

Н.С. Жанабергенова^{1,2} *, А.М. Темирханова³ 

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,

²Қазақ ұлттық спорт университеті, Астана қ., Қазақстан

³Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан

*e-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com

КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ХАРДИ ТИПТІ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Аңдатпа

Квазисызықты Харди типті операторларға өзек енгізу маңызды бағыт болып табылады. Дегенмен, өзектің жалпы түрі үшін нәтижелер алу анықталмаған мәселе, сондықтан зерттеушілер белгілі бір өзек кластары үшін Харди типті операторларын зерттейді. Біз [21] жұмыста басталған зерттеулерді жалпылай отырып, O_1^- және O_1^+ кластарына жататын квазисызықты интегралдық Харди типті теңсіздіктердің $0 < r < \infty, 1 < p \leq q < \infty$ параметрлік диапазондарындағы орындалу критерийлері алынды. Яғни, салмақты Лебег кеңістіктеріндегі өзекті Харди операторы қатысқан квазисызықты операторлардың шенелімділігі үшін қажетті және жеткілікті шарттары анықталды. Бұл жалпыланған бисызықты операторларды зерттеуге мүмкіндік береді. Атап айтқанда, өзегі бар квазисызықты теңсіздіктердің нәтижелері бисызықты теңсіздіктерді бағалау үшін балама дәлелдемелер ұсынады. Бұл зерттеу функционалдық талдаудың интегралдық операторлар теориясына дамытады және дифференциалдық тендеулердің шешімдерін табуда қолданыс табуы мүмкін.

Түйін сөздер: Харди теңсіздік, салмақты Лебег кеңістігі, салмақты функция, квазисызықты оператор.

Н.С. Жанабергенова^{1,2}, А.М. Темирханова³

¹Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана,

²Казахский национальный университет спорта, г.Астана, Казахстан

³Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ

Аннотация

Введение ядра в квазилинейные операторы типа Харди является важным направлением. Однако получение результатов для общего типа ядра является неопределенной проблемой, поэтому исследователи изучают операторы типа Харди для определенных классов ядер. Обобщая исследования, начатые в [21], мы получили критерии справедливости квазилинейных интегральных неравенств типа Харди, принадлежащих классам O_1^- и O_1^+ в диапазонах параметров $0 < r < \infty, 1 < p \leq q < \infty$. То есть были определены необходимые и достаточные условия справедливости квазилинейных операторов, содержащих ядерный оператор Харди в весовых пространствах Лебега. Это позволяет нам изучать обобщенные билинейные операторы. В частности, результаты квазилинейных неравенств с ядрами дают альтернативные доказательства для оценки билинейных неравенств. Это исследование вносит вклад в теорию интегральных операторов в функциональном анализе и может быть использовано при нахождении решений дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: неравенство Харди, весовые пространства Лебега, весовая функция, квазилинейный оператор.

N. Zhangabergenova^{1,2}, A. Temirkhanova³

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

²Kazakh National University of Sports, Astana, Kazakhstan

³L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

QUASILINEAR INTEGRAL HARDY-TYPE INEQUALITIES

Abstract

The introduction of a kernel into quasilinear Hardy-type operators is an important direction. However, obtaining results for the general type of kernel is an undefined problem, so researchers study Hardy-type operators for certain kernel classes. Generalizing the research started in [21], we obtained the criteria for the validity of quasilinear integral Hardy-like inequalities belonging to the classes O_1^- and O_1^+ in the parameter ranges $0 < r < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$. That is, necessary and sufficient conditions for the validity of quasilinear operators involving the kernel Hardy operator in weighted Lebesgue spaces were determined. This allows us to study generalized bilinear operators. In particular, the results of quasilinear inequalities with kernels provide alternative method for estimating bilinear inequalities. This study contributes to the theory of integral operators in functional analysis and can be used in finding solutions to differential equations.

Keywords: Hardy inequality, weighted Lebesgue space, weight function, quasilinear operator.

Кіріспе

Негізгі ережелер

Бұл жұмыста өзегі бар квазисызықты оператор қатысқан интегралдық Харди типті теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары параметрдің кейбір жағдайында алынды. Дәлелдеу барысында локализация әдісі қолданылады. Квазисызықты теңсіздіктер үшін алынған критерийлерді бисызықты Харди теңсіздіктерді сипаттау кезінде қолдануға болады. Сонымен қатар, нәтижелер функционалдық анализ теориясы, операторлар теориясы, гармоникалық анализ, дифференциалдық теңдеулер және спектралды операторлар теориясында қолданыс табуы мүмкін.

Классикалық Харди теңсіздігі, алғаш рет 20 ғасырдың басында Г.Х. Харди енгізген еді. Жылдар өте келе, бұл теңсіздіктер әртүрлі бағыттарда жалпыланды, көпөлшемді және дискреттік жағдайларға, сондай-ақ квазисызықты және бисызықты теңсіздіктер сияқты күрделі теңсіздіктерге дейін кеңейді.

