

Ә.Ж. Жамбулатова^{1*}, Қ. Әлімхан¹

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан

*e-mail: aigerimzhambulat@gmail.com

СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС АУЫСПАЛЫ ЖҮЙЕЛЕРДІ ШЕКТІ УАҚЫТ ІШІНДЕ ТҰРАҚТАНДЫРУ ӘДІСТЕРІ

Аңдатпа

Бұл мақалада ауысу заңдары еркін болатын сызықтық емес жүйелерді шекті уақыт ішінде тұрақтандыру мәселесі қарастырылады. Мұндай жүйелер басқару теориясында маңызды орын алады және робототехника, химиялық реакторлар, мехатроника және виртуалды өзара әрекеттесу жүйелері сияқты көптеген инженерлік салаларда кездеседі. Классикалық тұрақтылық теориясында жүйе күйінің тепе-теңдік нүктесіне асимптотикалық жақындауы қарастырылса, шекті уақыттағы тұрақтылық жүйе күйінің белгілі бір шектеулі уақыт аралығында нөлге жинақталуын қамтамасыз етеді. Бұл қасиет жүйенің жылдам әрекет етуін және сыртқы әсерлерге төзімділігін арттырады. Мақалада ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелердің математикалық моделін қарастырылып, ортақ Ляпунов функциясына негізделген тұрақтылық шарттары талданады. Сонымен қатар жүйені шекті уақыт ішінде тұрақтандыру үшін дәрежелік интеграторды қосу әдісіне негізделген басқару тәсілдері сипатталады. Ұсынылған әдістер ауысу заңдары еркін болатын жағдайларда да жүйе тұрақтылығын қамтамасыз етуге мүмкіндік береді. Зерттеудің нәтижелерін тексеру мақсатында бірнеше сандық мысалдар қарастырылып, жүйе MATLAB ортасында моделденді. Алынған графиктер жүйе күйі айнымалыларының шекті уақыт ішінде нөлге жинақталатынын көрсетті. Сандық нәтижелер ұсынылған әдістердің тиімділігін және олардың практикалық қолданбаларда қолдануға жарамды екенін дәлелдейді.

Түйін сөздер: коммутацияланатын сызықтық емес жүйелер, шекті уақыттағы тұрақтандыру, Ляпунов функциясы, дәрежелік интегратор әдісі, басқару заңы.

Ә.Ж. Жамбулатова^{1*}, Қ. Әлімхан¹

¹Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, г.Астана, Казахстан

МЕТОДЫ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

Аннотация

В статье исследуется задача стабилизации нелинейных переключаемых систем за конечное время при произвольных законах коммутации. Подобные динамические системы широко применяются в различных областях современной техники и управления, включая робототехнические комплексы, мехатронные устройства, химико-технологические процессы и системы виртуального взаимодействия. В отличие от классического подхода, основанного на асимптотической устойчивости, при котором состояние системы лишь постепенно приближается к положению равновесия, концепция устойчивости за конечное время гарантирует достижение равновесного состояния в течение заранее ограниченного промежутка времени. Данное свойство позволяет повысить быстродействие системы и улучшить её устойчивость к внешним возмущениям. В работе рассматривается математическая модель нелинейных систем с переключениями режимов функционирования. Для анализа устойчивости используются условия, основанные на общей функции Ляпунова. Кроме того, представлены методы синтеза управления, построенные на рекурсивной процедуре добавления степенного интегратора, обеспечивающие стабилизацию системы за конечное время. Предлагаемый подход сохраняет работоспособность даже при произвольном характере переключений между подсистемами. Для подтверждения теоретических результатов проведены численные эксперименты с использованием программного пакета MATLAB. Результаты моделирования показывают, что все переменные состояния системы достигают нулевого значения за конечное время. Полученные данные подтверждают эффективность разработанных алгоритмов управления и демонстрируют

перспективность их применения при решении практических задач управления нелинейными переключаемыми системами.

Ключевые слова: переключаемые нелинейные системы, стабилизация за конечное время, функция Ляпунова, метод добавления степенного интегратора, закон управления.

A. Zhambulatova^{1*}, K. Alimhan¹

¹ L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

FINITE-TIME STABILIZATION METHODS FOR NONLINEAR SWITCHED SYSTEMS

Abstract

This paper investigates the problem of finite-time stabilization for nonlinear switched systems under arbitrary switching laws. Such systems play an important role in control theory and are widely encountered in many engineering applications, including robotics, chemical reactors, mechatronic systems, and virtual interaction systems. While classical stability theory focuses on the asymptotic convergence of system states to an equilibrium point, finite-time stability guarantees that the system states reach the origin within a finite time interval. This property improves the response speed of the system and enhances its robustness against external disturbances. The paper considers a mathematical model of nonlinear systems with switching modes and analyzes stability conditions based on a common Lyapunov function. In addition, control design methods based on the adding a power integrator technique are presented to achieve finite-time stabilization. The proposed approaches ensure system stability even when the switching law is arbitrary. To verify the effectiveness of the developed methods, several numerical examples are investigated and simulated in the MATLAB environment. The obtained results demonstrate that the state variables converge to zero within a finite time. Numerical simulations confirm the effectiveness of the proposed control strategies and indicate their potential applicability in practical engineering systems.

