқушылардың ғылымға деген қызығушылығын күшейтеді.

Дискуссия

Зерттеу нәтижелері робототехника элементтерін физика сабақтарында қолдану оқу үдерісінің сапасын айтарлықтай жақсартатынын көрсетті. Біріншіден, робототехника құралдары физикалық құбылыстарды визуализациялап, олардың механизмін түсінуді жеңілдетті. Екіншіден, робототехника элементтерін қолдану білім алушылардың зерттеушілік дағдыларын дамытты. Олар тәжірибелерді өздері құрастырып, нәтижелерін талдады, бұл өз кезегінде олардың сыни ойлау қабілеттерін арттырды. Үшіншіден, робототехника физикалық эксперименттерді қызықты әрі интерактивті етті. Сауалнама нәтижелері бойынша білім алушылардың 94%-ы робототехника қолданылған сабақтардың дәстүрлі сабақтарға қарағанда дәлірек әрі пайдалы болғанын атап өтті.

Қорытынды

Робототехника элементтерін физика курсының демонстрациялық эксперименттерінде қолдану білім беру процесін дамытудың тиімді құралы болып табылады. Ол тек физика заңдарын түсіндіруді жеңілдетіп қана қоймай, білім алушылардың техникалық қызығушылықтарын, шығармашылық қабілетін және зерттеушілік дағдыларын арттырады.

Зерттеу нәтижелері робототехниканың физика курсына енгізілуі білім алушылардың оқу жетістіктерін жақсартуға ықпал ететінін дәлелдеді. Бұл жағдайда робототехника негіздерін білу жастар тәрбиесінің негізгі элементіне айналады және орта мектептің оқу бағдарламаларының мазмұнына енгізіледі деп болжауға негіз бар. Бірқатар елдерде мемлекеттік деңгейде тиісті шешімдер қабылданған. Мысалы, АҚШ пен Ұлыбританияның білім беру жүйелері үшін мектеп оқушыларын (тіпті мектеп жасына дейінгі балаларды) информатика және робототехника саласында мақсатты түрде оқыту, олардың әртүрлі техникалық жобаларды жүзеге асыруға практикалық дайындығын қалыптастыру маңызды болып табылады [12]. Болашақта робототехника элементтерін қолдануды кеңейту үшін арнайы әдістемелік нұсқаулықтар әзірлеп, оқытушыларды осы технологияларды қолдануға үйрету қажет. Бұл инновациялық оқыту түрі физика пәнін оқытуда білім сапасын жаңа деңгейге көтеруге мүмкіндік береді.

Пайдаланылған дерекздердің тізімі

[1] Құрбанбеков Б.Ә. Физиканы оқытуда білімгерлердің тәжірибелік-зерттеушілік құзыреттілігін қалыптастырудың дидактикалық шарттары мен қағидалары // Қазақстанның ғылымы мен өмірі, № 3(46), 2017. Б.54-59. DOI: [10.51889/2020-4.1728-7901.20%20%20](https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.20%20%20)

[2] Қарабасова Г.Б. Цифрлық технологияларды қолдану негізінде физика курсының демонстрациялық эксперименттерін жетілдіру // Абай атындағы ҚазҰПУ Хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы. № 4(72), 2020, Б.131–136. URL: <https://bulletin-phmath.kaznpu.kz/index.php/ped/article/view/105/357>

[3] Закураев Р.А. Робототехнические конструкторы для выполнения исследовательских проектов по физике // Вестник науки, 2023, С.239-243. – М.: МГУ. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/robototekhnicheskie-konstruktory-dlya-vypolneniya-issledovatel'skih-proektov-po-fizike/viewer>

[4] Қазақбаева Г.Қ. STEAM білім берудің математика сабақтарында қолданылуы // Ж.Ташенов атындағы №23 ІТ мектеп-лицей, Түркістан қаласы. Б.40-44. URL: https://uba.edu.kz/storage/app/media/Journal/12-letka_2_2021.pdf

[5] Блинов Д.М. Лабораторная работа по физике «Изучение прямолинейного равноускоренного движения без начальной скорости» с использованием робототехнического конструктора LEGO MINDSTORMS EDUCATION EV3. Информатика в школе. 2024;(4):15-22. <https://doi.org/10.32517/2221-1993-2024-23-4-15-22>

[6] Келесбаев К., Раманкулов Ш., Нуризинова М., Курбанбеков Б., Паттаев А. Подход STEAM к физике: влияние использования элементов робототехники LEGO на академические достижения на лабораторных занятиях. // Международный журнал инновационных исследований и научных исследований. Том 8 № 1 (2025), С.469–480. <https://doi.org/10.53894/ijirss.v8i1.4180>

[7] Zhussipbekova Sh., Alimbekova G., Rystygulova V., Shadinova K., Adilbekova A. Methodology of teaching the fundamentals of electrical engineering and electronics for the pharmaceutical production technology specialty // Computer Applications in Engineering Education. ISSN 1061-3773, Vol. 31, Issue number 3. May, 2023. Pages 574-582. DOI: <https://doi.org/10.1002/cae.22599>

[8] Рыстыгулова В.Б. Методическое руководство по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Введение в робототехнику». Методическое руководство рекомендовано Ученым Советом ИМФиИ КазНПУ им. Абая от 25.04.2019 г. Протокол №9. – Алматы: КазНПУ им. Абая: «Ұлағат», 2022. – 36 с.

