

Рысқан А.Р.^{1,2} , Абдрахман Б.Қ.^{*3} , Айнакеева Н. Ж.^{1,4} 

¹Нархоз Университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Калифорния университеті, Дэвис, АҚШ

³Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

⁴У.А.Джолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: balnurabdrakhman584@gmail.com

ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫ ҮШІН ЕКІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ШЕШУ

Аңдатпа

Бұл мақалада төрт айнымалыдан тәуелді гипергеометриялық функцияларына қатысты екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылады. Мұндай функциялар қазіргі математиканың әртүрлі маңызды салаларында, мысалы, математикалық физика, ішектер теориясы және механикада кеңінен қолданылады. Атап айтқанда, көп айнымалы гипергеометриялық функциялардың дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы сипатталуы олардың құрылымдық қасиеттерін, шекаралық шарттардағы шешімдерінің бар-жоғын түсінуге мүмкіндік береді. Бұл жұмыста Экстон енгізген көп айнымалы гипергеометриялық функциялар класына жататын функцияларының шешімдері сипатталады. Зерттеу барысында аталған функциялар класы үшін дифференциалдық операторлар құрылып, олардың фундаментальды шешімдерінің аналитикалық сипаттамалары алынды. Алынған нәтижелер көп айнымалы функциялардың қолданбалы есептердегі ролін тереңірек түсінуге мүмкіндік береді. Бұл мақаланың қорытынды нәтижелері көп айнымалы функциялардың заманауи қолданбалы есептердегі маңызды ролін айқындап, математикалық модельдеу саласындағы жаңа ізденістерге жол ашады. Есептеулерде алынған шешімдердің нақтылығы мен негізділігі классикалық дифференциалдық теңдеулер теориясының әдістерімен дәлелденген.

Түйін сөздер: гипергеометриялық қатарлар, төрт айнымалы гипергеометриялық функциясы, Экстон гипергеометриялық функциялары, жүйенің сызықтық тәуелсіз шешімдері.

Рысқан А.Р.^{1,2}, Абдрахман Б.Қ.^{*3}, Айнакеева Н. Ж.^{1,4}

¹Университет Нархоз, г.Алматы, Казахстан

²Калифорнийский университет, Дэвис, США

³Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

⁴Институт механики и машиноведения им.академика У.А.Джолдасбекова, г.Алматы, Казахстан

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, связанных с гипергеометрическими функциями четырех переменных $F_{24}^{(4)}$ $F_{25}^{(4)}$. Такие функции находят широкое применение в различных важных областях современной математики, таких как математическая физика, теория струн и механика. Особое внимание уделяется описанию многомерных гипергеометрических функций с помощью систем дифференциальных уравнений, что позволяет исследовать их внутреннюю структуру и анализировать существование решений при различных граничных условиях. В данной работе изучаются функции $F_{24}^{(4)}$ $F_{25}^{(4)}$, принадлежащие классу многомерных гипергеометрических функций, введенному Экстоном. В ходе исследования были построены соответствующие дифференциальные операторы для этого класса функций и получены аналитические формулы для их фундаментальных решений. Представленные результаты демонстрируют важность многомерных гипергеометрических функций для решения современных прикладных задач и указывают на перспективные направления дальнейших исследований в области

математического моделирования. Надежность и точность полученных вычислительных результатов подтверждаются методами классической теории дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: гипергеометрический ряд, гипергеометрическая функция четырех переменных, гипергеометрические функции Экстона, линейно независимые решения системы.

Ryskan A.R.^{1,2}, Abdrakhman B.K.^{*3}, Ainakeyeva N.Zh^{1,4}

¹Narxoz University, Almaty, Kazakhstan

²UC Davis, Davis, USA

³Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

⁴Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan

SOLVING A SYSTEM OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Abstract

This research focuses on the analysis of a second-order system of partial differential equations linked with the four-variable hypergeometric functions $F_{24}^{(4)}$ $F_{25}^{(4)}$. These specific functions play a critical role in numerous branches of contemporary mathematics and theoretical physics, notably in quantum mechanics and string theory. By treating multidimensional hypergeometric functions within the framework of differential systems, this work explores their structural properties and evaluates solution behavior under specific boundary constraints. The subject of this inquiry involves the function classes $F_{24}^{(4)}$ and $F_{25}^{(4)}$ originally proposed by Exton. Throughout this investigation, distinct differential operators were established for the aforementioned functions, enabling the derivation of exact analytical expressions for their fundamental solutions. The outcomes highlighted in this paper underscore the significance of multivariate hypergeometric functions in addressing contemporary applied problems and open up new avenues for mathematical modeling. Ultimately, the validity of the computed data is rigorously verified through classical techniques of differential equation theory.

