

М.Дж. Минглибаев¹, М.Р. Сапарова^{2*}

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

²Институт механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова, г.Алматы, Казахстан

*e-mail: moldir170788@gmail.com

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОСКУЛИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ В КООРДИНАТАХ ЯКОБИ

Аннотация

В данной работе рассматривается проблема описания уравнений движения в координатах Якоби через оскулирующие элементы как эффективный метод решения задач многих тел. Составлены уравнения движения семипланетной экзопланетной системы TRAPPIST-1 с переменной массой и неизотропным излучением в условиях действия реактивных сил с использованием координат Якоби. В задачах многих тел использование традиционных гелиоцентрических координат значительно усложняет вычисления. Преимущество координат Якоби заключается в том, что движение каждого тела рассматривается относительно центра масс предшествующих тел, что позволяет адекватно описать иерархическую систему многих тел, удобную для использования каноническую теорию возмущения. Тела взаимодействуют согласно закону всемирного тяготения Ньютона, при этом наличие переменной массы обуславливает возникновение реактивных сил, усложняющих динамику системы. Основная цель исследования – построение системы дифференциальных уравнений в оскулирующих аналогах элементов Делоне, которые являются переменными «действие-угол» исходя из уравнений в координатах Якоби. Использование координат Якоби позволяет работать с одной силовой функцией для всех тел, упрощает математическую структуру задачи. В то время как оскулирующие переменные позволяют наглядно интерпретировать геометрическую картину движения. На основе уравнений движения, полученных в координатах Якоби, разработана каноническая теория возмущений, и выведены уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Делоне. Данный подход обеспечивает лучшую точность расчетов динамики многопланетных систем, благодаря свойствам «действие-угол» аналогов элементов Делоне. Полученные уравнения позволяют проводить дальнейшие исследования системы в барицентрической системе координат с применением теории возмущений.

Ключевые слова: оскулирующие переменные, система координат Якоби, элементы Делоне, каноническая теория возмущений.

М.Дж. Минглибаев¹, М.Р.Сапарова²

¹әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

²Ө.А.Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы, Қазақстан

ЯКОБИ КООРДИНАТТАРЫНДАҒЫ ОСКУЛЯЦИЯЛАНАТЫН АЙНЫМАЛЫЛАРДАҒЫ ҚОЗҒАЛЫС ТЕНДЕУЛЕРІ

Аңдатпа

Жұмыста көп денелі мәселелерді шешудің тиімді әдісі ретінде Якоби координаттарындағы қозғалыс тендеулерін оскуляциялық элементтер арқылы сипаттау мәселесі қарастырылады. Айнымалы массалы, изотропты емес TRAPPIST-1 жеті планеталы экзопланеталық жүйенің реактивті күштер бар болған кездегі Якоби координатасын пайдалана отырып, оскуляция элементтері арқылы қозғалыс тендеуі жазылған. Көп денелер есебінде әдеттегі гелиоцентрлік координаттарды пайдалану есептеуді қиындатады. Якоби координаттарының артықшылығы – әрбір дененің қозғалысы алдыңғы денелердің массалар центріне қатысты қарастырылады, бұл иерархиялық көп дене жүйесін адекватты сипаттауға мүмкіндік береді және канондық қозғалыстар теориясын қолдануға ыңғайлы. Денелер Ньютонның бүкіләлемдік тартылыс заңына сәйкес өзара тартылады. Массаның айнымалы болуы есебінен, есепті күрделендіретін реактивті күштер бар. Зерттеудің негізгі мақсаты – Якоби координаттарындағы тендеулерге сүйене отырып, «әсер-бұрыш» айнымалылары болып табылатын Делоне элементтерінің

оскуляциялық аналогтарындағы дифференциалдық теңдеулер жүйесін құру. Якоби координаттарын қолдану барлық денелер үшін бір ғана күш функциясымен жұмыс істеуге мүмкіндік береді және есептің математикалық құрылымын қарапайымдыландырады. Ал оскуляциялық айнымалылар қозғалыстың геометриялық көрінісін көрнекі түрде түсіндіруге мүмкіндік береді. Якоби координаттарында алынған қозғалыс теңдеулері негізінде канондық қозғалыстар теориясы жасалып, Делоне элементтерінің аналогтарындағы қозғалыс теңдеулері қорытылып шығарылды. Бұл тәсіл Делоне элементтері аналогтарының «әсер-бұрыш» қасиеттерінің арқасында көп планеталы жүйелер динамикасын есептеудің жоғары дәлдігін қамтамасыз етеді. Алынған теңдеулер қозғалыстар теориясын қолдана отырып, жүйені барицентрлік координаттар жүйесінде әрі қарай зерттеуге мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: оскуляцияланатын айнымалылар, Якоби координаттар жүйесі, Делоне элементтері, канондық ұйытқу теориясы.

