

А.Е. Жетписбаева¹, А.А. Джумабаева^{1*}

¹Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

*e-mail: akniet-1978@mail.ru

НЕРАВЕНСТВО ТИПА УЛЬЯНОВА ДЛЯ СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ОБОБЩЁННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИУВИЛЛЯ-ВЕЙЛЯ

Аннотация

В статье доказывается неравенство типа Ульянова для смешанного модуля гладкости обобщённой производной Лиувилля-Вейля функции двух переменных в смешанных метриках. Производная определяется преобразованием двумерного ряда Фурье с помощью положительной обобщённо монотонной последовательности класса GM^2 . Основная оценка связывает модуль гладкости производной в метрике $L_{q_1q_2}$ с интегральным оператором от dyadic-функционала, построенного по угловым наилучшим приближениям исходной функции и разностям множителя. Доказательство основано на смешанном неравенстве Ульянова, обратной оценке модуля через угловые приближения и двумерном преобразовании Абеля для GM^2 -множителей. Рассматриваются также частные случаи обычных производных Вейля и логарифмически модифицированных множителей.

Ключевые слова: смешанный модуль гладкости, смешанная метрика, угловое приближение, неравенство Ульянова, производная Лиувилля-Вейля, GM^2 -множитель, ряд Фурье.

А.Е.Жетписбаева¹, А.А.Джумабаева^{2*}

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті, Астана, Қазақстан^{1,2}

ЛИУВИЛЬ-ВЕЙЛЬДІҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ТУЫНДЫЛАРЫНЫҢ АРАЛАС ТЕГІСТІК МОДУЛЬДЕРІ ҮШІН УЛЬЯНОВ ТИПТІ ТЕҢСІЗДІК

Аңдатпа

Мақалада екі айнымалы функцияның Лиувиль-Вейль мағынасындағы жалпыланған туындысының аралас тегістік модулі үшін Ульянов типті теңсіздік дәлелденеді. Жалпыланған туынды екі өлшемді Фурье қатарының коэффициенттерін GM^2 класындағы оң жалпыланған монотонды тізбекпен арқылы анықталады. Негізгі нәтиже туындының $L_{q_1q_2}$ метрикасындағы аралас модулін бастапқы функцияның бұрыштық ең жақсы жуықтаулары және көбейткіштің айырымдары арқылы құрылған dyadic-функционалдың интегралдық өрнегімен бағалайды. Дәлелдеу аралас Ульянов теңсіздігіне, модульді бұрыштық жуықтаулар арқылы бағалауға және GM^2 -көбейткіштер үшін екі өлшемді Абель түрлендіруіне негізделеді. Вейль туындылары және логарифмдік көбейткіштер мысал ретінде қарастырылады.

Түйін сөздер: аралас тегістік модулі, аралас метрика, бұрыштық жуықтау, Ульянов теңсіздігі, Лиувиль-Вейль туындысы, GM^2 -көбейткіш, Фурье қатары.

A.E. Zhetpisbayeva¹, A.A. Jumabayeva^{2*}

Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, Astana, Kazakhstan^{1,2}

ULYANOV-TYPE INEQUALITY FOR MIXED MODULI OF SMOOTHNESS OF GENERALIZED LIOUVILLE-WEYL DERIVATIVES

Abstract

The paper proves an Ulyanov-type inequality for the mixed modulus of smoothness of a generalized Liouville-Weyl derivative of a function of two variables in mixed metrics. The derivative is defined by transforming the two-dimensional Fourier series by a positive general monotone sequence of the class GM^2 and by phase parameters. The main estimate relates the mixed modulus of the derivative in the metric $L_{q_1q_2}$ to an integral operator involving a dyadic functional constructed from angular best approximations of the original function and differences of the multiplier. The proof combines the mixed Ulyanov inequality, an inverse estimate of the modulus through angular approximations, and a two-dimensional Abel transformation for

GM^2 multipliers. Particular cases include the classical Weyl derivatives and logarithmically modified multipliers.

Keywords: mixed modulus of smoothness, mixed metric, angular approximation, Ulyanov inequality, Liouville-Weyl derivative, GM^2 multiplier, Fourier series.