Keywords: hypergeometric series, four-variable hypergeometric function, Exton hypergeometric functions, linearly independent solutions of the system.

Кіріспе

Гипергеометриялық функциялар математикалық талдаудың маңызды салаларының бірі болып табылатын арнайы функциялар теориясының негізін құрайды [1, 2]. Бұл функциялар алғаш рет XVIII ғасырда Леонард Эйлер мен Карл Фридрих Гаусстың еңбектерінде кездескен [1,2]. 1812 жылы Гаусс бір айнымалының $F_1(a,b,c,z)$ классикалық гипергеометриялық функциясын қарастырып, оның қасиеттерін, сондай-ақ дифференциалдық тендеулермен байланысын зерттеді [1, 2]. Кейіннен бұл теория XX ғасырда Куммер мен Риманның еңбектерінде тереңірек зерттелді [2]. Гипергеометриялық функцияларды көп айнымалыға кеңейту XX ғасырдың басында басталып, кейіннен жаңа бағыттардың дамуымен өрістей түсті [3]. Бұл салада Аппель (екі айнымалы функциялар), Лауричелла ($F_A^{(n)}, F_B^{(n)}, F_C^{(n)}, F_D^{(n)}$, көп айнымалы функциялар) Және Хорн [4] айтарлықтай үлес қосты. XX ғасырдың екінші жартысында Шривастава мен Экстонның еңбектерінде олардың қасиеттері мен қолдану аясын едәуір кеңейте отырып, көп айнымалы гипергеометриялық функциялардың жаңа кластары енгізілді [5, 6]. Атап айтқанда, Экстон екі, үш және төрт айнымалыға байланысты гипергеометриялық функциялардың толық жүйелерін ұсынды [7]. Ол көп айнымалы функцияларды $K_1, K_2, K_3, \dots, K_{21}$ белгіленген функциялар арқылы жіктеді және әр класс үшін сәйкес дифференциалдық тендеулер жүйесін құрды [8], [9]. Алайда, көп айнымалы гипергеометриялық функциялардың жаңа түрлеріне сәйкес келетін дифференциалдық тендеулер жүйесінің жалпы шешімдерін табу және математикалық физиканың шеттік есептеріне қолдану мәселелері әлі де толық шешімін таппаған. Қазіргі математикалық талдау мен математикалық физика есептерін шешуде көп айнымалы гипергеометриялық функцияларды қолдану қажеттілігі туындап отыр. Бұл зерттеудің өзектілігі көп айнымалы

гипергеометриялық функциялардың жалпы теориясын одан әрі дамыту, олардың жүйелік қасиеттерін анықтау және қолдану аясын кеңейту қажеттілігімен айқындалады.