Keywords: switched nonlinear systems, finite-time stabilization, Lyapunov function, adding a power integrator technique, control law.

Кіріспе

Соңғы жылдары коммутацияланатын сызықтық емес жүйелер басқару теориясының маңызды зерттеу бағыттарының біріне айналды. Мұндай жүйелер бірнеше динамикалық ішкі жүйелерден тұрады және динамикасы уақыт бойынша осы ішкі жүйелердің ауысуы арқылы сипатталады. Ауысу режимдері бар жүйелер робототехникада, химиялық реакторларды басқаруда, энергетикалық жүйелерде, мехатроникада және виртуалды өзара әрекеттесу құралығыларында кеңінен қолданылады. Осыған байланысты мұндай жүйелердің тұрақтылығы мен басқарылуын қамтамасыз ету мәселелері басқару теориясының маңызды ғылыми және қолданбалы міндеттерінің бірі болып табылады [1].

Классикалық басқару теориясында жүйелердің тұрақтылығы көбінесе асимптотикалық тұрақтылық тұрғысынан зерттеледі. Бұл жағдайда жүйе күйі тепе-теңдік нүктесіне уақыт шексіздікке ұмтылған кезде жақындайды. Алайда көптеген практикалық жүйелер үшін мұндай қасиет жеткіліксіз болуы мүмкін. Инженерлік қолданбаларда жүйе күйінің тепе-теңдік нүктесіне шекті уақыт аралығында жетуі талап етіледі. Осыған байланысты соңғы жылдары шекті уақыттағы тұрақтылық ұғымы кеңінен зерттелуде. Шекті уақыттағы тұрақтылық жүйенің күй айнымалылардың нөлдік тепе-теңдікке нақты бір уақыт шектеулі уақыт аралығында жинақталуын қамтамасыз етеді және мұндай басқару жүйелері жоғары жылдамдықпен жинақталу, сыртқы әсерлерге төзімділік және басқару сапасының жақсаруы сияқты бірқатар маңызды артықшылықтарға ие [2].

Сызықтық емес жүйелер үшін шекті уақыттағы тұрақтандыру мәселесі көптеген ғылыми еңбектерде қарастырылған. Әсіресе төменгі үшбұрышты құрылымдағы жүйелер үшін кері қадамдау әдісіне негізделген басқару тәсілдері кеңінен қолданылып келеді. Сонымен қатар, шекті уақыттағы тұрақтылықты қамтамасыз ету үшін дәрежелік интеграторды қосу әдісі ұсынылып, оның тиімділігі бірқатар жұмыстарда дәлелденген [3]. Дегенмен ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелер үшін шекті уақыттағы тұрақтандыру мәселесі әлдеқайда күрделі болып табылады. Себебі, жүйе динамикасы ауысу сигналдарының әсерінен

уақыт бойынша өзгеріп отырады. Сондықтан мұндай жүйелер үшін барлық қосалқы режимдерге ортақ Ляпунов функциясын құру және басқару заңын әртүрлі режимдер үшін бірдей түрде анықтау маңызды ғылыми мәселе болып табылады.

Осы жұмыста ауысу заңдары еркін болатын сызықтық емес жүйелердің белгілі бір класы үшін шекті уақыттағы тұрақтандыру мәселесі қарастырылады [4]. Жүйенің төменгі үшбұрышты құрылымы пайдалана отырып, дәрежелік интеграторды қосу әдісіне негізделген басқару тәсілдері талданады. Сонымен қатар, ұсынылған әдістердің тиімділігін көрсету мақсатында бірнеше сандық мысалдар қарастырылып, жүйенің динамикалық қасиеттері сандық моделдеу арқылы зерттелді.

Осылайша, зерттеудің негізгі мақсаты – ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелер үшін шекті уақыттағы тұрақтандыру әдістерін талдау және олардың тиімділігін сандық моделдеу арқылы көрсету.