[9] Закирова Н.А., Аширов Р.Р. Физика: Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. – 2019. – Нұр-Сұлтан: «Арман-ІПВ» баспасы. – 272 б. [Электрондық ресурс]: URL: <https://okulyk.kz/fizika/405/>

[10] Башарұлы Р., Шүйіншіна Ш., Сейфоллина К. Физика: Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. – 2019. – Алматы: «Атамұра» баспасы. – 272 б. [Электрондық ресурс]: URL: <https://okulyk.kz/fizika/403/>

[11] Усенова М.Р. Физикадан зертханалық жұмыс. – 27.04.2018. [Электрондық ресурс]: URL: <https://infourok.ru/urok-fizikadan-zerthanali-zhmis-2941385.html>

[12] Ершов М.Г. Робототехника как объект изучения в курсе физики средней школы. - Педагогическое образование в России, 2015, – 9б. [Электрондық ресурс]:

URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/robototekhnika-kak-obekt-izucheniya-v-kurse-fiziki-sredney-shkoly/viewer>

References

[1] Kurbanbekov B.A. (2017) Fizikany okytuda bilimgerlerdin tazhiribelik-zertteushilik kuzyrettiligin kalypstasturdyn didaktikalyk sharttary men kagidalary [Didactic conditions and principles for the formation of students' practical and research competence in teaching physics]. Kazakstannyn gylymy men umiri, № 3(46), 54-59. (In Kazakh) <https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.20>

[2] Karabasova G.B.(2020) Cifirlyk tekhnologiyalarydy koldanu negizinde fizika kursynyn demonstraciyalik eksperimentterin zhetildiru [Improving demonstration experiments in the physics course based on the use of digital technologies]. Abaj atyndagy KazUPU Habarshysy. Fizika-matematika gylymdary seriyasy. № 4(72), 131–136. (In Kazakh) <https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.20>

[3] Zakuraev R.A. (2023) Robototekhnicheskie konstruktory dlya vypolneniya issledovatel'skih proektov po fizike [Robotic designers for the implementation of research projects in physics]. Vestnik nauki MGU, 239-243. (In Russian)

[4] Kazakbaeva G.K. (2021) STEAM bilim berudin matematika sabaktarynda koldanyluy [Applying STEAM education in mathematics lessons]. ZH.Tashenov atyndagy №23 IT mektep-licej, Tyrkistan kalasy. 40-44. (In Kazakh)

[5] Blinov D.M. (2024) Laboratornaya rabota po fizike «Izuchenie pryamolinejnogo ravnouskorennoogo dvizheniya bez nachal'noj skorosti» s ispol'zovaniem robototekhnicheskogo konstruktora LEGO MINDSTORMS EDUCATION EV3 [Laboratory work on physics "Study of rectilinear uniformly accelerated motion without initial velocity" using the robotic designer LEGO MINDSTORMS EDUCATION EV3]. Informatika v shkole. (4):15-22. (In Russian) <https://doi.org/10.32517/2221-1993-2024-23-4-15-22>

[6] Kelesbaev K., Ramankulov SH., Nurizinova M., Kurbanbekov B., Pattaev A. (2025) Podhod STEAM k fizike: vliyanie ispol'zovaniya elementov robototekhniki LEGO na akademicheskie dostizheniya na laboratornyh zanyatiyah [The STEAM approach to physics: the influence of the use of robotic LEGO elements on academic achievements in laboratory classes.]. Mezhdunarodnyj zhurnal innovacionnyh issledovaniy i nauchnyh issledovaniy. Tom 8 № 1, 469–480. (In Russian) <https://doi.org/10.53894/ijirss.v8i1.4180>

[7] Zhussipbekova Sh., Alimbekova G., Rystygulova V., Shadinova K., Adilbekova A.(2023) Methodology of teaching the fundamentals of electrical engineering and electronics for the pharmaceutical production technology specialty. Computer Applications in Engineering Education. Vol. 31, № 3. 574-582. (In English) <https://doi.org/10.1002/cae.22599>

[8] Rystygulova V.B. (2022) Metodicheskoe rukovodstvo po vypolneniyu laboratornyh rabot po discipline «Vvedenie v robototekhniku» [Methodical guide for performing laboratory work in the discipline "Introduction to robotics"]. Metodicheskoe rukovodstvo rekomendovano Uchenym Sovetom IMFiI KazNPU im. Abaya ot 25.04.2019 g. Protokol №9. KazNPU im. Abaya: «Ulagat», 36. (In Russian)

[9] Zakirova N.A., Ashirov R.R. (2019) Fizika: ZHalpy bilim беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық [Physics: Textbook for the 9th grade of a comprehensive school] . Nur-Sultan: «Arman-PV» baspasy. – 272. (In Kazakh)

[10] Basharuly R., SHuinshina SH., Sejfollina K.(2019) Fizika: ZHalpy bilim беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық [Physics: Textbook for the 9th grade of a comprehensive school]. Almaty: «Atamura» baspasy.– 272 . (In Kazakh)

[11] Usenova M.R.(2018) Fizikadan zerthanalyk zhymys [Physics laboratory work]. 27. (In Kazakh)

[12] Ershov M.G. (2015) Robototekhnika kak ob"ekt izucheniya v kurse fiziki srednej shkoly [Robotics as an object of study in the course of high school physics]. Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii, – 9. (In Russian)

Ш.Т. Шекербекова¹, А.Е. Сағымбаева¹, А.Е. Жаксылыков²,
Н.Е. Артықбаев¹, А.К. Нагметов^{1*}

¹ Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

² Торайғыров Университеті, Павлодар қ., Қазақстан

*e-mail: alibinagmetov@icloud.com

ПРОГРАММАЛАУДАН БАҒАЛАУ КРИТЕРИЙЛЕРІН ЖАСАУДАҒЫ GENAI ТЕХНОЛОГИЯСЫНЫҢ МҮМКІНДІКТЕРІ

Аңдатпа

Мақалада программалаудан студенттердің білімін бақылау тек теориялық білім деңгейін ғана емес, сонымен қатар студенттің практикалық дағдыларын, алгоритмдік ойлау қабілетін және программалау шешімдерінің тиімділігін бағалауға бағытталған деңгейлік тапсырмалар жүйесі қарастырылды. Сонымен қатар, бағалау критерийлерін құрастыруда GenAI (Generative Artificial Intelligence) технологиясының мүмкіндіктері жан-жақты сараланады. Зерттеу барысында репродуктивті, конструктивті және зерттеу сипатындағы тапсырмаларды бағалауға бағытталған объективті және бейімделген критерийлер жүйесін GenAI негізінде жасаудың жолдары ұсынылады. GenAI құралдары кодты автоматты тексеру, логикалық құрылымдарды сараптау, тест тапсырмаларын генерациялау және бағалау нәтижелерін талдауда тиімділік танытады. Сонымен қатар, оқытушының кәсіби рөлі бағалау мазмұнын анықтауда, GenAI ұсынған ұсыныстарды бейімдеуде және білім алушының даму деңгейіне сәйкес келетін шешім қабылдауда маңызды екені дәлелденді. Мақалада программалаудан деңгейлік тапсырмаларды бағалау критерийлері ұсынылып, GenAI технологиясы арқылы программалау білімін бағалаудың заманауи әдістемелік қырлары мен болашағы негізделді.