Аппель мен Лауричелланың классикалық еңбектерінде [3], Шриваставаның жалпыланған модельдерінде [6] және соңғы уақыттағы шеттік есептерге арналған зерттеулерде қарастырылған дәстүрлі тәсілдермен салыстырғанда, бұл зерттеуде қарастырылатын теңдеулер жүйесінің құрылымы кеңейтілген, олардың шешімдері тек белгеле бір нүктеде емес, жалпыланған сингулярлық жүйе аясында толық сипатталған. Бұл зерттеуде $F_{24}^{(4)}$ $F_{25}^{(4)}$ функцияларына сәйкес дифференциалдық теңдеулер жүйесі құрылады, олардың шешімдерінің қасиеттері зерттеледі [10]. Бұл жұмыстың мақсаты-гипергеометриялық функциялар теориясы аясында көп айнымалы функциялармен байланысты теңдеулер жүйесін шешу әдістерін ұсыну және олардың қолданылу маңызын көрсету. Алынған нәтижелер болашақта математикалық модельдерді және көп айнымалы гипергеометриялық функцияларды қамтитын шеттік есептерді шешу үшін пайдалы болуы мүмкін [11–15]. Соңғы жылдары көп айнымалы гипергеометриялық функциялардың шешімдер кеңістігін құру, аналитикалық жалғастыру формулаларын алу және дифференциалдық қатынастарын зерттеу бағытында бірқатар жұмыстар жарияланды [16–18]. Бұл зерттеулер Лауричелла типті функциялардың аналитикалық қасиеттерін тереңірек түсінуге және олардың дифференциалдық теңдеулер жүйелерін шешу әдістерін дамытуға мүмкіндік береді.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Бұл зерттеуде төрт айнымалы гипергеометриялық $F_{24}^{(4)}$ және $F_{25}^{(4)}$ функцияларына сәйкес екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылып, оның төрт сызықтық тәуелсіз шешімі **алғаш рет** аналитикалық түрде алынды. Алынған шешімдер Лауричелла типті гипергеометриялық функциялар арқылы өрнектеліп, олардың аналитикалық қасиеттері зерттелді.

Зерттеу әдістемесі

Бұл зерттеуде төрт айнымалыға байланысты гипергеометриялық $F_{24}^{(4)}$ $F_{25}^{(4)}$ функция үшін екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің аналитикалық әдістері қолданылады. Бұл функциялар арнайы дифференциалдық жүйелердің шешімдері бола отырып, физика мен қолданбалы математикадағы көптеген есептерді шешудің тиімді құралы бола алады. Жүргізілген талдау олардың симметрияларын, аналитикалық қасиеттерін, құрылымдық ерекшеліктерін одан әрі зерттеуге негіз болады. Экстон енгізген Лауричелла типіндегі гипергеометриялық функциялар үшін сәйкес дифференциалдық теңдеулер жүйесі құрылады, содан кейін алгебралық түрлендірулерді қолдана отырып стандартты екінші ретті түрге айналады. Шешімдер айнымалыларды дәрежелі алмастыру әдісі арқылы ізделеді. Лауричелла функциясының жіктеу формулаларын қолдану арқылы бұл шешімдер бір айнымалы Гаусс гипергеометриялық функцияларының көбейтіндісі түрінде өрнектеледі. Нәтижесінде теңдеулер жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдері алынады. Ұсынылып отырған әдіс көптеген айнымалылардың арнайы функциялары теориясының ішкі құрылымын тереңірек түсінуге және жаңа аналитикалық формаларды іздеуге перспективалы жолдар ашады.

Зерттеу нәтижелері

$F_{24}^{(4)}$ $F_{25}^{(4)}$ функцияларының дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі Гипергеометриялық $F_{24}^{(4)}$ функциясын қарастырайық:

$$F_{24}^{(4)}(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t) = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_q}{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}, \quad (1)$$

Мұндағы: $c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$; және $i = 1, \dots, 3$.

Алдымен, Кампэ-де-Ферье қатарын қолданамыз, [4],

$$\begin{aligned} A_{m,n,p,q} &= \frac{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_q}{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_p m! n! p! q!} \\ A_{m+1,n,p,q} &= \frac{(a_1)_{m+n+p+1} (a_2)_q (b_1)_{m+n+1} (b_2)_p (b_3)_q}{(c_1)_{m+1} (c_2)_{n+q} (c_3)_p (m+1)! n! p! q!} \\ A_{m,n+1,p,q} &= \frac{(a_1)_{m+n+p+1} (a_2)_q (b_1)_{m+n+1} (b_2)_p (b_3)_q}{(c_1)_m (c_2)_{n+q+1} (c_3)_p m! (n+1)! p! q!} \\ A_{m,n,p+1,q} &= \frac{(a_1)_{m+n+p+1} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_{p+1} (b_3)_q}{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_{p+1} m! n! (p+1)! q!} \\ A_{m,n,p,q+1} &= \frac{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_{q+1} (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_{q+1}}{(c_1)_m (c_2)_{n+q+1} (c_3)_p m! n! p! (q+1)!} \end{aligned} \quad (2)$$

