

МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
METHODS OF TEACHING MATHEMATICS

ГТАХР 27.39.00

<https://doi.org/10.51889/2959-5894.2026.95.3.010>

А.Б. Биргебаев¹, М.Е. Қыдырақын^{1*}

¹Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
^{*}*e-mail: kydyrakynmarina@gmail.com*

ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗДЕН ЕСЕПТЕР ШЫҒАРУДЫҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Аңдатпа

Функционалдық анализ және нақты айнымалы функциялар теориясы пәндері бойынша педагогикалық институттар мен университеттерде оқытылатын теориялық материалдарды игеруде есептер мен жаттығулар жинағының орны ерекше екені белгілі. Орыс тілінде бұл бағытта әртүрлі деңгейде жазылған есептер жинақтары жеткілікті. Олардың негізгілерінің қатарында Ю.С. Очан, А.А. Кирилов пен А.Д. Гвишиани, С.А. Теляковский, П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко, К.С. Казарян, П. Сифуэнтес, В.А. Петров, Н.Я. Виленкин, М.И. Граев еңбектерін атауға болады. Аталған есептер жинақтарында негізінен жиындар және өлшемдер теориясына көп көңіл бөлініп, көптеген есептердің шығару жолдары көрсетілген. Ал интегралдар теориясы, операторлар теориясы, сепарабельділік, кеңістіктердің толықтығы, компакттік және олардың есеп шығаруға қолданылуы жеткілікті деңгейде қамтылмаған. Қазақ тілінде университеттердің оқу бағдарламасына сай аталған пәндер бойынша жазылған есептер жинағы жоқтың қасы. Бірлі-жарым жарық көрген кітаптардың ішінде функционалдық анализ бойынша Ғ. Ақышевтің еңбегін атап өтуге болады. Бұл еңбекте функционалдық анализдің бірнеше тарауы қамтылып, есептердің шығару жолдары көрсетілген, алайда тиражы өте аз. Зерттеудің мақсаты – функционалдық талдаудың негізгі бағыттарындағы есептерді шешудің әдіснамалық аспектілерін анықтау және жүйелеу, сондай-ақ университеттік оқу курсының мазмұнын ескере отырып, оларды қазақ тілінде баяндау тәсілдерін әзірлеу. Бұл пән математиканың іргелі салаларының бірі болғандықтан, болашақ ғалым-зерттеушілердің (магистранттар, PhD докторанттар) оны терең меңгермей ғылыммен айналысуы мүмкін емес. Функционалдық анализ нақты анализдің жалғасы ретінде қарастырылып, оның есептері өзара байланыста зерттеледі. Осы тұрғыда көптеген есептер әдістемелік жағынан талданып, олардың шығару жолдары көрсетілді. Зерттеу жұмысында жиындар теориясы, өлшем теориясы, Лебег интегралы және функционалдық талдау саласындағы негізгі есептер түрлері жүйеленеді, оларды шешудің әдіснамалық тәсілдері айқындалады және әртүрлі күрделілік деңгейіндегі жаттығулар жүйесі әзірленеді. Алынған нәтижелерді функционалдық талдау пәнін қазақ тілінде оқытуда, сондай-ақ оқу-әдістемелік материалдарды әзірлеуде пайдалануға болады.

Түйін сөздер: жиын, өлшемдер теориясы, интегралдар теориясы, операторлар, компакттік, сепарабельділік, кеңістіктің толықтығы.

А.Б. Биргебаев¹, М.Е. Кыдырақын¹

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Аннотация

Известно, что при освоении теоретического материала по дисциплинам функционального анализа и теории функций действительного переменного в педагогических институтах и университетах особое

место занимают сборники задач и упражнений. На русском языке существует достаточное количество задачников различного уровня по данному направлению. Среди наиболее известных можно отметить труды Ю.С. Очана, А.А. Кирилова и А.Д. Гвишиани, С.А. Теляковского, П.Л. Ульянова, А.Н. Бахвалова, М.И. Дьяченко, К.С. Казаряна, П. Сифуэнтеса, В.А. Петрова, Н.Я. Виленкина, М.И. Граева. В указанных сборниках основное внимание уделяется теории множеств и теории меры, приводятся решения большого количества задач. В то же время теория интегралов, теория операторов, сепарабельность, полнота пространств, компактность и их применение при решении задач освещены недостаточно полно. На казахском языке сборников задач, соответствующих университетским учебным программам по данным дисциплинам, практически не существует. Среди немногочисленных изданий можно отметить труд Г. Акышева по функциональному анализу, в котором охвачены несколько разделов данной дисциплины и приведены решения задач, однако тираж книги крайне ограничен. Цель исследования заключается в выявлении и систематизации методических особенностей решения задач по основным разделам функционального анализа, а также в разработке подходов к их изложению на казахском языке с учетом содержания университетского курса. Поскольку данная дисциплина является одной из фундаментальных областей математики, будущие исследователи (магистранты и PhD-докторанты) не могут заниматься научной деятельностью, не освоив её в достаточной степени. Функциональный анализ рассматривается как продолжение реального анализа, а его задачи изучаются во взаимосвязи. В этом контексте многие задачи были исследованы с методической точки зрения, и приведены их подробные решения. В результате исследования систематизированы основные типы задач по теории множеств, теории меры, интегралу Лебега и функциональному анализу, определены методические подходы к их решению и разработана система упражнений различного уровня сложности. Полученные результаты могут быть использованы при преподавании функционального анализа на казахском языке и при разработке учебно-методических материалов.