M.Zh. Minglibaev¹, M.R. Saparova²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Mechanics and Machine Science named after U.A. Joldasbekov, Almaty, Kazakhstan

EQUATIONS OF MOTION IN OSCULATING VARIABLES WITHIN JACOBI COORDINATES

Abstract

This paper addresses the problem of describing the equations of motion in Jacobi coordinates using osculating elements as an effective method for solving many-body problems. The equations of motion for the seven-planet exoplanetary system TRAPPIST-1 with variable mass and non-isotropic radiation under the influence of reactive forces are formulated using Jacobi coordinates. In many-body problems, the use of traditional heliocentric coordinates significantly complicates calculations. The advantage of Jacobi coordinates lies in the fact that the motion of each body is considered relative to the center of mass of the preceding bodies. This allows for an adequate description of a hierarchical many-body system, which is convenient for applying the canonical perturbation theory. The bodies interact according to Newton's law of universal gravitation, while the presence of variable mass gives rise to reactive forces that complicate the system's dynamics. The primary objective of this research is to construct a system of differential equations in osculating analogues of Delaunay elements, which serve as «action-angle» variables derived from the equations in Jacobi coordinates. The utilization of Jacobi coordinates enables the use of a single force function for all bodies, simplifying the mathematical structure of the problem. Meanwhile, the osculating variables provide a visual and clear interpretation of the geometric picture of motion. Based on the equations of motion obtained in Jacobi coordinates, a canonical perturbation theory has been developed, and the equations of perturbed motion in analogues of Delaunay elements have been derived. Thanks to the action-angle properties of the Delaunay element analogues, this approach ensures better accuracy in calculating the dynamics of multi-planetary systems. The resulting equations enable further investigation of the system in the barycentric coordinate system using perturbation theory.

Keywords: osculating variables, Jacobi coordinate system, Delaunay elements, canonical perturbation theory.

Введение

Стремительное развитие современной астрофизики, особенно открытие экзопланетных систем (таких как TRAPPIST-1, Kepler и др.), требует новых методов исследования динамической эволюции нестационарных систем многих тел. Описание долгосрочной устойчивости планет и изменений их орбитальных элементов в таких системах остается одной из самых актуальных задач небесной механики. Представим обзор работ ряда ученых.

Прежде всего, представим краткий обзор задачи многих тел для случая постоянных масс. В работе Перминова и Кузнецова [1] предложен современный высокотехнологичный подход к построению аналитической теории, описывающей движение планет-гигантов Солнечной системы при условии постоянства их масс. Движение четырехпланетной системы исследовано в системе координат Якоби. Основной целью исследования является поиск эффективного способа долгосрочного прогнозирования сложных колебаний, вызванных взаимным притяжением планет, путем математического осреднения. Авторы использовали один из

наиболее мощных инструментов гамильтоновой механики – метод Хори–Депри, основанный на преобразованиях Ли. Этот метод позволяет исключить из уравнений движения короткопериодические возмущения, что значительно упрощает изучение вековой динамики планет и позволяет существенно увеличить шаг времени при численном интегрировании. В качестве математического аппарата были выбраны переменные Пуанкаре второй системы, а Гамильтониан был разложен в ряды Пуассона с точностью до третьей степени малого параметра.

Еще одна работа Перминова и Кузнецова [2], опубликованная в 2020 году, посвящена изучению орбитальной эволюции четырех планет-гигантов Солнечной системы (Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна) на сверхдлительных интервалах времени (до 10 миллиардов лет) в условиях постоянства их масс. Авторами разработана полуаналитическая осредненная теория движения, обладающая точностью третьего порядка относительно масс планет и шестого порядка – относительно эксцентриситетов и наклонов орбит. Для разложения Гамильтониана использовались система координат Якоби и вторая система элементов Пуанкаре. В ходе исследования полученные уравнения движения в осредненных элементах были численно проинтегрированы различными методами на интервале в 10 миллиардов лет. Результаты моделирования показали, что движение планет носит квазипериодический характер, а короткопериодические колебания орбитальных элементов сохраняют крайне малые значения на протяжении всего исследуемого процесса.

Работа испанского ученого Давида Арнаса [3] посвящена аналитическому исследованию влияния пертурбации J_2 , возникающей вследствие полярного сжатия центрального небесного тела, на динамику орбит. Массы тел в системе рассматриваются как постоянные. Автор предлагает метод разложения всех переменных системы в степенные ряды по константе J_2 , а также способ регуляризации времени, основанный на аргументе широты. Ключевой особенностью данной методики является возможность получения точных аналитических решений без необходимости специального контроля возмущенной частоты системы. Предложенный подход позволяет аппроксимировать динамику орбит с любым значением эксцентриситета в оскулирующих элементах, а также получать аналитические преобразования для перехода от оскулирующих элементов к осредненным для данных орбит.