Мұндағы $A_{m,n,p,q}$ Кампэ-де-Ферье қатарының коэффициенттері, ал,

$a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t$ параметрлер [12].

$$\begin{aligned} \frac{A_{m+1,n,p,q}}{A_{m,n,p,q}} &= \frac{(a_1)_{m+n+p+1} (a_2)_q (b_1)_{m+n+1} (b_2)_p (b_3)_q}{(c_1)_{m+1} (c_2)_{n+q} (c_3)_p (m+1)! n! p! q!} \frac{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_p m! n! p! q!}{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_q} \\ \frac{A_{m,n+1,p,q}}{A_{m,n,p,q}} &= \frac{(a_1)_{m+n+p+1} (a_2)_q (b_1)_{m+n+1} (b_2)_p (b_3)_q}{(c_1)_m (c_2)_{n+q+1} (c_3)_p m! (n+1)! p! q!} \frac{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_p m! n! p! q!}{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_q} \\ \frac{A_{m,n,p+1,q}}{A_{m,n,p,q}} &= \frac{(a_1)_{m+n+p+1} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_{p+1} (b_3)_q}{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_{p+1} m! n! (p+1)! q!} \frac{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_p m! n! p! q!}{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_q} \\ \frac{A_{m,n,p,q+1}}{A_{m,n,p,q}} &= \frac{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_{q+1} (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_{q+1}}{(c_1)_m (c_2)_{n+q+1} (c_3)_p m! n! p! (q+1)!} \frac{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_p m! n! p! q!}{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_q} \end{aligned} \quad (3)$$

(2) қатардан m -ге байланысты коэффициенттердің бір бағыттағы рекурренттік қатынасын

(3) аламыз, m, n, p, q :

$$\begin{aligned} \frac{A_{m+1,n,p,q}}{A_{m,n,p,q}} &= \frac{(a_1 + m + n + p)(b_1 + m + n)}{(c_1 + m)(m + 1)} \\ \frac{A_{m,n+1,p,q}}{A_{m,n,p,q}} &= \frac{(a_1 + m + n + p)(b_1 + m + n)}{(c_2 + n + q)(n + 1)} \\ \frac{A_{m,n,p+1,q}}{A_{m,n,p,q}} &= \frac{(a_1 + m + n + p)(b_2 + p)}{(c_3 + p)(p + 1)} \\ \frac{A_{m,n,p,q+1}}{A_{m,n,p,q}} &= \frac{(a_2 + q)(b_3 + q)}{(c_2 + n + q)(q + 1)} \end{aligned} \quad (4)$$

Мұндағы $m = x \frac{\partial}{\partial x}$, $n = y \frac{\partial}{\partial y}$, $p = z \frac{\partial}{\partial z}$, $q = t \frac{\partial}{\partial t}$ дифференциалдық операторлар ретінде анықталады.

Көп айнымалы гипергеометриялық функциялар теориясына сәйкес, гипергеометриялық функциясы $F_{24}^{(4)}$ үшін дербес туындылы теңдеулер жүйесі келесідей беріледі:

$$\begin{aligned} & \left(c_1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) x^{-1} u - \left(a_1 + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(b_1 + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0 \\ & \left(c_2 + y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(y \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right) y^{-1} u - \left(a_1 + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(b_1 + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0 \\ & \left(c_3 + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(z \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) z^{-1} u - \left(a_1 + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(b_2 + z \frac{\partial}{\partial z} \right) u = 0 \\ & \left(c_2 + y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(t \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) t^{-1} u - \left(a_2 + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(b_3 + t \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(5)- теңдеулер жүйесіне қарапайым есептеулерді қолдана отырып, біз келесі екінші ретті дербес туындылы теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} - 2xyu_{xy} - zxu_{xz} - yyu_{yy} - yzu_{yz} + [c_1 - (a_1 + b_1 + 1)x]u_x - (a_1 + b_1 + 1)yu_y - b_1zu_z - a_1b_1u = 0 \\ y(1-y)u_{yy} + tu_{yt} - yzu_{yz} - xyu_{xy} - 2xyu_{xy} - zxu_{xz} + [c_2 - (a_1 + b_1 + 1)y]u_y - (a_1 + b_1 + 1)xu_x - b_1zu_z - a_1b_1u = 0 \\ z(1-z)u_{zz} - zxu_{xz} - yzu_{yz} + [c_3 - (a_1 + b_2 + 1)z]u_z - (xu_x + yu_y + a_1u)b_2 = 0 \\ t(1-t)u_{tt} + yu_{ty} + [c_2 - (a_2 + b_3 + 1)t]u_t - a_2b_3u = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Мұндағы: $u(x, y, z, t) = F_{24}^{(4)}(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t)$