Түйін сөздер: программалау, репродуктивті тапсырма, конструктивті тапсырма, зерттеу сипатындағы тапсырма, бағалау критерийлері, GenAI.

Ш.Т. Шекербекова¹, А.Е. Сағымбаева¹, А.Е. Жаксылыков², Н.Е. Артықбаев¹, А.К. Нагметов¹

¹ Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

² Университет Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан

ВОЗМОЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИИ GENAI В РАЗРАБОТКЕ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Аннотация

В статье рассматривается система уровневых заданий для контроля знаний студентов по программированию, которая направлена не только на оценку теоретических знаний, но и на проверку практических навыков, алгоритмического мышления и эффективности программных решений. Также всесторонне анализируются возможности технологий GenAI (Generative Artificial Intelligence) при разработке критериев оценивания. Инструменты GenAI демонстрируют эффективность в автоматической проверке кода, анализе логических структур, генерации тестовых заданий и анализе результатов оценивания. Кроме того, доказано, что профессиональная роль преподавателя важна при определении содержания оценивания, адаптации предложений, сформированных GenAI, и принятии решений, соответствующих уровню развития обучающегося. В статье предлагаются критерии оценивания уровневых заданий по программированию, а также обосновываются современные методические аспекты и перспективы оценки знаний по программированию с использованием технологий GenAI.

Ключевые слова: программирование, репродуктивное задание, конструктивное задание, задание исследовательского характера, критерии оценивания, GenAI.

Sh.T. Shekerbekova¹, A.E. Sagymbaeva¹, A.E. Zhaksylykov², N.E. Artykbaev¹, A.K. Nagmetov¹

¹ Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

² Toraigyrov University, Pavlodar, Kazakhstan

POTENTIAL OF GENAI TECHNOLOGY IN DESIGNING PROGRAMMING ASSESSMENT CRITERIA

Abstract

The article discusses a system of level assignments for monitoring students' knowledge of programming, which is aimed not only at assessing theoretical knowledge, but also at testing practical skills, algorithmic thinking, and the effectiveness of software solutions. It also comprehensively analyzes the capabilities of GenAI (Generative Artificial Intelligence) technologies in developing assessment criteria. GenAI tools demonstrate efficiency in automatic code checking, logical structure analysis, test task generation, and assessment results analysis. In addition, it has been proven that the professional role of the teacher is important in determining the content of assessment, adapting proposals generated by GenAI, and making decisions that correspond to the level of development of the student. The article proposes criteria for assessing level assignments in programming, and substantiates modern methodological aspects and prospects for assessing programming knowledge using GenAI technologies.

Keywords: programming, reproductive task, constructive task, research task, evaluation criteria, GenAI.

Негізгі ережелер

Бағалау критерийлерін құру барысында программалаудан берілетін тапсырмалар үш деңгейге бөлінуі қажет: репродуктивті деңгейде студент дайын алгоритмді қолданады, конструктивті деңгейде өзінің алгоритмін құрастырады, ал зерттеу сипатындағы деңгейде күрделі жобалық тапсырмаларды орындайды. Осы деңгейлерге сәйкес бағалау көрсеткіштері нақты, өлшенетін және GenAI технологиялары арқылы тексеруге ыңғайлы болуы тиіс. ChatGPT бағалау критерийлерін әзірлеуге, кодты тексеруге және тапсырмаға кері байланыс беруге мүмкіндік береді. Олар бағалау үдерісінің бейімділігі мен дәлдігін арттырып, студент жұмысының сапасын автоматты түрде талдауға септігін тигізеді. Сонымен қатар, бағалаудың объективтілігі мен сенімділігін қамтамасыз ету үшін GenAI оқушының жұмысын эталонмен салыстырып, синтаксистік және логикалық қателерді анықтап, нақты ұсыныстар ұсына алады.

Дегенмен, бағалау нәтижелерін қабылдау және шешім шығару барысында оқытушының рөлі өте маңызды. GenAI технологиясы көмекші құрал ретінде қарастырылып, оқытушы тарапынан академиялық адалдық пен әдістемелік талаптарға сәйкес сараланып қолданылуы тиіс. Бұл – әсіресе шығармашылық және жобалық тапсырмаларды бағалауда аса өзекті. Сонымен бірге, GenAI технологиясын тиімді қолдану үшін оқытушыларға арнайы әдістемелік даярлық қажет, себебі олар бағалау құралдарын дұрыс бағыттап, педагогикалық мақсатқа сәйкес пайдалануы тиіс. Осылайша, GenAI технологиясының мүмкіндіктерін тиімді қолдану программалаудан деңгейлік тапсырмаларды бағалауды сапалы ұйымдастыруға мүмкіндік береді. Бірақ ол оқытушыны толық алмастырмай, керісінше, оның бағалау іс-әрекетін қолдайтын интеллектуалдық серіктес ретінде қарастырылуы қажет.

Кіріспе

Ақпараттық технологиялар саласы қазіргі уақытта қарқынды даму үстінде. Заманауи технологиялардың енгізілуі мен инновациялардың пайда болуы программалаушылар мен IT мамандарына сұраныстың артуына себеп болып отыр. Сондықтан да, қазіргі кезде ЖОО IT мамандарына заманауи программалау тілдерін, веб-программалау, деректерді талдау және машиналық оқыту сияқты т.б. курстарды өздерінің оқу бағдарламаларына енгізуде [1].