Введение

Неравенства типа Ульянова занимают важное место в теории приближений и гармоническом анализе. В классической форме они оценивают модуль гладкости функции в более сильной метрике через интеграл от модуля гладкости в более слабой метрике. Одномерные варианты таких оценок восходят к работе П. Л. Ульянова и далее развивались в работах В.И. Коляды, Б.В. Симонова, С.Ю. Тихонова, W. Trebels и других авторов; см. обзорные ссылки в [1-11].

Для функций многих переменных особый интерес представляют смешанные модули гладкости. Они отражают совместное действие разностей по различным переменным и тесно связаны с приближением тригонометрическими полиномами по углу. Для смешанных модулей положительного порядка и смешанных метрик $L_{p_1 p_2}$ соответствующие неравенства Ульянова были установлены в [12]. В этой работе, в частности, доказаны оценки между смешанными модулями в разных метриках и оценки модулей гладкости обычных производных Вейля.

С другой стороны, в работах [7, 9] изучались обобщённые производные Лиувилля-Вейля, задаваемые не обязательно степенным множителем Фурье, а более общим множителем λ . В одномерном случае такие множители естественно описываются классом обобщённо монотонных последовательностей GM . В двумерном случае для приближения двумерным углом возникает класс GM^2 , в котором контролируются две одномерные вариации и смешанная вариация множителя.

Цель настоящей статьи – объединить эти два направления: получить неравенство типа Ульянова для смешанного модуля гладкости обобщённой производной Лиувилля-Вейля с GM^2 -множителем. Основной результат имеет вид

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)}; \delta_1, \delta_2)_{q_1 q_2} \lesssim \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} [t_1^{-\sigma_1} t_2^{-\sigma_2} \Phi_{\lambda, \alpha + \sigma}(f; t_1, t_2)]^{q_1^*} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2^*/q_1^*} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2^*},$$

где $\sigma_i = 1/p_i - 1/q_i$, а $\Phi_{\lambda, s}$ – dyadic-функционал, построенный по угловым приближениям функции f и разностям множителя λ .

В статье подробно доказываются две технические леммы. Первая лемма оценивает смешанный модуль гладкости через угловые наилучшие приближения. Вторая лемма оценивает угловые приближения обобщённой производной через угловые приближения исходной функции. Последняя лемма является двумерной версией известных оценок для преобразованных рядов Фурье с обобщённо монотонными множителями и доказывается с помощью двумерного преобразования Абеля.

Смешанные пространства, модули гладкости и угловые приближения

Пусть $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Все функции считаются 2π -периодическими по каждой переменной.

Определение 1 (Смешанная метрика). Пусть $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$. Через $L_{p_1 p_2} = L_{p_1 p_2}(\mathbb{T}^2)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x_1, x_2)$, для которых конечна смешанная норма $\|f\|_{p_1 p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{1/p_2}$, с обычными изменениями при $p_1 = \infty$ или $p_2 = \infty$.

Определение 2 (Подпространство нулевых средних). Через $L_{p_1 p_2}^0$ обозначим множество функций $f \in L_{p_1 p_2}$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для почти всех x_2 , и $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1 .

Для $\alpha > 0$ положим

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{\alpha}{v} f(x + (\alpha - v)h),$$

где

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{v} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - v + 1)}{v!}, \quad v \geq 1.$$

Разности по переменным x_1 и x_2 будем обозначать через $\Delta_{h_1,1}^{\alpha_1}$ и $\Delta_{h_2,2}^{\alpha_2}$.

Определение 3 Для $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ смешанный модуль гладкости функции $f \in L_{p_1 p_2}$ определяется равенством

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f; \delta_1, \delta_2)_{p_1 p_2} = \sup_{|h_i| \leq \delta_i, i=1,2} \|\Delta_{h_1,1}^{\alpha_1} \Delta_{h_2,2}^{\alpha_2} f\|_{p_1 p_2}.$$

Определение 4 Пусть $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Угловым наилучшим приближением функции $f \in L_{p_1 p_2}$ называется величина

$$Y_{m_1, m_2}(f)_{p_1 p_2} = \inf_{T_{m_1, \infty}, T_{\infty, m_2}} \|f - T_{m_1, \infty} - T_{\infty, m_2}\|_{p_1 p_2},$$

где $T_{m_1, \infty}$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше m_1 по x_1 , а T_{∞, m_2} является тригонометрическим полиномом порядка не выше m_2 по x_2 .