Зерттеу әдіснамасы

Зерттеу шарттары мен әдістері

Бұл жұмыста ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелердің белгілі бір класы қарастырылады. Зерттелген жүйе төменгі үшбұрышты құрылымға ие және бірнеше ішкі жүйелерден тұратын ауысу жүйесі ретінде сипатталады. Жүйенің жалпы динамикалық моделі келесі түрде беріледі:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \eta_{1,\sigma(t)}(x, u, t), \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \eta_{2,\sigma(t)}(x, u, t), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= d(t)u + \eta_{n,\sigma(t)}(x, u, t),\end{aligned}$$

Мұндағы $x \in R^n$ - жүйенің күй векторы, u - басқару сигналы, ал $\sigma(t)$ - уақыт бойынша өзгертін ауысу заңы. Жүйе бірнеше ішкі жүйелерден тұрады және олардың арасында ауысу сигналы арқылы режим өзгерісі жүзеге асады.

Зерттеу барысында келесі шарттар қабылданды: Жүйедегі бейсызық функциялар үздіксіз дифференциаланатын функциялар болып табылады және олар белгілі бір шектеулерді қанағаттандырады. Сонымен қатар басқару каналына әсер ететін $d(t)$ функциясы нөлден үлкен және белгілі бір шектеулі аралықты өзгереді. Жүйені шекті уақыт ішінде тұрақтандыру үшін дәрежелік интеграторды қосу әдісі қолданылады [6]. Бұл әдіс рекурсивті басқару алгоритмін құруға мүмкіндік береді және жүйе үшін ортақ Ляпунов функциясын анықтауға негізделген [7]. Әрбір кадамда виртуалды басқару функциялары енгізіліп, жүйенің күй айнымалылары үшін жаңа координаталық түрлендірулер анықталады. Жүйенің тұрақтылығын талдау үшін Ляпуновтың тікелей әдісі қолданылады. Ляпунов функциясының туындысы теріс анық болатындығы көрсетіліп, жүйенің шекті уақыттағы тұрақтылығы дәлелденеді.

Ұсынылған әдістің тиімділігін тексеру мақсатынды сандық моделдеу жүргізілді. Моделдеу MATLAB бағдарламалық ортасында жүзеге асырылып, ауысу режимдері бар жүйелер үшін күй айнымалыларының уақыт бойынша өзгерісі зерттелді.

Зерттеу нәтижелері

Зерттеу барысында ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелерді шекті уақыт ішінде тұрақтандыру мәселесі қарастырылады. Ұсынылған әдіс дәрежелік интеграторларды қосу тәсіліне негізделіп, жүйе үшін ортақ Ляпунов функциясын құруға мүмкіндік береді. Осы тәсілдің көмегімен ауысу заңдары еркін болатын жағдайда да жүйені шекті уақыт ішінде тұрақтандыратын басқару заңы алынды.

Теориялық талдау нәтижесінде жүйе үшін күй бойынша кері байланысқа негізделген басқару заңы құрылды. Сонымен қатар, барлық ішкі жүйелер үшін ортақ Ляпунов функциясы анықталды. Оның туындысы теріс екендігі көрсетілді. Бұл жүйенің жабық контурында шекті уақыттағы тұрақтылықтың орындалатынын дәлелдейді [8].

Ұсынылған әдістің тиімділігін тексеру мақсатында сандық моделдеу жүргізілді. Алдымен екі режимді CSTR жүйесі қарастырылды. Жүйенің бастапқы шарттары $x_1 = -2.5$ және $x_2 = 3.8$ деп алынды. Моделдеу нәтижелері жүйе күй айнымалыларының уақыт бойынша нөлге шекті уақытта жинақталатынын көрсетті. 1-3 суреттерде жүйе күй айнымалыларының өзгеруі және ауысу сигналының динамикасы бейнеленген. Нәтижелер ұсынылған шекті уақыттағы басқару әдісінің асимптотикалық басқару әдісіне қарағанда жылдамырақ жинақталуды қамтамасыз ететінін көрсетеді.

Екінші мысал ретінде виртуалды ортасы ауысатын тактильдік дисплей жүйесі қарастырылды. Бұл жүйе бірнеше режимнен тұратын ауысу жүйесі ретінде моделденді. Сандық моделдеу нәтижелері 4-5 суреттерді көрсетілген. Алынған нәтижелер жүйе күй айнымалыларының шекті уақыт ішінде нөлге жинақталатынын және ұсынылған басқару алгоритмінің ауысу сигналдарына тәуелсіз жұмыс істейтінін көрсетті.

Жалпы алғанда, жүргізілген сандық тәжірибелер ұсынылған әдістің тиімділігін растады. Ұсынылған басқару заңы ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелердің шекті уақыттағы тұрақтылығын қамтамасыз етеді және күй айнымалыларының жылдам жинақталуына мүмкіндік береді [9].

Дискуссия

Жүргізілген зерттеу нәтижелері ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелерді шекті уақыт ішінде тұрақтандыру мәселесін тиімді шешуге мүмкіндік беретін басқару тәсілін ұсынуға мүмкіндік берді. Ұсынылған әдіс дәрежелік интеграторды қосу тәсіліне негізделген және жүйенің барлық ішкі жүйелері үшін ортақ Ляпунов функциясына құруға мүмкіндік береді. Бұл тәсілдің маңызды ерекшелігі – басқару заңының ауысу сигналынан тәуелсіз құрылуы және жүйенің еркін ауысу жаңдайында тұрақтылығын қамтамасыз етуі.