Ключевые слова: множество, теория меры, теория интегралов, операторы, компактность, сепарабельность, полнота пространства.

A.B. Birgebaev¹, M.E. Kydyrakyn¹

¹Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

FEATURES OF PROBLEM SOLVING IN FUNCTIONAL ANALYSIS

Abstract

It is well known that problem books and exercise collections play a special role in mastering theoretical material in functional analysis and the theory of functions of a real variable at pedagogical institutes and universities. In Russian, there exists a sufficient number of problem collections of various levels in this field. Among the most notable are the works of Yu.S. Ochan, A.A. Kirilov and A.D. Gvishiani, S.A. Telyakovsky, P.L. Ulyanov, A.N. Bakhvalov, M.I. Dyachenko, K.S. Kazaryan, P. Sifuentes, V.A. Petrov, N.Ya. Vilenkin, and M.I. Graev. These collections mainly focus on set theory and measure theory, and provide solutions to a large number of problems. However, the theory of integrals, operator theory, separability, completeness of spaces, compactness, and their applications to problem solving are insufficiently covered. In the Kazakh language, there are almost no problem collections corresponding to university curricula in these disciplines. Among the few published works, one may note G. Akyshev's book on functional analysis, which covers several sections of the subject and includes solutions to problems, although its circulation is very limited. The aim of the study is to identify and systematize the methodological aspects of solving problems in the core areas of functional analysis, as well as to develop approaches to presenting them in the Kazakh language, taking into account the content of the university course. Since this discipline is one of the fundamental areas of mathematics, future researchers (Master's and PhD students) cannot engage in scientific work without mastering it thoroughly. Functional analysis is considered a continuation of real analysis, and its problems are studied in close interconnection. From a methodological perspective, many problems were analyzed and their detailed solutions were provided. The study systematizes the main types of problems in set theory, measure theory, the Lebesgue integral, and functional analysis; defines methodological approaches to solving them; and develops a system of exercises of varying difficulty. The results obtained can be used in teaching functional analysis in the Kazakh language and in developing educational and methodological materials.

Keywords: set, measure theory, integral theory, operators, compactness, separability, completeness of spaces.

Кіріспе

Негізгі ережелер

Зерттеудің негізгі идеясы нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализдің теориялық мазмұнын есептер шешу үдерісімен өзара сабақтастықта қарастыруға негізделеді. Зерттеу барысында аталған пәндердің негізгі бөлімдері бойынша есептер жүйеленіп, оларды шешуде қолданылатын математикалық ұғымдар, теоремалар мен әдістердің ерекшеліктері айқындалды. Теориялық материалды типтік есептермен байланыстыра ұсыну арқылы математикалық тұжырымдардың есептерді шешудегі қолдану жолдары көрсетілді. Ұсынылған есептер жүйесі білім алушылардың теориялық білімдерін есептерді шешуде қолдануына және функционалдық анализ бойынша қазақ тіліндегі оқу-әдістемелік материалдардың мазмұнын толықтыруға бағытталған.

Функционалдық анализ кәзіргі математиканың іргелі бағыттарының бірі болып табылады және математикалық анализ, дифференциалдық және интегралдық теңдеулер, операторлар теориясы, математикалық физика сияқты бірқатар салалардың теориялық негіздерін құрайды. Функционалдық анализді меңгеру барысында білім алушылардан анықтамалар мен теоремаларды білумен қатар, оларды нақты математикалық есептерді шешуде дұрыс қолдана білу талап етіледі. Осыған байланысты теориялық материал мен есептер жүйесінің өзара байланысын қамтамасыз ету функционалды анализі оқытудың маңызды мәселелерінің бірі болып табылады.

Нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализдің негізгі ұғымдарының абстрактілі сипатта болуы оларды меңгеруде есептер мен жаттығулардың маңызын арттырады. Атап айтқанда, жиындар мен өлшенетін функциялар, өлшем теориясы, Лебег интегралы, функционалдық кеңістіктер, сызықтық операторлар, кеңістіктердің толықтығы, сепарабельдігі және компакттік сияқты ұғымдары терең түсіну оларды тиісті есептерді шешу барысында қолданумен тығыз байланысты. Сондықтан теориялық материалды меңгерумен қатар, әрбір тақырыпқа сәйкес есептерді мақсатты түрде іріктеу, оларды белгілі бір жүйеге келтіру және шешу тәсілдерін көрсету қажеттілігі туындайды. Функционалдық анализ бен нақты айнымалы функциялар теориясы бойынша теориялық еңбектер, оқулықтар және есептер жинағы жеткілікті болғанмен, қазақ тілінде білім алатын студенттерге арналған оқу-әдістемелік материалдардың мазмұнын жетілдіру мәселесі өзектілігін сақтап отыр.