Запись $A \lesssim B$ будет означать, что $A \leq CB$ с постоянной $C > 0$, не зависящей от рассматриваемой функции и основных параметров. Если одновременно $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$, пишем $A \asymp B$.

Обобщённая производная Лиувилля-Вейля и класс GM^2

Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$ имеет ряд Фурье

$$\begin{aligned} \sigma(f) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} & (a_{k_1 k_2} \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 + b_{k_1 k_2} \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \\ & + c_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 + d_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2). \end{aligned}$$

Определение 5 (Обобщённая производная Лиувилля-Вейля). Пусть $\lambda = \{\lambda_{k_1, k_2}\}_{k_1, k_2 \geq 1}$ – положительная последовательность, а $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим преобразованный ряд

$$\begin{aligned} \sigma(f, \lambda, \beta_1, \beta_2) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \lambda_{k_1, k_2} & (a_{k_1 k_2} \cos(k_1 x_1 + \beta_1 \pi/2) \cos(k_2 x_2 + \beta_2 \pi/2) \\ & + b_{k_1 k_2} \cos(k_1 x_1 + \beta_1 \pi/2) \sin(k_2 x_2 + \beta_2 \pi/2) \\ & + c_{k_1 k_2} \sin(k_1 x_1 + \beta_1 \pi/2) \cos(k_2 x_2 + \beta_2 \pi/2) \\ & + d_{k_1 k_2} \sin(k_1 x_1 + \beta_1 \pi/2) \sin(k_2 x_2 + \beta_2 \pi/2)). \end{aligned}$$

Если этот ряд является рядом Фурье некоторой функции $g \in L_{p_1 p_2}^0$, то g называется $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ -производной, или обобщённой производной Лиувилля-Вейля, функции f и обозначается $g = f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)}$.

Если $\lambda_{k_1, k_2} = k_1^{\rho_1} k_2^{\rho_2}$ и $\beta_i = \rho_i$, то $f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)}$ совпадает с обычной смешанной производной Вейля $f^{(\rho_1, \rho_2)}$.

Определение 6 Положительная последовательность $\lambda = \{\lambda_{k_1, k_2}\}_{k_1, k_2 \geq 1}$ принадлежит классу GM^2 , если существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ выполнены условия

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1} |\lambda_{k_1, n_2} - \lambda_{k_1+1, n_2}| \leq C \lambda_{n_1, n_2}, \quad \sum_{k_2=n_2}^{2n_2} |\lambda_{n_1, k_2} - \lambda_{n_1, k_2+1}| \leq C \lambda_{n_1, n_2}, \quad \text{и}$$

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1} \sum_{k_2=n_2}^{2n_2} |\lambda_{k_1, k_2} - \lambda_{k_1+1, k_2} - \lambda_{k_1, k_2+1} + \lambda_{k_1+1, k_2+1}| \leq C \lambda_{n_1, n_2}.$$

Это двумерный аналог класса GM , введённого и подробно исследованного в связи с тригонометрическими рядами и преобразованиями Фурье; см. [8, 15, 16].

Методология исследования

Сначала приведём смешанное неравенство Ульянова, которое будет использоваться как известный результат.

Лемма 1 (Смешанное неравенство Ульянова). Пусть $h \in L_{p_1 p_2}^0$, $\alpha_i > 0$, $\delta_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, и для каждого i выполнено одно из условий $1 < p_i < q_i < \infty$ или $p_i = 1$, $q_i = \infty$.

$$\text{Положим } \sigma_i = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, \quad q_i^* = \begin{cases} q_i, & q_i < \infty, \\ 1, & q_i = \infty. \end{cases}$$

Тогда

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(h; \delta_1, \delta_2)_{q_1 q_2} \lesssim \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} [t_1^{-\sigma_1} t_2^{-\sigma_2} \omega_{\alpha_1 + \sigma_1, \alpha_2 + \sigma_2}(h; t_1, t_2)_{p_1 p_2}]^{q_1^*} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2^*/q_1^*} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2^*}.$$

Этот результат доказан в [12]. В случае $q_i = \infty$ соответствующая внешняя степень понимается как указано в определении q_i^* .