Интегралдық Харди операторы

$$Hf(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (1)$$

және оның түйіндес жағдайының салмақты Лебег кеңістігінде шенелімділік критерийлері [1-3] және [4] сияқты еңбектерде алынған. Кейінгі жылдары (1) түріндегі $K(\cdot, \cdot)$ теріс емес өзекті операторлар белсенді зерттеле бастады. Дегенмен, мұндай оператордың жалпы түрі үшін шенелімділік критерийі анықталмаған проблема болып табылады, нәтижесінде зерттеушілер нақты шартты қанағаттандыратын өзектер класын енгізді. 1989-1990 жылдары Р. Ойнаров [5], сондай-ақ 1991 жылы оған тәуелсіз түрде американдық математиктер Р. Керман мен С. Блум [6] келесі шартты қанағаттандыратын өзекпен берілген (1) операторын зерттеді: барлық $0 < t \leq \tau \leq x < \infty$ айнымалылары үшін

$$d^{-1}(K(x, \tau) + K(\tau, t)) \leq K(x, t) \leq d(K(x, \tau) + K(\tau, t)) \quad (2)$$

шарт орындалатындай $d > 0$ табылады. Ал [7-9] жұмыстарда жалпыланған $O_n^\pm, n \geq 1$ өзектер класы таныстырылып, осы класқа жататын өзектер қатысқан интегралдық салмақты теңсіздіктер талданды. Сонымен қатар, (1) түріндегі операторлардың салмақты бағалауы Морри тәріздес кеңістікте де анықталды [10, 11]. [10] жұмыста (1) операторының көпөлшемді жағдайының Лебег кеңістігінен локальды Морри тәріздес кеңістікке шенелімділігі алынды

және бұл шенелімділікті сипаттайтын теңсіздік квазисызықты операторлар үшін салмақты теңсіздікке эквивалентті екенін көрсетті. Осы зерттеуден кейін интегралдық квазисызықты Харди типті операторлардың салмақты бағалаулары маңызды рөл атқара бастады, квазисызықты операторларға деген қызығушылық артты (мысалы, [12-16] қараңыз).

Бұл мақалада біз (1) интегралдық Харди операторының кеңейтілген түрі өзек қатысқан квазисызықты операторды қарастырамыз. Қарастырылып отырған мәселе келесідей тұжырымдалады: Айталық $0 < r, q, p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ және $I = (0, \infty)$. w, u және v - I аралығында өлшенетін және локальды интегралданатын теріс емес функциялар болсын, яғни оларды салмақты функциялар дейміз.

$f \geq 0$ үшін келесідей салмақты теңсіздіктерді қарастырамыз

$$\left(\int_0^\infty u(x) \left(\int_0^x \left(\int_0^t K(t,s)f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3)$$

$$\left(\int_0^\infty u(x) \left(\int_x^\infty \left(\int_t^\infty K(s,t)f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4)$$

мұндағы $K(\cdot, \cdot) \geq 0$ өзектері $O_1^\pm$ кластарына жатады. Осы кластардың анықтамаларын берейік.

Анықтама 1. $K(\cdot, \cdot)$ теріс емес өлшемді функциясы $\{(t,s), 0 < s \leq t < \infty\}$ жиынында анықталған және екінші айнымалы бойынша өспейтін болсын. $K(t,s)$ функциясы O_1^- класына жатады дейміз, егер $U(\cdot)$ және $Q(\cdot, \cdot)$ теріс емес өлшемді функциялары және $d \geq 1$ тұрақтысы табылып, барлық $t, \tau, s: 0 < s \leq \tau \leq t < \infty$ үшін

$$d^{-1}(K(t,\tau) + U(t)Q(\tau,s)) \leq K(t,s) \leq d(K(t,\tau) + U(t)Q(\tau,s)) \quad (5)$$

орындалса.

Анықтама 2. $K(\cdot, \cdot)$ теріс емес өлшемді функциясы $\{(t,s), 0 < s \leq t < \infty\}$ жиынында анықталған және бірінші айнымалы бойынша кемімейтін болсын. $K(t,s)$ функциясы O_1^+ класына жатады дейміз, егер $V(\cdot)$ және $R(\cdot, \cdot)$ теріс емес өлшемді функциялары және $d \geq 1$ тұрақтысы табылып, барлық $t, \tau, s: 0 < s \leq \tau \leq t < \infty$ үшін

$$d^{-1}(R(t,\tau)V(s) + K(\tau,s)) \leq K(t,s) \leq d(R(t,\tau)V(s) + K(\tau,s)) \quad (6)$$

орындалса.

[17–21] жұмыстарында (3) және (4) теңсіздіктерінің орындалу критерийлері $K(\cdot, \cdot) \geq 0$ өзектері (2) шартты қанағаттандырған кезде табылған. Бұл жұмыстарда дәлелдеу кезінде u салмақ функциясына тәуелді көмекші функцияны қолданады. [22] жұмысында бұл мәселе басқаша әдіспен зерттелген, яғни параметрдің $1 < r < q < \infty$ және $1 < p < \infty$ жағдайлары үшін көмекші функциясыз айқын критерийлер алынған. Ал [23] мақалада параметрдің $0 < r < \infty, 0 < q < p < \infty$ жағдайында

$$\left(\int_0^\infty u(x) \left(\int_0^x \left(\int_t^\infty K(s,t)f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\int_0^\infty u(x) \left(\int_x^\infty \left(\int_0^t K(t,s)f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

түріндегі теңсіздіктердің орындалу шарттары өзектері O_1^- және O_1^+ классына жатқан кезде алынған. Жұмыстың мақсаты [21] жұмыста қолданған әдіспен (5) немесе (6) шарттарды қанағаттандыратын $K(\cdot, \cdot) \geq 0$ өзектері бар (3) және (4) квазисызықты теңсіздіктерді параметрдің $0 < r < \infty, 1 < p \leq q < \infty$ жағдайында сипаттау.

Зерттеу әдіснамасы

Негізгі теоремаларды дәлелдеу үшін алдын ала белгілі екі салмақты Харди типті теңсіздіктердің тұжырымдары мен нәтижелері, матрицаның қасиеттері, Минковский теңсіздігі және басқа да классикалық теңсіздіктер қолданылады.