В работе [4], посвященной прогнозированию движения системы из N небесных тел под действием сил взаимного тяготения, предложен метод получения точных решений с помощью нейронных сетей (NN). Ввиду отсутствия общего аналитического решения для задачи $N > 2$ тел, авторы применили подход, основанный на декомпозиции гамильтониана на аналитически решаемую двухтелную часть и интерактивную часть, аппроксимируемую нейронной сетью. Предложенный нейронный симплектический интегратор N тел обеспечил высокую точность вычислений для системы трех тел с постоянными массами на интервале 10^5 шагов, не уступая традиционным численным методам. Ключевым достижением этой работы является способность нейронной сети соблюдать физические законы сохранения, такие как энергия и момент импульса, в долгосрочной перспективе, а также наличие индуктивного смещения, позволяющего успешно прогнозировать эволюцию новых систем, не входивших в обучающую выборку.

В работах Холшевникова, Гребеникова и Кузнецова [5–8] исследована орбитальная эволюция системы трех тел «Солнце – Юпитер – Сатурн» при условии постоянства их масс. Гамильтониан, записанный в оскулирующих элементах, был разложен в ряды Пуассона по всем переменным. Усредненные уравнения движения для системы двух планет были численно проинтегрированы на временном интервале в 10 млрд лет. Установлено, что эксцентриситеты и наклоны орбит Юпитера и Сатурна остаются малыми ненулевыми величинами. В результате выявлено, что движение планет носит квазипериодический характер, а короткопериодические возмущения сохраняют малые значения на всем рассматриваемом интервале времени.

Ввиду отсутствия общего решения задачи Гюльдена-Мещерского относительно закономерностей изменения массы, динамика систем планет переменной массы исследовалась методами канонической теории возмущений. Изменение масс в нестационарных планетных системах оказывает прямое влияние на их динамическую эволюцию. В связи с этим движение нестационарных тел рассматривалось с применением специальной канонической теории возмущений [9]

Поскольку массы небесных тел изменяются с течением времени, исследование влияния таких изменений на орбитальные параметры в рамках задачи трех тел представляет значительный интерес. В работе [10] рассмотрен частный случай, когда массы двух тел изменяются изотропно по единому закону. Для решения уравнений движения использованы оскулирующие элементы аperiодического квазиконического движения. Научная значимость исследования заключается в разработке алгоритма расчета долгопериодических, или вековых возмущений. Вычислив вековую часть функций возмущения, авторы вывели дифференциальные уравнения, определяющие эволюцию орбитальных элементов.

Главная особенность и научная ценность работы [11] заключается в рассмотрении случая, когда массы тел изменяются с различной интенсивностью и неизотропно. Такое неравномерное изменение массы приводит к возникновению в системе реактивных сил, что значительно усложняет динамику движения тел. Принимая произвольный характер законов изменения масс, авторы с помощью методов теории возмущений вывели канонические уравнения вековых возмущений данной системы.

В научной работе [12] исследованы вопросы существования и устойчивости внеплоскостных точек равновесия экзопланет в системе двойных звезд с переменными массами, окруженных кластером материальных точек. Основной особенностью исследования является допущение о том, что массы всех тел в системе изменяются с одинаковой скоростью в соответствии с единым законом Мещерского. Автономные уравнения движения, полученные в рамках задачи Гюльдена – Мещерского, с помощью специальных преобразований были приведены к автономной системе с постоянными коэффициентами для последующего анализа. Авторы провели проверку устойчивости точек равновесия для автономных и неавтономных систем и установили, что во всех рассматриваемых случаях данные точки являются неустойчивыми.

В исследовании [13], проведенном при участии Они Леке (Oni Leke), анализируется устойчивость точек равновесия в ограниченной задаче трех тел с переменными массами при наличии тормозящей силы Пойнтинга – Робертсона (P-R). Движение основных тел описывается в рамках задачи Гюльдена – Мещерского, а изменение массы – единым законом Мещерского. Кроме того, при выводе динамических уравнений для автономных и неавтономных систем учитывались излучение двойной звезды, доплеровское смещение и перераспределение энергии. Анализ кривых нулевой скорости (ZVC) показал, что под воздействием радиационного давления область движения незначительно расширяется, тогда как с увеличением массы «запрещенные зоны» расширяются. При расчетах в оскулирующих элементах мы отслеживаем не "быстрые" переменные, а "медленно" меняющиеся параметры (форму орбиты). Это позволяет повысить точность вычислений и использовать более крупный шаг интегрирования. Применение данного метода, особенно в сочетании с гамильтоновой механикой и каноническими преобразованиями, является наиболее эффективным подходом для таких сложных систем, как TRAPPIST-1. Метод крайне удобен для использования канонической теории возмущений. Запись гамильтониана в координатах Якоби значительно упрощает разложение функции возмущения.