Алынған нәтижелер көрсеткендей, ұсынылған басқару алгоритмі жүйе күй айнымалыларының шекті уақыт ішінде тепе-теңдік күйге жинақталуын қамтамасыз етеді. Бұл қасиет асимптотикалық тұрақтылықпен салыстырғанда анағұрлым тиімді, себебі, жүйе күйі нақты бір шектеулі уақыт ішінде нөлге жетеді. Сонымен қатар, шекті уақыттағы басқару жүйенің динамикалық қасиеттерін жақсартып, сыртқы әсерлерге және белгісіздіктерге төзімділігін арттырады. Сандық моделдеу нәтижелері ұсынылған әдістің практикалық тұрғыдан тиімді екенін көрсетті. CSTR жүйесі мен тактильді дисплей жүйесіне жүргізілген моделдеу нәтижелері жүйе күй айнымалыларының ауысу режимдеріне қарамастан шекті уақыт ішінде нөлге жинақталатынын көрсетті. Сонымен қатар, ұсынылған шекті уақыттағы басқару әдісі асимптотикалық тұрақтандыру әдістерімен салыстырғанда жүйе траекторияларының жылдамырақ жинақталуын қамтамасыз ететіні байқалды.

Дегенмен ұсынылған әдістің белгілі бір шектеулері де бар. Атап айтқанда, зерттеу барысында жүйелердің төменгі үшбұрышты құрылымы қарастырылды. Бұл әдісті құрылымы күрделірек немесе параметрлік белгісіздіктері бар ауысу жүйелеріне қолдану қосымша зерттеулерді талап етеді. Жалпы алғанда алынған нәтижелер ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелер үшін шекті уақыттағы тұрақтандыру әдістерінің тиімді екенін көрсетеді және ұсынылған тәсіл басқару теориясында әрі қарай дамытуды қажет ететін перспективалы бағыттардың бірі болып табылады.

Ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелерді шекті уақыт ішінде тұрақтандыру әдістері

Бұл бөлімде ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелерді еркін ауысулар жағдайындағы шекті уақыт ішінде тұрақтандыруға арналған негізгі әдістер математикалық формулалар

негізінде талданды. Негізгі назар ортақ Ляпунов функциясына негізделген тәсілдерге және дәрежелік интеграторды қосу әдісіне аударылады.

Ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйенің жалпы математикалық моделі

Қарастырылатын ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелер төменгі үшбұрышты құрылымға ие және келесі түрде сипатталады:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \eta_{1,\sigma(t)}(x), \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \eta_{2,\sigma(t)}(x), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \eta_{n-1,\sigma(t)}(x), \\ \dot{x}_n &= d(t)u + \eta_{n,\sigma(t)}(x),\end{aligned}$$

Мұндағы $[x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ - күй векторы, u - басқару сигналы, $\sigma(t) \in \{1, \dots, m\}$ - еркін ауысу заңы, $d(t)$ - басқару каналындағы белгісіз, бірақ оң және шектелген параметр.

Бұл модель ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелердің кең класын қамтиды және көптеген инженерлік жүйелерге тән құрылымды сипаттайды.

Шекті уақыттағы тұрақтылықтың Ляпунов шарттары. Шекті уақыттағы тұрақтылықты зерттеу үшін біз Ляпунов функциясына негізделген әдісті қолданылады. Егер оң анықталған $V(x)$ функциясы үшін

$$\dot{V}(x) + cV^\alpha(x) \leq 0, \quad 0 < \alpha < 1, c > 0,$$

Шарты орындалса, онда жүйе күйлері тепе-теңдік күйге шекті уақыт ішінде жақындайды. Ауысу режимдері бар жүйелер үшін барлық ішкі жүйелерге ортақ Ляпунов функциясының болуы еркін ауысулар жағдайында да тұрақтылықты қамтамасыз етеді.

Теорема. Қарастырылатын жүйе үшін дәрежелік интеграторды қосу әдісіне негізделген басқару заңы қолданылған жағдайда, егер барлық $i=1, \dots, n$ үшін $\eta_{i,\sigma(t)}(x)$ функциялары шектелген болса және $d(t) > 0$ шарты орындалса, онда жүйе еркін ауысулар жағдайында глобалды шекті уақыт ішінде тұрақты болады.