Далее докажем техническую лемму, которая переводит смешанный модуль в диадический-сумму угловых приближений.

Лемма 2 ([13, 14]). Если $0 \leq m_i \leq M_i$, $i = 1, 2$, то $Y_{M_1, M_2}(h)_{p_1 p_2} \leq Y_{m_1, m_2}(h)_{p_1 p_2}$.

Лемма 3 (Модуль через угловые приближения). Пусть $s_1, s_2 > 0$ и $h \in L_{p_1 p_2}^0$. Если $2^{-n_i-1} < t_i \leq 2^{-n_i}$, $i = 1, 2$, то

$$\omega_{s_1, s_2}(h; t_1, t_2)_{p_1 p_2} \lesssim 2^{-n_1 s_1} 2^{-n_2 s_2} \sum_{m_1=0}^{n_1+1} \sum_{m_2=0}^{n_2+1} 2^{m_1 s_1} 2^{m_2 s_2} Y_{2^{m_1-1}, 2^{m_2-1}}(h)_{p_1 p_2}.$$

Доказательство. Докажем утверждение по шагам.

По обратной теореме для смешанных модулей гладкости и угловых приближений, см. [9, 12], для любых $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ имеем

$$\omega_{s_1, s_2}\left(h; \frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_2}\right)_{p_1 p_2} \lesssim N_1^{-s_1} N_2^{-s_2} \sum_{v_1=1}^{N_1+1} \sum_{v_2=1}^{N_2+1} v_1^{s_1-1} v_2^{s_2-1} Y_{v_1-1, v_2-1}(h)_{p_1 p_2}.$$

Положим $N_i = 2^{n_i}$. Из условия $t_i \leq 2^{-n_i} = 1/N_i$ и монотонности смешанного модуля по каждому аргументу следует

$$\omega_{s_1, s_2}(h; t_1, t_2)_{p_1 p_2} \leq \omega_{s_1, s_2}(h; 2^{-n_1}, 2^{-n_2})_{p_1 p_2}.$$

Поэтому

$$\omega_{s_1, s_2}(h; t_1, t_2)_{p_1 p_2} \lesssim 2^{-n_1 s_1} 2^{-n_2 s_2} S,$$

где

$$S = \sum_{v_1=1}^{2^{n_1+1}} \sum_{v_2=1}^{2^{n_2+1}} v_1^{s_1-1} v_2^{s_2-1} Y_{v_1-1, v_2-1}(h)_{p_1 p_2}.$$

Разобьём множества индексов на диадический -блоки. Для $m \geq 1$ положим

$$B_m = \{v \in \mathbb{N}: 2^{m-1} < v \leq 2^m\}, \quad B_0 = \{1\}.$$

Тогда $\{1, \dots, 2^{n_i} + 1\} \subset \bigcup_{m_i=0}^{n_i+1} B_{m_i}$.

Следовательно,

$$S \leq \sum_{m_1=0}^{n_1+1} \sum_{m_2=0}^{n_2+1} \sum_{v_1 \in B_{m_1}} \sum_{v_2 \in B_{m_2}} v_1^{s_1-1} v_2^{s_2-1} Y_{v_1-1, v_2-1}(h)_{p_1 p_2}.$$

Для $s_i > 0$ справедлива оценка $\sum_{v_i \in B_{m_i}} v_i^{s_i-1} \lesssim 2^{m_i s_i}$, $m_i = 0, 1, \dots, n_i + 1$.

Действительно, при $m_i \geq 1$ это следует из сравнения суммы с интегралом $\int_{2^{m_i-1}}^{2^{m_i}} x^{s_i-1} dx$, а при $m_i = 0$ очевидно.

Теперь используем монотонность Y_{m_1, m_2} в правильном направлении. Если $v_i \in B_{m_i}$ и $m_i \geq 1$, то $v_i - 1 \geq 2^{m_i-1} - 1$. Поэтому, полагая $r_i = (m_i - 1)_+ = \max\{m_i - 1, 0\}$, получаем по лемме 2

$$Y_{v_1-1, v_2-1}(h)_{p_1 p_2} \leq Y_{2^{r_1}-1, 2^{r_2}-1}(h)_{p_1 p_2}.$$

Следовательно,

$$S \lesssim \sum_{m_1=0}^{n_1+1} \sum_{m_2=0}^{n_2+1} 2^{m_1 s_1} 2^{m_2 s_2} Y_{2^{(m_1-1)_+}-1, 2^{(m_2-1)_+}-1}(h)_{p_1 p_2}.$$