$L_{p,v}(I)$ арқылы I аралығында анықталған барлық f өлшемді функциялардан тұратын және

$$\|f\|_{p,v,I} \equiv \|f\|_{p,v} = \begin{cases} \left(\int_I v(t)|f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname{esssup}_{t \in I} v(t)|f(t)|, & p = \infty \end{cases}$$

функционал ақырлы болатын кеңістікті белгілейік. [21] жұмыста келтірілген бүркеуші тізбектің анықтамасын берейік:

Анықтама 3. $\{x_k\} \subset I$ өспелі тізбек I аралығын бүркеуші тізбек деп аталады, егер $k \rightarrow -\infty$ кезде $x_k \rightarrow 0$ және $k \rightarrow \infty$ кезде $x_k \rightarrow \infty$ үшін $\cup_k [x_k, x_{k+1}) = I$ немесе $\{x_k\} = \{x_k\}_{k=n}^m$ және $x_{n-1} = 0, x_{m+1} = \infty$.

Сонымен қатар, төмендегі Харди типті операторлардың нормалары қажет болады:

$$H_{r,p}^-(\alpha, \beta) = \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\int_\alpha^\beta \left(\int_t^\beta K(s,t)f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{1}{r}}}{\|f\|_{p,v,(\alpha,\beta)}},$$

$$H_{r,p}^+(\alpha, \beta) = \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^t K(t,s)f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{1}{r}}}{\|f\|_{p,v,(\alpha,\beta)}}$$

мұндағы $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$.

Бағалау процесінде келесі элементар теңсіздікті қолданылады:

Егер $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$, онда

$$\sum_{i=1}^k a_i^\alpha \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^\alpha, \quad \alpha \geq 1. \quad (7)$$

Келісім: $E \ll F$ белгісі p, q және r параметрлеріне тәуелді C тұрақтысымен $E \leq CF$ білдіреді. Сонымен қатар, $E \approx F$ дегеніміз $E \ll F \ll E$ екіжақты бағалауы.

Ескерту: Анықтама 1 және Анықтама 2-дегі $Q(\cdot, \cdot)$ және $R(\cdot, \cdot)$ функциялары (2) шартты қанағаттандырады, яғни екінші айнымалысы бойынша өспейтін және бірінші айнымалысы бойынша кемімейтін функциялар.

Зерттеу нәтижелері

Келесі шамаларды енгізейік:

$$\begin{aligned}
 A_1^+ &= \sup_{z>0} \left(\int_0^z u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} H_{r,p}^-(z, \infty), \\
 A_2^+ &= \sup_{z>0} \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty K^{p'}(s, z) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}, \\
 A_3^+ &= \sup_{z>0} \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z Q^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty U^{p'}(s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}, \\
 A_4^+ &= \sup_{z>0} \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z V^r(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty R^{p'}(s, z) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}, \\
 A_5^+ &= \sup_{z>0} \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z K^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}.
 \end{aligned}$$

Теорема 1. Айталық $0 < r < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$ және $K(\cdot, \cdot)$ өзегі O_1^- класына жатсын. Онда (4) салмақты теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $A^+ = \max\{A_1^+, A_2^+, A_3^+\} < \infty$. Сонымен қатар, $A^+ \approx C$, мұндағы C - (4) теңсіздігінің оптималды тұрақтысы.

Теорема 2. Айталық $0 < r < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$ және $K(\cdot, \cdot)$ өзегі O_1^+ класына жатсын. Онда (4) салмақты теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $\tilde{A}^+ = \max\{A_1^+, A_4^+, A_5^+\} < \infty$. Сонымен қатар, $\tilde{A}^+ \approx C$, мұндағы C - (4) теңсіздігінің оптималды тұрақтысы.

Теорема 1 тұлжысының дәлелдеуі. Жеткіліктілігі. Айталық $A^+ < \infty$ болсын. (4) салмақты теңсіздік орындалатынын көрсетеміз. $\int_0^\infty f(s) ds < \infty$ болатындай $0 \leq f$ болсын.

$$\int_{x_k}^\infty \left(\int_t^\infty K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt = 2^{-r(k-1)}$$

орындалатындай $\{x_k\}$ – бүркеуші тізбек болсын. (4) теңсіздігінің сол жағын J деп белгілеп, оны келесідей бағалаймыз

$$\begin{aligned}
 J &= \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_x^\infty \left(\int_t^\infty K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\sum_k 2^{-q(k-1)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq 4^q \left(\sum_k 2^{-q(k+1)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Әрі қарай r параметрін екі жағдайға бөліп, келесі өрнектерді қарастырайық:

$1 \leq r < \infty$ үшін

$$\begin{aligned}
 2^{-(k+1)} &= 2^{-k} - 2^{-(k+1)} \\
 &= \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \left(\int_t^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} - \left(\int_{x_{k+2}}^{\infty} \left(\int_t^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_t^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_t^{x_{k+2}} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &\quad + \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_{x_{k+2}}^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

$0 < r < 1$ кезде

$$\begin{aligned}
 2^{-r(k+1)} &= \frac{(2^{-rk} - 2^{-r(k+1)})}{2^r - 1} \\
 &= \frac{1}{2^r - 1} \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \left(\int_t^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt - \int_{x_{k+2}}^{\infty} \left(\int_t^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{2^r - 1} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_t^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right) \\
 &\ll \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_t^{x_{k+2}} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt + \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_{x_{k+2}}^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt. \quad (10)
 \end{aligned}$$

(8) теңсіздігіне (9) және (10) өрнектерін қойып, келесіні аламыз:

$$\begin{aligned}
 J &\ll \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_t^{x_{k+2}} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\quad + \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_{x_{k+2}}^{\infty} K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} = J_1 + J_2. \quad (11)
 \end{aligned}$$