Дәлелдеу. Жүйе үшін ортақ Ляпунов функциясын $V(x)$ деп қарастырайық. Дәрежелік интеграторды қосу әдісін қолдану арқылы басқару заңы таңдалады, соның нәтижесінде жабық контурында Ляпунов функциясының туындысы келесі бағалауды қанағаттандырады:

$$\dot{V}(x) \leq -cV^\alpha(x), \quad 0 < \alpha < 1$$

Бұл теңсіздік шекті уақыттағы тұрақтылықтың жеткілікті шарты болып табылады [11]. Сонымен қатар, Ляпунов функциясының барлық ішкі жүйелер үшін ортақ болуы жүйенің ауысу заңына тәуелсіз тұрақтылығын қамтамасыз етеді. Сол себепті жүйе күйлері нөлдік тепе-теңдік күйге шекті уақыт ішінде жақындайды [12].

Кері қадамдау әдісі және оның шектеулері

Төменгі үшбұрышты құрылымдағы ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелер үшін кері қадамдау әдісі кеңінен қолданылады. Бұл тәсілде жүйе рекурсивті түрде қарастырылып, әрбір қадамда виртуалды басқару енгізіледі. Нәтижесінде Ляпунов функциясының туындысы теріс анық болады. Алайда, классикалық кері қадамдау әдісі көбінесе асимптотикалық тұрақтылықты ғана қамтамасыз етеді, яғни жүйе күйі нөлдік тепе-теңдік күйге тек уақыт

шексіздікке ұмтылған кезде ғана жақындайды. Сондықтан шекті уақыттағы тұрақтандыруды қамтамасыз ету үшін кері қадамдау әдісін жетілдіру қажет

Дәрежелік интеграторды қосу әдісі

Шекті уақыттағы тұрақтандыруды жүзеге асыру үшін дәрежелік интеграторды қосу әдісі қолданылады. Бұл тәсіл кері қадамдау әдісінің құрылымын сақтай отырып, Липшиц шартын қанағаттандырмайтын басқару заңдарын құруға мүмкіндік береді [10].

Әрбір қадамда виртуалды басқару келесі түрде таңдалады:

$$x_{i+1}^* = -|\chi_i|^{\rho_i} \varphi_i(x), \quad 0 < \rho_i < 1,$$

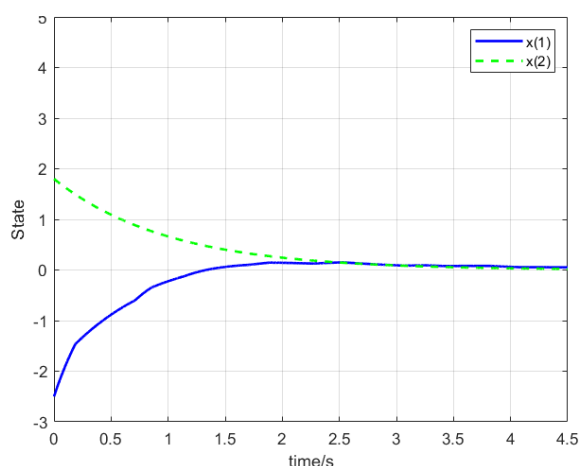
Мұндағы χ_i - координаталық түрлендіруден кейінгі айнымалы, $\varphi_i(x)$ - оң анықталған, үздіксіз функция. Осы рекурсивті құрылым арқылы Ляпунов функциясының туындысы дәрежелік түрде теріс анық болады, яғни:

$$\dot{V}(x) \leq -k \sum_{i=1}^n |\chi_i|^\beta, \quad 0 < \beta < 1,$$

Бұл жүйе күйлерінің шекті уақыт ішінде нөлге жинақталуын қамтамасыз етеді.

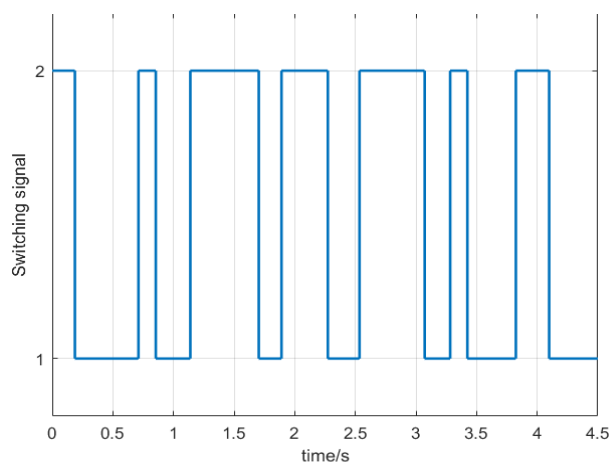
Әдістерді салыстырмалы талдау. Жоғарыда қарастырылған әдістерді салыстыратын болсақ, кері қадамдау әдісі ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелер үшін асимптотикалық тұрақтылықты тиімді қамтамасыз етеді, ал дәрежелік интеграторды қосу әдісі жүйе күйлерінің шекті уақыт ішінде нөлге жақындауын жүзеге асырады. Ортақ Ляпунов функциясымен біріктірілген дәрежелік интеграторды қосу әдісі еркін ауысулар жағдайында жүйені глобальды шекті уақыт ішінде тұрақтандыруды қамтамасыз ететін ең тиімді тәсілдердің бірі болып табылады [13, 14].