Сдвиг индексов не меняет порядок суммы, поскольку каждому r_i соответствует не более двух значений m_i , а $2^{m_i s_i} \leq C(s_i) 2^{r_i s_i}$. Поэтому

$$S \lesssim \sum_{r_1=0}^{n_1+1} \sum_{r_2=0}^{n_2+1} 2^{r_1 s_1} 2^{r_2 s_2} Y_{2^{r_1}-1, 2^{r_2}-1}(h)_{p_1 p_2}.$$

Подставляя эту оценку в результат шага 2, получаем требуемое неравенство.

Угловые приближения обобщённой производной

Для $m \geq 0$ положим

$$N_m = 2^m.$$

Будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_1 \lambda_{v_1, m_2} &= \lambda_{N_{v_1}, N_{m_2}} - \lambda_{N_{v_1+1}, N_{m_2}}, \\ \Delta_2 \lambda_{m_1, v_2} &= \lambda_{N_{m_1}, N_{v_2}} - \lambda_{N_{m_1}, N_{v_2+1}}, \end{aligned}$$

и

$$\Delta_{12} \lambda_{v_1, v_2} = \lambda_{N_{v_1}, N_{v_2}} - \lambda_{N_{v_1+1}, N_{v_2}} - \lambda_{N_{v_1}, N_{v_2+1}} + \lambda_{N_{v_1+1}, N_{v_2+1}}.$$

Определение 7 Для $m_1, m_2 \geq 0$ положим

$$\begin{aligned} B_\lambda(m_1, m_2; f) = & \lambda_{N_{m_1}, N_{m_2}} Y_{N_{m_1}-1, N_{m_2}-1}(f)_{p_1 p_2} \\ & + \sum_{v_1=m_1}^{\infty} |\Delta_1 \lambda_{v_1, m_2}| Y_{N_{v_1}-1, N_{m_2}-1}(f)_{p_1 p_2} \\ & + \sum_{v_2=m_2}^{\infty} |\Delta_2 \lambda_{m_1, v_2}| Y_{N_{m_1}-1, N_{v_2}-1}(f)_{p_1 p_2} \\ & + \sum_{v_1=m_1}^{\infty} \sum_{v_2=m_2}^{\infty} |\Delta_{12} \lambda_{v_1, v_2}| Y_{N_{v_1}-1, N_{v_2}-1}(f)_{p_1 p_2}. \end{aligned}$$

Следующая лемма является двумерным вариантом оценки наилучших приближений обобщённой производной.

Лемма 4 ([9]).

Пусть $1 < p_1, p_2 < \infty$, $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $\lambda \in GM^2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, и пусть $g = f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)} \in L_{p_1 p_2}^0$.

Тогда для всех $m_1, m_2 \geq 0$ выполнена оценка

$$Y_{N_{m_1}-1, N_{m_2}-1}(g)_{p_1 p_2} \lesssim B_\lambda(m_1, m_2; f).$$

Определение 8 (Диадический -функционал $\Phi_{\lambda, s}$).

Пусть $s = (s_1, s_2)$, $s_1, s_2 > 0$. Если $2^{-n_i-1} < t_i \leq 2^{-n_i}$, $i = 1, 2$, то положим

$$\Phi_{\lambda, s}(f; t_1, t_2) = 2^{-n_1 s_1} 2^{-n_2 s_2} \sum_{m_1=0}^{n_1+1} \sum_{m_2=0}^{n_2+1} 2^{m_1 s_1} 2^{m_2 s_2} B_\lambda(m_1, m_2; f).$$

Лемма 5 Пусть $s_1, s_2 > 0$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $\lambda \in GM^2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, и пусть $g = f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)} \in L_{p_1 p_2}^0$. Тогда при $2^{-n_i-1} < t_i \leq 2^{-n_i}$, $i = 1, 2$, выполнено

$$\omega_{s_1, s_2}(g; t_1, t_2)_{p_1 p_2} \lesssim \Phi_{\lambda, s}(f; t_1, t_2).$$