Осы бағытта зерттеу жүргізіп, жинақты жазуға түрткі болған белгілі математик, «Нақты анализ» кітабының авторы Қ. Наурызбаевтың мынадай пікірі болды: «... қазақ тілінде жазылған жаттығулар мен есептер жинағы бұл пән бойынша әзірге жоқ. Сондықтан курстың мазмұнын баяндау барысында кейбір маңызды ұғымдарға, фактілерге көңіл аудару мақсатымен оқушыларға тапсырма түрінде және тараулар соңында келтірілген жаттығу есептер мен сұрақтар түрінде бірқатар материал берілді. Бірақ оның көлемі тапшы – бұлар тек үлгі есебінде келтіріліп отыр. Осындай жинақтардың ұлт тілінде жарық көруі – алда тұрған кезекті істердің бірі». Бұл ретте, теориялық материалдарды типтік есептермен байланыстырып, математикалық ұғымдар мен тұжырымдардың есептерді шешуде қалай қалай қолданылатынын жүйелі түрде көрсететін материалдарды қалыптастыру маңызды. Әлбетте, бұл функционалдық анализ бойынша есептерді тек жинақтау емес, оларды теориялық мазмұны, қолданылатын математикалық аппарат және шешу тәсілдері тұрғысынан жүйелеу қажеттігін көрсетеді. Осыған байланысты зерттеудің мақсаты - нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализдің негізгі бөлімдері бойынша есептерді жүйелеу, олардың теориялық материалмен байланысын анықтау және есептерді шешуде қолданылатын негізгі математикалық тәсілдердің ерекшеліктерін көрсету. Мақсатқа жету үшін мынандай зерттеу міндеттері айқындалады: нақты айнымалы функциялар теориясымен функционалды анализдің негізгі бөлімдеріне сәйкес есептерді іріктеу және жүйелеу; есептердің теориялық ұғымдар мен тұжырымдармен байланысын анықтау; типтік есептерді шешуде қолданылатын

математикалық әдістер мен тәсілдерді талдау; теориялық материалды есептер арқылы бекітуге мүмкіндік беретін тапсырмалар жүйесін қалыптастыру; алынған нәтижелерді қазақ тіліндегі оқу-әдістемелік жинаққа қолдану мүмкіндіктерін көрсету.

Зерттеу нысаны – жоғары оқу орындарында нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализді оқыту үдерісі.

Зерттеу пәні – нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализ бойынша есептерді іріктеу, жүйелеу және оларды шешуде теориялық нәтижелерді қолдану. Зерттеудің негізгі идеясы теориялық материал мен есептерді өзара сабақтастыққа қарастырудан тұрады. Бұл ретте теориялық ұғымдар, анықтамалар мен теоремалар тиісті типтік есептермен байланыстырылып, оларды есепті шешу барысында таңдау мен қолдану жолдары қарастырылады. Мұндай құрылым теориялық білімді есептер шешуде қолдану арасындағы байланысты жүйелі түрде көрсетуге мүмкіндік береді.

Зерттеу әдіснамасы

Ұсынылып отырған мақалада зерттеудің әдіснамасын оқу құралының нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализдің негізгі бөлімдері бойынша негізгі теориялық қағидалары мен есептердің шығару тәсілдері және оларды құрастыру әдістемесі, сондай ақ, теориялық білімді математикалық есептерді шешу барысына қолдануға бағытталған жүйелілік пен сабақтастық ұстанымдары құрайды. Зерттеу барысында теориялық талдау, салыстыру, жүйелеу, жіктеу және жалпылау әдістері қолданылды. Зерттеу материалдарын іріктеу барысында жиындар теориясы, өлшем теориясы, өлшенетін функциялар, Лебег интегралы, функционалдық кеңістіктер, сызықтық операторлар, кеңістіктің толықтығы, сеперабельділігі мен компактылығы сияқты нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализдің негізгі тақырыптары қамтылды. Әрбір тақырып бойынша теориялық қағидаларды тікелей қажет ететін типтік есептер қарастырылып, олардың шешу жолдары талданды. Осы негізде жазылған оқу құралы аталған бағытта елімізде қазақ тілінде жарық көрген алғашқы еңбектердің бірі болып табылады.

Қазіргі уақытта жоғары оқу орындарында қазақ тілінде білім алатын студенттер санының артуы бұл бағыттағы оқу-әдістемелік әдебиеттердің маңыздылығын арттырып отыр. Осыған байланысты құралдың басты мақсаты – білім алушыларға функционалдық анализ бен нақты айнымалы функциялар теориясының іргелі ұғымдарын есептер мен жаттығулар арқылы терең меңгерту, олардың математикалық мәдениетін қалыптастыру және логикалық ойлау қабілеттерін дамыту болып табылады.

Бүгінгі таңда аталған пәндерді терең игермей, математика саласында толыққанды ғылыми зерттеу жүргізу мүмкін емес. Сондықтан ұсынылып отырған жинақтың ғылыми және әдістемелік құндылығы жоғары болатыны белгілі.

Оқу-әдістемелік құрал авторлардың математика, физика және информатика институтында көп жылдар бойы жүргізген дәрістері мен практикалық, сондай-ақ семинарлық сабақтарының негізінде дайындалған. Сонымен қатар бұл еңбек университет студенттеріне, оқытушыларға және математиканы терең меңгеруге қызығушылық танытатын кең аудиторияға арналған.

Оқу құралының құрылымы университеттің оқу бағдарламасына сәйкес жасалған және осы уақытқа дейін орыс және қазақ тілдерінде жарық көрген еңбектер мен интернет ресурстардағы материалдар негізінде құрастырылған.