J_1 бағалау үшін $H_{r,p}^-(x_{k+1}, x_{k+2})$ шамасының анықтамасын қолданамыз және $\frac{q}{p} \geq 1$ шартын ескере отырып, (7) теңсіздігі бойынша келесі қорытындыға келеміз:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left(\int_t^{x_{k+2}} K(s,t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(J_{r,p}^-(x_{k+1}, x_{k+2}) \right)^q \|f\|_{p,v,(x_{k+1}, x_{k+2})}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \sup_k \left(\int_0^{x_{k+1}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^-(x_{k+1}, \infty) \left(\sum_k \left(\|f\|_{p,v,(x_{k+1}, x_{k+2})}^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \sup_{z>0} \left(\int_0^z u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} H_{r,p}^-(z, \infty) \left(\sum_k \|f\|_{p,v,(x_{k+1}, x_{k+2})}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_1^+ \|f\|_{p,v}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Ал J_2 бағалау үшін өзекке қойылған шартты қолданып, төмендегідей екі шама аламыз:

$$\begin{aligned}
 J_2 &\leq \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} w(t) dt \left(\int_{x_{k+2}}^{\infty} K(s, x_{k+2}) f(s) ds \right)^r \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} Q^r(x_{k+2}, t) w(t) dt \left(\int_{x_{k+2}}^{\infty} U(s) f(s) ds \right)^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\ll \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \left(\int_{x_{k+2}}^{\infty} K(s, x_{k+2}) f(s) ds \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &+ \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} Q^r(x_{k+2}, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \left(\int_{x_{k+2}}^{\infty} U(s) f(s) ds \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = J_{21} + J_{22}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

J_{21} келесі түрде жазайық:

$$J_{21} = \left(\int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} K(s, x) f(s) ds \right)^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}},$$

бұл жерде

$$d\mu(x) = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(y) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \delta(x - x_{k+2}) dy$$

және $\delta(\cdot)$ - дельта-функция. J_{21} -дегі өзек (5) шартын қанағаттандырады сондықтан [7] жұмыста келтірілген өзегі бар интегралдық оператордың шенелімділік критерийін қолданып келесі теңсіздікті аламыз:

$$J_{21} \leq \max\{A_{21}, A_{22}\} \|f\|_{p,v}, \quad (14)$$

мұндағы A_{21}, A_{22} шамалары келесідей анықталған:

$$A_{21} = \sup_{z>0} \left(\int_0^z d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty K^{p'}(s, z) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_{22} = \sup_{z>0} \left(\int_0^z Q^q(z, x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty U^{p'}(s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Келесі интегралды қарастырайық:

$$\begin{aligned} \int_0^z d\mu(x) &= \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \\ &\leq \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_x^z w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \leq \int_0^z u(x) \left(\int_x^z w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx, \end{aligned}$$

бұл

$$A_{21} \leq A_2^+. \quad (15)$$

дегенді береді. Енді келесі интегралды бағалайық:

$$\begin{aligned} \int_0^z Q^q(z, x) d\mu(x) &= \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} Q^q(z, x_{k+2}) \\ &\leq \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} Q^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\leq \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_x^z Q^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \\ &\leq \int_0^z u(x) \left(\int_x^z Q^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \end{aligned}$$

осыдан

$$A_{22} \leq A_3^+. \quad (16)$$

(14), (15) және (16) теңсіздіктер негізінде

$$J_{21} \leq \max\{A_2^+, A_3^+\} \|f\|_{p,v} \quad (17)$$

шығады. Осы жолмен J_{22} шамасын бағалайық:

$$J_{22} = \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty U(s) f(s) ds \right)^q d\tau(x) \right)^{\frac{1}{q}},$$

мұндағы

$$d\tau(x) = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(y) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} Q^r(x_{k+2}, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \delta(x - x_{k+2}) dy$$

[4] дереккөзінде келтірілген Харди теңсіздігіне қатысты нәтижелерді қолдана отырып, келесі қорытындыға келеміз:

$$J_{22} \leq \sup_{z>0} \left(\int_0^z d\tau(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty U^{p'}(s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{p,v}.$$

Бірінші интеграл келесідей бағаланады:

$$\begin{aligned} \int_0^z d\tau(x) &= \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} Q^r(x_{k+2}, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\leq \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_x^z Q^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \\ &\leq \int_0^z u(x) \left(\int_x^z Q^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \end{aligned}$$

және

$$J_{22} \leq A_3^+ \|f\|_{p,v}$$

болады. Осы және (17) бойынша $J_2 \ll \max\{A_2^+, A_3^+\} \|f\|_{p,v}$ болатыны шығады. Осылайша, (12) және (11) қатынастары барлық f теріс емес функция үшін $J \ll A^+ \|f\|_{p,v}$ екенін береді, демек (4) теңсіздігі

$$C \ll A^+ \quad (18)$$

бағалауымен орындалады, мұндағы $C > 0$ - (4) теңсіздік орындалатындай оптималды тұрақты.