Методология исследования

Оскулирующие переменные в координатах Якоби. Используя уравнение движения, определенное в [14, формула 15] для неизотропной экзопланетной системы TRAPPIST-1 с переменной массой и семью планетами в присутствии реактивных сил,

$$\mu_i \ddot{\vec{r}}_i = \text{grad}_{\vec{r}_i} U - \mu_i \ddot{\vec{\Phi}}_i + \mu_i \ddot{\vec{F}}_i; \quad (1)$$

где

$$\ddot{\vec{\Phi}}_i = \sum_{i=1}^7 (2\dot{\nu}_i \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\nu}_i \vec{r}_i); \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (2)$$

перепишем в виде

$$\mu_i \ddot{\vec{r}}_i = \text{grad}_{\vec{r}_i} \left(f \frac{m_i \sigma_{i-1}}{r_i} \right) + b_i \vec{r}_i + \text{grad}_{\vec{r}_i} B_i, \quad (3)$$

где

$$B_i = U - V_i - f \frac{m_i \sigma_{i-1}}{r_i} - \frac{1}{2} b_i r_i^2 + A_i. \quad (4)$$

$$U = f \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad i \neq j \quad (5)$$

$$(2) \rightarrow \ddot{\vec{\Phi}}_i = V_i;$$

$$V_i = \mu_i \left\{ \sum_{i=1}^7 [(2\dot{\nu}_i \dot{x}_i + \ddot{\nu}_i x_i) x_j + (2\dot{\nu}_i \dot{y}_i + \ddot{\nu}_i y_i) y_j + (2\dot{\nu}_i \dot{z}_i + \ddot{\nu}_i z_i) z_j] \right\}, \quad (6)$$

$$b = \mu_i \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i}, \quad \gamma_i = \gamma_i(t) = \frac{m_i(t_0)}{m_i(t)} \cdot \frac{\sigma_{i-1}(t_0)}{\sigma_{i-1}(t)} \cdot \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)} = \frac{\sigma_i(t_0)}{\sigma_i(t)}, \quad (7)$$

$$A_i = \mu_i \sum_{i=1}^7 (F_{ix} x_i + F_{iy} y_i + F_{iz} z_i), \text{ - реактивная сила.} \quad (8)$$

В уравнениях (3) переходим к квазисферическим координатам $\rho_i, \varphi_i, \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$x_i = \gamma_i \rho_i \cos \varphi_i \cos \theta_i, \quad y_i = \gamma_i \rho_i \cos \varphi_i \sin \theta_i, \quad z_i = \gamma_i \rho_i \sin \varphi_i, \quad (9)$$

$$\gamma_i = \gamma_i(t) = \frac{m_i(t_0)}{m_i(t)} \cdot \frac{\sigma_{i-1}(t_0)}{\sigma_{i-1}(t)} \cdot \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)} = \frac{\sigma_i(t_0)}{\sigma_i(t)}, \quad (10)$$

Так как

$$\sigma_i(t) = \sigma_i = m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_i.$$

Тогда уравнения движения в канонических переменных [9]

$$\begin{aligned} \rho_i, \quad P_{\rho_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\rho}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \dot{\rho}_i + \mu_i \gamma_i \dot{\gamma}_i \rho_i, \\ \varphi_i, \quad P_{\varphi_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\varphi}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \dot{\varphi}_i, \\ \theta_i, \quad P_{\theta_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\theta}_i} = \mu_i \gamma_i^2 \rho_i^2 \cos^2 \varphi_i \dot{\theta}_i, \end{aligned} \quad (11)$$

можно написать в следующей форме

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\rho_i}}, & \dot{P}_{\rho_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \rho_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\rho_i}, \\ \dot{\phi}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\phi_i}}, & \dot{P}_{\phi_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \phi_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\phi_i}, \\ \dot{\theta}_i &= \frac{\partial H_i}{\partial P_{\theta_i}}, & \dot{P}_{\theta_i} &= -\frac{\partial H_i}{\partial \theta_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\theta_i},\end{aligned}\tag{12}$$

соответственно

$$H_i = \frac{1}{2\mu_i\gamma_i^2} \left[\left(P_{\rho_i} - \mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i\rho_i \right)^2 + \frac{P_{\phi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{P_{\theta_i}^2}{\rho_i^2 \cos^2 \phi_i} \right] - U_i^*,\tag{13}$$

$$U_i^* = f \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\gamma_i\rho_i} + \frac{1}{2} (b_i\gamma_i^2 + \mu_i\dot{\gamma}_i^2) \rho_i^2 + B_i.\tag{14}$$