Біз сызықтық тәуелсіз шешімдерді келесі түрде іздейміз:

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta w \quad (7)$$

Мұндағы, w белгісіз функция, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ анықталатын тұрақтылар. Жаңа айнымалыларды $x^\alpha, y^\beta, z^\gamma, t^\delta$ (5) жүйедегі u функциясының орнына қою арқылы дифференциалдық теңдеулердің келесі жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x(1-x)w_{xx} - yuw_{xy} - zxw_{xz} - 2xyw_{xy} - yzw_{yz} + [C_1 - (A_1 + B_1 + 1)x]w_x - \\ (A_1 + B_1 + 1)yw_y - B_1zw_z + [\alpha(c_1 + \alpha - 1)x^{-1} - A_1 \cdot B_1]w = 0 \\ y(1-y)w_{yy} - x^2w_{xx} - 2xyw_{xy} - xzw_{xz} - yzw_{yz} + tw_{yt} + [C_2 - (A_1 + B_1 + 1)y]w_y - \\ - (A_1 + B_1 + 1)xw_x - B_1zw_z + t\beta y^{-1}w_t + [\beta(c_2 + \beta + \delta - 1)y^{-1} - A_1 \cdot B_1]w = 0 \\ z(1-z)w_{zz} - xzw_{xz} - yzw_{yz} + [C_3 - (A_1 + B_2 + 1)z]w_z - B_2(xw_x + yw_y) + \\ + [(c_3 + \gamma - 1)\gamma z^{-1} - A_1B_2]w = 0 \\ (1-t)tw_{tt} + xw_{xt} + \delta t^{-1}xw_x + [C_4 - (A_2 + B_3 + 1)t]w_t + [\delta(c_2 + \beta + \delta - 1)t^{-1} - A_2B_3]w = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Мұндағы

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \alpha + \beta + \gamma + a_1 \\
 A_2 &= \delta + a_2 \\
 B_1 &= b_1 + \alpha + \beta, B_2 = b_2 + \gamma, B_3 = b_3 + \delta, \\
 C_1 &= c_1 + 2\alpha \\
 C_2 &= c_2 + 2\beta + \delta \\
 C_4 &= c_2 + \beta + 2\delta \\
 C_3 &= c_3 + 2\gamma
 \end{aligned} \tag{9}$$

Жоғарыдағы (6) жүйесі (8) жүйесіне ұқсас. Сондықтан, келесі шарттар орындалуы керек:

$$\begin{cases}
 \beta = 0 \\
 \delta = 0 \\
 \alpha(c_1 + \alpha - 1) = 0 \\
 \beta(c_2 + \beta + \delta - 1) = 0 \\
 \gamma(c_3 + \gamma - 1) = 0 \\
 \delta(c_2 + \beta + \delta - 1) = 0
 \end{cases} \tag{10}$$

(9) жүйесінің шешімдерін төрт комбинация түрінде жазуға болады:

	1	2	3	4
$\alpha:$	0	$1 - c_1$	0	$1 - c_1$
$\beta:$	0	0	0	0
$\gamma:$	0	0	$1 - c_3$	$1 - c_3$
$\delta:$	0	0	0	0

(11)