Алдымен екі режимі CSTR жүйесі қарастырылады. Жүйенің бастапқы шарттары $x_1(0) = -2.5$ және $x_2(0) = 3.8$ деп алынды. Ұсынылған басқару заңы қолданылған жағдайда жүйе күй айнымалыларының динамикасы 1 суретте көрсетілген.

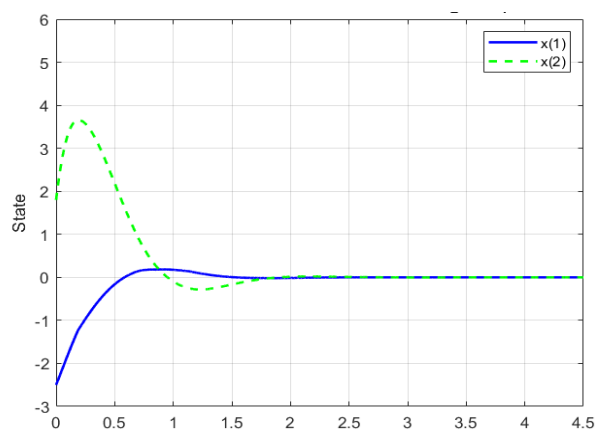


Сурет 1. Жүйе күй айнымалыларының уақыт бойынша өзгеруі

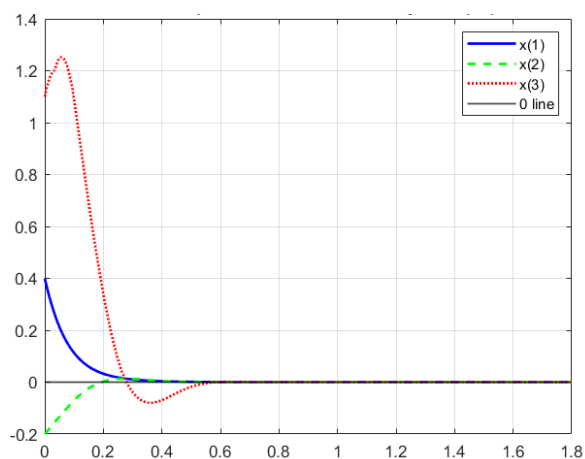
Екінші мысал ретінде виртуалды ортасы ауысатын тактильдік дисплей жүйесі қарастырылады. Ұсынылған басқару алгоритмі қолданылған кезде жүйе күй айнымалыларының динамикасы 4 суретте көрсетілген. Бұл бөлімде біз шекті уақыттағы тұрақтандыру әдістерінің тиімділігін сандық моделдеу арқылы көрсетілген. Әдебиеттерде ұсынылған ауысатын сызықтық емес жүйелерге арналған мысалдар қайта есептеліп, алынған нәтижелер теориялық қорытындылармен салыстырылды. Сандық моделдеу Matlab ортасында жүргізілді.



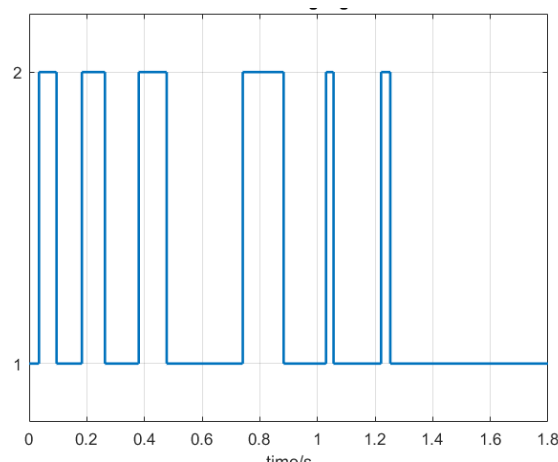
Сурет 2. Ауысу сигналы



Сурет 3. Асимптотикалық басқару кезіндегі жүйе күй айнымалылары



Сурет 4. Ауысу жүйесінің күй айнымалылары



Сурет 5. Ауысу сигналы

Екі режимді CSTR жүйесі. Алдымен үздіксіз араласатын реактор (CSTR – continuous-tank reactor) жүйесін қарастырайық. Координаталық түрлендіруден кейін бұл жүйе екі режимді ауысатын сызықтық емес жүйе ретінде келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + a_{\sigma(t)}x_1, \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}$$

Мұндағы ауысу заңы – $\sigma(t) \in \{1, 2\}$, ал параметрлер $a_1 = 0.5$, $a_2 = 2$.