Вводя новые импульсы

$$P_{\rho_i} = \psi_i \tilde{P}_{\rho_i}, \quad P_{\phi_i} = \psi_i \tilde{P}_{\phi_i}, \quad P_{\theta_i} = \psi_i \tilde{P}_{\theta_i},\tag{15}$$

$$\psi_i = \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)},$$

напишем уравнения движения в канонической форме

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\rho_i}}, & \dot{\phi}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\phi_i}}, & \dot{\theta}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\theta_i}}, \\ \dot{\tilde{P}}_{\rho_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \rho_i}, & \dot{\tilde{P}}_{\phi_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \phi_i}, & \dot{\tilde{P}}_{\theta_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \theta_i},\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$\tilde{H}_i = \tilde{H}_{i0} + \tilde{H}_{i1},\tag{17}$$

В случае

$$\tilde{H}_i = \tilde{H}_{i0},\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_{i0}}{\partial \tilde{P}_{\rho_i}}, & \dot{\phi}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_{i0}}{\partial \tilde{P}_{\phi_i}}, & \dot{\theta}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_{i0}}{\partial \tilde{P}_{\theta_i}}, \\ \dot{\tilde{P}}_{\rho_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_{i0}}{\partial \rho_i}, & \dot{\tilde{P}}_{\phi_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_{i0}}{\partial \phi_i}, & \dot{\tilde{P}}_{\theta_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_{i0}}{\partial \theta_i},\end{aligned}\tag{19}$$

Уравнение невозмущенного движение интегрируется методом Гамильтона-Якоби

$$\tilde{H}_{i0} = \frac{\psi_i}{2\mu_i\gamma_i^2} \left[\left(\tilde{P}_{\rho_i} - \frac{\mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i}{\psi_i} \rho_i \right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\phi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_i}^2}{\rho_i^2 \cos^2 \phi_i} \right] -\tag{20}$$

$$\begin{aligned}f \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\psi_i\gamma_i\rho_i} - \frac{1}{\psi_i} (b_i\gamma_i^2 + \mu_i\dot{\gamma}_i^2) \rho_i^2, \\ \tilde{H}_{i1} = -\frac{1}{\psi_i} B_i.\end{aligned}\tag{21}$$

При $B_i = 0$ уравнения (12) - (16) интегрируется методом Гамильтона-Якоби [15], причем постоянные интегрирования

$$\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \quad (22)$$

Есть аналоги соответствующих элементов Якоби в классической задаче двух тел (точек) постоянной массы. Каждая система уравнений (12) - (16) определяет аperiodическое движение по квазиконическому сечению

$$\rho_i = \frac{p_i}{1 + e_i \cos \nu_i}, \quad \nu_i = u_i - \omega_i, \quad p_i = a_i(1 - e_i^2), \quad (23)$$

$$\dot{\rho}_i = \frac{1}{\mu_{i0} \gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\beta_i}{\sqrt{p_i}} e_i \sin \nu_i, \quad \dot{u}_i = \frac{1}{\mu_{i0} \gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\beta_i \sqrt{p_i}}{\rho_i^2}, \quad (24)$$

$$\beta_i^2 = f \cdot \mu_i(t_0) m_i(t_0) \sigma_{i-1}(t_0), \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\nu_i}{2} = \frac{\sqrt{1+e_i}}{\sqrt{1-e_i}} \operatorname{tg} \frac{E_i}{2}, \quad e_i < 1, \quad (26)$$

$$E_i - e_i \sin E_i = M_i, \quad (27)$$

$$M_i = n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)], \quad n_i = \frac{\beta_i}{\mu_{i0} a_i^{3/2}}, \quad (28)$$

где $\phi_i(t)$ первообразная функции $\gamma_i^{-2}(t)$. В прямоугольных системах координат Якоби выражения координат и скорости промежуточных движений даются формулами

$$\begin{aligned} x_i &= \gamma_i \rho_i (\cos u_i \cos \Omega_i - \sin u_i \sin \Omega_i \cos i_i), \\ y_i &= \gamma_i \rho_i (\cos u_i \sin \Omega_i + \sin u_i \cos \Omega_i \cos i_i), \\ z_i &= \gamma_i \rho_i (\sin u_i \sin i_i), \quad r_i = \gamma_i \rho_i, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) x_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i (-\sin u_i \cos \Omega_i - \cos u_i \sin \Omega_i \cos i_i), \\ \dot{y}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) y_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i (-\sin u_i \sin \Omega_i + \cos u_i \cos \Omega_i \cos i_i), \\ \dot{z}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) z_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i (\cos u_i \sin i_i), \quad u_i = \nu_i + \omega_i. \end{aligned} \quad (30)$$