Доказательство. Применяем лемму 3 к функции $h = g$:

$$\omega_{s_1, s_2}(g; t_1, t_2)_{p_1 p_2} \lesssim 2^{-n_1 s_1} 2^{-n_2 s_2} \sum_{m_1=0}^{n_1+1} \sum_{m_2=0}^{n_2+1} 2^{m_1 s_1} 2^{m_2 s_2} Y_{N_{m_1}-1, N_{m_2}-1}(g)_{p_1 p_2}.$$

По лемме 4

$$Y_{N_{m_1}-1, N_{m_2}-1}(g)_{p_1 p_2} \lesssim B_\lambda(m_1, m_2; f).$$

Подставляя эту оценку в предыдущую сумму, получаем

$$\omega_{s_1, s_2}(g; t_1, t_2)_{p_1 p_2} \lesssim 2^{-n_1 s_1} 2^{-n_2 s_2} \sum_{m_1=0}^{n_1+1} \sum_{m_2=0}^{n_2+1} 2^{m_1 s_1} 2^{m_2 s_2} B_\lambda(m_1, m_2; f).$$

Правая часть по определению равна $\Phi_{\lambda, s}(f; t_1, t_2)$. $\square$

Результаты исследования

Перейдем к формулировке главного результата данного раздела. Следующая теорема устанавливает основное неравенство типа Ульянова, которое будет играть ключевую роль в дальнейших оценках.

Теорема 1 Пусть $1 < p_i < q_i < \infty$, $i = 1, 2$, и $\sigma_i = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}$, $s_i = \alpha_i + \sigma_i$, $\alpha_i > 0$. Пусть $f \in L^0_{p_1 p_2}$, $\lambda \in GM^2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, и пусть существует $g = f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)} \in L^0_{p_1 p_2}$.

Тогда для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)}; \delta_1, \delta_2)_{q_1 q_2} \lesssim \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} [t_1^{-\sigma_1} t_2^{-\sigma_2} \Phi_{\lambda, s}(f; t_1, t_2)]^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2}.$$

Доказательство. Положим $g = f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)}$. По смешанному неравенству Ульянова, лемма 1, имеем

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(g; \delta_1, \delta_2)_{q_1 q_2} \lesssim \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} [t_1^{-\sigma_1} t_2^{-\sigma_2} \omega_{\alpha_1 + \sigma_1, \alpha_2 + \sigma_2}(g; t_1, t_2)_{p_1 p_2}]^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2}.$$

Для каждого $t_i \in (0, 1)$ выберем n_i так, что $2^{-n_i-1} < t_i \leq 2^{-n_i}$. Применяя лемму 5 с $s_i = \alpha_i + \sigma_i$,

Получаем

$$\omega_{\alpha_1 + \sigma_1, \alpha_2 + \sigma_2}(g; t_1, t_2)_{p_1 p_2} \lesssim \Phi_{\lambda, s}(f; t_1, t_2).$$

Подстановка этой оценки в предыдущее интегральное неравенство даёт

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(g; \delta_1, \delta_2)_{q_1 q_2} \lesssim \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} [t_1^{-\sigma_1} t_2^{-\sigma_2} \Phi_{\lambda, s}(f; t_1, t_2)]^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2}.$$

Так как $g = f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)}$, теорема доказана. $\square$

Теорема 2 Пусть для каждого $i = 1, 2$ выполнено одно из условий $1 < p_i < q_i < \infty$ или $p_i = 1$, $q_i = \infty$. Пусть, кроме того, для рассматриваемого множителя λ и фаз β_1, β_2 справедлива угловая оценка $Y_{N_{m_1}-1, N_{m_2}-1}(f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)})_{p_1 p_2} \lesssim B_\lambda(m_1, m_2; f)$. Тогда утверждение теоремы 1 остаётся верным в форме

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)}; \delta_1, \delta_2)_{q_1 q_2} \lesssim \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} [t_1^{-\sigma_1} t_2^{-\sigma_2} \Phi_{\lambda, s}(f; t_1, t_2)]^{q_1^*} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2^*/q_1^*} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2^*}.$$

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1, но вместо q_i используются q_i^* , а смешанное неравенство Ульянова берётся в полной форме леммы 1. Единственное дополнительное требование – наличие угловой оценки для обобщённой производной в соответствующей предельной метрике. $\square$