Осы ретте, программалаудан студенттердің меңгерген білімін сапалы әрі объективті түрде бағалау кәсіби дайындықтың ажырамас бөлігі болып табылады. Программалау – тек теориялық біліммен ғана шектелмейтін, практикалық дағдылар мен алгоритмдік ойлау қабілетін талап ететін пән болғандықтан, оның оқу үдерісіндегі нәтижесін бақылау кешенді тәсілді қажет етеді. Студенттердің программалау саласындағы жетістігін дәл және әділ

бағалау үшін тапсырмалардың күрделілік деңгейі, оларды шешу жолдары және нәтиженің тиімділігі ескерілуі тиіс.

GenAI технологиясы бұл процесті оңтайландырудың жаңа мүмкіндіктерін ұсынып отыр: ол тапсырмаларды автоматты түрде тексеріп, қателерді көрсетіп, студенттің шешу тәсілін талдауға мүмкіндік береді. Бұл программалау пәні бойынша бақылаудың сапасын арттырумен қатар, бағалаудың объективтілігін қамтамасыз етеді. Заманауи білім беру жүйесінде GenAI автоматтандырылған бағалау жүйелерін дамыту, студенттердің программа кодын тексеру және кері байланыс беру мүмкіндік береді [2]. GenAI құралдары кодты жіберуді талдау, жылдам кері байланысты қамтамасыз ету және жіберілген қателерді анықтау арқылы студенттердің жұмысын бағалай алады. GenAI көмегімен жаңа білім беру құралдары студенттің жеке қажеттіліктеріне және оқу қарқынына бейімделе отырып, жекелендірілген оқу тәжірибесін жеңілдетеді [3]. GenAI оқыту мен оқу нәтижелерін жақсартып отырып, программалаудан берілген тапсырмаларды шешуде көмек көрсете алатынын көрсетеді [4].

Дегенмен, GenAI студенттердің программалау дағдыларын арттыра алғанымен, кодты құрудағы біржақтылыққа және жауапты пайдалануды қамтамасыз ету үшін этикалық нұсқаулардың қажеттілігіне қатысты алаңдаушылық тудырады. Сондықтан да, GenAI студенттердің дәстүрлі программалау дағдыларын алмастырмай, толықтыратын құрал ретінде қарастырылуы керек, бұл оқытушының бақылауының маңыздылығы екендігіне әкеледі [5].

Программалаудан студенттердің білімін бақылау тек теориялық білім деңгейін емес, сонымен қатар студенттің практикалық дағдыларын, алгоритмдік ойлау қабілетін және программалау шешімдерінің тиімділігін бағалауға бағытталуы тиіс. Программалаудан білімді бақылау жүйесінің мазмұны мыналарды қамтиды:

- синтаксис, тілдің құрылымы, негізгі операторлар мен деректер типтерін білу;
- берілген тапсырмалар бойынша код жаза алу, программалау ортасында жұмыс істей білу;
- мәселені талдау, тиісті алгоритмді таңдай білу және оны тиімді түрде жүзеге асыру;
- стандартты емес шешімдерді ұсына отырып, кодтың тиімділігін жақсарту.

Сонымен қатар, бағалау тапсырмалары әртүрлі деңгейде болуы қажет: репродуктивті (дайын алгоритмді қолдану), конструктивті (өз алгоритмін құру), зерттеу сипатындағы (күрделі жобалық тапсырмалар).

Сондықтан программалаудан білімді бақылауға берілетін деңгейлік тапсырмалардың түрлерімен, бағалау критерийлерінің нақтылығымен және технологиялық құралдардың тиімді қолданылуымен сипатталуы қажет.

Зерттеу әдіснамасы

Бұл зерттеуде программалаудан деңгейлік тапсырмалар негізінде бағалау критерийлерін әзірлеу үдерісіне GenAI технологияларын ықпалдастырудың педагогикалық және технологиялық мүмкіндіктері қарастырылды. Әдіснамалық негіз ретінде конструктивтік оқыту теориясы, Блум таксономиясының цифрлық үлгісі және білімді бағалаудың критериялды тәсілі алынды. Сонымен қатар, GenAI құралдарының (мысалы, ChatGPT) нақты тапсырмаларға қалай қолданылғаны бақылау және сипаттамалық әдістер арқылы талданды.

Зерттеу барысында сапалы контент талдау және жобалау әдістері қолданылды. Атап айтқанда, репродуктивті, конструктивті және зерттеу сипатындағы тапсырмалар үшін критерийлердің үлгілері жасалып, олар GenAI құралдарымен сәйкестендірілді. Бағалау критерийлерінің дұрыстығы Python тіліндегі код мысалдары мен Flask веб-қосымшаларына берілген тапсырмалар арқылы тестіленіп, сараптамалық талдау жүргізілді.

Зерттеу нәтижелері

Программалаудан студенттердің білімін бақылаудың деңгейлік тәсілі олардың программалаудың тұжырымдамаларын түсінуін және алған теориялық білімдерін практикалық жағдайдарда қолдануын жан-жақты бағалауға мүмкіндік береді.

Репродуктивті деңгей (дайын алгоритмді қолдану). Бұл деңгейде студент берілген тапсырманы дайын алгоритмдер мен құралдарды қолдана отырып орындайды. Мұнда шешімдер дайын түрде беріледі, ал студент оларды орындайды. Репродуктивті тапсырмалар есептерді шешу үшін бұрыннан бар алгоритмдерді пайдалануды қамтиды. Бұл әдісті пайдаланудың мақсаты студенттердің программалаудың негізгі құрылымдарымен танысуына және олардың бастапқы программалау дағдыларын қалыптастыруға көмектеседі [6].