Величины

$$a_i, e_i, \omega_i, \Omega_i, i_i, \phi_i(\tau_i) \quad (31)$$

элементы орбиты – аналоги соответствующих кеплеровских элементов, причем

$$\begin{aligned} -2\alpha_{1i} &= \frac{\beta_i^2}{\mu_{i0}a_i}, \quad a_{2i} = \beta_i\sqrt{p_i}, \quad a_{3i} = \beta_i\sqrt{p_i}\cos i_i, \\ \beta_{1i} &= -\phi_i(\tau_i), \quad \beta_{2i} = \omega_i, \quad \beta_{3i} = \Omega_i. \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнения (12) - (17) в системе переменных (18), как уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{\alpha}_{ki} = \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial \beta_{ki}}, \quad \dot{\beta}_{ki} = -\frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial \alpha_{ki}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (33)$$

где

$$\tilde{R}_i = \frac{1}{\psi_i} R_i(t, \alpha_{ki}, \beta_{ki}). \quad (34)$$

Введем аналоги элементов Делоне

$$L_i, \quad G_i, \quad H_i, \quad l_i, \quad g_i, \quad h_i \quad (35)$$

посредством формул

$$\begin{aligned} -2\alpha_{1i} &= \frac{\beta_i^4}{\mu_{i0}L_i^2}, \quad a_{2i} = G_i, \quad a_{3i} = H_i, \\ \beta_{1i} &= \frac{l_i}{n_i} - \phi_i(t), \quad \beta_{2i} = g_i, \quad \beta_{3i} = h_i. \end{aligned} \quad (36)$$

Результат исследования

Уравнение возмущенного движения в аналогах элементов Делоне (31) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial l_i}, \quad \dot{G}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial g_i}, \quad \dot{H}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial h_i}, \\ \dot{l}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial L_i}, \quad \dot{g}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial G_i}, \quad \dot{h}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial H_i}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$R_i^* = \frac{1}{\gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\beta_i^4}{2\mu_{i0}L_i^2} + \tilde{R}_i. \quad (38)$$

Дискуссия

Прежде всего необходимо подчеркнуть математическую и динамическую сложность моделирования многопланетных экосистем, в частности, таких компактных семипланетных структур, как TRAPPIST-1. Применение в данной работе системы координат Якоби позволило существенно упростить аналитическую структуру задачи.

Однако специфической особенностью рассматриваемой системы TRAPPIST-1 является то, что массы составляющих её тел изменяются с течением времени (переменная масса), причем этот процесс носит не изотропный характер. Не изотропное рассеяние массы приводит к возникновению в системе дополнительных реактивных сил, что нарушает классические законы сохранения и выводит уравнения движения за рамки чисто ньютоновского гравитационного взаимодействия. Учет влияния этих реактивных сил при построении системы дифференциальных уравнений составляет основную научную новизну и главную трудность данного исследования.

Примененный в работе метод оскулирующих переменных позволяет получить не только чисто математическое решение уравнений движения, но и дает их глубокую

геометрическую и астрофизическую интерпретацию. Вводя оскулирующие элементы в качестве переменных, изменяющихся во времени, мы получаем возможность в динамике проследить эволюцию таких параметров, как эксцентриситет, большая полуось и пространственная ориентация орбит (наклонение, долгота восходящего узла). Это имеет важное значение для анализа долгосрочной орбитальной стабильности таких резонансных систем, как TRAPPIST-1.

Важнейшим теоретическим результатом работы следует считать построение канонической теории возмущений на основе полученных уравнений движения, а также вывод аналогов элементов Якоби и Делоне.

В конечном счете, возможность перехода к барицентрической системе координат позволяет рассматривать разработанную модель не просто как частное научное исследование системы TRAPPIST-1, а как универсальный математический аппарат, предназначенный для высокоточного расчета динамики любых многопланетных систем, находящихся на стадиях потери массы или аккреции.

Заключение

Исходя из уравнений движения задачи, полученных в координатах Якоби на базе соответствующих апериодических движений по квазиконическому сечению, строится каноническая теория возмущений. Получены уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Якоби, Делоне. На основе полученных уравнений можно использовать теорию возмущений.