Частные случаи и примеры

Обычная смешанная производная Вейля

Следствие 1. Пусть $\rho_1, \rho_2 \geq 0$ и $\lambda_{k_1, k_2} = k_1^{\rho_1} k_2^{\rho_2}$. Тогда при подходящем выборе β_i имеем $f^{(\lambda, \beta_1, \beta_2)} = f^{(\rho_1, \rho_2)}$. Кроме того,

$$\Phi_{\lambda,s}(f; t_1, t_2) \lesssim t_1^{-\rho_1} t_2^{-\rho_2} \omega_{s_1+\rho_1, s_2+\rho_2}(f; t_1, t_2)_{p_1 p_2}.$$

Следовательно, из теоремы 1 следует

$$\begin{aligned} & \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(\rho_1, \rho_2)}; \delta_1, \delta_2)_{q_1 q_2} \\ & \lesssim \left(\int_0^{\delta_2} \left(\int_0^{\delta_1} [t_1^{-\rho_1 - \sigma_1} t_2^{-\rho_2 - \sigma_2} \omega_{\alpha_1 + \rho_1 + \sigma_1, \alpha_2 + \rho_2 + \sigma_2}(f; t_1, t_2)_{p_1 p_2}]^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q_2}. \end{aligned}$$

Proof. Для $\lambda_{k_1, k_2} = k_1^{\rho_1} k_2^{\rho_2}$ dyadic-разности имеют порядок

$$|\Delta_1 \lambda_{v_1, m_2}| \lesssim 2^{v_1 \rho_1} 2^{m_2 \rho_2}, \quad |\Delta_2 \lambda_{m_1, v_2}| \lesssim 2^{m_1 \rho_1} 2^{v_2 \rho_2},$$

и

$$|\Delta_{12} \lambda_{v_1, v_2}| \lesssim 2^{v_1 \rho_1} 2^{v_2 \rho_2}.$$

Подставляя эти оценки в B_λ и применяя обратную оценку для смешанного модуля через угловые приближения порядка $(s_1 + \rho_1, s_2 + \rho_2)$, получаем

$$\Phi_{\lambda,s}(f; t_1, t_2) \lesssim t_1^{-\rho_1} t_2^{-\rho_2} \omega_{s_1+\rho_1, s_2+\rho_2}(f; t_1, t_2)_{p_1 p_2}.$$

После этого достаточно применить теорему 1. $\square$

Дискуссия

Главным результатом данного исследования является установление нового неравенства типа Ульянова для смешанного модуля гладкости обобщённых производных Лиувилля-Вейля функций двух переменных в смешанных метриках $L_{q_1 q_2}$. Значимость полученной оценки (Теоремы 1 и 2) заключается в том, что она связывает дифференциально-разностные свойства обобщённой производной функции непосредственно с её наилучшими угловыми приближениями и структурными свойствами трансформирующего множителя через специальный диадический-функционал $\Phi_{\lambda,s}$. Теоретическая ценность работы заключается в преодолении ограничений, связанных с фиксированным (степенным) порядком дифференцирования. Введение в многомерный анализ классов последовательностей GM^2 (обобщённо монотонных последовательностей) позволяет описывать гладкость функций в терминах широкого спектра операторов дифференцирования. Это имеет фундаментальное значение для теории вложений функциональных пространств, так как даёт точный аппарат для оценки изменения гладкости при одновременном переходе в более сильную смешанную метрику и применении интегро-дифференциальных операторов общего вида.

Полученные результаты представляют собой естественное и существенное развитие классического направления теории приближений, заложенного П.Л. Ульяновым, и развитого для смешанных метрик и модулей гладкости в работах В.И. Коляды, М.К. Потапова, Б.В. Симонова и С.Ю. Тихонова. Настоящая работа открывает несколько многообещающих направлений для дальнейших изысканий в области гармонического анализа:

- Расширение размерности: Очевидной, но математически нетривиальной задачей является обобщение полученных оценок на функции n переменных ($n > 2$), что потребует определения и исследования многомерных классов монотонности GM^n и работы с кратными преобразованиями Абеля.

- Предельные случаи метрик: Перспективным видится детальное изучение граничных пространств, когда параметры p_i или q_i принимают значения 1 или ∞ , а также рассмотрение аналогичных неравенств в пространствах Лоренца или Орлича со смешанной нормой.