Мысал. *Сұрыптау алгоритмі*: Дайын алгоритмдермен таңдау арқылы сұрыптау.

```
def selection_sort(arr):
    for i in range(len(arr)):
        min_idx = i
        for j in range(i+1, len(arr)):
            if arr[j] < arr[min_idx]:
                min_idx = j
        arr[i], arr[min_idx] = arr[min_idx], arr[i]
    return arr
```

Репродуктивті деңгейде сұрыптау алгоритмінің (мысалы, selection_sort) бағалау критерийін ChatGPT-дің көмегімен жасауға болады (кесте 1).

Кесте 1. Сұрыптау алгоритмінің бағалау критерийілері

Алгоритмді дұрыс таңдау	Студент тапсырма шартына сәйкес сұрыптау алгоритмін дұрыс таңдай білуі керек. Сұрыптауға selection_sort алгоритмі қолданылғаны маңызды болуы
Синтаксистік қателердің болмауы	Бағдарламаның Python тілінің синтаксисіне сай жазылуы
Логикалық дұрыстық	Алгоритм әртүрлі кіріс деректерімен жұмыс істеп, дұрыс нәтиже беруі қажет
Функцияны дұрыс құрылымдау	Алгоритм функция түрінде құрылып, параметр алып, нәтиже қайтарады
Түсіндірмелердің болуы	Кодтың әр бөлігі түсіндірілген болуы керек, қандай операцияның қайда орындалып жатқанын түсіндіретін болуы керек.
Массивтермен жұмыс	Сұрыптау барлық массив элементтеріне толық қолданылуы тиіс
Нәтижені визуалды шығару	Сұрыпталған нәтиже пайдаланушыға түсінікті түрде көрсетілуі тиіс
Түсініктемелер беру	Кодтағы негізгі бөліктерге қысқаша түсініктеме беру бағаланады

Конструктивті тапсырмалар студенттерден алгоритмдерді құруды талап етеді. Бұл әдісті пайдаланудың мақсаты студенттердің шығармашылықпен ойлауын қалыптастыру және есептерді шешу әдістерін тереңірек түсінуге ынталандыру. Студенттерге инновация мен сыни ойлауды дамытып, нақты процесті оңтайландыру үшін бірегей алгоритмді жасау тапсырылуы мүмкін [7]. Бұл деңгейде студент қандай да бір тапсырманы шешу үшін өз алгоритмін құрады. Бұл өз алдына жаңалық енгізуді немесе белгілі бір алгоритмдерді қолдануды талап етеді, бірақ бұл деңгейдің тапсырмасын орындағанда студенттің жаңа шешімдер мен тәсілдерді ойлап табу маңызды болып табылады.

Мысал. *Қарапайым калькулятор құру*. Студент математикалық амалдарды орындауға арналған калькулятор құрады, калькулятор қолданушының енгізген деректерін қабылдайды және оларды өңдейді.

```
def calculator():
    print("Қарапайым калькулятор")
    num1 = float(input("Бірінші санды енгізіңіз: "))
    operator = input("Операция таңдау (+, -, *, /): ")
```

```

num2 = float(input("Екінші санды енгізіңіз: "))
if operator == "+":
    return num1 + num2
elif operator == "-":
    return num1 - num2
elif operator == "*":
    return num1 * num2
elif operator == "/":
    return num1 / num2
else:
    return "Қате операция"
    
```

Бағалау критерийлері тапсырманың логикасын, синтаксистік дұрыстығын, қолданушымен өзара әрекеттесу сапасын, қате өңдеуді және құрылымдық ойлауды қамтуы қажет.

Жоғарыда келтірілген тапсырманы бағалау критерийін ChatGPT-дің көмегімен былай жасауға болады (кесте 2).

Кесте 2. Қарапайым калькулятор құру тапсырмасының бағалау критерийі

Студент қолданушыдан екі санды (num1, num2) енгізуді ұйымдастыра білуі керек. Бұл сандар нақты типте (float) жарияланып, input() арқылы қабылдануы қажет	- Айнымалы атаулары мағыналы; - Типтік түрлендіру (float()) қолданылған; - Қате енгізуді өңдеу қарастырылса – қосымша артықшылық
Қолданушыдан қандай операция орындағысы келетінін сұрап, оны енгізуге мүмкіндік береді (+, -, *, /)	- input() көмегімен операция таңдау мүмкіндігі бар; - Операторды енгізу кезінде бағыттаушы түсініктеме бар (мыс.: “Операция таңдау: +, -, *, /”)
Таңдалған операцияға сәйкес if, elif, else құрылымдары арқылы шарттық тексеру орындалады	- Әр арифметикалық операция (+, -, *, /) үшін бөлек шарт қарастырылған; - else блогы операцияның дұрыс еместігін өңдейді; - Логикалық қателер жоқ
Орындалатын операциялар математикалық жағынан нақты және дұрыс нәтижені қайтарады	- Әрбір амал өзіне тиесілі нәтиже қайтарады (return арқылы); - Айнымалылармен арифметикалық операциялар дұрыс орындалған.
Егер қолданушы екінші сан ретінде 0 енгізсе және / операциясын таңдаса, программа арнайы хабарлама беріп, қатені өңдейді	- if num2 == 0 шарты бар; - “0-ге бөлуге болмайды” деген хабарлама көрсетіледі; - Программа істен шықпай, қауіпсіз орындалады.
Егер қолданушы дұрыс емес оператор енгізсе (мыс., %, ^), программа “Қате операция” деген хабарлама беруі тиіс	- else блогы бар; - Қате енгізуді нақты және сыпайы өңдейді
Интерфейс қолданушыға нұсқаулық береді, түсінікті хабарламалар көрсетіледі	- Хабарламалар қазақша немесе нақты тілде жазылған; - Қолданушы не істеуі керектігін түсінеді; - Әр қадамда не сұралатыны нақты айтылған.
Программа синтаксистік қатесіз, соңына дейін орындалады	- Программа қате бермейді; - Барлық функциялар орындалады; - Код логикасы қарапайым әрі нақты

Зерттеу сипатындағы тапсырмалар (күрделі жобалық тапсырмалар) программалаудың тұжырымдамаларын кеңінен зерттеуді және қолдануды қамтитын күрделі жоба

тапсырмалары. Бұл әдісті пайдаланудың мақсаты студенттерді нақты әлемдегі қиындықтарға дайындайды және өз бетінше білім алуға ықпал етеді. Зерттеу сипатындағы тапсырмаларға студенттерден қауымдастық мәселелеріне арналған программалаық шешімдерді дайындау немесе инновациялық технологиялар бойынша зерттеулер жүргізуді талап ететін жобаларды жатқызуға болады [8]. Зерттеу сипатындағы тапсырмалар (күрделі жобалық тапсырмалар) тапсырмалары орындау барысында студент күрделі, көп аспектілі мәселелерді шешу үшін зерттеулер жүргізеді. Олар жаңа құралдар мен әдістерді іздестіреді, алгоритмдер мен шешімдер құрастырады, сол арқылы зерттеу немесе жобалық тапсырмаларды орындайды.