Құралдың бірінші бөлімі екі тараудан тұрады және жиындар теориясы мен функциялар теориясына қатысты есептер мен жаттығуларды қамтиды. Жиындар теориясы, өлшемдер теориясы, өлшенетін функциялар, Лебег интегралы және функционалдық анализге қатысты есептерді талдау барысында [1]-[6] әдебиеттер пайдаланылды. Теориялық материалдар [7]-[15] әдебиеттер негізінде іріктеліп алынған. Математиканың негізгі ұғымдарының бірі – жиын ұғымы екені белгілі. Жиындар теориясы нақты айнымалы функциялар теориясының іргетасы болып табылады. Бұл ғылым саласы XIX ғасырдың соңында Г. Кантордың еңбектерінен бастау алады. Дегенмен, бүгінгі күнге дейін жиын ұғымына толық әрі қатаң анықтама берілген

жоқ. Оның орнына сипаттамалық анықтамалар қолданылады. Мәселен, Г. Кантор жиынды «көптің біртұтас ретінде ойша біріктірілуі» деп сипаттаған. Жалпы алғанда, жиын деп белгілі бір қасиеттері немесе белгілері бойынша біріктірілген объектілердің жиынтығын айтамыз. Мысал ретінде натурал сандар жиынын, түзудегі нүктелер жиынын, жазықтықтағы түзулер жиынын немесе планеталар жиынын келтіруге болады. Егер кез келген объект үшін оның берілген жиынға жататынын немесе жатпайтынын анықтауға мүмкіндік болса, онда мұндай жиын анықталған деп есептеледі. Жиындар әдетте латын алфавитінің бас әріптерімен белгіленеді:

$$A, B, C, X, Y, \dots$$

Жиынды құрайтын объектілер оның элементтері деп аталады. Егер a элементі A жиынына тиесілі болса, онда бұл $a \in A$ түрінде белгіленеді. Ал a элементі A жиынына тиесілі болмаса, онда $a \notin A$ немесе $a \bar{\in} A$ түрінде жазылады. Мысалы, $\mathbb{Q}$ – рационал сандар жиыны болса, онда $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, ал $\sqrt{3} \bar{\in} \mathbb{Q}$.

Табиғатта ақырсыз жиындар кеңінен қарастырылады. Мұндай жиындар ашық және тұйық жиындар, сондай-ақ саналымды және саналымсыз жиындар болып жіктеледі. Егер X жиынында ашық жиындардың τ жүйесі (топология) енгізілсе, онда ол топологиялық кеңістікке айналады. Сол сияқты кез келген бос емес X жиынында әрбір x және y элементтер жұбына теріс емес $\rho(x, y)$ нақты саны сәйкес қойылып, төмендегі шарттарды қанағаттандырса, онда бұл функция метрика деп аталады:

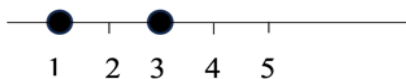
1. $\rho(x, y) > 0$ және $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (тепе-теңдік аксиомасы);
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметрия аксиомасы);
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (үшбұрыш аксиомасы).

Осылайша $\rho(x, y)$ саны x және y элементтері арасындағы қашықтықты (яғни X кеңістігінің метрикасын) сипаттайды. Ал көрсетілген үш шарт метриканың аксиомалары деп аталады. Мұндай (X, ρ) жұбы метрикалық кеңістік деп аталады. Метрикуны әртүрлі тәсілдермен енгізу арқылы әр алуан қасиеттерге ие кеңістіктерді қарастыруға болады. Осы бағытта ұсынылып отырған жинақта көптеген есептер келтіріліп, олардың ерекшеліктері нақты мысалдар арқылы түсіндіріледі. Мысал ретінде келесі есепті қарастырайық.

Мысал 1. $B_1(x_1, r_1) \subset B_2(x_1, r_1)$ орындалатын метрикалық кеңістікке мысал келтіріңіз, мұнда $r_1 > r_2$ яғни радиусы үлкен шардың радиусы кіші шардың ішінде де жататын метрикалық кеңістіктің мысалын келтіру керек.

Шешуі: $X = \mathbb{N}$ жиынында $\rho(n, m) = |n - m|$ метрикасын қарастырайық. Ашық шарларды төмендегідей таңдайық:

$$B_1 = B(1, 4) = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B_2 = B(3, 3) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



Сурет 1. $X = \mathbb{N}$ метрикалық кеңістігіндегі ашық шарлардың өзара орналасуы

Онда 1-суреттен және ашық шар мәндерінен $B_1 \subset B_2$, бірақ $r_1 > r_2$ екені байқалады.

Математикалық анализ курсынан белгілі болғандай, Риман интегралы негізінен үзіліссіз функциялар және үзіліс нүктелері шектеулі (ақырлы) болатын функциялар үшін анықталған. Алайда қарапайым Дирихле функциясы Риман бойынша интегралданбайды. Осыған байланысты интеграл ұғымын кеңейту қажеттілігі туындап, Лебег интегралы енгізілді. Дегенмен, Лебег интегралы үшін математикалық анализдің классикалық нәтижелерінің бірі – Ньютон-Лейбниц формуласы жалпы жағдайда орындала бермейді. Бұл мәселені шешу мақсатында абсолютті үзіліссіз функциялар ұғымы енгізілген.