Список использованных источников

- [1] Perminov A.S., Kuznetsov E.D. The Implementation of Hori–Deprit Method to the Construction Averaged Planetary Motion Theory by Means of Computer Algebra System Piranha // *Mathematics in Computer Science*. – 2020. – Vol. 14, № 2. – P. 305-316. <https://doi.org/10.1007/s11786-019-00441-4>
- [2] Perminov A.S., Kuznetsov E.D. The orbital evolution of the Sun–Jupiter–Saturn–Uranus–Neptune system on long timescales// *Astrophysics and Space Science*. – 2020. – Vol. 365, № 144, - P.21. <https://doi.org/10.1007/s10509-020-03855-w>
- [3] David Arnas. Analytic transformation from osculating to mean elements under J2 perturbation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2023. - Vol.46, №11, P.2150-2158. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.08746>
- [4] Maxwell X. C., Simon P.Z., Damian P. Neural Symplectic Integrator with Hamiltonian Inductive Bias for the Gravitational N-body Problem // *Instrumentation and Methods for Astrophysics*.-2021.- P.7. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.15631>
- [5] Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д. Разложение гамильтониана в ряд Пуассона по всем элементам // *Астрономический вестник*. – 2001. – Т.35, №3. – С. 243-248. <https://doi.org/10.1023/A:1010487107989>
- [6] Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Разложение гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: применение пуассоновского процессора // *Астрономический вестник*. – 2004. – Т. 38, № 2. – С. 147–154. <https://doi.org/10.1023/B:SOLS.0000022825.93837.7d>
- [7] Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Динамическая эволюция слабовозмущенной двупланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце–Юпитер–Сатурн // *Астрономический вестник*. – 2006. – Т. 40, № 3. – С. 239-250. DOI: [10.1134/S0038094606030087](https://doi.org/10.1134/S0038094606030087)
- [8] Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Орбитальная эволюция двупланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн // *Вестник СПбГУ*. – 2009. – Т. 1. – С. 139-150. <https://cyberleninka.ru/article/n/orbitalnaya-evolyutsiya-dvuplanetnoy-sistemy-solntse-yupiter-saturn>
- [9] Минглибаев М.Дж. – Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение / LAP LAMBERT Academic Publishing. - 2012. P.224.

[10] Prokopenya, A.N., Minglibayev, M. Zh. & Mayemerova, G.M. Symbolic calculations in studying the problem of three bodies with variable masses. *Program Computer Soft.* – 2014. – Vol. 40, №2. – P.79-85. <https://doi.org/10.1134/S036176881402008X>

[11] Minglibayev, M.Zh., Mayemerova, G.M., Imanova, Zh.U. Secular perturbations in the three-body problem with masses changing anisotropically at the different rates// *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series.* - 2016.- Vol.84, №4. P.94–98. <https://doi.org/10.31489/2016m4/94-98>

[12] Oni Leke., Jagadish Singh. Out-of-plane equilibrium points of extra-solar planets in the central binaries PSR B1620-26 and Kepler-16 with clusters of material points and variable masses//*New Astronomy.*- 2023.- Vol.99. P.101958. <https://doi.org/10.1016/j.newast.2022.101958>

[13] Oni Leke., Tajudeen Oluwafemi Amuda. Instability of In-plane Equilibrium Points of the Restricted Three-Body Problem with P-R Drag and Variable Masses//*Proceedings of the International Astronomical Union.* - 2024.- Vol.20.-P. 105 – 113. DOI: <https://doi.org/10.1017/S174392132500047X>

[14] Минглибаев М.Дж., Сапарова М.Р., Уравнения движения экзопланетной системы TRAPPIST-1 с переменными массами в системе координат Якоби // *Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан.*- 2026.-Т.99, №1. С.219-228. DOI: <https://doi.org/10.47533/2026.1606-146X.1-18>

[15] Минглибаев М.Дж. К канонической теории возмущений в небесной механике тел переменной массы.// *Труды АФИ АН КазССР.* – Алма-Ата: Фылым, 1992. – Т.50. – С.71-78. <https://elibrary.kaznu.kz/wp-content/uploads/2025/11/minglibaev-m.d.-teoriya-vozmushheniya-na-baze-aperiodicheskogo-dvizheniya-po-kvazikonicheskomu-secheniyu.pdf>

References

[1] Perminov A. S., Kuznetsov E. D. The Implementation of Hori–Deprit Method to the Construction Averaged Planetary Motion Theory by Means of Computer Algebra System Piranha // *Mathematics in Computer Science.* – 2020. – Vol. 14, № 2. – P. 305-316. <https://doi.org/10.1007/s11786-019-00441-4>

[2] Perminov A. S., Kuznetsov E. D. The orbital evolution of the Sun–Jupiter–Saturn–Uranus–Neptune system on long timescales // *Astrophysics and Space Science.* – 2020. – Vol. 365, № 144. – P. 21. <https://doi.org/10.1007/s10509-020-03855-w>

[3] Arnas David. Analytic transformation from osculating to mean elements under J2 perturbation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* – 2023. – Vol. 46, № 11. – P. 2150-2158. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.08746>

[4] Maxwell X. C., Simon P. Z., Damian P. Neural Symplectic Integrator with Hamiltonian Inductive Bias for the Gravitational N-body Problem // *Instrumentation and Methods for Astrophysics.* – 2021. – P.7. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.15631>

[5] Kholshevnikov K. V., Greb A. V., Kuznetsov E. D. Razlozhenie gamil'toniana v ryad Puassona po vsem elementam [Expansion of the Hamiltonian in a Poisson series in terms of all elements] // *Astronomicheskii vestnik.* – 2001. – Vol. 35, № 3. – P. 243-248. <https://doi.org/10.1023/A:1010487107989> – (In Russian).