Қажеттілігі. (4) теңсіздігі оптималды C оң тұрақтысымен орындалсын. Ендігі кезекте $A^+ < \infty$ болатынын анықтаймыз. (4) теңсіздігінен $\forall z \in I$ үшін

$$C \|f\|_{p,v,(z,\infty)} \geq \left(\int_0^z u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty \left(\int_t^\infty K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

аламыз. Онда

$$C \geq \left(\int_0^z u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{f \geq 0} \frac{\left(\int_z^\infty \left(\int_t^\infty K(s, t) f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{1}{r}}}{\|f\|_{p,v,(z,\infty)}} = \left(\int_0^z u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} H_{r,p}^-(z, \infty)$$

Соңғы теңсіздіктің екі жағынан z бойынша супремум алсақ, онда

$$C \geq A_1^+. \quad (19)$$

Айталық $f \geq 0$ және $z > 0$ үшін $f_z(\cdot) = \chi_{(z,\infty)}(\cdot) f(\cdot)$ болсын. Бұл жерде және өзге жерлерде $\chi_{(\alpha,\beta)}(\cdot)$ белгісі (α, β) интервалының сипаттамалық функциясын білдіреді. f_z функциясы үшін (4) теңсіздігінен келесі өрнекке келеміз:

$$\begin{aligned} C \|f_z\|_{p,v} &\geq \left(\int_0^\infty u(x) \left(\int_x^\infty \left(\int_t^\infty K(s, t) f_z(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z \left(\int_z^\infty K(s, t) f_z(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (20)$$

$f_z(\cdot) = \chi_{(z,\infty)}(\cdot)K^{p'-1}(\cdot, z)v^{1-p'}(\cdot)$ тексеру функциясын (20) теңсіздікке қойсақ, онда

$$C \left(\int_z^\infty K^{p'}(x, z)v^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z \left(\int_z^\infty K(s, t)K^{p'-1}(s, z)v^{1-p'}(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Әрі қарай $z \geq t$ үшін $K(s, t) \geq K(s, z)$ өзекке қойылған шартты ескеріп төмендегіні аламыз:

$$C \left(\int_z^\infty K^{p'}(x, z)v^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty K^{p'}(s, z)v^{1-p'}(s)ds \right)$$

осы қорытынды негізінде

$$C \geq A_2^+. \quad (21)$$

Енді $f_z(\cdot) = \chi_{(z,\infty)}(\cdot)U^{p'-1}(\cdot)v^{1-p'}(\cdot)$ тексеру функциясын алайық. Осы функцияны (20)-ға қойып және $s \geq z$ үшін $K(s, t) \geq Q(z, t)U(s)$ өзек шартын ескерсек, онда

$$C \left(\int_z^\infty U^{p'}(x)v^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z \left(\int_z^\infty K(s, t)U^{p'-1}(s)v^{1-p'}(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ \geq \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z Q^r(z, t)w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty U^{p'}(s)v^{1-p'}(s)ds \right)$$

аламыз. Осылайша

$$C \geq A_3^+. \quad (22)$$

(19), (21) және (22) теңсіздіктерінен $A^+ < \infty$ шенелген және $C \geq A^+$ болатыны шығады. Бұл (18) өрнегімен $C \approx A^+$ береді. Теорема 1 тұжырымы дәлелденді.

Теорема 2 тұжырымының дәлелдеуі. Жеткіліктілігі. Бұл теореманың жеткіліктілігін дәлелдеу Теорема 1-дің жеткіліктілігі жолымен жүреді. Демек (11) теңсіздіктегі $J \ll J_1 + J_2$ бағалауын құрамыз. (12)-ге ұқсас түрде $J_1 \ll A_1^+ \|f\|_{p,v}$ қорытындысына келеміз. Соңында J_2 интегралын бағалау үшін өзектің (6) қасиетін пайдаланамыз.

$$J_2 \ll \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} V^r(t)w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} \left(\int_{x_{k+2}}^\infty R(s, x_{k+2})f(s)ds \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \\ \left(\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} K^r(x_{k+2}, t)w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} \left(\int_{x_{k+2}}^\infty f(s)ds \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \tilde{J}_{21} + \tilde{J}_{22}. \quad (23)$$

Айталық

$$\tilde{J}_{21} = \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty R(s, x) f(s) ds \right)^q d\vartheta(x) \right)^{\frac{1}{q}},$$

мұндағы

$$d\vartheta(x) = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(y) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} V^r(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \delta(x - x_{k+2}) dy.$$

(6) шартымен берілген өзегі бар интегралдық оператордың шенелімділік шарты, яғни [7] жұмысындағы Теорема 2-ге сүйене отырып, мынаны аламыз:

$$\tilde{J}_{21} \leq \max\{\dot{A}_{21}, \dot{A}_{22}\} \|f\|_{p,v}, \quad (24)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \dot{A}_{21} &= \sup_{z>0} \left(\int_0^z d\vartheta(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty R^{p'}(s, z) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}, \\ \dot{A}_{22} &= \sup_{z>0} \left(\int_0^z R^q(z, x) d\vartheta(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^z d\vartheta(x) &= \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} V^r(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \\ &\leq \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) \left(\int_x^z V^r(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \leq \int_0^z u(x) \left(\int_x^z V^r(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \end{aligned}$$

болғандықтан

$$\dot{A}_{21} \leq A_4^+. \quad (25)$$

Сонымен қатар,

$$\begin{aligned} \int_0^z R^q(z, x) d\vartheta(x) &= \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} V^r(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} R^q(z, x_{k+2}) \\ &\leq \int_0^z u(x) \left(\int_x^z K^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \end{aligned}$$

Болғандықтан

$$\dot{A}_{22} \leq A_5^+. \quad (26)$$

(24), (25) және (26) шарттары

$$\tilde{J}_{21} \leq \max\{A_4^+, A_5^+\} \|f\|_{p,v} \quad (27)$$

береді. Дәл осылай $\tilde{J}_{22}$ бағалаймыз.

$$\tilde{J}_{22} = \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(s) ds \right)^q d\varphi(x) \right)^{\frac{1}{q}},$$

мұнда

$$d\varphi(x) = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(y) \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} K^r(x_{k+2}, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \delta(x - x_{k+2}) dy.$$