Шекті уақытта тұрақтандыруды қамтамасыз ету үшін дәрежелік интеграторды қосу әдісіне негізделген басқару заңы құрылады. Бұл басқару заңы Липшиц шартын қанағаттандырмайды және ауысу сигналына тәуелсіз түрде анықталады. Сандық моделдеу барысында бастапқы шарттар әртүрлі мәндерде таңдалып, ауысу сигналы кездейсоқ түрде өзгертілді. Нәтижелер көрсетілгендей, жүйе күйлері $x_1(t)$ және $x_2(t)$ шекті уақыт ішінде нөлге жинақталады.

Графиктерді талдау. Сурет 1-де $x_1(t)$ және $x_2(t)$ күй айнымалыларының уақыт бойынша өзгеруі көрсетілген. Графиктерден жүйенің күйі шекті уақыт ішінде тепе-теңдікке жететіні айқын байқалады. Ауысу сигналының жиі өзгеруіне қарамастан, траекториялар тұрақты түрде нөлге бағытталған, бұл ортақ Ляпунов функциясының тиімділігін растайды.

Тактильді дисплей жүйесінің сандық талдауы. Келесі мысал ретінде ауысатын виртуалды орталармен жұмыс істейтін тактильді дисплей жүйесін қарастырамыз. Бұл жүйе бірнеше режимнен тұратын ауысатын сызықты емес динамикамен сипатталады:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -12x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_{\sigma(t)}x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= \beta_{\sigma(t)}x_2 - \gamma_{\sigma(t)}x_3 + d(t)u,\end{aligned}$$

Мұндағы параметрлер режимге байланысты өзгереді, ал $d(t)$ - оң және шектелген функция. Бұл жүйе үшін де дәрежелік интеграторды қосу әдісіне негізделген шекті уақыттағы басқару заңы құрылады. Аталған басқару заңы барлық режимдер үшін ортақ құрылымға ие.

Сурет 2-де тактильді дисплей жүйесінің күй айнымалыларының уақыт бойынша өзгеруі көрсетілген. Нәтижелер жүйе күй айнымалыларының қысқа уақыт ішінде нөлдік тепе-теңдік күйге жинақталатынын айқын көрсетеді. Сонымен қатар, ауысу сигналының әсеріне карамастан, шекті уақыттағы жинақталу қасиеті сақталатыны байқалады.

Шекті уақыттағы асимптотикалық басқаруды салыстыру. Сандық нәтижелер шекті уақыттағы басқарудың асимптотикалық басқарумен салыстырғандағы артықшылықтарын айқын көрсетеді. Асимптотикалық басқару кезінде күй айнымалылары нөлге бітіндеп, шексіз уақыт аралығында жақындайды. Ал шекті уақыттағы басқару жағдайында жүйе күйлері нақты бір шекті уақыттан кейін дәл нөлге жетеді. Сурет 3-те шекті уақыттағы және асимптотикалық басқару жағдайындағы күй траекториялары салыстырмалы түрде көрсетілген. Шекті уақыттағы басқару жүйенің жинақталу жылдамдығын едәуір арттыратыны байқалады.

Жүргізілген сандық моделдеу нәтижелері шекті уақыт уақыттағы. Тұрақтандыру әдістерінің тиімділігін толық растайды. Ауыспалы сызықтық емес жүйелер үшін ортақ Ляпунов функциясы және дәрежелік интеграторды қосу әдісіне негізделген басқару заңдары еркін ауысу жағдайында да жүйе күйлерінің шекті уақыт ішінде жинақталуын қамтамасыз етеді. Бұл нәтижелер шекті уақыттағы басқарудың практикалық қолданбалар үшін жоғары әлеуетке ие екенін көрсетеді.

Қорытынды

Бұл жұмыста ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелердің белгілі бір класы үшін шекті уақыттағы тұрақтандыру мәселесі қарастырылды. Жүйені тұрақтандыру үшін дәрежелік интеграторды қосу әдісіне негізделген басқару тәсілі қолданылды. Сонымен қатар, барлық ішкі жүйелер үшін ортақ Ляпунов функциясын құру арқылы жүйенің шекті уақыттағы тұрақтылығын дәлелденді. Ұсынылған әдіс ауысу сигналдарына тәуелсіз басқару заңын құруға мүмкіндік береді және жүйенің еркін ауысулар жағдайында тұрақтылығын қамтамасыз етеді. Жүргізілген сандық моделдеу нәтижелері ұсынылған басқару тәсілінің тиімді екенін көрсетті. Атап айтқанда, жүйе күй айнымалылары шекті уақыт ішінде нөлдік тепе-теңдік күйге жақындайды және жүйенің динамикалық қасиеттері жақсарады. Жалпы алғанда, алынған нәтижелер ауысу режимдері бар сызықтық емес жүйелер үшін шекті уақыттағы тұрақтандыру әдістерінің тиімді екенін көрсетеді. Ұсынылған тәсіл басқару теориясындағы осы бағыттағы зерттеулерді одан әрі дамытуға мүмкіндік береді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

- [1] Bhat S. P., Bernstein D. S. *Finite-time stability of continuous autonomous systems* // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2000. – Vol. 38, No. 3. – P. 751–766.
- [2] Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. – Boston: Birkhäuser, 2003. – 233 p.
- [3] Lin W., Qian C. *Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high-order lower triangular systems* // *Systems & Control Letters*. – 2000. – Vol. 39. – P. 339–351.