Абсолютті үзіліссіз функциялар – кейбір нүктелерде туындысы болмауы мүмкін, бірақ кең мағынада анықталған функциялар класы. Бұл ұғым Ньютон-Лейбниц формуласының

кеңейтілген түрде орындалуын қамтамасыз етеді. Сонымен қатар, ол дифференциалдық және интегралдық есептеулер арасындағы байланысты сақтай отырып, функциялардың өзгерісі нөл өлшемді жиындарда «күрт» өзгермейтін процестерді сипаттайды. $f(x)$ функциясы, Егер Лебег бойынша интегралданатын $f'(x)$ функциясының алғашқы функциясы $[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы болса онда ол абсолютті үзіліссіз болады. Басқаша айтқанда, келесі теңдік орындалады:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Керісінше, егер функция осы түрде берілсе және $f'(x)$ Лебег бойынша интегралданатын болса, онда $f(x)$ абсолютті үзіліссіз функция болады.

Абсолютті үзіліссіз функциялар Лебег өлшемі бойынша барлық дерлік нүктелерде туындысы бар функциялармен жұмыс істеуге мүмкіндік береді, тіпті кейбір нүктелерде туындысы анықталмаған жағдайларда да. Мысалы, $y = |x|$ функциясы $x = 0$ нүктесінде туындысы анықталмағанымен, абсолютті үзіліссіз функция болып табылады.

Аталған мәселелерді тереңірек талдау мақсатында оқу құралында бірқатар есептер қарастырылып, олардың кейбіреулерінің шешу жолдары егжей-тегжейлі көрсетілген. Риман және Лебег интегралдарының ерекшеліктері мен өзара байланыстарын айқындау үшін арнайы мысалдар келтірілген. Атап айтқанда, Дирихле функциясының интегралдануы мәселесі арқылы бұл екі интеграл ұғымының айырмашылықтары нақты көрсетіледі.

Оқу құралының екінші бөлімінің бірінші тарауында метрикалық кеңістіктің дербес жағдайлары болып табылатын нормаланған және евклид кеңістіктеріне қатысты есептер қарастырылған. Белгілі болғандай, нормаланған кеңістік толық болған жағдайда Банах кеңістігіне, ал евклид кеңістігі толық (ақырсыз) болған жағдайда Гильберт кеңістігіне айналады. Кеңістіктердің толықтығы мен сепарабельділігі функционалдық анализдің негізгі ұғымдарының бірі болғандықтан, оларды теориялық тұрғыда талдап, есептерде қолдану маңызды. Сонымен қатар, кеңістік ақырсыз өлшемді болған жағдайда шенелгендік ұғымының орнына компакттық және шала компакттық ұғымдары енгізіледі. Бұл ұғымдардың анықтамалары беріліп, оларды есептер шығаруда қолдану жолдары көрсетілген.

Төменде осы ұғымдарды түсіндіруге арналған мысалдар келтірілген.

Мысал 2. $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі $C[0; 1]$ кеңістігінде шала компакт емес.

Мысал 3. Төмендегі функциялар жиынының компакттылығын зерттейік:

а) $\sin(nx), n = 1, 2, \dots, C[0; 1]$ кеңістігінде;

б) $\sin(\alpha x), \alpha \in [1; 2]$.

Шешуі: а) $x = 0$ деп алайық. Онда $y = \frac{\pi}{2n}$ болса,

$$\sin(nx) = 0, \quad \sin(ny) = 1.$$

Сонда

$$|x - y| = \left| \frac{\pi}{2n} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

бірақ

$$|\sin(nx) - \sin(ny)| = |0 - 1| = 1.$$

Бұл жағдайда біршенді үзіліссіздік шарты орындалмайды. Демек, берілген функциялар жиыны шала компакт болмайды.

б) Келесі өрнекті қарастырайық.

$$|\sin(\alpha x) - \sin(\alpha y)| = 2 \left| \sin \frac{\alpha(x - y)}{2} \right| \left| \cos \frac{\alpha(x + y)}{2} \right| \leq 2 \frac{\alpha(x - y)}{2} \leq 2|x - y|.$$

Осыдан $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}: |x - y| < \delta \Rightarrow |\sin(\alpha x) - \sin(\alpha y)| \leq \varepsilon$ яғни жиын біршенді үзіліссіз. Бұл жерде Арцел-Асколи теоремасы пайдаланылды.

Оқу құралының екінші бөлімінің екінші тарауы операторлар мен функционалдар теориясына арналған. Дифференциалдық теңдеулерді зерттеу барысында ең алдымен олардың шешімдерінің бар болуы, жалғыздығы және корректілігі мәселелерін анықтау қажет екені белгілі. Кез келген дифференциалдық теңдеуді дифференциалдық оператор түрінде жазуға болатындықтан, берілген функционалдық кеңістікте теңдеуді тікелей шешкенге қарағанда, сәйкес операторды қарастырып, оның кері операторының бар-жоғын және шенелгендігін зерттеу жеткілікті болып табылады. Егер шешімдердің тегістігін анықтау керек болса, ондай жағдайда коэрцитивті бағалаулар пайдаланылады [16, 17].

Айталық, $X, Y - K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ өрісіндегі сызықтық кеңістіктер болсын. Егер кез келген $\alpha, \beta \in K$ және $x_1, x_2 \in X$ үшін

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2$$

шарты орындалса, онда $A : X \rightarrow Y$ бейнелеуі сызықтық оператор деп аталады.

Мысал 4. $A(x) = kx + b$ операторын қарастырайық. Сызықтық оператор үшін міндетті түрде $A(0) = 0$ шарты орындалуы тиіс. Ал бұл жағдайда $A(0) = k \cdot 0 + b = b$, $b \neq 0 \Rightarrow A(0) \neq 0$. Демек, $A(x) = kx + b$ – сызықты оператор емес.