Харди операторының шенелімділік шарты бойынша ([4] қараңыз)

$$\tilde{J}_{22} \ll \sup_{z>0} \left(\int_0^z d\varphi(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{p,v}$$

қатынасына келеміз. Алдыңғы тәсілге сәйкес

$$\begin{aligned} \int_0^z d\varphi(x) &= \sum_{x_{k+2} \leq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} K^r(x_{k+2}, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\leq \int_0^z u(x) \left(\int_x^z K^r(z, t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \end{aligned}$$

болғандықтан

$$\tilde{J}_{22} \leq A_5^+ \|f\|_{p,v}.$$

Осы және (27) бағалауы бойынша $J_2 \ll \max\{A_4^+, A_5^+\} \|f\|_{p,v}$ болады. Демек, (12) және (11) негізінде $J \ll \tilde{A}^+ \|f\|_{p,v}$, яғни

$$C \ll \tilde{A}^+. \quad (28)$$

Қажеттілігі. Бұл теореманың қажеттілік бөлімінің дәлелі Теорема 1-дегідей басталады. Атап айтқанда, $A_1^+ \leq C$ болатыны (19)-ға ұқсас түрде шығарылады.

Кейін $f_z(\cdot) = \chi_{(z,\infty)}(\cdot) R^{p'-1}(\cdot, z) v^{1-p'}(\cdot)$ тексеру функциясын (20) -ға қойып, қажетті бағалауларды жүргіземіз

$$\begin{aligned} &C \left(\int_z^\infty R^{p'}(x, z) v^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z \left(\int_z^\infty K(s, t) R^{p'-1}(s, z) v^{1-p'}(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

((6) шарт бойынша $z \geq t$ үшін $K(s, t) \geq R(s, z)V(t)$)

$$\gg \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z V^r(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty R^{p'}(s, z) v^{1-p'}(s) ds \right),$$

демек,

$$C \geq A_4^+. \quad (29)$$

Ендігі кезекте $f_z(\cdot) = \chi_{(z,\infty)}(\cdot) v^{1-p'}(\cdot)$ деп алып, (20) -ға қойсақ, онда

$$C \left(\int_z^\infty v^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ \geq \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z \left(\int_z^\infty K(s,t) v^{1-p'}(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

((6) шарт бойынша $s \geq z$ үшін $K(s,t) \gg K(z,t)$)

$$\gg \left(\int_0^z u(x) \left(\int_x^z K^r(z,t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\infty v^{1-p'}(s) ds \right).$$

Осы қорытынды негізінде

$$C \geq A_5^+. \quad (30)$$

(19), (29) және (30) теңсіздіктеріне сүйене отырып, $\tilde{A}^+ < \infty$ және $C \geq \tilde{A}^+$ болатынын көреміз. Бұл (28) қатынасымен бірге $C \approx \tilde{A}^+$ эквиваленттілігін береді. Осылайша, Теорема 2-нің дәлелі аяқталады.

Мынадай шамаларды енгізейік

$$A_1^- = \sup_{z>0} \left(\int_z^\infty u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} H_{r,p}^+(0,z), \\ A_2^- = \sup_{z>0} \left(\int_z^\infty u(x) \left(\int_z^x K^r(t,z) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}, \\ A_3^- = \sup_{z>0} \left(\int_z^\infty u(x) \left(\int_z^x U^r(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z Q^{p'}(z,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}, \\ A_4^- = \sup_{z>0} \left(\int_z^\infty u(x) \left(\int_z^x R^r(t,z) w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z V^{p'}(s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}, \\ A_5^- = \sup_{z>0} \left(\int_z^\infty u(x) \left(\int_z^x w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z K^{p'}(z,s) v^{1-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Теорема 3. Айталық $0 < r < \infty, 1 < p \leq q < \infty$ және $K(\cdot, \cdot)$ өзегі O_1^- классына жатсын. Онда (3) салмақты теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $A^- = \max\{A_1^-, A_2^-, A_3^-\} < \infty$. Сонымен қатар, $A^- \approx C$, мұндағы C - (3) теңсіздігінің оптималды тұрақтысы.

Теорема 4. Айталық $0 < r < \infty, 1 < p \leq q < \infty$ және $K(\cdot, \cdot)$ өзегі O_1^+ классына жатсын. Онда (3) салмақты теңсіздігі орындалады сонда тек сонда, егер $\tilde{A}^- = \max\{A_1^-, A_4^-, A_5^-\} < \infty$. Сонымен қатар, $\tilde{A}^- \approx C$, мұндағы C - (3) теңсіздігінің оптималды тұрақтысы.

Теорема 3 және Теорема 4 тұжырымдары Теорема 1 және Теорема 2 -де қолданылған әдістерге ұқсас түрде дәлелденеді.

Дискуссия

Әдетте Харди типті операторлар алдымен өзексіз жағдайда зерттеледі кейін белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын өзекпен қарастырылады, яғни өзексіз жағдайға қарағанда кеңірек нәтижелер алынады. [21] жұмыста біз қарастырған (3) және (4) теңсіздіктерді (2) шартты қанағаттандыратын өзегі бар квазисызықты операторлар үшін қарастырған болатын. Айта кету керек, бұл жұмыста (3) және (4) теңсіздіктеріне қатысатын өзектер (2) шартынан әлсіз шарттарды қанағаттандырады. O_1^- және O_1^+ кластарының (2) шартын қанағаттандыратын өзектер классынан кең екенін көру оңай, өйткені (2) шарты (5) шартының $U(t) \equiv 1$, $Q(\tau, s) \equiv K(\tau, s)$ және (6) шартының $V(s) \equiv 1$, $R(t, \tau) \equiv K(t, \tau)$ жағдайындағы дербес жағдайы болып табылады, яғни (2) шартын қанағаттандыратын өзектер $O_1^- \cap O_1^+$ классына жатады. Бұл жұмыста [21] жұмыста басталған зерттеулерді жалпылай отырып, операторлар теориясына жаңа бағыт аштық. Әсіресе, өзектің жалпы кластары үшін алынған критерийлер тиімді қолданыс табады.