- [4] Hong Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems // *Systems & Control Letters*. – 2002. – Vol. 46. – P. 231–236.
- [5] Huang X., Lin W., Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems // *Automatica*. – 2005. – Vol. 41. – P. 881–888.
- [6] Wu J. L. Stabilizing controller design for switched nonlinear systems in strict-feedback form // *Automatica*. – 2009. – Vol. 45. – P. 1092–1096.
- [7] Ma R., Zhao J. Backstepping design for global stabilization of switched nonlinear systems in lower triangular form under arbitrary switchings // *Automatica*. – 2010. – Vol. 46. – P. 1819–1823.
- [8] Wang X., Hong Y., Jiang Z. Finite-time input-to-state stability of switched nonlinear systems // *Proceedings of the Chinese Control Conference*. – 2008. – P. 479–483.
- [9] Orlov Y. Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2004. – Vol. 43. – P. 1253–1271.
- [10] Ding S., Li S., Zheng W. X. Nonsmooth stabilization of a class of nonlinear cascaded systems // *Automatica*. – 2012. – Vol. 48. – P. 2597–2606.
- [11] Chen G., Yang Y., Li J. Finite-time stability of hybrid dynamical systems // *IET Control Theory & Applications*. – 2012. – Vol. 6. – P. 8–13.
- [12] Khoo S., Yin J., Man Z., Yu X. Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form // *Automatica*. – 2013. – Vol. 49. – P. 1403–1410.
- [13] Liang Y. J., Ma R., Wang M., Fu J. Global finite-time stabilisation of a class of switched nonlinear systems // *International Journal of Systems Science*. – 2014.
- [14] Sun Y., Wang L. On stability of a class of switched nonlinear systems // *Automatica*. – 2013. – Vol. 49. – P. 305–307.
- [15] Branicky M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1998. – Vol. 43. – P. 475–482.

References

- [1] Bhat S. P., Bernstein D. S. Finite-time stability of continuous autonomous systems // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2000. – Vol. 38, No. 3. – P. 751–766.
- [2] Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. – Boston: Birkhäuser, 2003. – 233 p.
- [3] Lin W., Qian C. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high-order lower triangular systems // *Systems & Control Letters*. – 2000. – Vol. 39. – P. 339–351.
- [4] Hong Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems // *Systems & Control Letters*. – 2002. – Vol. 46. – P. 231–236.
- [5] Huang X., Lin W., Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems // *Automatica*. – 2005. – Vol. 41. – P. 881–888.
- [6] Wu J. L. Stabilizing controller design for switched nonlinear systems in strict-feedback form // *Automatica*. – 2009. – Vol. 45. – P. 1092–1096.
- [7] Ma R., Zhao J. Backstepping design for global stabilization of switched nonlinear systems in lower triangular form under arbitrary switchings // *Automatica*. – 2010. – Vol. 46. – P. 1819–1823.
- [8] Wang X., Hong Y., Jiang Z. Finite-time input-to-state stability of switched nonlinear systems // *Proceedings of the Chinese Control Conference*. – 2008. – P. 479–483.
- [9] Orlov Y. Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 2004. – Vol. 43. – P. 1253–1271.
- [10] Ding S., Li S., Zheng W. X. Nonsmooth stabilization of a class of nonlinear cascaded systems // *Automatica*. – 2012. – Vol. 48. – P. 2597–2606.
- [11] Chen G., Yang Y., Li J. Finite-time stability of hybrid dynamical systems // *IET Control Theory & Applications*. – 2012. – Vol. 6. – P. 8–13.
- [12] Khoo S., Yin J., Man Z., Yu X. Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form // *Automatica*. – 2013. – Vol. 49. – P. 1403–1410.
- [13] Liang Y. J., Ma R., Wang M., Fu J. Global finite-time stabilisation of a class of switched nonlinear systems // *International Journal of Systems Science*. – 2014.
- [14] Sun Y., Wang L. On stability of a class of switched nonlinear systems // *Automatica*. – 2013. – Vol. 49. – P. 305–307.
- [15] Branicky M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1998. – Vol. 43. – P. 475–482.