Сонымен қатар,

$$A(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) + b = kx_1 + kx_2 + b,$$

ал

$$A(x_1) + A(x_2) = (kx_1 + b) + (kx_2 + b) = kx_1 + kx_2 + 2b.$$

Осыдан $b \neq 0$ болғанда

$$A(x_1 + x_2) \neq A(x_1) + A(x_2),$$

яғни оператор сызықты емес. Егер $b = 0$ болса, онда $y = kx$ – сызықты оператор.

Енді X, Y – нормаланған кеңістіктер, A – сызықтық оператор болсын. Онда

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

шамасы оператордың нормасы деп аталады. X жиынын Y жиынына бейнелейтін барлық сызықтық операторлар жиынын $L(X, Y)$ деп белгілейді. Егер $\|A\| < \infty$ болса, онда $A \in L(X, Y)$ операторы сызықты шенелген деп аталады. X кеңістігін Y кеңістігіне бейнелейтін барлық шенелген операторлар жиыны $B(X, Y)$ деп белгіленеді.

Тұжырым. Сызықтық оператордың нормасы үшін келесі теңдіктер орындалады:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Ескерту. Кез келген x үшін

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

теңсіздігі орындалады. Егер $\|Ax\| \leq \dots \leq C \|x\|$ бағалауын жүргізсек, онда $\|A\| \leq C$ шығады. Ал оператордың нормасы C шамасына тең болатынын дәлелдеу үшін:

1) Егер $\|x\| = 1$ болатын x саны табылып, $\|Ax\| = C$ орындалса, онда супремум нақты максимумға тең болады, яғни $\|A\| = C$;

2) Егер $\|x_n\| = 1$ болатын тізбек үшін $\|Ax_n\| \leq C$ (төменнен ұмтылса), онда одан $\|A\| = C$ болатыны шығады.

Егер X нормаланған кеңістігінде $\|x_0\| = 1$ болатын x_0 векторы табылып,

$$\|Ax_0\| = C,$$

және барлық $x \in X$ үшін

$$\|Ax\| \leq C \|x\|$$

орындалса, онда

$$\|A\| = C.$$

Айтылған тұжырымды талдап көрейік:

1. Анықтама бойынша оператор нормасы:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

2. Айталық, $|x_0| = 1$ болатын x_0 элементі үшін $\|Ax_0\| = C$ орындалсын. Онда анықтама бойынша

$$\|A\| \geq \|Ax_0\| = C.$$

3. Екінші жағынан, егер барлық x үшін $\|Ax\| \leq C \|x\|$ орындалса, онда $\|x\| = 1$ болғанда $\|Ax\| \leq C$,

яғни

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq C.$$

4. (2) және (3) нәтижелерін біріктірсек:

$$C \leq \|A\| \leq C,$$

демек,

$$\|A\| = C.$$

Қорытындылай келе, келесі тұжырымдар алынады:

- C саны $|x| = 1$ болғандағы $\|Ax\|$ мәндерінің жоғарғы шекарасы болып табылады;
- Егер осы шекараға жететін x_0 векторы табылса, онда супремум нақты максимумға тең болады;
- Осы жағдайда оператор нормасы дәл осы C санына тең болады.

Ақырлы өлшемді кеңістіктерде (мысалы, A матрица болған жағдайда) $x \rightarrow \|Ax\|$ функциясы үзіліссіз, ал $|x| = 1$ сферасы компакт болғандықтан, максимум әрқашан бар болады. Сондықтан бұл жағдайда супремум міндетті түрде максимумға тең. Ал ақырсыз өлшемді кеңістіктерде максимум болмауы мүмкін. Мұндай жағдайда оператор нормасы супремум арқылы анықталып, оған жақындайтын тізбектер көмегімен сипатталады.

Мысал 5. $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ сызықтық операторы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицасымен берілсін. $\mathbb{R}^2$ -дегі евклид кеңістігінің стандартты нормасын қарастырып, оператордың нормасын табайық.

Шешуі:

1-қадам. Оператордың нормасының анықтамасы бойынша:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

$x = (x_1, x_2)$ болса, онда

$$Ax = (2x_1, x_2), \quad \|Ax\| = \sqrt{(2x_1)^2 + (x_2)^2} = \sqrt{4x_1^2 + x_2^2}.$$

2-қадам. $|x| = 1$ шарты:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Осыдан $x_2^2 = 1 - x_1^2$, сондықтан

$$\|Ax\|^2 = 4x_1^2 + x_2^2 = 4x_1^2 + (1 - x_1^2) = 3x_1^2 + 1.$$

3-қадам. Максимумды табу.

$f(x_1) = 3x_1^2 + 1$ функциясы $-1 \leq x_1 \leq 1$ аралығында $|x_1| = 1$ нүктелерінде максимумға жетеді.

Сондықтан

$$\|Ax\|^2 = 3 + 1 = 4, \quad \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{4} = 2.$$

4-қадам. Максимумның жететінін тексерейік.

$x = (1, 0)$ десек, онда $\|x\| = 1$,

$$Ax = (2, 0), \quad \|Ax\| = 2.$$

Осыдан норманың максимумы жететіндей $x_0 = (1, 0)$ векторы табылды.

Нәтижесінде

$$\|A\| = 2.$$

Бұл мысал ақырлы өлшемді кеңістікте оператор нормасының максимум арқылы анықталатынын көрсетеді, яғни $x_0 = ((1, 0))$, $|x_0| = 1$ болатын вектор табылып, векторға оператордың әсерінің нормасы $\|Ax_0\| = 2$ болады және ол мән оператордың нормасымен тең.