Қорытынды

Бұл жұмыста O_1^- және O_1^+ кластарына жататын өзекті операторды қамтитын (3) және (4) интегралдық теңсіздіктерінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Алынған критерийлер жаңа болып табылады. Болашақтағы зерттеулер p, q және r параметрлерінің басқа жағдайларында O_1^- және O_1^+ кластарына жататын өзегі бар квазисызықты интегралдық операторды қарастырумен байланысты болады.

Алғыс

Бұл мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің қаржылық қолдауымен, AP23488579 гранттық зерттеу аясында дайындалды.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

- [1] Bradley J.S. Hardy inequalities with mixed norms //Canad Math. Bull –1978.– Vol. 21–P. 405-408. <https://doi.org/10.4153/CMB-1978-071-7>
- [2] Sinnamon G. Weighted Hardy and Opial-type inequalities //J.Math.Anal. Appl.–1991.–Vol. 160.–P. 434-445. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(91\)90316-R](https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90316-R)
- [3] Sinnamon G., Stepanov V.D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ //J. London Math. Soc.–1996.–Vol. 54.–P. 89-101. <https://doi.org/10.1112/jlms/54.1.89>
- [4] Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy inequality. About its history and some related results. Pilsen: Vydavatelství servis, 2007.
- [5] Ойнаров Р. Двусторонние оценки нормы для некоторых классов интегральных операторов //Тр. Математического института РАН.–1993.–Т. 204.– С. 240-250. <https://www.mathnet.ru/tm1271>
- [6] Bloom S., Kerman P. Weighted norm inequities for operators of Hardy type //Proc. Amer. Math. Soc.–1991.–Vol. 113, №1.–P. 135-141. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1059623-6>
- [7] Oinarov R. Boundedness and compactness of Volterra type integral operators //Siberian Math. J.–2007.– Vol. 48, №5.– P. 884-896. <https://doi.org/10.1007/s11202-007-0091-4>
- [8] Oinarov R. Boundedness and compactness in weighted Lebesgue spaces of integral operators with variable integration limits //Siberian Math. J.–2011.–Vol. 52, № 6.–P. 1042-1055. <https://doi.org/10.1134/S0037446611060097>
- [9] Arendarenko L.S., Oinarov R., Persson L-E. On the boundedness of some classes of integral operators in weighted Lebesgue spaces //Eurasian Math. J.–2012.–Vol. 3, №1.–P. 5-17. <https://www.mathnet.ru/eng/emj70>
- [10] Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardytype operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space //Math. Inequal. Appl.–2013.–Vol. 16, № 1.– P. 1-19. [dx.doi.org/10.7153/mia-16-01](https://doi.org/10.7153/mia-16-01)

- [11] Kalybay A. On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space //Int. J. Math. Anal.–2014.–Vol. 8, № 11.– P. 539-553. <http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2014.423>
- [12] Gogatishvili A., Mustafayev R. Persson L-E. Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta=1$ //J. Inequal. Appl.–2013.– Vol. 2013, №515.– P. 1-29. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-515>
- [13] Prokhorov D.V., Stepanov V.D. On weighted Hardy inequalities in mixed norms // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics–2013.–Vol. 283.–P. 149-164. <https://doi.org/10.1134/S0081543813080117>
- [14] Bernardis A.L., Salvador P.O. Some new iterated Hardy-type inequalities and applications //J. Math. Ineq.– 2017.– Vol. 11, №2.–P. 577-594. [doi:10.7153/jmi-11-47](https://doi.org/10.7153/jmi-11-47)
- [15] Stepanov V.D., Shambilova G.E. On weighted iterated Hardy-type operators //Analysis Math.–2018.– Vol. 44, №2.– P. 273-283. <https://doi.org/10.1007/s10476-018-0211-3>
- [16] Krepela M. Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema //Collectanea Mathematica. – 2017. – Vol. 68. – P. 21-50. <https://doi.org/10.1007/s13348-016-0170-6>
- [17] Prokhorov D.V. On the boundedness of a class of sublinear operators //Doklady Mathematics –2015.– Vol.92.–P. 602-605. <https://doi.org/10.1134/S1064562415050294>
- [18] Prokhorov D.V. On a Class of Weighted Inequalities Containing Quasilinear Operators //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics–2016.–Vol. 293.–P. 272-287. <https://doi.org/10.1134/S0081543816040192>
- [19] Prokhorov D.V., Stepanov V.D. Weighted estimates for a class of sublinear operators //Doklady Math.–2013.– Vol. 88, №3.–P. 721-723. <https://doi.org/10.1134/S1064562413060264>
- [20] Prokhorov D.V., Stepanov V.D. Weighted inequalities for quasilinear integral operators on the semi-axis and applications to Lorentz spaces //Sbornik: Mathematics–2016.–Vol.207, №8.–P. 1159-1186. <https://doi.org/10.1070/SM8535>
- [21] Kalybay A. Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators //Siberian Math. J.–2019.–Vol. 60, №2.–P. 291-303. <https://doi.org/10.1134/S0037446619020095>
- [22] Stepanov V.D., Shambilova G.E. On iterated and bilinear integral Hardy-type operators //Math. Inequal. Appl.–2019.–Vol. 22, №4.–P. 1505-1533. [dx.doi.org/10.7153/mia-2019-22-105](https://doi.org/10.7153/mia-2019-22-105)
- [23] Kalybay A., Oinarov R. Weighted estimates containing quasilinear operators //Springer Proceedings in Mathematics & Statistics–2021.–Vol. 357.–P. 297-318. https://doi.org/10.1007/978-3-030-77493-6_17