Осылайша, жүйенің (11) шешімдерін (7) – ке енгізіп, келесі гипергеометриялық функциялар түрінде төрт айнымалының (8) екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдерін аламыз:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta F_{24}^{(4)}(\alpha + \gamma + a_1, a_2, b_1 + \alpha, b_2 + \gamma, b_3; c_1 + 2\alpha, c_2, c_3 + 2\gamma; x, y, z, t) = \\
 &= \sum_{m, n, p, q=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \gamma + a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1 + \alpha)_{m+n} (b_2 + \gamma)_p (b_3)_q}{(c_1 + 2\alpha)_m (c_2)_{n+q} (c_3 + 2\gamma)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z, t) F_{24}^{(4)}(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t) = \\
 = \sum_{m, n, p, q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+n} (b_2)_p (b_3)_q}{(c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(x, y, z, t) &= x^{1-c_1} F_{24}^{(4)}(1 - c_1 + \gamma + a_1, a_2, b_1 + 1 - c_1, b_2 + \gamma, b_3; 2 - c_1, c_2, c_3 + 2\gamma; x, y, z, t) = \\
 &= \sum_{m, n, p, q=0}^{\infty} \frac{(1 - c_1 + \gamma + a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1 + 1 - c_1)_{m+n} (b_2 + \gamma)_p (b_3)_q}{(2 - c_1)_m (c_2)_{n+q} (c_3 + 2\gamma)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},
 \end{aligned}$$

$$u_3(x, y, z, t) = z^{1-c_3} t F_{24}^{(4)}(\alpha + \gamma + a_1, a_2, b_1 + \alpha, b_2 + 1 - c_3, b_3; c_1 + 2\alpha, c_2, 2 - c_3; x, y, z, t) =$$

$$= \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \gamma + a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1 + \alpha)_{m+n} (b_2 + 1 - c_3)_p (b_3)_q}{(c_1 + 2\alpha)_m (c_2)_{n+q} (2 - c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},$$

$$u_4(x, y, z, t) = x^{1-c_1} z^{1-c_3} F_{24}^{(4)}(1 - c_1 + 1 - c_3 + a_1, a_2, b_1 + 1 - c_1, b_2 + 1 - c_3, b_3; 2 - c_1, c_2, 2 - c_3; x, y, z, t) =$$

$$= \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(1 - c_1 + \gamma + a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1 + 1 - c_1)_{m+n} (b_2 + 1 - c_3)_p (b_3)_q}{(2 - c_1)_m (c_2)_{n+q} (2 - c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},$$

Төрт айнымалы гипергеометриялық функциясы $F_{25}^{(4)}$ келесі теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} + (1-x)tu_{xt} - xyu_{xy} - xzu_{xz} - ytu_{yt} - ztu_{zt} + [c_1 - (a_1 + b_1 + 1)x]u_x - b_1yu_y - b_1zu_z - a_1tu_t - a_1b_1u = 0 \\ y(1-y)u_{yy} - xyu_{xy} - yzu_{yz} - b_2xu_x + [c_2 - (a_1 + b_2 + 1)y]u_y - b_2zu_z - a_1b_2u = 0 \\ z(1-z)u_{zz} - xzu_{xz} - yzu_{yz} - b_3u_x - yb_3u_y + [c_3 - (a_1 + b_3 + 1)z]u_z - a_1b_3u = 0 \\ t(1-t)u_{tt} + (1-t)xu_{xt} - a_2xu_x + [c_1 - (a_2 + b_1 + 1)t]u_t - a_2b_1u = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Мұндағы $u(x, y, z, t) = F_{25}^{(4)}(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t)$. Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің (12) 4 сызықты тәуелсіз шешімі бар.

$$u_1(x, y, z, t) = F_{25}^{(4)}(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t) = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+q} (b_2)_n (b_3)_p}{(c_1)_{m+q} (c_2)_n (c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$u_2(x, y, z, t) = y^{1-c_2} F_{25}^{(4)}(a_1 + 1 - c_2, a_2, b_1, b_2 + 1 - c_2, b_3; c_1, 2 - c_2, c_3; x, y, z, t) =$$

$$= y^{1-c_2} \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1 + 1 - c_2)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+q} (b_2 + 1 - c_2)_n (b_3)_p}{(c_1)_{m+q} (2 - c_2)_n (c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$u_3(x, y, z, t) = z^{1-c_3} F_{25}^{(4)}(a_1 + 1 - c_3, a_2, b_1, b_2, b_3 + 1 - c_3; c_1, c_2, 2 - c_3; x, y, z, t) =$$