- Обратные неравенства: Важным продолжением станет доказательство соответствующих обратных неравенств типа Ульянова, что позволит получить критерии совпадения или вложения классов функций, определяемых через обобщённые модули гладкости.

Заключение

Доказано неравенство типа Ульянова для смешанных модулей гладкости обобщённых производных Лиувилля-Вейля с двумерно обобщённо монотонными множителями. Новая часть оценки состоит в том, что вместо обычной производной Вейля используется общий множитель Фурье $\lambda \in GM^2$, а гладкость производной контролируется через функционал $\Phi_{\lambda,s}$, построенный по угловым приближениям исходной функции и разностям множителя. При степенном множителе $\lambda_{k_1,k_2} = k_1^{\rho_1} k_2^{\rho_2}$ получаем известную оценку для смешанной производной Вейля.

Благодарности

Данное исследование частично финансировалось Научным комитетом Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP22686170).

Список использованных источников

- [1] Z. Ditzian, S. Tikhonov, Ul'yanov and Nikol'skii-type inequalities, *Journal of Approximation Theory*, 133(1) (2005), 100–133. DOI: 10.1016/j.jat.2004.12.008
- [2] P. L. Ul'yanov, The imbedding of certain function classes H_p^ω , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32(3) (1968), 649–686. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM1968v002n03ABEH000650>
- [3] V. I. Kolyada, On the relations between the moduli of continuity in different metrics, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 181 (1988), 117–136. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tm&paperid=1937&option_lang=rus
- [4] B. Simonov, S. Tikhonov, Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness, *Journal of Approximation Theory*, 162(9) (2010), 1654–1684. DOI: 10.1016/j.jat.2010.04.010
- [5] S. Tikhonov, W. Trebels, Ulyanov inequalities and generalized Liouville derivatives, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, 141(1) (2011), 205–224. DOI: 10.1017/S0308210509001048
- A. Jumabayeva, Sharp Ul'yanov inequalities for generalized Liouville–Weyl derivatives, *Analysis Mathematica*, 43(2) (2017), 279–302. DOI: 10.1007/s10476-017-0308-0
- B. Jumabayeva, Liouville–Weyl derivatives, best approximations, and moduli of smoothness, *Acta Mathematica Hungarica*, 145(2) (2015), 369–391. DOI: 10.1007/s10474-015-0485-x
- [6] Jumabayeva, B. V. Simonov, Transformation of Fourier series by means of general monotone sequences, *Mathematical Notes*, 107(5) (2020), 674–692. DOI: 10.1134/S0001434620050041
- [7] M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov, Mixed moduli of smoothness in L_p , $1 < p < \infty$: a survey, *Surveys in Approximation Theory*, 8 (2013), 1–57. <https://arxiv.org/abs/1304.3329>
- [8] M. K. Potapov, B. V. Simonov, Properties of mixed moduli of smoothness of positive order in a mixed metric, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika. Mekhanika*, 6 (2014), 31–40. DOI: 10.3103/S0027132214060059
- [9] M. K. Potapov, B. V. Simonov, Inequalities of different metrics for trigonometric polynomials, *Russian Mathematics*, 63(1) (2019), 49–62. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-49-62>
- [10] V. Simonov, A. A. Jumabayeva, Ulyanov inequalities for the mixed moduli of smoothness in mixed metrics, *Georgian Mathematical Journal* 32 (1), 149–161. DOI: 10.1515/gmj-2024-2034
- [11] Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov, Properties of moduli of smoothness in $L_p(\mathbb{R}^d)$, *Journal of Approximation Theory*, 257 (2020), Article 105423. DOI: 10.1016/j.jat.2020.105423
- [12] Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov, Hardy–Littlewood and Ulyanov inequalities, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 271(1325) (2021). DOI / Kod: MEMO/271/1325 / AMS memo1325.pdf
- [13] S. Tikhonov, Trigonometric series with general monotone coefficients, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1) (2007), 721–735. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.02.053
- [14] E. Liflyand, S. Tikhonov, A concept of general monotonicity and applications, *Mathematische Nachrichten*, 284(8–9) (2011), 1083–1098. <https://doi.org/10.1002/mana.200810262>