Мысалы. *Веб-қосымша құру*. Студент толыққанды веб-қосымша жасап шығады, мысалы, қолданушылардың тіркелу жүйесі, мәліметтер қорымен жұмыс істеу және қауіпсіздік шаралары ескеріледі.

```
from flask import Flask, render_template, request, redirect
app = Flask(__name__)
users = {}
@app.route('/register', methods=['GET', 'POST'])
def register():
    if request.method == 'POST':
        username = request.form['username']
        password = request.form['password']
        if username not in users:
            users[username] = password
            return redirect('/login')
        else:
            return 'Пайдаланушы аты бұрыннан бар!'
    return render_template('register.html')
@app.route('/login', methods=['GET', 'POST'])
def login():
    if request.method == 'POST':
        username = request.form['username']
        password = request.form['password']
        if users.get(username) == password:
            return 'Қош келдіңіз!'
        else:
            return 'Қате логин немесе пароль!'
    return render_template('login.html')
if __name__ == "__main__":
    app.run(debug=True)
```

Зерттеу сипатында деңгейдегі тапсырмаларды бағалауда күрделілік, жүйелік шешімдер мен инновация негізгі критерийлер болып табылады. Студенттердің өз алгоритмдері мен шешімдерін табуы, жаңа әдістер мен құралдарды қолдануы, және нәтиже сапасын бағалау маңызды. Сонымен қатар, қауіпсіздік, қолданушы интерфейсі және қателіктерді өңдеу сияқты аспектілер де есепке алынуы тиіс. Бұл тапсырманы бағалау критерийлері студенттің Flask фреймворкі негізінде веб-қосымша жасау тапсырмасын орындау сапасын бағалауға арналған. Қосымшада тіркелу, жүйеге кіру, мәліметтермен жұмыс және қарапайым қауіпсіздік шаралары қарастырылады. Бұл тапсырманы бағалау критерийін ChatGPT-дің көмегімен былай жасауға болады (кесте 3.)

Кесте 3. Веб-қосымша құру тапсырмасының бағалау критерийі

Қолданушы қарапайымдылығы және қолдануға ыңғайлылығы	интерфейсінің және қолдануға	register.html және login.html беттері қарапайым әрі түсінікті түрде безендірілген
Тіркелу функциясының дұрыс жұмыс істеуі		Пайдаланушы деректері дұрыс қабылданып, қайталанатын пайдаланушыға ескерту беріледі
Жүйеге кіру функциясының сенімділігі		Тіркелген пайдаланушы жүйеге кіре алады, қате енгізгенде дұрыс ескерту шығарылады
Мәліметтер құрылымын дұрыс пайдалану		users сөздігі арқылы деректерді сақтау логикасы дұрыс қолданылған
Функциялардың логикалық құрылымы		Кодтың логикалық құрылымы нақты, тиімді ұйымдастырылған (route, condition блоктары т.б.)
Қауіпсіздік шараларының қолданылуы		Қарапайым қауіпсіздік (бірдей логинді қайта енгізуге шектеу, парольдің тексерілуі) ескерілген
Flask кітапханасын дұрыс қолдану		Flask-тің негізгі компоненттері (route, request, render_template) дұрыс және тиімді пайдаланылған
Қателерді өңдеу және қолданушыға жауап қайтару		Қате логин/пароль немесе тіркелу кезіндегі хабарламалар нақты әрі түсінікті
Кодтың тазалығы мен құрылымы		Код ықшам, артықшылықтан ада, оқуға жеңіл
Қосымша функционал қосу (қосымша бонустық ұпай)		Мысалы, логин сессиясы, құпиясөзді хэштеу, logout функциясы қосылған болса

Программалаудан деңгейлік бақылау тапсырмаларын пайдалану ұтымды болғанымен, кейбір оқытушылар күрделі тапсырмаларға көп көңіл бөлу программалауды жаңадан үйренушілерге шамадан тыс әсер етіп, олардың оқу үдерісіне кедергі келтіруі мүмкін деп санайды. Программалаудан студенттердің орындаған репродуктивті, конструктивті және зерттеу сипатындағы деңгейлік тапсырмаларын бағалаудың критерийлері келтірілді (Кесте 4).

Кесте 4. Программалаудан деңгейлік тапсырмаларды бағалау критерийлері

Критерийлер	Репродуктивті деңгей	Конструктивті деңгей	Зерттеу сипатындағы деңгей
Алгоритмдер мен әдістердің күрделілігі	Дайын алгоритмдер пайдаланылады (мысалы, Bubble Sort, Евклид алгоритмі)	Студент өз алгоритмдерін құрады (мысалы, Insertion Sort, калькулятор құру)	Күрделі және көпқырлы алгоритмдер мен шешімдер (мысалы, Random Forest, Web қосымшалар)
Тапсырманың күрделілігі	Тапсырмалар қарапайым және дайын алгоритмдермен шешілетін болады.	Тапсырмалар орташа күрделілікке ие және студенттер алгоритмдерді өз бетінше құрастырады.	Тапсырмалар күрделі, зерттеуді және жаңа әдістерді қолдануды талап етеді.
Қолданылатын құралдар мен әдістер	Дайын құралдар мен кітапханалар қолданылады.	Студенттің өзінің ойлап тапқан әдістері мен құралдары қолданылады.	Күрделі зерттеу әдістері, жаңа құралдар мен әдістер қолданылуы мүмкін (мысалы, машинамен оқыту).
Құрылымдық деңгей	Кодты түсінбеу немесе толық	Кодтың құрылымдық жағынан тиімділігі мен логикасы маңызды.	Кодтың күрделілігі жоғары, құрылымның