$$= z^{1-c_3} \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1 + 1 - c_3)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+q} (b_2)_n (b_3 + 1 - c_3)_p}{(c_1)_{m+q} (c_2)_n (2 - c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$u_4(x, y, z, t) = y^{\beta} z^{1-c_3} F_{25}^{(4)}(a_1 + 2 - c_2 - c_3, a_2, b_1, b_2 + 1 - c_2, b_3 + 1 - c_3; c_1, 2 - c_2, 2 - c_3; x, y, z, t) =$$

$$= x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} t^{\delta} \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1 + 2 - c_2 - c_3)_{m+n+p} (a_2)_q (b_1)_{m+q} (b_2 + 1 - c_2)_n (b_3 + 1 - c_3)_p}{(c_1)_{m+q} (2 - c_2)_n (2 - c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

Талқылау

Осы зерттеуде ұсынылған төрт айнымалы гипергеометриялық $F_{24}^{(4)} F_{25}^{(4)}$ функцияларының аналитикалық шешімдері қазіргі математикалық физикада күрделі есептерді шешудің жаңа мүмкіндіктерін ұсынады. Біз ұсынған тәсіл көпөлшемді кеңістіктердегі толқындардың таралуы мен жылу тасымалдануын жоғары дәлдікпен модельдеуге мүмкіндік береді. Анықталған шешімдердің іргелі жүйесі кез-келген жалпы шешімді аналитикалық түрде тұжырымдауға мүмкіндік береді.

Анықталған сызықтық тәуелсіз шешімдер мен жіктеу формулалары есептеу тиімділігін айтарлықтай арттырады. Дегенмен, параметрлердің нақты мәндері үшін осы шешімдердің жинақталу облысын нақтылай түсу қосымша зерттеулерді талап етеді. Болашақта, бұл әдісті жоғары ретті операторлық теңдеулеріне дейін қолдану математикалық физикадағы шеттік есептерді шешудің қуатты құралына айналуы мүмкін.

Қорытынды

Бұл зерттеу жұмысында төрт айнымалының гипергеометриялық $F_{24}^{(4)} F_{25}^{(4)}$ функциялары үшін екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдері қарастырылды. Осы жүйелердің төрт сызықтық тәуелсіз шешімдері аналитикалық жолмен алынды. Зерттеудің негізгі ғылыми нәтижесі қарастырылған дифференциалдық теңдеулер жүйесінің төрт сызықтық тәуелсіз шешімін **алғаш рет** аналитикалық түрде алу және оларды көп айнымалы гипергеометриялық функциялар теориясы аясында сипаттау болып табылады.

Осы функцияларды дифференциалдық жүйелердің шешімдері ретінде ұсына отырып, олардың шешу жолдарын тереңірек түсінуге қол жеткізуге болады. Сонымен қатар, қазіргі нәтижелер гипергеометриялық функциялардың көпөлшемді түрлерін зерттеудің маңыздылығын көрсетеді. Төрт айнымалы жағдай үшін алынған шешімдер теорияны көбірек айнымалылардың функцияларына кеңейтуге негіз болады және арнайы функциялардың жаңа кластарын анықтауды жеңілдетеді. Болашақ зерттеулер әртүрлі шекаралық жағдайларда осы шешімдердің тұрақтылығын, олардың асимптотикалық қасиетін және ықтимал интегралды көріністерін ескеруі керек. Мұндай жұмыс гипергеометриялық функциялар мен олардың туындыларының кеңістіктік модельдеуде, спектрлік анализде және математикалық зерттеудің кең салаларында қолданылуын күшейтеді. Бұл зерттеудің ғылыми маңыздылығы алынған аналитикалық шешімдердің гипергеометриялық функциялар теориясын дамытуға қосқан үлесімен айқындалады. Ұсынылған шешімдер математикалық физикадағы көпөлшемді модельдеріне, шеттік есептерге және сингулярлық коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулерді шешуге қолданылады. Қорытындылай келе, бұл зерттеу көп айнымалы функциялар теориясына айтарлықтай үлес қосады және олардың теориялық және практикалық өзектілігі туралы түсінік береді.

Алғыс білдіру

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдады (Грант BR31715767).