Жалпы алғанда, екінші тарауда операторлардың нормасын табу мәселелерімен қатар рефлексивті кеңістіктер, Банах кеңістігіндегі түйіндес операторлар, компакт операторлар, кері операторлар, операторлардың спектрі және спектрлік радиусы сияқты маңызды тақырыптар қарастырылған. Теориялық материалдар нақты мысалдармен және есептердің шешу жолдарымен толықтырылып, олардың функционалдық анализдің дамуына және қолданбалы есептерді шешудегі маңызы жан-жақты сипатталған.

Зерттеу нәтижелері

Зерттеу нәтижесінде нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализдің негізгі бөлімдері бойынша есептер мазмұндық және әдістемелік тұрғыдан жүйеленді. Есептерді шешуде қолданылатын негізгі теориялық ұғымдар мен тұжырымдардың өзара байланысы айқындалып, оларды типтік есептерді шешуге қолдану тәсілдері көрсетілді. Жоғарыда аталған әдебиеттердегі есептер мен теориялық материалдарға зерттеулер жүргізіліп оларды сабақтастыра ұсыну негізінде жиындар теориясы, өлшем теориясы, өлшенетін функциялар, Лебег интегралы, функционалдық кеңістіктер, сызықтық операторлар, кеңістіктің толықтығы, сеперабельділігі мен компактылығы тақырыптары бойынша тапсырмалар кешені қалыптастырылды. Алынған нәтижелер университетіміздің оқу бағдарламасына сай елімізде қазақ тіліндегі алғашқы оқу-әдістемелік құралының бірі ретінде жарық көрген «Функционалдық талдау (жаттығулар мен есептер жинағы)» жинағының материалдарын жүйелеуге негіз болды.

Талқылау

Зерттеу барысында алынған нәтижелер функционалдық анализді оқытуда теориялық материал мен есептерді біртұтас жүйеде қарастырудың қажеттігін көрсетеді. Функционалдық анализдің көптеген ұғымдарының абстрактілі сипаты білім алушыдан анықтамалар мен теоремаларды білу мен қатар, оларды қандай жағдайда және қандай есептерді шығаруға қолданылатынын түсінуді талап етеді. Зерттеудің практикалық маңыздылығы нақты айнымалы функциялар теориясы мен функционалдық анализ бойынша қазақ тіліндегі оқу-әдістемелік материалдарды толықтыру мүмкіндігімен анықталады. Ұсынылып отырған оқу құралында осы екі пәнді де қамтитын есептер мен жаттығулар жүйелі түрде жинақталған. Айта кету керек, бұл пәндер бойынша қазақ тіліндегі терминология әлі толық қалыптасып үлгермеген. Осыған байланысты терминдердің бірізділігін сақтау мақсатында қазақ тілінде

жарық көрген оқулықтар мен математика саласындағы қазақша-орысша терминологиялық сөздіктер пайдаланылды [16].

Қорытынды

Зерттеу барысында негізгі тақырыптар бойынша есептер жүйеленіп, оларды шешуде қолданылатын теориялық ұғымдар, тұжырымдар және математикалық тәсілдер арасындағы байланыстар айқындалып, өзара сабақтастығын қамтамасыз етудің маңыздығы көрсетілді. Сонымен қатар, оқу-әдістемелік материалдар аталған пәндердің барлық бөлімдерін толық қамтиды деп айтуға болмайды. Дегенмен, бұл еңбек қазақ тіліндегі ғылыми әдебиетті дамытуға, сондай-ақ болашақта нақты анализ, функционалдық анализ және математиканың басқа да күрделі салалары бойынша ұлттық тілде жарық көретін еңбектердің пайда болуына өз үлесін қосады деп сенім білдіреміз. Жоғарыда айтылғандарды қорытындылай келе, қазақ тілінде «Нақты айнымалы функциялар теориясы» мен функционалдық анализ пәндері бойынша есептер мен жаттығуларды қамтитын «Функционалдық анализ (жаттығулар мен есептер жинағы)» атты оқу құралы жарық көріп, оқырман қауымға ұсынылды (440 бет, 720 есеп пен жаттығулар). Аталған оқу құралының ғылыми-әдістемелік құндылығы жоғарыда келтірілген тұжырымдармен негізделеді. Жұмыс Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті математика факультетінде (профессор Оспанов Қ.), Дулати атындағы Тараз университеті математика факультетінде (профессор Мұратбеков М.Б.), сондай-ақ Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті математика факультетінің ғылыми семинарларында (профессор Бердышев А.С.) талқылаудан өтті.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу. Учеб.пособие для студентов физ-мат. фак. пед.ин-тов – М.: Просвещение, 1981, 271 стр.

[2] Глазырина, П.Ю. Дейкалова, М.В. Коркина, Л. Ф. Функциональный анализ: учебное пособие Уральский федеральный университет. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2016. – 214 с. – ISBN 978-5-7996-1771-4.

[3] Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу 2-е изд. Физматлит, 2005, 240 стр.

[4] Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П. Действительный анализ в задачах. – М.: Физматлит, 2016.

[5] Петров В. А., Виленкин Н. Я., Граев М. И. Элементы функционального анализа в задачах. – М.: Просвещение, 1978.

[6] Ақышев Ф. Функционалдық анализ: есептер жинағы. – Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2018.