References

- [1] Bradley J.S. Hardy inequalities with mixed norms //Canad Math. Bull.–1978.–Vol. 21.–P. 405-408. <https://doi.org/10.4153/CMB-1978-071-7>
- [2] Sinnamon G. Weighted Hardy and Opial-type inequalities //J.Math.Anal. Appl.–1991.– Vol. 160.–P. 434-445. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(91\)90316-R](https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90316-R)
- [3] Sinnamon G., Stepanov V.D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p=1$ //J. London Math. Soc.–1996.–Vol. 54.–P. 89-101. <https://doi.org/10.1112/jlms/54.1.89>
- [4] Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy inequality. About its history and some related results. Pilsen: Vydavatel'ský servis, 2007.
- [5] Oinarov R. Dvustoronnie ocenki normy dlja nekotoryh klassov integral'nyh operatorov //Tr. Matematicheskogo instituta RAN.–1993.–Vol. 204.–P. 240-250. <https://www.mathnet.ru/tm1271> (in Russian)
- [6] Bloom S., Kerman P. Weighted norm inequalities for operators of Hardy type //Proc. Amer. Math. Soc.– 1991.–Vol. 113, №1.–P. 135-141. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1059623-6>
- [7] Oinarov R. Boundedness and compactness of Volterra type integral operators //Siberian Math. J.– 2007.– Vol. 48, №5.–P. 884-896. <https://doi.org/10.1007/s11202-007-0091-4>
- [8] Oinarov R. Boundedness and compactness in weighted Lebesgue spaces of integral operators with variable integration limits //Siberian Math. J.–2011.–Vol. 52, № 6.–P. 1042-1055. <https://doi.org/10.1134/S0037446611060097>
- [9] Arendarenko L.S., Oinarov R., Persson L-E. On the boundedness of some classes of integral operators in weighted Lebesgue spaces //Eurasian Math. J.–2012.–Vol. 3, №1.–P. 5-17. <https://www.mathnet.ru/eng/emj70>
- [10] Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardytype operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space //Math. Inequal. Appl.–2013.–Vol. 16, № 1.–P. 1-19. [dx.doi.org/10.7153/mia-16-01](https://doi.org/10.7153/mia-16-01)

- [11] Kalybay A. On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space //Int. J. Math. Anal.–2014.–Vol. 8, № 11.–P. 539-553. <http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2014.423>
- [12] Gogatishvili A., Mustafayev R. Persson L-E. Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$ //J. Inequal. Appl.–2013.–Vol. 2013, №515.–P. 1-29. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-515>
- [13] Prokhorov D.V., Stepanov V.D. On weighted Hardy inequalities in mixed norms //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics–2013.–Vol. 283.–P. 149-164. <https://doi.org/10.1134/S0081543813080117>
- [14] Bernardis A.L., Salvador P.O. Some new iterated Hardy-type inequalities and applications //J. Math. Ineq.–2017.–Vol. 11, №2.–P. 577-594. [doi:10.7153/jmi-11-47](https://doi.org/10.7153/jmi-11-47)
- [15] Stepanov V.D., Shambilova G.E. On weighted iterated Hardy-type operators //Analysis Math.–2018.–Vol. 44, №2.–P. 273-283. <https://doi.org/10.1007/s10476-018-0211-3>
- [16] Krepela M. Integral conditions for Hardy-type operators involving suprema //Collectanea Mathematica.–2017.–Vol. 68.–P. 21-50. <https://doi.org/10.1007/s13348-016-0170-6>
- [17] Prokhorov D.V. On the boundedness of a class of sublinear operators //Doklady Mathematics –2015–Vol.92.–P. 602-605. <https://doi.org/10.1134/S1064562415050294>
- [18] Prokhorov D.V. On a Class of Weighted Inequalities Containing Quasilinear Operators //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics–2016–Vol. 293.–P. 272-287. <https://doi.org/10.1134/S0081543816040192>
- [19] Prokhorov D.V., Stepanov V.D. Weighted estimates for a class of sublinear operators //Doklady Math.–2013.–Vol. 88, №3.–P. 721-723. <https://doi.org/10.1134/S1064562413060264>
- [20] Prokhorov D.V., Stepanov V.D. Weighted inequalities for quasilinear integral operators on the semi-axis and applications to Lorentz spaces //Sbornik: Mathematics–2016.–Vol.207, №8.–P. 1159-1186. <https://doi.org/10.1070/SM8535>
- [21] Kalybay A. Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators //Siberian Math. J.–2019–Vol. 60, №2.–P. 291-303. <https://doi.org/10.1134/S0037446619020095>
- [22] Stepanov V.D., Shambilova G.E. On iterated and bilinear integral Hardy-type operators //Math. Inequal. Appl.–2019.–Vol. 22, №4.–P. 1505-1533. [dx.doi.org/10.7153/mia-2019-22-105](https://doi.org/10.7153/mia-2019-22-105)
- [23] Kalybay A., Oinarov R. Weighted estimates containing quasilinear operators //Springer Proceedings in Mathematics & Statistics–2021.–Vol. 357.–P. 297-318. https://doi.org/10.1007/978-3-030-77493-6_17