[6] Kuznetsov E. D., Kholshevnikov K. V. Razlozhenie gamil'toniana dvuplanetnoi zadachi v ryad Puassona po vsem elementam: primeneniye puassonovskogo processora [Expansion of the Hamiltonian of a two-planet problem into a Poisson series in all elements: application of a Poisson processor] // *Astronomicheskii vestnik.* – 2004. – Vol. 38, № 2. – P. 147–154. <https://doi.org/10.1023/B:SOLS.0000022825.93837.7d> – (In Russian).

[7] Kuznetsov E. D., Kholshevnikov K. V. Dinamicheskaya evolyuciya slabovozmushchennoi dvuplanetnoi sistemy na kosmogonicheskom intervale vremeni: sistema Solnce–Yupiter–Saturn [Dynamical evolution of a weakly perturbed two-planet system on a cosmogonic time interval: the Sun–Jupiter–Saturn system] // *Astronomicheskii vestnik.* – 2006. – Vol. 40, № 3. – P. 239-250. – DOI: [10.1134/S0038094606030087](https://doi.org/10.1134/S0038094606030087) – (In Russian).

[8] Kuznetsov E. D., Kholshevnikov K. V. Orbital'naya evolyuciya dvuplanetnoi sistemy Solnce – Yupiter – Saturn [Orbital evolution of the two-planet system Sun–Jupiter–Saturn] // *Vestnik SPbGU.* – 2009. – Vol. 1. – P. 139-150. <https://cyberleninka.ru/article/n/orbitalnaya-evolyutsiya-dvuplanetnoy-sistemy-solntse-yupiter-saturn>. – (In Russian).

[9] Minglibayev M.Zh. Dinamika gravitiruyushchih tel s peremennymi massami i razmerami. Postupatel'noe i postupatel'no-vraschatel'noe dvizhenie [Dynamics of gravitating bodies with variable

masses and sizes. Translational and translational-rotational motion]. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – P.224. – (In Russian).

[10] Prokopenya A. N., Minglibayev M. Zh., Mayemerova G. M. Symbolic calculations in studying the problem of three bodies with variable masses // *Programming and Computer Software*. – 2014. – Vol. 40, № 2. – P. 79-85. DOI: [10.1134/S036176881402008X](https://doi.org/10.1134/S036176881402008X)

[11] Minglibayev M. Zh., Mayemerova G. M., Imanova Zh. U. Secular perturbations in the three-body problem with masses changing anisotropically at the different rates // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. – 2016. – Vol. 84, № 4. – P. 94–98. DOI: [10.31489/2016m4/94-98](https://doi.org/10.31489/2016m4/94-98).

[12] Oni Leke, Jagadish Singh. Out-of-plane equilibrium points of extra-solar planets in the central binaries PSR B1620-26 and Kepler-16 with clusters of material points and variable masses // *New Astronomy*. – 2023. – Vol. 99. – P. 101958. DOI: [10.1016/j.newast.2022.101958](https://doi.org/10.1016/j.newast.2022.101958)

[13] Oni Leke, Tajudeen Oluwafemi Amuda. Instability of In-plane Equilibrium Points of the Restricted Three-Body Problem with P-R Drag and Variable Masses // *Proceedings of the International Astronomical Union*. – 2024. – Vol. 20. – P. 105 – 113. DOI: [10.1017/S174392132500047X](https://doi.org/10.1017/S174392132500047X).

[14] Minglibayev M. Zh., Saparova M. R. Uravneniya dvizheniya ekzoplanetnoi sistemy TRAPPIST-1 s peremennymi massami v sisteme koordinat Yakobi [Equations of motion of the TRAPPIST-1 exoplanetary system with variable masses in the Jacobi coordinate system] // *Vestnik Nacional'noi inzhenernoi akademii Respubliki Kazakhstan*. – 2026. – Vol. 99, № 1. – P. 219-228. DOI: <https://doi.org/10.47533/2026.1606-146X.1-18> – (In Russian).

[15] Minglibayev M. Zh. K kanonicheskoi teorii vozmushchenii v nebesnoi mehanike tel peremennoi massy [On the canonical perturbation theory in celestial mechanics of bodies with variable mass] // *Trudy AFI AN KazSSR*. – Alma-Ata: Gylym, 1992. – Vol. 50. – P. 71-78. <https://elibrary.kaznu.kz/wp-content/uploads/2025/11/minglibayev-m.d.-teoriya-vozmushheniya-na-baze-aperiodicheskogo-dvizheniya-po-kvazikonicheskomu-secheniyu.pdf> – (In Russian).