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

- [1] Appell P., Kampé de Fériet J. *Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite* / Paris: Gauthier – Villars, 1926. - 434 p. URL: <https://books.google.com/books?id=znr7fqNPyoC>
- [2] Hasanov A., Ergashev T. *Solutions of systems of the partial differential equations of Kampé de Fériet type functions* // arXiv preprint arXiv:1803.03116. – 2018. – DOI: [10.48550/arXiv.1803.03116](https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.03116)
- [3] Exton H. *Multiple Hypergeometric Functions and Applications*. Halsted Press, London, 1976. URL: <https://books.google.com/books?id=QwqoAAAAIAAJ>

- [4] Hasanov A., Srivastava H.M. Some decomposition formulas associated with the Lauricella function $F_A^{(r)}$ and other multiple hypergeometric functions // *Appl. Math. Lett.* – 2006. – V. 19. №2. – P. 113–121. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.03.009>
- [5] Moiseev, E. I. On the solvability of a nonlocal boundary value problem / E. I. Moiseev // *Differential Equations.* – 2001. – Vol. 37, No. 11. – P. 1643–1646 DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1017937403853>.
- [6] Srivastava H.M., Karlsson P.W. *Multiple Gaussian Hypergeometric Series.* Halsted Press, Ellis Horwood, Chichester, UK; John Wiley & Sons, New York, 1985. URL: <https://archive.org/details/multiplegaussian0000sriv>
- [7] Berdyshev A.S., Ryskan A.R. Boundary value problem for the four-dimensional Gellerstedt equation. *Bulletin of the Karaganda University.* – 2021. – V. 4, №104. P. 35-48 DOI: <https://doi.org/10.31489/2021M4/35-48>.
- [8] Hasanov A. Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration // *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 13, No. 8, 2008, pp. 41–49. URL: <http://www.ceser.in/ceserp/index.php/ijamas/article/view/448>
- [9] Hasanov A. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 52, No. 8, 2007, pp. 673–683. DOI: <https://doi.org/10.1080/17476930701300375>.
- [10] Hasanov A., Karimov E.T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // *Applied Mathematics Letters*, – 2009. – №22. – P. 1828–1832. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.006>
- [11] Hasanov A., Berdyshev A. S., Ryskan A. R. Fundamental solutions for a class of four-dimensional degenerate elliptic equation. *ComplexVar. EllipticEqu.* – 2020. – V. 65, - Issue 4. P. 632-647. DOI: <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1606803>
- [12] Reichelt T., Schulze M., Sevenheck C., Walther U. Algebraic Aspects of Hypergeometric Differential Equations. *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry.* 2021. Vol. 62, pp. 137–203. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13366-020-00560-1>
- [13] Matsubara-Heo S.J., Oshima T. Generalized hypergeometric functions with several variables // *Indagationes Mathematicae.* – 2025. – Vol. 36, No. 2. – P. 507–566. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.indag.2024.07.007>
- [14] Hasanov A., Younis J., Aydi H. On Decomposition Formulas Related to the Gaussian Hypergeometric Functions in Three Variables // *Journal of Function Spaces.* – 2021. – Article ID 5538583. DOI: <https://doi.org/10.1155/2021/5538583>
- [15] Arzikulov, Z. O., & Ergashev, T. G. (2025). Particular solutions of the multidimensional singular ultrahyperbolic equation generalizing the telegraph and Helmholtz equations. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2(118), 16–27. DOI: <https://doi.org/10.31489/2025M2/16-27>
- [16] Bezrodnykh S. I. Constructing bases in solution space of the system of equations for the Lauricella Function $F_D^{(N)}$ // *Integral Transforms and Special Functions.* – 2023. – Vol. 34, No. 11. – P. 813–834. DOI: 10.1080/10652469.2023.2212396
- [17] Bezrodnykh S. I. Formulas for computing the Lauricella function in the case of crowding of variables // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* – 2022. – Vol. 62, No. 12. – P. 2069–2090. DOI: 10.1134/S0965542522120041
- [18] Bezrodnykh S. I. Generalizations of the Jacobi identity to the case of the Lauricella function $F_D^{(N)}$ // *Integral Transforms and Special Functions.* – 2024. – Vol. 35, No. 10. – P. 521–539. DOI: 10.1080/10652469.2024.2351396