[7] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 2010.

[8] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: физматлит, 2017.

[9] Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: физматлит, 2005.

[10] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М.: Л., 2001.

[11] Наурызбаев Қ. Ж. Нақты анализ (нақты айнымалы функциялар теориясы). – Алматы: Қазақ университеті, 2004.

[12] Блиев Н. Қ. Функционалдық анализ: қысқаша курс. – Алматы: Қазақ университеті, 2014.

[13] Абдикаликова З., Ибатов А. Функционалдық анализ. 1-2 бөлім. – Алматы, 2020.

[14] Шейпак И. А. Функциональный анализ. Ч. 1-2: семинары МГУ. – М., 2016-2021.

[15] Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.

[16] Қазақша-орысша, орысша-қазақша терминологиялық сөздік (математика). – Алматы: Рауан, 1999.

[17] Birgebayev, A.; Muratbekov, M.. Smoothness of solutions (separability) of the nonlinear stationary schrödinger equation. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, [S.l.], v. 115, n. 3, p. 25-35,

sep. 2022. ISSN 2617-4871. Date accessed: 30 nov. 2022.
doi: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v115.i3.03>.

[18] Berdyshev A.S., Birgebaev A.B., Cabada A. On the smoothness of solutions of the third order nonlinear differential equation. //Boundary value problems. May 2017. –P. 1-11. DOI 10.1186/s13661-017-0799-4

[19] Бородин П.А., Савчук А.М. Шейнак И.А. Задачи по функциональному анализу. - Новое изд. - М.: МЦНМО, 2017.- 336 с.

References

[1] Ochan Yu. S. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu: ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. fak. ped. in-tov [Collection of Problems in Mathematical Analysis: Textbook for Students of Physics and Mathematics Faculties of Pedagogical Institutes]. Moscow: Prosveshchenie, 1981. 271p.

[2] Glazyrina P. Yu., Deykalova M. V., Korkina L. F. Funktsional'nyi analiz: uchebnoe posobie [Functional Analysis: Textbook]. Yekaterinburg: Izdatel'stvo Ural'skogo universiteta, 2016. 214 p. ISBN 978-5-7996-1771-4.

[3] Trenogin V. A., Pisarevskii B. M., Soboleva T. S. Zadachi i uprazhneniya po funktsional'nomu analizu [Problems and Exercises in Functional Analysis]. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit, 2005. 240 p.

[4] Ul'yanov P. L., Bakhvalov A. N., D'yachenko M. I., Kazaryan K. S., Sifuentes P. Deistvitel'nyi analiz v zadachakh [Real Analysis in Problems]. Moscow: Fizmatlit, 2016.

[5] Petrov V. A., Vilenkin N. Ya., Graev M. I. Elementy funktsional'nogo analiza v zadachakh [Elements of Functional Analysis in Problems]. Moscow: Prosveshchenie, 1978.

[6] Akyshev G. Funktsionaldyq analiz: esepter zhinaǵy [Functional Analysis: Collection of Problems]. Karaganda: QarMU baspasy, 2018.

[7] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow: Nauka, 2010.

[8] Natanson I. P. Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow: Fizmatlit, 2017.

[9] Trenogin V. A. Funktsional'nyi analiz [Functional Analysis]. Moscow: Fizmatlit, 2005.

[10] Lyusternik L. A., Sobolev V. I. Elementy funktsional'nogo analiza [Elements of Functional Analysis]. Moscow: Leningrad, 2001.

[11] Nauryzbaev K. Zh. Naqty analiz (naqty aǵnymaly funktsiyalar teoriyasy) [Real Analysis (Theory of Functions of a Real Variable)]. Almaty: Qazaq Universiteti, 2004.

[12] Bliyev N. Q. Funktsionaldyq analiz: qysqasha kurs [Functional Analysis: A Short Course]. Almaty: Qazaq Universiteti, 2014.

[13] Abdikalikova Z., Ibatov A. Funktsionaldyq analiz. 1–2 bölim [Functional Analysis. Parts 1–2]. Almaty, 2020.

[14] Sheipak I. A. Funktsional'nyi analiz. Ch. 1–2: seminary MGU [Functional Analysis. Parts 1–2: MSU Seminars]. Moscow, 2016–2021.

[15] Trenogin V. A. Funktsional'nyi analiz: uchebnyk [Functional Analysis: Textbook]. Moscow: Fizmatlit, 2002. 488 p.

[16] Qazaqsha-oryssha, oryssha-qazaqsha terminologiyalyq sözdik (matematika) [Kazakh-Russian, Russian-Kazakh Terminological Dictionary (Mathematics)]. Almaty: Rauan, 1999.

[17] Birgebayev, A.; Muratbekov, M.. Smoothness of solutions (separability) of the nonlinear stationary schrödinger equation. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, [S.l.], v. 115, n. 3, p. 25-35, sep. 2022. ISSN 2617-4871. Date accessed: 30 nov. 2022. doi: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v115.i3.03>.

[18] Berdyshev A.S., Birgebaev A.B., Cabada A. On the smoothness of solutions of the third order nonlinear differential equation. //Boundary value problems. May 2017. –P. 1-11. DOI 10.1186/s13661-017-0799-4

[19] Borodin P. A., Savchuk A. M., Sheipak I. A. Zadachi po funktsional'nomu analizu [Problems in Functional Analysis]. New ed. Moscow: MTsNMO, 2017. 336 p.