	<i>орындамау мүмкіндігі өте аз.</i>		<i>дұрыс және тиімді ұйымдастырылуы қажет.</i>
<i>Түсініктемелер мен құжаттама</i>	<i>Түсініктемелер мен құжаттама көбінесе қажет емес, себебі код дайын күйінде беріледі.</i>	<i>Кодты түсіндіру және түсініктемелер беру маңызды.</i>	<i>Жоба мен зерттеу нәтижелері туралы толық құжаттама және түсініктеме қажет.</i>
<i>Жаңа шешімдер мен тәсілдер</i>	<i>Жаңа шешімдер мен тәсілдер енгізілмейді.</i>	<i>Студент жаңа алгоритмдер мен шешімдерді өзі табады.</i>	<i>Жаңа шешімдер мен инновациялар ұсынылады, зерттеу жүргізіледі.</i>
<i>Қателіктерді өңдеу</i>	<i>Қателіктер өте сирек кездеседі, себебі алгоритм дайын түрде беріледі.</i>	<i>Қателіктерді дұрыс өңдеу, мысалы, қате енгізулер мен нәтижелер үшін шарттар мен тексерулер қосу маңызды.</i>	<i>Қателіктерді болдырмау үшін кеңейтілген қателіктерді өңдеу жүйесі мен тексерулер қолданылады.</i>
<i>Қолданушы интерфейсі</i>	<i>Қолданушы интерфейсі қарапайым болады (көп жағдайда жоқ).</i>	<i>Қолданушы интерфейсі студенттің өз тарапынан құрастырылады.</i>	<i>Қолданушы интерфейсі ыңғайлы, жүйенің тиімділігіне байланысты жоғары сапалы болуы тиіс.</i>
<i>Қолданушы енгізу және нәтижелер</i>	<i>Қолданушы енгізуі қарапайым, нәтижелер нақты көрсетіледі.</i>	<i>Қолданушыдан алынатын мәліметтер мен нәтижелер түсінікті болуы қажет.</i>	<i>Қолданушыдан алынатын деректердің сапасы мен нәтижелердің күрделілігі жоғары болуы мүмкін.</i>
<i>Шешімдердің қолданылуы</i>	<i>Алгоритмдер тек белгілі бір жағдайларда қолданылады.</i>	<i>Алгоритмдер кең ауқымды мәселелерге арналған, бірақ көбінесе белгілі бір жағдайларда қолданылады.</i>	<i>Алгоритмдер түрлі салаларға қатысты және кең ауқымды проблемаларды шешуге арналған.</i>

Дискуссия

Алдағы уақытта GenAI технологиясы бұл үдерісті оңтайландырудың жаңа мүмкіндіктерін ұсына алады, ол тапсырмаларды автоматты түрде тексеріп, қателерді көрсетіп, студенттің шешу тәсілін талдауға мүмкіндік береді. Бұл программалау пәні бойынша бақылаудың сапасын арттырумен қатар, бағалаудың объективтілігін қамтамасыз етеді.

Сонымен, программалаудан студенттердің білімді бақылауда деңгейлік тапсырмаларды қолдануды негіздей келе және жасалған деңгейлік бағалау критерийлерін жасау нәтижесінде репродуктивті, конструктивті және зерттеу сипатындағы (күрделі жобалық тапсырмалар) тапсырмалардың ChatGPT-дің көмегімен бағалау критерийлерін оқытушының өзі тексеріп отырғаны жөн деп саналады.

Себебі, GenAI-дың (мысалы, ChatGPT, Claude, Gemini) жасаған бағалау критерийінің дұрыстығын тексеру үшін бірнеше әдістемелік және практикалық әдістерді қолдануға болады. Алдымен, бағалау критерийлері программалауды оқу мақсаттарына сәйкес келуі, сонымен қатар студенттің білім деңгейін (репродуктивті, конструктивті, зерттеушілік) нақты өлшей алуы қажет. GenAI құрған критерийлерді оқытушының құрған критерийлерімен, академиялық еңбектердегі ұқсас бағалау жүйелерімен (мысалы, Bloom's Taxonomy, SOLO Taxonomy) салыстыру. Содан кейін пилоттық тестілеу жүргізу керек, ол үшін бірқатар студенттерге бірдей тапсырма беріп, оны GenAI жасаған критериймен және оқытушы жасаған бағалау критерийлерімен бағалап көріп, екі бағалау арасындағы сәйкестік деңгейін салыстырған жөн. Рефлексия жасау қажет, студенттермен кері байланыс GenAI ұсынған критерийді жетілдіруге

мүмкіндік береді. Бір тапсырманы бірнеше рет түрлі формада беріп (басқа сөздермен жазып, немесе кішігірім өзгеріс енгізіп), GenAI әр жолы бірдей не ұқсас баға бере ала ма, тексеріп көрген жөн.

Қорытынды

Зерттеу нәтижелері бойынша, программалаудан білімді бағалаудың тиімділігі тапсырмалардың мазмұны мен бағалау критерийлерінің нақтылығына тікелей байланысты. Зерттеу барысында GenAI технологиясының мүмкіндіктері репродуктивті, конструктивті және зерттеу сипатындағы деңгейлік тапсырмалардың бағалау критерийлерін құрастыру оң әсер ететіні анықталды. GenAI құралдары: репродуктивті деңгейде – дайын кодты түсіндіру, синтаксистік қатені табу, қарапайым тапсырмаларды тексеру; конструктивті деңгейде – алгоритмдік шешімдерді сараптау, логиканың дұрыстығын бағалау; зерттеушілік деңгейде – күрделі жобалық шешімдер мен архитектуралық құрылымдарды талдау мен салыстыру; сияқты функцияларды орындай отырып, тапсырмаларға дәл және бейімделген кері байланыс беруге қабілетті.

Сонымен қатар, GenAI ұсынған мүмкіндіктерді сараптап, оларды оқу мақсатына сәйкестендіру, критерийлерді оқытудың нақты контексіне бейімдеуде оқытушының рөлі басым. Оқытушы бағалаудың мазмұндық жағын анықтайтын, білім алушының даму деңгейін диагностикалауға және GenAI көмегін тиімді бағыттайтын негізгі тұлға болып табылады.

Қорытындылай келе, программалаудан деңгейлік тапсырмаларға негізделген бағалау критерийлерін GenAI технологиясы арқылы құру болашақ цифрлық педагогиканың өзекті бағыты болып табылады. Бұл тәсіл білім беру сапасын арттырып қана қоймай, оқытуды дараландыру, бейімдеу және цифрлық сауаттылықты қалыптастыруда маңызды рөл атқарады.

АЛҒЫС

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитеті қаржыландырды (Грант № AP23490592)

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. – “Introduction to Algorithms” (3rd Edition). QA76.6.I5858 2009 005.1—dc22, ISBN 978-0-262-03384-8, p 1313.

[2] Сағымбаева А.Е., Жақсылықов А.Е., Шекербекова Ш.Т., Жамкеева А.Б. Генеративті жасанды интеллект технологиясының программалаудан ЖОО студенттерінің білімін бақылаудағы рөлі. ҚазҰПУ Хабаршы «Физика-математика ғылымдары» серия. – № 3 (87). – 2024. Б. 373-384. <https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.87.3.027>

[3] Silva, T. L. da, Vidotto, K. N. S., Tarouco, L. M. R., & Silva, P. F. da. (2024). Inteligência artificial generativa no ensino de programação: um mapeamento sistemático da literatura. *Renote*, 22(1), 262–272. <https://doi.org/10.22456/1679-1916.141553>

[4] NguyenDuc, A., Cabrero-Daniel, B., Arora, C., Przybyłek, A., Khanna, D., Herda, T., Rafiq, U., Melegati, J., Guerra, E., Kemell, K., Saari, M. Y., Zhang, Z., Lê, H., Quan, T., & Abrahamsson, P. (2023). *Generative Artificial Intelligence for Software Engineering - a Research Agenda*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4622517>

[5] Atemkeng, M., Hamlomo, S., Welman, B., Oyentunji, N., Ataei, P., & Fendji, J. L. E. K. (2024). *Ethics of Software Programming with Generative AI: Is Programming without Generative AI always radical?* <https://doi.org/10.48550/arxiv.2408.10554>

[6] Ala-Mutka, K. (2005). A Survey of Automated Assessment Approaches for Programming Assignments. *Computer Science Education*, 15(2), 83–102. <https://doi.org/10.1080/08993400500150747>

[7] Nayak, S., Agarwal, R., & Khatri, S. P. (2022). Automated Assessment Tools for grading of programming Assignments: A review. *International Conference on Computational Collective Intelligence*, 1–4. <https://doi.org/10.1109/ICCCI54379.2022.9740769>

[8] Rajesh, S., Rao, V. R., & Thushara, M. G. (2024). *Comprehensive Investigation of Code Assessment Tools in Programming Courses*. <https://doi.org/10.1109/i2ct61223.2024.10543863>

References

- [1] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. – “Introduction to Algorithms” (3rd Edition). QA76.6.I5858 2009 005.1—dc22, ISBN 978-0-262-03384-8, p 1313.
- [2] Sagymbaeva A.E., Zhaqsylyқov A.E., Shekerbekova Sh.T., Zhamkeeva A.B. (2024) Generativti zhasandy intellekt tehnologijasynyn programmalaudan ZhOO studentterinin bilimin bakylaudagy roli [The role of technologies of generative artificial intelligence in the control of knowledge of university students in programming]. *KazUPU Habarshy «Fizika-matematika gylymdary» serija. № 3 (87). 373-384.*
<https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.87.3.027> (In Kazakh)
- [3] Silva, T. L. da, Vidotto, K. N. S., Tarouco, L. M. R., & Silva, P. F. da. (2024). Inteligência artificial generativa no ensino de programação: um mapeamento sistemático da literatura. *Renote*, 22(1), 262–272.
<https://doi.org/10.22456/1679-1916.141553>
- [4] NguyenDuc, A., Cabrero-Daniel, B., Arora, C., Przybyłek, A., Khanna, D., Herda, T., Rafiq, U., Melegati, J., Guerra, E., Kemell, K., Saari, M. Y., Zhang, Z., Lê, H., Quan, T., & Abrahamsson, P. (2023). *Generative Artificial Intelligence for Software Engineering - a Research Agenda.*
<https://doi.org/10.2139/ssrn.4622517>
- [5] Atemkeng, M., Hamlomo, S., Welman, B., Oyentunji, N., Ataei, P., & Fendji, J. L. E. K. (2024). *Ethics of Software Programming with Generative AI: Is Programming without Generative AI always radical?*
<https://doi.org/10.48550/arxiv.2408.10554>
- [6] Ala-Mutka, K. (2005). A Survey of Automated Assessment Approaches for Programming Assignments. *Computer Science Education*, 15(2), 83–102. <https://doi.org/10.1080/08993400500150747>
- [7] Nayak, S., Agarwal, R., & Khatri, S. P. (2022). Automated Assessment Tools for grading of programming Assignments: A review. *International Conference on Computational Collective Intelligence*, 1–4. <https://doi.org/10.1109/ICCCI54379.2022.9740769>
- [8] Rajesh, S., Rao, V. R., & Thushara, M. G. (2024). *Comprehensive Investigation of Code Assessment Tools in Programming Courses.* <https://doi.org/10.1109/i2ct61223.2024.10543863>